Prüfungsdauer: 150 Minuten

Abschlussprüfung 2022

an den Realschulen in Bayern

Mathematik II

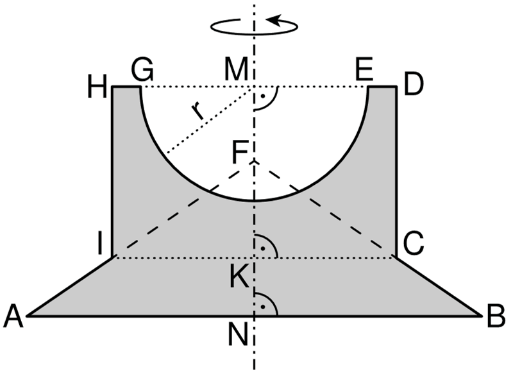
inhaltlich unveränderte, an den Zeichenkatalog des LehrplanPLUS angepasste Fassung

Name: ______________________ Vorname: ______________________

Klasse: _________ Platznummer: _________ Punkte: _________

Aufgabe A 1 **Nachtermin**

A 1 Nebenstehende Skizze zeigt den Axialschnitt eines Rotationskörpers mit der Rotationsachse NM. Der Punkt F ist der Schnittpunkt der Geraden AI und BC.



Es gilt: $|\overline{AB}| = 8\,\text{cm}$; $|\overline{FK}| = 1{,}7\,\text{cm}$; $|\overline{CD}| = 3\,\text{cm}$;
$|\overline{DE}| = 0{,}5\,\text{cm}$; $r = |\overline{ME}| = |\overline{MG}| = 2\,\text{cm}$;
$IH \parallel NM \parallel CD$.

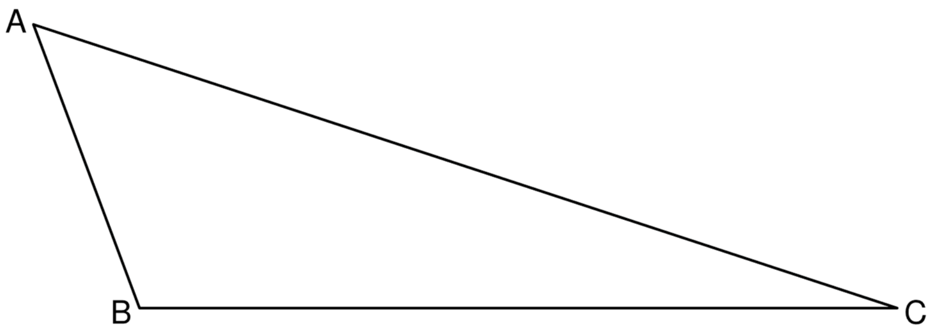
Berechnen Sie das Volumen des Rotationskörpers. Runden Sie auf zwei Stellen nach dem Komma.

[Zwischenergebnis: $|\overline{FN}| = 2{,}72\,\text{cm}$]

5 P

A 2.0 Gegeben ist das Dreieck ABC mit den Seitenlängen $\left|\overline{AB}\right| = 4\,\text{cm}$, $\left|\overline{BC}\right| = 10\,\text{cm}$ und $\left|\overline{AC}\right| = 12\,\text{cm}$.

Runden Sie im Folgenden auf zwei Stellen nach dem Komma.



A 2.1 Berechnen Sie das Maß des Winkels BAC.
$\left[\text{Ergebnis: } \sphericalangle BAC = 51{,}32°\right]$

2 P

A 2.2 Der Punkt M ist der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AC}$. Auf dem Kreisbogen $\overset{\frown}{CA}$ mit dem Mittelpunkt M liegt der Punkt D mit $\left|\overline{AD}\right| = 6\,\text{cm}$.

Zeichnen Sie den Kreisbogen $\overset{\frown}{CA}$, das Dreieck ACD und die Strecke $\overline{DM}$ in die Zeichnung zu A 2.0 ein. 2 P

A 2.3 Begründen Sie, weshalb der Winkel ADC das Maß 90° und der Winkel DMA das Maß 60° hat.

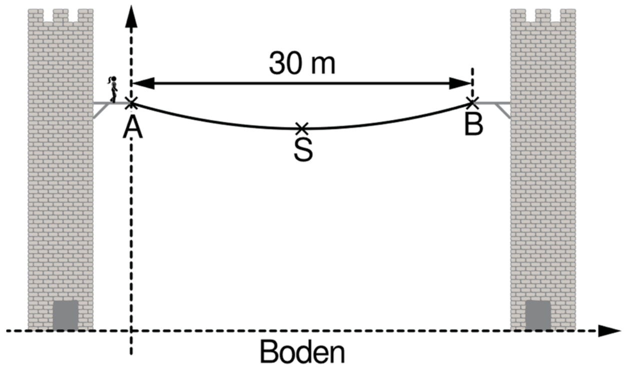
2 P

A 2.4 Berechnen Sie den Flächeninhalt der Figur, die durch den Kreisbogen $\overset{\frown}{DA}$ sowie die Strecken $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ und $\overline{CD}$ begrenzt wird.

3 P

A 3.0 An zwei Türmen sind auf einer Höhe von jeweils 15 m über dem Boden Plattformen angebracht. Zwischen den beiden 30 m voneinander entfernten Plattformen ist eine Brücke gespannt.

Der Verlauf der Brücke zwischen den Punkten $A(0|15)$ und $B(30|15)$ kann näherungsweise durch eine Parabel p beschrieben werden.



Diese hat eine Gleichung der Form $y = ax^2 + bx + c$ $\left(x, y \in \mathbb{R}_0^+ ; a, b, c \in \mathbb{R} ; a \neq 0\right)$ und den Scheitelpunkt $S(15|12{,}75)$. Dabei entspricht x m der horizontal gemessenen Entfernung vom Punkt A und y m der Höhe über dem Boden.

A 3.1 Zeigen Sie rechnerisch, dass für die Gleichung der Parabel p gilt:
$y = 0{,}01x^2 - 0{,}3x + 15 \left(x, y \in \mathbb{R}_0^+\right)$.

3 P

A 3.2 Eine Person überquert die Brücke von A nach B. Sie geht bereits wieder aufwärts. Bei einer Höhe von 13 Metern über dem Boden bleibt sie stehen. Diese Position entspricht dem Punkt D auf der Parabel p.
Berechnen Sie die x-Koordinate des Punktes D.

2 P

Prüfungsdauer:
150 Minuten

Abschlussprüfung 2022

an den Realschulen in Bayern

Mathematik II

inhaltlich unveränderte, an den Zeichenkatalog des LehrplanPLUS angepasste Fassung

Aufgabe B 1 **Nachtermin**

B 1.0 Die Parabel p verläuft durch die Punkte $P(-2|2{,}8)$ und $Q(7|1)$. Sie hat eine Gleichung der Form $y=-0{,}2x^2+bx+c$ mit $b,c,x,y\in\mathbb{R}$.

Die Gerade g hat die Gleichung $y=-0{,}2x-1$ mit $x,y\in\mathbb{R}$.

Runden Sie im Folgenden auf zwei Stellen nach dem Komma.

B 1.1 Zeigen Sie durch Berechnung der Werte für b und c, dass die Parabel p die Gleichung $y=-0{,}2x^2+0{,}8x+5{,}2$ hat.

Zeichnen Sie sodann die Parabel p und die Gerade g für $x\in[-4;9]$ in ein Koordinatensystem ein.
Für die Zeichnung: Längeneinheit 1 cm; $-4\le x\le 9$; $-4\le y\le 7$ 4 P

B 1.2 Punkte $A_n(x|-0{,}2x^2+0{,}8x+5{,}2)$ auf der Parabel p und Punkte $B_n(x|-0{,}2x-1)$ auf der Geraden g haben dieselbe Abszisse x. Punkte D_n liegen auch auf der Parabel p und haben eine um drei größere Abszisse als die Punkte A_n. Zusammen mit Punkten C_n entstehen für $x\in\,]-3{,}60;8{,}60[$ Trapeze $A_nB_nC_nD_n$.

Es gilt: $\overline{A_nB_n}\parallel\overline{C_nD_n}$ und $|\overline{C_nD_n}|=4$ LE.

Zeichnen Sie die Trapeze $A_1B_1C_1D_1$ für $x=-1$ und $A_2B_2C_2D_2$ für $x=3$ in das Koordinatensystem zu B 1.1 ein. 2 P

B 1.3 Zeigen Sie, dass für den Flächeninhalt der Trapeze $A_nB_nC_nD_n$ in Abhängigkeit von der Abszisse x der Punkte A_n gilt: $A(x)=(-0{,}3x^2+1{,}5x+15{,}3)$ FE.

Bestimmen Sie sodann den maximalen Flächeninhalt dieser Trapeze sowie den zugehörigen Wert für x. 4 P

B 1.4 Der Flächeninhalt der Trapeze $A_3B_3C_3D_3$ und $A_4B_4C_4D_4$ beträgt jeweils 16,5 FE.
Ermitteln Sie die zugehörigen Werte für x. 2 P

B 1.5 Zeigen Sie rechnerisch, dass für die y-Koordinate der Punkte D_n in Abhängigkeit von der Abszisse x der Punkte A_n gilt: $y_{D_n}=-0{,}2x^2-0{,}4x+5{,}8$. 2 P

B 1.6 Die Strecke $\overline{A_5D_5}$ im Trapez $A_5B_5C_5D_5$ ist parallel zur x-Achse.
Berechnen Sie den Flächeninhalt dieses Trapezes.
[Zwischenergebnis: $x_{A_5}=0{,}5$] 3 P

Bitte wenden!

Prüfungsdauer:
150 Minuten

Abschlussprüfung 2022

an den Realschulen in Bayern

inhaltlich unveränderte, an den Zeichenkatalog des LehrplanPLUS angepasste Fassung

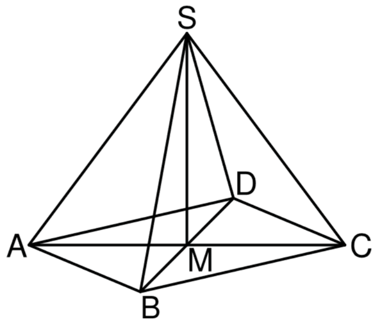
Mathematik II

Aufgabe B 2 **Nachtermin**

B 2.0 Die nebenstehende Skizze zeigt ein Schrägbild der Pyramide ABCDS mit der Höhe $\overline{MS}$, deren Grundfläche die Raute ABCD mit dem Diagonalenschnittpunkt M ist.

Es gilt: $\left|\overline{AC}\right| = 12\text{ cm}$; $\left|\overline{BD}\right| = 10\text{ cm}$; $\left|\overline{MS}\right| = 8\text{ cm}$.

Runden Sie im Folgenden auf zwei Stellen nach dem Komma.



B 2.1 Zeichnen Sie das Schrägbild der Pyramide ABCDS, wobei die Strecke $\overline{AC}$ auf der Schrägbildachse und der Punkt A links vom Punkt C liegen soll.

Für die Zeichnung gilt: $q = \frac{1}{2}$; $\omega = 45°$.

Berechnen Sie sodann die Länge der Strecke $\overline{CS}$ und das Maß des Winkels MSC.

$\left[\text{Teilergebnisse: } \left|\overline{CS}\right| = 10\text{ cm}; \sphericalangle MSC = 36{,}87°\right]$ 4 P

B 2.2 Der Punkt T liegt auf der Strecke $\overline{CS}$ mit $\left|\overline{ST}\right| = 3\text{ cm}$. Punkte P_n liegen auf der Strecke $\overline{MS}$ mit $\left|\overline{MP_n}\right| = x\text{ cm}$ $\left(x \in \mathbb{R}_0^+;\ x \in [0;8[\right)$. Zusammen mit den Punkten T und S bilden sie Dreiecke TSP_n.

Zeichnen Sie die Strecke $\overline{P_1T}$ für $x = 2$ in das Schrägbild zu B 2.1 ein.

Ermitteln Sie sodann rechnerisch den Flächeninhalt des Dreiecks TSP_1 sowie das Maß des Winkels TP_1S. 4 P

B 2.3 Für den Winkel STP_2 gilt: $\sphericalangle STP_2 = 90°$.

Zeichnen Sie die Strecke $\overline{P_2T}$ in das Schrägbild zu B 2.1 ein und berechnen Sie den zugehörigen Wert für x. 2 P

B 2.4 Die Punkte P_n sind Mittelpunkte von Strecken $\overline{Q_nR_n}$, wobei gilt: $Q_n \in \overline{BS}$, $R_n \in \overline{DS}$ und $\overline{Q_nR_n} \parallel \overline{BD}$. Die Dreiecke Q_nR_nS sind Grundflächen von Pyramiden Q_nR_nST, wobei T die Spitze der Pyramiden mit dem Höhenfußpunkt $H \in \overline{MS}$ ist.

Zeichnen Sie die Pyramide Q_1R_1ST und die Pyramidenhöhe $\overline{HT}$ in das Schrägbild zu B 2.1 ein. 1 P

B 2.5 Zeigen Sie, dass für das Volumen V der Pyramiden Q_nR_nST in Abhängigkeit von x gilt: $V(x) = (0{,}375x^2 - 6x + 24)\text{ cm}^3$.

$\left[\text{Zwischenergebnis: } \left|\overline{Q_nR_n}\right|(x) = (10 - 1{,}25x)\text{ cm}\right]$ 4 P

B 2.6 Unter den Pyramiden Q_nR_nST hat die Pyramide Q_3R_3ST das maximale Volumen.

Geben Sie den zugehörigen Wert für x und das maximale Volumen an. 2 P

Bitte wenden!

Lösungsmuster und Bewertung

Abschlussprüfung 2022

an den Realschulen in Bayern

Mathematik II

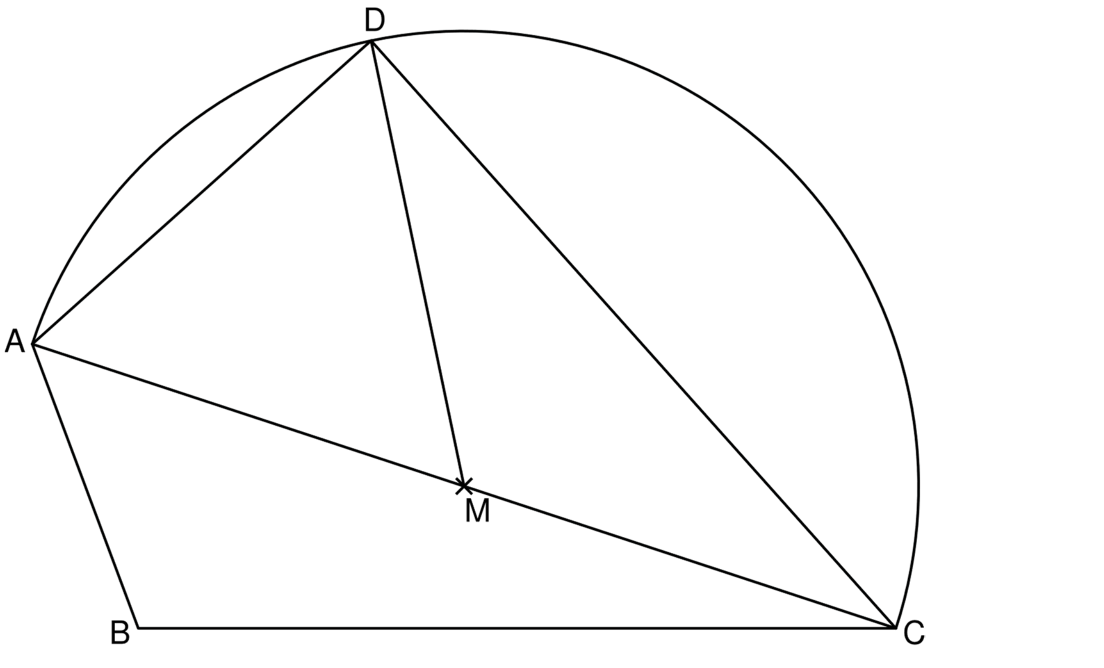
! inhaltlich unveränderte, an den Zeichenkatalog des LehrplanPLUS angepasste Fassung !

Aufgabengruppe A **Nachtermin**

AUFGABE A 1: RAUMGEOMETRIE

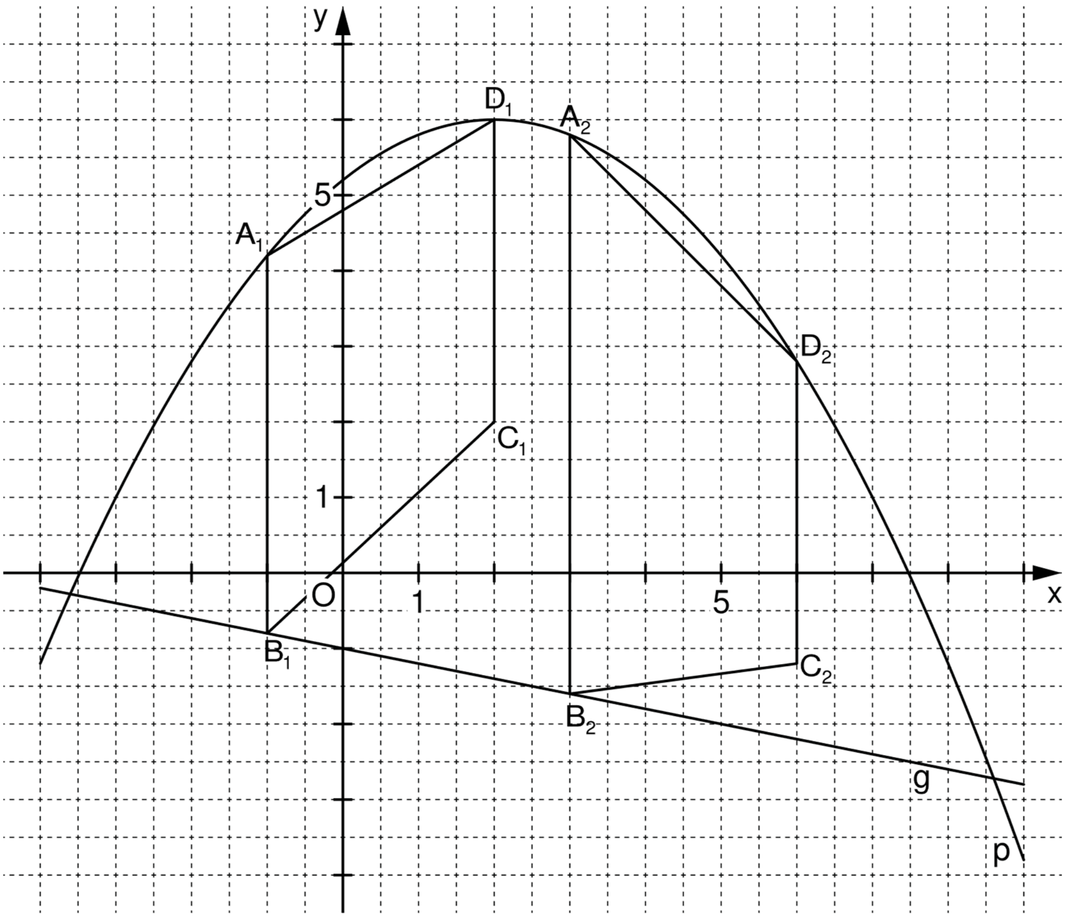
A 1	$V = \frac{1}{3} \cdot \left\lvert\overline{AN}\right\rvert^2 \cdot \pi \cdot \left\lvert\overline{FN}\right\rvert - \frac{1}{3} \cdot \left\lvert\overline{IK}\right\rvert^2 \cdot \pi \cdot \left\lvert\overline{FK}\right\rvert + \left\lvert\overline{IK}\right\rvert^2 \cdot \pi \cdot \left\lvert\overline{CD}\right\rvert - \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi$ $\left\lvert\overline{AN}\right\rvert = 0{,}5 \cdot 8\text{ cm}$ $\left\lvert\overline{AN}\right\rvert = 4\text{ cm}$ $\left\lvert\overline{IK}\right\rvert = (2 + 0{,}5)\text{ cm}$ $\left\lvert\overline{IK}\right\rvert = 2{,}5\text{ cm}$ $\frac{\left\lvert\overline{FN}\right\rvert}{1{,}7\text{ cm}} = \frac{4\text{ cm}}{2{,}5\text{ cm}}$ $\left\lvert\overline{FN}\right\rvert = 2{,}72\text{ cm}$ $V = \left(\frac{1}{3} \cdot 4^2 \cdot \pi \cdot 2{,}72 - \frac{1}{3} \cdot 2{,}5^2 \cdot \pi \cdot 1{,}7 + 2{,}5^2 \cdot \pi \cdot 3 - \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot 2^3 \cdot \pi\right)\text{cm}^3$ $V = 76{,}60\text{ cm}^3$	5	L 2 K 2 K 5

AUFGABE A 2: EBENE GEOMETRIE

A 2.0	 		
A 2.1	$10^2 = 4^2 + 12^2 - 2 \cdot 4 \cdot 12 \cdot \cos \sphericalangle BAC$ $\sphericalangle BAC = 51{,}32°$	2	L 2 K 5
A 2.2	Einzeichnen des Kreisbogens $\overset{\frown}{CA}$, des Dreiecks ACD und der Strecke $\overline{DM}$	2	L 3 K 4

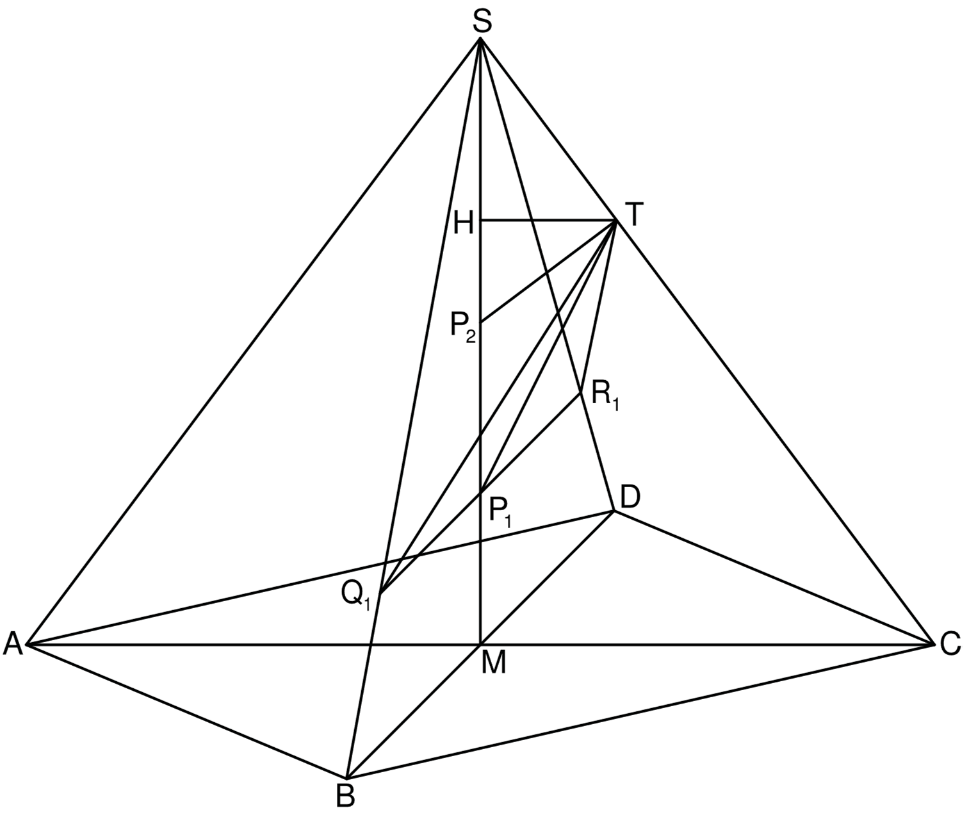
A 2.3	Der Winkel ADC hat das Maß 90°, weil der Punkt D auf dem Thaleskreis über der Strecke $\overline{AC}$ liegt. Das Dreieck AMD ist gleichseitig, da $\left\|\overline{AM}\right\| = \left\|\overline{DM}\right\| = \left\|\overline{AD}\right\| = 6\text{ cm}$ gilt. Somit hat der Winkel DMA das Maß 60°.	2	L 3 K 1
A 2.4	$A_{Figur} = A_{Sektor} + A_{\Delta ABC} + A_{\Delta CDM}$ $A_{Sektor} = \frac{60°}{360°} \cdot 6^2 \cdot \pi\text{ cm}^2$ $\quad A_{Sektor} = 18{,}85\text{ cm}^2$ $A_{\Delta ABC} = 0{,}5 \cdot 4 \cdot 12 \cdot \sin 51{,}32°\text{ cm}^2$ $\quad A_{\Delta ABC} = 18{,}74\text{ cm}^2$ $A_{\Delta CDM} = 0{,}5 \cdot 6 \cdot 6 \cdot \sin(180° - 60°)\text{ cm}^2$ $\quad A_{\Delta CDM} = 15{,}59\text{ cm}^2$ $A_{Figur} = (18{,}85 + 18{,}74 + 15{,}59)\text{ cm}^2$ $\quad A_{Figur} = 53{,}18\text{ cm}^2$	3	L 2 K 2 K 5
AUFGABE A 3: FUNKTIONEN			
A 3.1	$S(15 \mid 12{,}75) \in p$ und $A(0 \mid 15) \in p$ $15 = a(0-15)^2 + 12{,}75$ $\quad a \in IR;\ a \neq 0$ ... $\Leftrightarrow \quad a = 0{,}01$ $\quad L = \{0{,}01\}$ p: $y = 0{,}01 \cdot (x-15)^2 + 12{,}75$ $\quad x, y \in IR_0^+$ ... p: $y = 0{,}01x^2 - 0{,}3x + 15$	3	L 4 K 5
A 3.2	$13 = 0{,}01x^2 - 0{,}3x + 15$ $\quad x \in IR_0^+;\ x > 15$ ... $\Leftrightarrow \quad (x = 10 \ \vee)\ x = 20$ $\quad L = \{20\}$	2	L 4 K 3 K 5
		19	

AUFGABE B 1: FUNKTIONEN

B 1.1	$P(-2 \mid 2{,}8)$ und $Q(7 \mid 1) \in p$ $\begin{vmatrix} 2{,}8 = -0{,}2 \cdot (-2)^2 + b \cdot (-2) + c \\ \wedge \quad 1 = -0{,}2 \cdot 7^2 + b \cdot 7 + c \end{vmatrix}$ $\quad b, c \in \mathbb{R}$ ... $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} b = 0{,}8 \\ \wedge \quad c = 5{,}2 \end{vmatrix}$ $\quad L(b \mid c) = \{(0{,}8 \mid 5{,}2)\}$ p: $y = -0{,}2x^2 + 0{,}8x + 5{,}2$ $\quad x, y \in \mathbb{R}$ 	4	L 4 K 4 K 5
B 1.2	Einzeichnen der Trapeze $A_1B_1C_1D_1$ und $A_2B_2C_2D_2$	2	L 3 K 4

B 1.3	$A = 0{,}5 \cdot \left(\left\vert\overline{A_nB_n}\right\vert + \left\vert\overline{C_nD_n}\right\vert\right) \cdot d(D_n;\ A_nB_n)$ $\left\vert\overline{A_nB_n}\right\vert(x) = \left[-0{,}2x^2 + 0{,}8x + 5{,}2 - (-0{,}2x - 1)\right]$ LE $\quad x \in \mathbb{R};\ x \in \left]-3{,}60;\ 8{,}60\right[$ $\left\vert\overline{A_nB_n}\right\vert(x) = \left(-0{,}2x^2 + x + 6{,}2\right)$ LE $A(x) = 0{,}5 \cdot \left(-0{,}2x^2 + x + 6{,}2 + 4\right) \cdot 3$ FE $\quad x \in \mathbb{R};\ x \in \left]-3{,}60;\ 8{,}60\right[$ $A(x) = \left(-0{,}3x^2 + 1{,}5x + 15{,}3\right)$ FE ... $A_{max} = 17{,}18$ FE für $x = 2{,}5$	4	L 3 L 4 K 2 K 5
B 1.4	$16{,}5 = -0{,}3x^2 + 1{,}5x + 15{,}3 \quad x \in \mathbb{R};\ x \in \left]-3{,}60;\ 8{,}60\right[$ ... $\Leftrightarrow \quad x = 1 \vee x = 4 \quad \mathbb{L} = \{1; 4\}$	2	L 4 K 5
B 1.5	$y_{D_n} = -0{,}2 \cdot (x+3)^2 + 0{,}8 \cdot (x+3) + 5{,}2 \quad x \in \mathbb{R};\ x \in \left]-3{,}60;\ 8{,}60\right[$ ... $y_{D_n} = -0{,}2x^2 - 0{,}4x + 5{,}8$	2	L 4 K 2
B 1.6	Im Trapez $A_5B_5C_5D_5$ gilt: $y_{A_5} = y_{D_5}$. $-0{,}2x^2 + 0{,}8x + 5{,}2 = -0{,}2x^2 - 0{,}4x + 5{,}8 \quad x \in \mathbb{R};\ x \in \left]-3{,}60;\ 8{,}60\right[$ ... $\Leftrightarrow \quad x = 0{,}5 \quad \mathbb{L} = \{0{,}5\}$ $A(0{,}5) = \left(-0{,}3 \cdot 0{,}5^2 + 1{,}5 \cdot 0{,}5 + 15{,}3\right)$ FE $\quad A(0{,}5) = 15{,}98$ FE	3	L 2 L 3 L 4 K 2 K 5
		17	

AUFGABE B 2: RAUMGEOMETRIE



B 2.1	$\left\|\overline{CS}\right\| = \sqrt{(0{,}5\cdot 12)^2 + 8^2}\ \text{cm}$ $\left\|\overline{CS}\right\| = 10\ \text{cm}$ $\tan\sphericalangle MSC = \frac{0{,}5\cdot 12}{8}$ $\sphericalangle MSC = 36{,}87°$	4	L 2 L 3 K 4 K 5
B 2.2	Einzeichnen der Strecke $\overline{P_1T}$ $A_{TSP_1} = 0{,}5\cdot(8-2)\cdot 3\cdot\sin 36{,}87°\ \text{cm}^2$ $A_{TSP_1} = 5{,}40\ \text{cm}^2$ $\frac{\sin\sphericalangle TP_1S}{\left\|\overline{ST}\right\|} = \frac{\sin\sphericalangle MSC}{\left\|\overline{P_1T}\right\|}$ $\left\|\overline{P_1T}\right\| = \sqrt{(8-2)^2 + 3^2 - 2\cdot(8-2)\cdot 3\cdot\cos 36{,}87°}\ \text{cm}$ $\left\|\overline{P_1T}\right\| = 4{,}02\ \text{cm}$ $\frac{\sin\sphericalangle TP_1S}{3\ \text{cm}} = \frac{\sin 36{,}87°}{4{,}02\ \text{cm}}$ $\sphericalangle TP_1S = 26{,}60°$	4	L 2 L 3 K 2 K 4 K 5
B 2.3	Einzeichnen der Strecke $\overline{P_2T}$ $\cos 36{,}87° = \frac{3}{8-x}$ $x \in \mathbb{IR}_0^+;\ x \in [0;8[$ ... $\Leftrightarrow\ x = 4{,}25$ $L = \{4{,}25\}$	2	L 3 L 4 K 4 K 5
B 2.4	Einzeichnen der Pyramide Q_1R_1ST und der Höhe $\overline{HT}$	1	L 3 K 4

B 2.5	$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left\|\overline{Q_nR_n}\right\| \cdot \left\|\overline{SP_n}\right\| \cdot \left\|\overline{HT}\right\|$ $\frac{\left\|\overline{Q_nR_n}\right\|(x)}{10\text{ cm}} = \frac{(8-x)\text{ cm}}{8\text{ cm}}$ $\quad x \in \mathbb{IR}_0^+;\ x \in [0;8[$ $\left\|\overline{Q_nR_n}\right\|(x) = (10-1{,}25x)\text{ cm}$ $\frac{\left\|\overline{HT}\right\|}{0{,}5 \cdot 12\text{ cm}} = \frac{3\text{ cm}}{10\text{ cm}}$ $\quad \left\|\overline{HT}\right\| = 1{,}8\text{ cm}$ $V(x) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot (10-1{,}25x) \cdot (8-x) \cdot 1{,}8\text{ cm}^3$ $\quad x \in \mathbb{IR}_0^+;\ x \in [0;8[$ $V(x) = 0{,}3 \cdot (1{,}25x^2 - 20x + 80)\text{ cm}^3$ $V(x) = (0{,}375x^2 - 6x + 24)\text{ cm}^3$	4	L 2 L 3 K 2 K 5
B 2.6	Für die Pyramide Q_3R_3ST gilt: $x = 0$ und $V_{max} = 24\text{ cm}^3$.	2	L 2 L 3 K 2
		17	

Hinweis: Bei einigen Teilaufgaben sind auch andere Lösungswege möglich. Für richtige andere Lösungen gelten die jeweils angegebenen Punkte entsprechend; die Anzahl der Punkte bei den einzelnen Teilaufgaben darf jedoch nicht verändert werden. Insbesondere sind Lösungswege, bei denen der (grafikfähige) Taschenrechner verwendet wird, entsprechend ihrer Dokumentation bzw. ihrer Nachvollziehbarkeit zu bepunkten.

Bei der Korrektur ist zu beachten, dass die Vervielfältigung der Lösungsvorlage zu Verzerrungen der Zeichnungen führen kann.