Prüfungsdauer:
150 Minuten

# Abschlussprüfung 2022

an den Realschulen in Bayern

**Mathematik I**

**inhaltlich unveränderte, an den Zeichenkatalog des LehrplanPLUS angepasste Fassung**

Name: _____ Vorname: _____

Klasse: _____ Platznummer: _____ Punkte: _____

**Aufgabe A 1** **Haupttermin**

A 1.0 Mia lernt in der Schule den Begriff „Inflation“ kennen. Damit wird der Preisanstieg von Produkten über einen bestimmten Zeitraum hinweg bezeichnet. Dieser Zusammenhang lässt sich unter der Annahme einer gleichbleibenden jährlichen Preissteigerung von p % näherungsweise durch eine Funktion f mit einer Gleichung der Form $y = a \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^x \left(a,p,x,y \in \mathbb{R}^+\right)$ beschreiben. Dabei steht a € für den Anfangspreis eines Produkts und y € für dessen Preis nach x Jahren.

Mia kauft ihrer Mutter jährlich am 1. Juni Rosen beim örtlichen Blumenladen.

A 1.1 Am 1. Juni 2020 kostete eine Rose noch 2,20 €. Am 1. Juni 2022 lag der Preis pro Rose bei 2,50 €.

Berechnen Sie den voraussichtlichen Preis einer Rose am 1. Juni 2027 unter der Voraussetzung, dass die jährliche Preissteigerung von p % gleich bleibt.

Runden Sie auf zwei Stellen nach dem Komma.

[Zwischenergebnis: $p = 6{,}60$]

3 P

A 1.2 Berechnen Sie, in welchem Jahr Mia erstmals mehr als doppelt so viel für eine Rose bezahlen müsste wie am 1. Juni 2020, wenn man von einer jährlichen Preissteigerung von 6,60 % ausgeht.

2 P

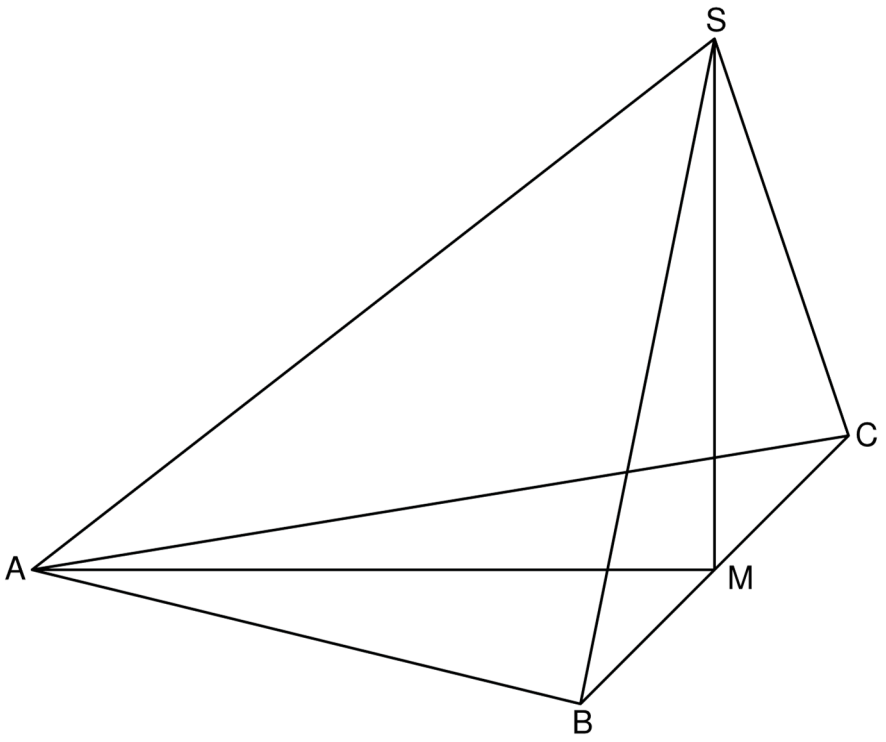
A 2.0 Die Strecke $\overline{BC}$ mit dem Mittelpunkt M ist die Basis des gleichschenkligen Dreiecks ABC. Dieses Dreieck ist die Grundfläche der Pyramide ABCS mit der Höhe $\overline{MS}$.

Es gilt: $\left|\overline{BC}\right| = 10\text{ cm}$; $\left|\overline{AM}\right| = 9\text{ cm}$; $\left|\overline{MS}\right| = 7\text{ cm}$.

Die Zeichnung zeigt ein Schrägbild der Pyramide ABCS.

In der Zeichnung gilt: $q = \frac{1}{2}$; $\omega = 45°$; $\overline{AM}$ liegt auf der Schrägbildachse.

Runden Sie im Folgenden auf zwei Stellen nach dem Komma.




A 2.1 Berechnen Sie das Maß des Winkels ASM.

$\left[\text{Ergebnis: } \sphericalangle ASM = 52{,}13°\right]$

1 P

A 2.2 Punkte $P_n$ liegen auf der Strecke $\overline{AS}$. Die Winkel $SMP_n$ haben das Maß $\varphi$ mit $\varphi \in \left]0°;90°\right[$. Punkte $Q_n$ liegen auf der Strecke $\overline{AM}$ mit $\overline{P_nQ_n} \perp \overline{AM}$. Die Dreiecke $BCQ_n$ sind die Grundflächen der Pyramiden $BCQ_nS$ mit der Spitze S und der Höhe $\overline{MS}$.

Zeichnen Sie die Strecken $\overline{MP_1}$ und $\overline{P_1Q_1}$ sowie die Pyramide $BCQ_1S$ für $\varphi = 60°$ in das Schrägbild zu A 2.0 ein. 2 P

A 2.3 Zeigen Sie rechnerisch, dass für die Länge der Strecken $\overline{MP_n}$ in Abhängigkeit von $\varphi$ gilt: $\left|\overline{MP_n}\right|(\varphi) = \dfrac{5{,}53}{\sin(\varphi + 52{,}13°)}$ cm.

Die Länge der Strecke $\overline{MP_0}$ ist minimal. Geben Sie den zugehörigen Wert für $\varphi$ an.

3 P

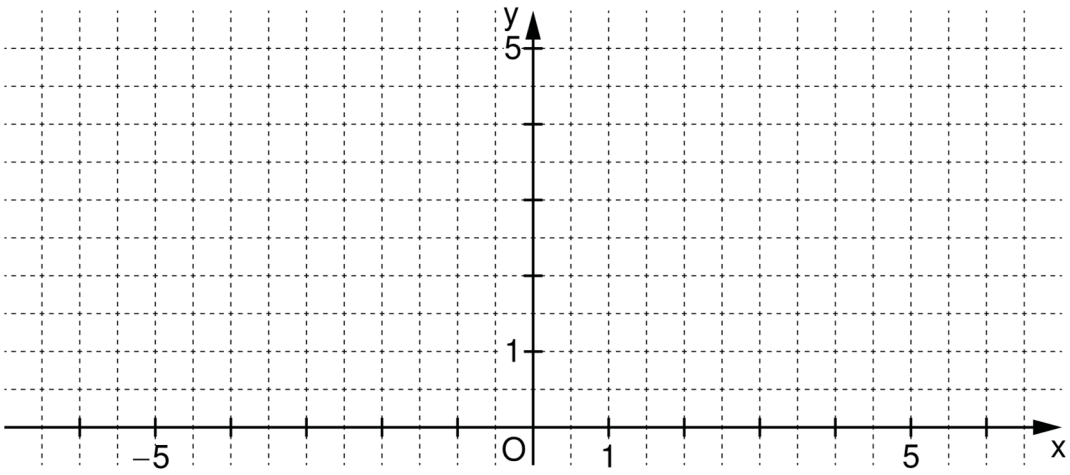
A 2.4 Zeigen Sie rechnerisch, dass für die Länge der Strecken $\overline{MQ_n}$ in Abhängigkeit von $\varphi$ gilt: $\left|\overline{MQ_n}\right|(\varphi) = \dfrac{5{,}53 \cdot \sin\varphi}{\sin(\varphi + 52{,}13°)}$ cm.

Berechnen Sie sodann das Volumen der Pyramide $BCQ_1S$.

3 P

A 3.0 Pfeile $\overrightarrow{OP_n}(\varphi) = \begin{pmatrix} 5 \cdot \sin\varphi \\ 5 \cdot \cos\varphi \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{OQ_n}(\varphi) = \begin{pmatrix} -2 \cdot \sin^2\varphi \\ \frac{4}{\sin\varphi} \end{pmatrix}$ mit $O(0 \mid 0)$ spannen für $\varphi \in \left]0°; 90°\right]$ Dreiecke $OP_nQ_n$ auf.

Runden Sie im Folgenden auf zwei Stellen nach dem Komma.




A 3.1 Geben Sie für $\varphi = 80°$ die Koordinaten der Pfeile $\overrightarrow{OP_1}$ und $\overrightarrow{OQ_1}$ an.

Zeichnen Sie sodann das Dreieck $OP_1Q_1$ in das Koordinatensystem zu A 3.0 ein.

2 P

A 3.2 Begründen Sie rechnerisch, weshalb die Länge der Strecken $\overline{OP_n}$ konstant ist.

2 P

A 3.3 Berechnen Sie das Maß des Winkels $P_1OQ_1$.

2 P

Prüfungsdauer:
150 Minuten

# Abschlussprüfung 2022

an den Realschulen in Bayern

**Mathematik I**

**inhaltlich unveränderte, an den Zeichenkatalog des LehrplanPLUS angepasste Fassung**

**Aufgabe B 1** **Haupttermin**

B 1.0 Gegeben ist die Funktion $f_1$ mit einer Gleichung der Form $y = \log_2(x+b)+1$ $(b,x,y \in \mathbb{R})$. Der Graph zu $f_1$ schneidet die y-Achse im Punkt $P(0 \mid 3)$.
Runden Sie im Folgenden auf zwei Stellen nach dem Komma.

B 1.1 Zeigen Sie rechnerisch, dass die Funktion $f_1$ die Gleichung $y = \log_2(x+4)+1$ besitzt.
Zeichnen Sie sodann den Graphen zu $f_1$ für $x \in [-3{,}5; 6]$ in ein Koordinatensystem.
Für die Zeichnung: Längeneinheit 1 cm; $-6 \le x \le 6$; $-2 \le y \le 5$ 3 P

B 1.2 Der Graph der Funktion $f_1$ wird durch Achsenspiegelung an der x-Achse sowie anschließende Parallelverschiebung mit dem Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ auf den Graphen der Funktion $f_2$ abgebildet.
Zeigen Sie rechnerisch, dass die Funktion $f_2$ die Gleichung $y = -\log_2(x+6)+2$ mit $x,y \in \mathbb{R}$ besitzt.
Zeichnen Sie sodann den Graphen zu $f_2$ für $x \in [-5{,}5; 6]$ in das Koordinatensystem zu B 1.1 ein. 3 P

B 1.3 Punkte $A_n(x \mid \log_2(x+4)+1)$ auf dem Graphen zu $f_1$ haben dieselbe Abszisse x wie Punkte $C_n(x \mid -\log_2(x+6)+2)$ auf dem Graphen zu $f_2$. Zusammen mit Punkten $B_n$ sind sie für $x > -3{,}26$ die Eckpunkte von rechtwinkligen Dreiecken $A_nB_nC_n$ mit den Hypotenusen $\overline{B_nC_n}$. Es gilt: $|\overline{A_nB_n}| = 4$ LE.
Zeichnen Sie in das Koordinatensystem zu B 1.1 die Dreiecke $A_1B_1C_1$ für $x = -1$ und $A_2B_2C_2$ für $x = 5$ ein. 2 P

B 1.4 Zeigen Sie, dass für die Länge der Strecken $\overline{A_nC_n}$ in Abhängigkeit von der Abszisse x der Punkte $A_n$ gilt:
$|\overline{A_nC_n}|(x) = [\log_2(x^2+10x+24)-1]$ LE. 2 P

B 1.5 Das Dreieck $A_3B_3C_3$ hat den Flächeninhalt 10 FE.
Bestimmen Sie rechnerisch die x-Koordinate des Punktes $A_3$. 3 P

B 1.6 Der Eckpunkt $B_4$ des Dreiecks $A_4B_4C_4$ liegt auf dem Graphen zu $f_2$.
Berechnen Sie die x-Koordinate des Punktes $B_4$. 4 P

**Bitte wenden!**

Prüfungsdauer:
150 Minuten

# Abschlussprüfung 2022

an den Realschulen in Bayern

**Mathematik I**

**inhaltlich unveränderte, an den Zeichenkatalog des LehrplanPLUS angepasste Fassung**

**Aufgabe B 2** **Haupttermin**

B 2.0 Gegeben sind die Geraden g: $y = 0{,}25x - 3$ und h: $y = 0{,}6x$ $(x, y \in \mathbb{R})$.

Punkte $B_n\left(x \mid 0{,}25x - 3\right)$ auf der Geraden g bilden für $x > 1{,}57$ zusammen mit dem Punkt $A\left(0 \mid 0\right)$ und Punkten $C_n$ und $D_n$ Rauten $AB_nC_nD_n$, wobei die Gerade $h = AC_n$ eine der Symmetrieachsen der Rauten ist.

Runden Sie im Folgenden auf zwei Stellen nach dem Komma.

B 2.1 Zeichnen Sie die Geraden g und h sowie die Rauten $AB_1C_1D_1$ für $x = 2{,}5$ und $AB_2C_2D_2$ für $x = 7$ in ein Koordinatensystem.

Für die Zeichnung: Längeneinheit 1 cm; $-1 \le x \le 10$; $-4 \le y \le 8$ 3 P

B 2.2 Ermitteln Sie rechnerisch die Koordinaten der Punkte $D_n$ in Abhängigkeit von der Abszisse x der Punkte $B_n$.

$\left[\text{Ergebnis: } D_n\left(0{,}69x - 2{,}64 \mid 0{,}76x + 1{,}41\right)\right]$ 3 P

B 2.3 Überprüfen Sie rechnerisch, ob die Raute $AB_2C_2D_2$ ein Quadrat ist. 3 P

B 2.4 Bestimmen Sie die Gleichung des Trägergraphen t der Punkte $D_n$.

Zeichnen Sie sodann den Trägergraphen t in das Koordinatensystem zu B 2.1 ein. 3 P

B 2.5 Der Punkt $D_3$ der Raute $AB_3C_3D_3$ liegt auf der y-Achse.

Zeichnen Sie die Raute $AB_3C_3D_3$ in das Koordinatensystem zu B 2.1 ein.

Berechnen Sie sodann die Koordinaten des Punktes $C_3$ sowie den Flächeninhalt der Raute $AB_3C_3D_3$.

$\left[\text{Teilergebnis: } x_{C_3} = 3{,}83\right]$ 5 P

**Bitte wenden!**

Lösungsmuster und Bewertung

# Abschlussprüfung 2022

an den Realschulen in Bayern

**Mathematik I**

**inhaltlich unveränderte, an den Zeichenkatalog des LehrplanPLUS angepasste Fassung**

**Aufgabengruppe A** | **Haupttermin**

## AUFGABE A 1: FUNKTIONEN

**A 1.1** (3 BE) — L 4 K 3 K 5

$$2{,}50 = 2{,}20 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^2 \qquad p \in \mathbb{R}^+$$

...

$$\Leftrightarrow \quad p = 6{,}60 \qquad L = \{6{,}60\}$$

$$f:\ y = 2{,}20 \cdot \left(1 + \frac{6{,}60}{100}\right)^x \qquad x, y \in \mathbb{R}^+$$

$$f(7) = 2{,}20 \cdot \left(1 + \frac{6{,}60}{100}\right)^7 \qquad f(7) = 3{,}44$$

Eine Rose würde voraussichtlich 3,44 € kosten.

**A 1.2** (2 BE) — L 4 K 3 K 5

$$2 \cdot 2{,}20 = 2{,}20 \cdot \left(1 + \frac{6{,}60}{100}\right)^x \qquad x \in \mathbb{R}^+$$

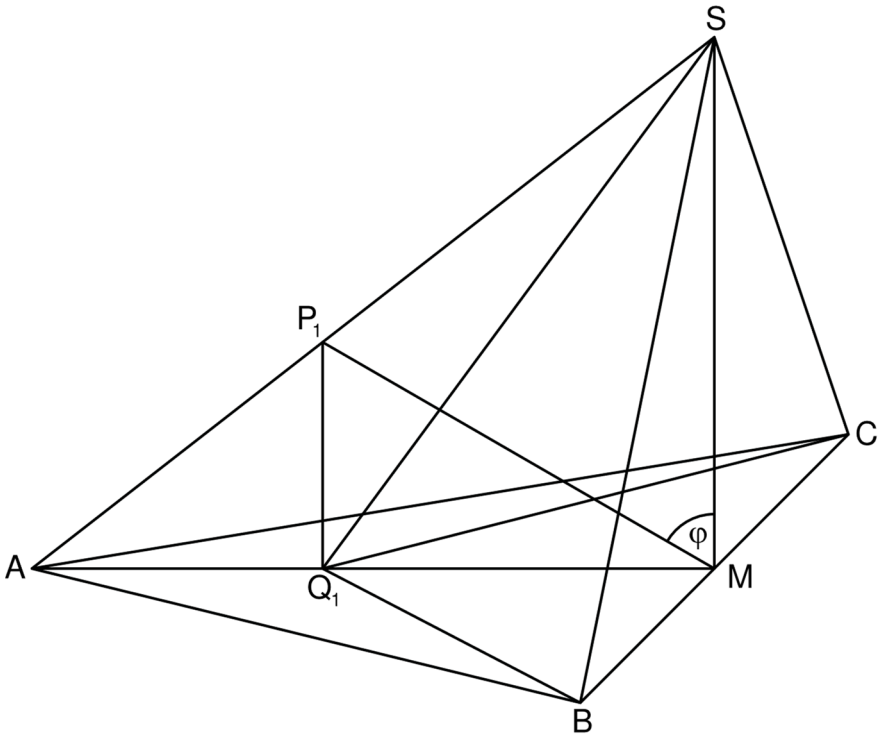
...

$$\Leftrightarrow \quad x = 10{,}85 \qquad L = \{10{,}85\}$$

Mia müsste im Jahr 2031 erstmals mehr als doppelt so viel für eine Rose bezahlen wie am 1. Juni 2020.

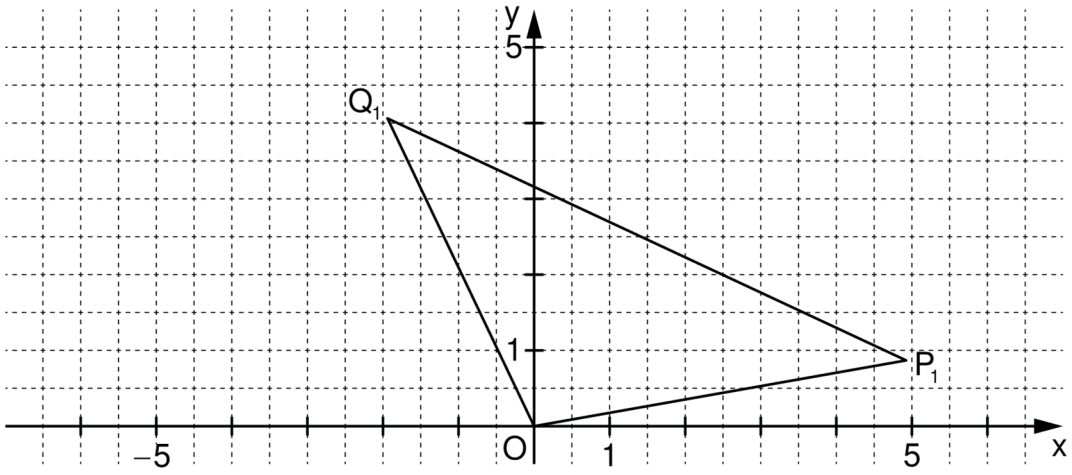
## AUFGABE A 2: RAUMGEOMETRIE

**A 2.0**



| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| A 2.1 | $\tan \sphericalangle ASM = \frac{9}{7}$ | $\sphericalangle ASM = 52{,}13°$ | 1 | L 2<br>K 5 |
| A 2.2 | Einzeichnen der Strecken $\overline{MP_1}$ und $\overline{P_1Q_1}$ sowie der Pyramide $BCQ_1S$ | | 2 | L 3<br>K 4 |
| A 2.3 | $\frac{\lvert\overline{MP_n}\rvert}{\sin 52{,}13°} = \frac{7\text{ cm}}{\sin\left(180° - (\varphi + 52{,}13°)\right)}$<br>$\lvert\overline{MP_n}\rvert(\varphi) = \frac{5{,}53}{\sin(\varphi + 52{,}13°)}\text{ cm}$<br>Die Strecke $\overline{MP_0}$ erhält man für $\varphi = 37{,}87°$. | $\varphi \in \left]0°; 90°\right[$ | 3 | L 4<br>K 2<br>K 5 |
| A 2.4 | $\cos(90° - \varphi) = \frac{\lvert\overline{MQ_n}\rvert}{\lvert\overline{MP_n}\rvert}$<br>...<br>$\lvert\overline{MQ_n}\rvert(\varphi) = \frac{5{,}53 \cdot \sin\varphi}{\sin(\varphi + 52{,}13°)}\text{ cm}$<br>$V(60°) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 7 \cdot \frac{5{,}53 \cdot \sin 60°}{\sin(60° + 52{,}13°)}\text{ cm}^3$ | $\varphi \in \left]0°; 90°\right[$<br>$V(60°) = 60{,}32\text{ cm}^3$ | 3 | L 2<br>L 4<br>K 2<br>K 5 |

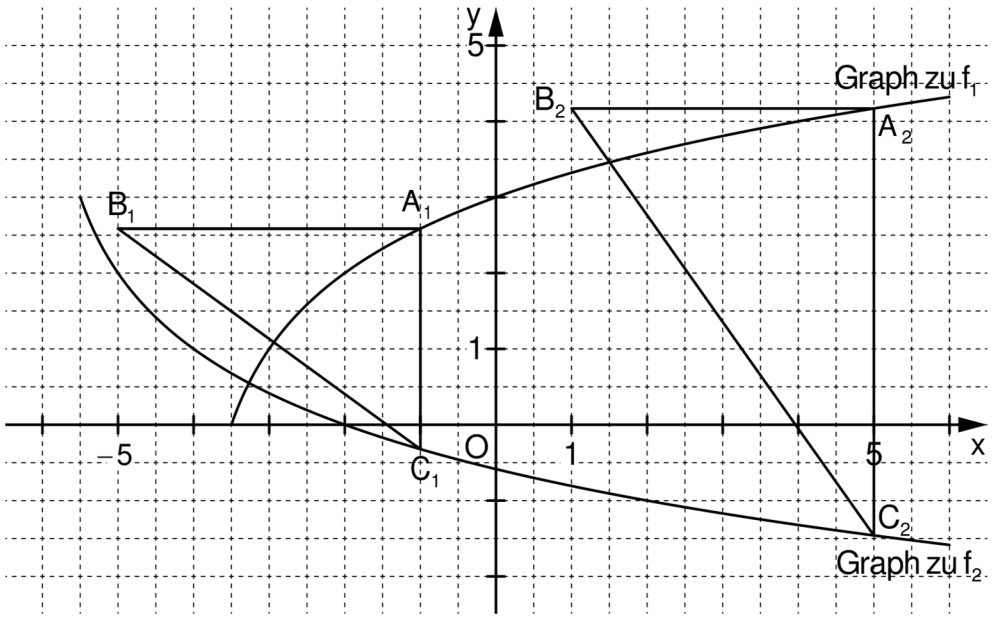
**AUFGABE A 3: EBENE GEOMETRIE**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| A 3.0 |  | | | |
| A 3.1 | $\overrightarrow{OP_1} = \begin{pmatrix} 4{,}92 \\ 0{,}87 \end{pmatrix}$ ; $\overrightarrow{OQ_1} = \begin{pmatrix} -1{,}94 \\ 4{,}06 \end{pmatrix}$<br>Einzeichnen des Dreiecks $OP_1Q_1$ | | 2 | L 3<br>K 4<br>K 5 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| A 3.2 | $\left\|\overrightarrow{OP_n}\right\|(\varphi) = \sqrt{(5\cdot\sin\varphi)^2 + (5\cdot\cos\varphi)^2}$ LE $\qquad \varphi \in \left]0°; 90°\right]$<br>...<br>$\left\|\overrightarrow{OP_n}\right\|(\varphi) = \sqrt{25\cdot\left(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi\right)}$ LE<br>Wegen $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$ gilt folglich $\left\|\overrightarrow{OP_n}\right\| = 5$ LE für alle $\varphi \in \left]0°; 90°\right]$. | 2 | L 4<br>K 1<br>K 5 |
| A 3.3 | $\cos\sphericalangle P_1OQ_1 = \dfrac{4{,}92\cdot(-1{,}94) + 0{,}87\cdot 4{,}06}{5\cdot\sqrt{(-1{,}94)^2 + 4{,}06^2}}$ $\qquad \sphericalangle P_1OQ_1 = 105{,}50°$ | 2 | L 2<br>K 5 |
| | | 20 | |

**Aufgabengruppe B** **Haupttermin**

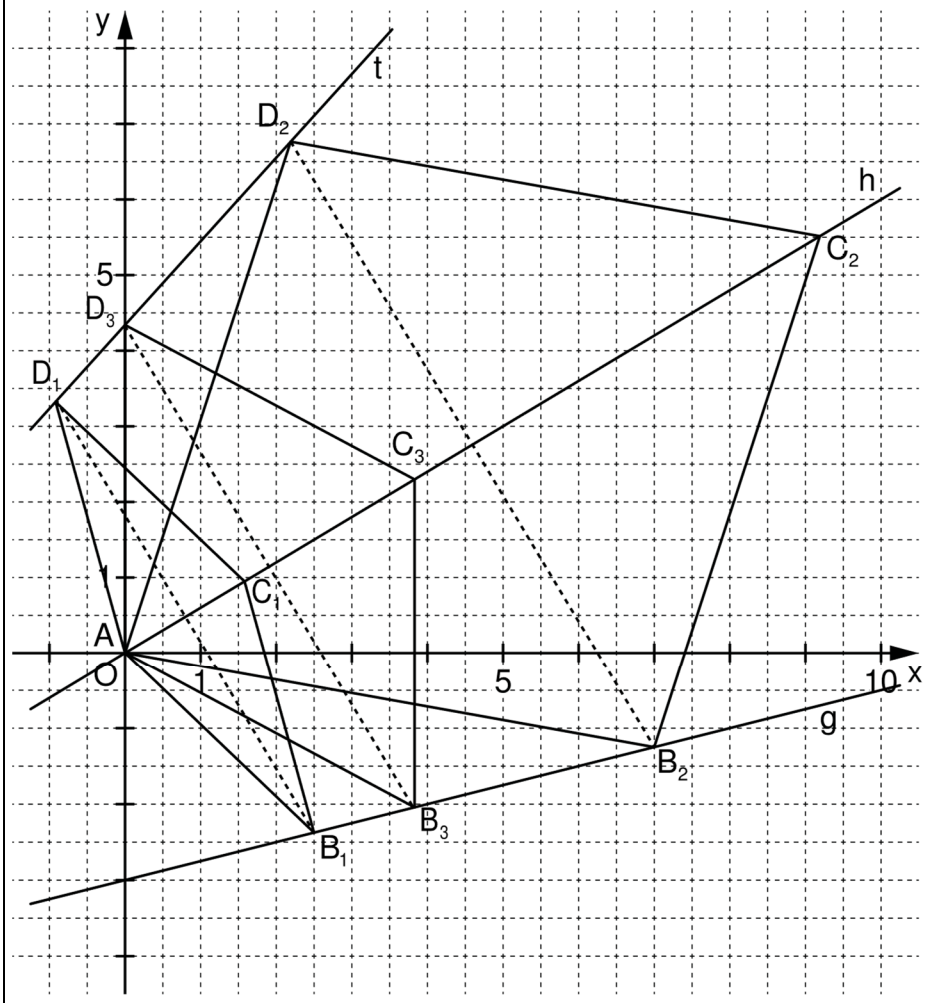
**AUFGABE B 1: FUNKTIONEN**

| | | | |
|---|---|---|---|
| B 1.1 | $3 = \log_2(0+b)+1$ $\qquad b \in \mathbb{R}$<br>...<br>$\Leftrightarrow \quad b = 4$ $\qquad L = \{4\}$<br>$f_1: y = \log_2(x+4)+1$ $\qquad x, y \in \mathbb{R}$<br>  | 3 | L 4<br>K 2<br>K 4<br>K 5 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| B 1.2 | $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -\left(\log_2\left(x+4\right)+1\right) \end{pmatrix}$ | $x', y', x \in \mathbb{R}\,;\, x > -4$ | 3 | L 4<br>K 4<br>K 5 |
| | $\Rightarrow \quad y' = -\log_2\left(x'+4\right)-1$ | | | |
| | $\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ -\log_2\left(x'+4\right)-1 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ | $x'', y', x' \in \mathbb{R}\,;\, x' > -4$ | | |
| | ... | | | |
| | $\Rightarrow \quad y'' = -\log_2\left(x''+6\right)+2$ | | | |
| | $f_2\colon y = -\log_2\left(x+6\right)+2$ | $x, y \in \mathbb{R}$ | | |
| | Einzeichnen des Graphen zu $f_2$ | | | |
| B 1.3 | Einzeichnen der Dreiecke $A_1B_1C_1$ und $A_2B_2C_2$ | | 2 | L 3<br>K 4 |
| B 1.4 | $\left\|\overline{A_nC_n}\right\|(x) = \left[\log_2\left(x+4\right)+1-\left(-\log_2\left(x+6\right)+2\right)\right]\text{LE}$ | $x \in \mathbb{R}\,;\, x > -3{,}26$ | 2 | L 3<br>L 4<br>K 5 |
| | ... | | | |
| | $\left\|\overline{A_nC_n}\right\|(x) = \left[\log_2\left(x^2+10x+24\right)-1\right]\text{LE}$ | | | |
| B 1.5 | $A(x) = 0{,}5 \cdot 4 \cdot \left[\log_2\left(x^2+10x+24\right)-1\right]\text{FE}$ | $x \in \mathbb{R}\,;\, x > -3{,}26$ | 3 | L 3<br>L 4<br>K 5 |
| | $A(x) = \left[2 \cdot \log_2\left(x^2+10x+24\right)-2\right]\text{FE}$ | | | |
| | $10 = 2 \cdot \log_2\left(x^2+10x+24\right)-2$ | $x \in \mathbb{R}\,;\, x > -3{,}26$ | | |
| | ... | | | |
| | $\Leftrightarrow \quad \left(x = -13{,}06 \quad \vee\right) \quad x = 3{,}06$ | $L = \{3{,}06\}$ | | |
| B 1.6 | $B_n\left(x-4 \,\middle|\, \log_2\left(x+4\right)+1\right)$ | $x \in \mathbb{R}\,;\, x > -3{,}26$ | 4 | L 3<br>L 4<br>K 2<br>K 5 |
| | $\log_2\left(x+4\right)+1 = -\log_2\left(x-4+6\right)+2$ | $x \in \mathbb{R}\,;\, x > -3{,}26$ | | |
| | ... | | | |
| | $\Leftrightarrow \quad x = -1{,}27$ | $L = \{-1{,}27\}$ | | |
| | $x_{B_4} = -1{,}27-4$ | $x_{B_4} = -5{,}27$ | | |
| | | | 17 | |

**AUFGABE B 2: EBENE GEOMETRIE**

B 2.1




3 | L 3 K 4

B 2.2

$B_n \xmapsto{h} D_n$

$\tan\varphi = 0{,}6 \qquad \varphi = 30{,}96°$

Für $x', y', x \in \mathbb{R};\ x > 1{,}57$ gilt:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(2\cdot 30{,}96°) & \sin(2\cdot 30{,}96°) \\ \sin(2\cdot 30{,}96°) & -\cos(2\cdot 30{,}96°) \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ 0{,}25x - 3 \end{pmatrix}$$

...

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}69x - 2{,}64 \\ 0{,}76x + 1{,}41 \end{pmatrix}$$

$D_n\left(0{,}69x - 2{,}64 \,\middle|\, 0{,}76x + 1{,}41\right)$

3 | L 3 L 4 K 2 K 5

| | | | |
|---|---|---|---|
| B 2.3 | Wenn die Raute $AB_2C_2D_2$ ein Quadrat wäre, so müsste gelten: $\overrightarrow{AB_2} \odot \overrightarrow{AD_2} = 0$.<br>$\overrightarrow{AB_2} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0{,}25 \cdot 7 - 3 \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{AB_2} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1{,}25 \end{pmatrix}$<br>$\overrightarrow{AD_2} = \begin{pmatrix} 0{,}69 \cdot 7 - 2{,}64 \\ 0{,}76 \cdot 7 + 1{,}41 \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{AD_2} = \begin{pmatrix} 2{,}19 \\ 6{,}73 \end{pmatrix}$<br>$\begin{pmatrix} 7 \\ -1{,}25 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 2{,}19 \\ 6{,}73 \end{pmatrix} = 6{,}92 \neq 0$<br>Folglich ist die Raute $AB_2C_2D_2$ kein Quadrat. | 3 | L 3<br>K 1<br>K 5 |
| B 2.4 | $\left\| \begin{array}{l} x_{D_n} = 0{,}69x - 2{,}64 \\ \wedge\ y_{D_n} = 0{,}76x + 1{,}41 \end{array} \right.$ $\quad x_{D_n}, y_{D_n}, x \in \mathbb{R};\ x > 1{,}57$<br>...<br>$\Rightarrow \quad y_{D_n} = 1{,}10x_{D_n} + 4{,}32$<br>Trägergraph: $y = 1{,}10x + 4{,}32$ $\quad x, y \in \mathbb{R}$<br>Einzeichnen des Trägergraphen t | 3 | L 4<br>K 4<br>K 5 |
| B 2.5 | Einzeichnen der Raute $AB_3C_3D_3$<br>$0{,}69x - 2{,}64 = 0$ $\quad x \in \mathbb{R};\ x > 1{,}57$<br>...<br>$\Leftrightarrow \quad x = 3{,}83$ $\quad L = \{3{,}83\}$<br>$C_3(3{,}83 \mid 0{,}6 \cdot 3{,}83)$ $\quad C_3(3{,}83 \mid 2{,}30)$<br>$A_{AB_3C_3D_3} = \lvert\overline{AD_3}\rvert \cdot d(C_3;\ AD_3)$<br>$\lvert\overline{AD_3}\rvert = (0{,}76 \cdot 3{,}83 + 1{,}41)\ \text{LE}$ $\quad \lvert\overline{AD_3}\rvert = 4{,}32\ \text{LE}$<br>$d(C_3;\ AD_3) = 3{,}83\ \text{LE}$<br>$A_{AB_3C_3D_3} = 4{,}32 \cdot 3{,}83\ \text{FE}$ $\quad A_{AB_3C_3D_3} = 16{,}55\ \text{FE}$ | 5 | L 2<br>L 3<br>K 2<br>K 4<br>K 5 |
| | | 17 | |

Hinweis: Bei einigen Teilaufgaben sind auch andere Lösungswege möglich. Für richtige andere Lösungen gelten die jeweils angegebenen Punkte entsprechend; die Anzahl der Punkte bei den einzelnen Teilaufgaben darf jedoch nicht verändert werden. Insbesondere sind Lösungswege, bei denen der (grafikfähige) Taschenrechner verwendet wird, entsprechend ihrer Dokumentation bzw. ihrer Nachvollziehbarkeit zu bepunkten.

Bei der Korrektur ist zu beachten, dass die Vervielfältigung der Lösungsvorlage zu Verzerrungen der Zeichnungen führen kann.