

Prüfungsdauer:
150 Minuten

Abschlussprüfung 2021

an den Realschulen in Bayern

Mathematik I

! inhaltlich unveränderte, an den
Zeichenkatalog des LehrplanPLUS
angepasste Fassung !

Name: _____ Vorname: _____

Klasse: _____ Platznummer: _____ Punkte: _____

Aufgabe A 1 **Nachtermin**

A 1.0 In zwei Stromkreisen wird je eine Spule von Gleichstrom durchflossen. Wenn ein Stromkreis geöffnet wird, klingt die entsprechende Stromstärke exponentiell ab. Der Zusammenhang zwischen der Zeit x s nach dem Öffnen des Stromkreises und der Stromstärke y mA kann bei Spulen näherungsweise durch eine Funktion mit einer Gleichung der Form $y = y_0 \cdot k^x$ beschrieben werden, wobei y_0 mA die Stromstärke für $x = 0$ darstellt ($x, y, y_0 \in \mathbb{R}_0^+ ; k \in \mathbb{R}^+$).

A 1.1 Für die erste Spule ergeben sich folgende Werte:

Zeit in s	0	2	3	4
Stromstärke in mA	4500	218	48	11

Zeigen Sie rechnerisch, dass für diese Spule auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet gilt: $k = 0,22$. Geben Sie sodann die zugehörige Funktionsgleichung an.

2 P

A 1.2 Um wie viel Prozent verringert sich die Stromstärke bei der Spule aus A 1.1 pro Sekunde? Ergänzen Sie.

Die Stromstärke verringert sich pro Sekunde um %.

1 P

A 1.3 Für die zweite Spule gilt: $k = 0,25$. Bei dieser wird gleichzeitig mit der Spule aus A 1.1 der Stromkreis geöffnet. Nach 3 s ergeben sich für beide Spulen die gleichen Stromstärken.

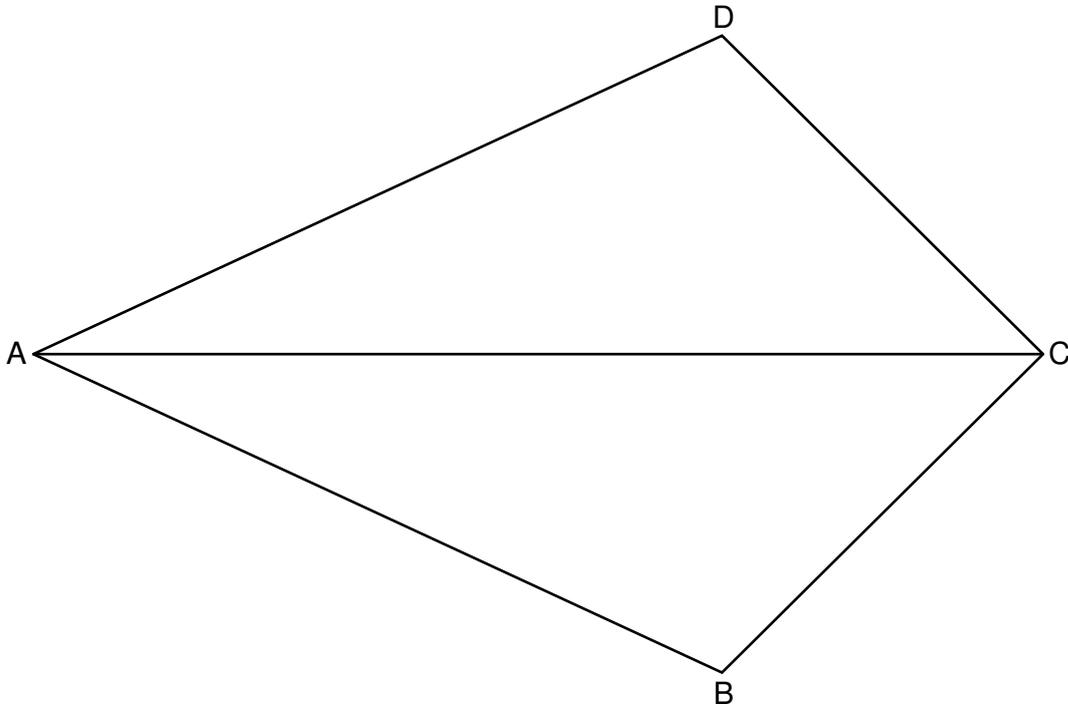
Berechnen Sie die Stromstärke der zweiten Spule in dem Moment, in dem die Stromkreise geöffnet werden.

2 P

A 2.0 In der Zeichnung ist das Drachenviereck ABCD mit der Symmetrieachse AC dargestellt.

Es gilt: $|\overline{AB}| = 10 \text{ cm}$; $\sphericalangle \text{BAD} = 50^\circ$; $\sphericalangle \text{CBA} = 110^\circ$.

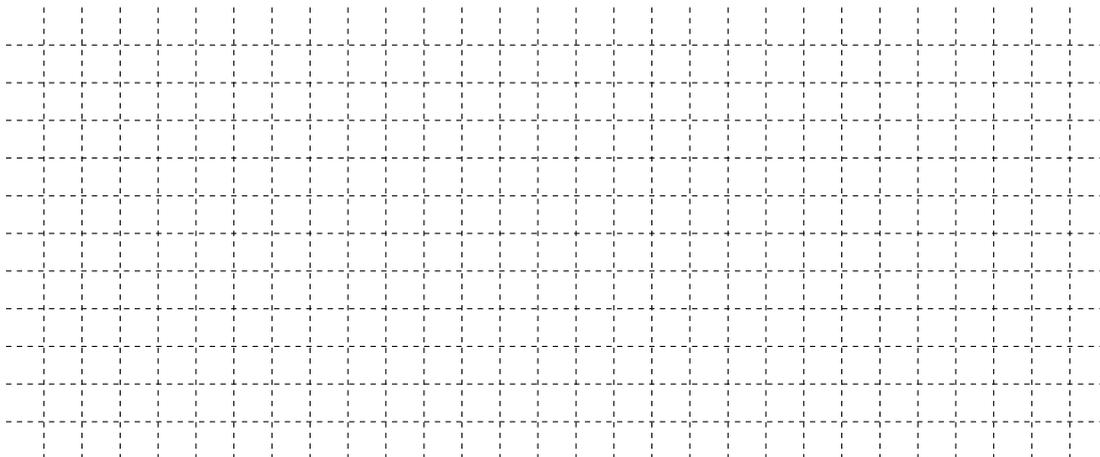
Runden Sie im Folgenden auf zwei Stellen nach dem Komma.



A 2.1 Punkte E_n liegen auf der Strecke \overline{AC} und legen zusammen mit dem Punkt B Strecken $\overline{BE_n}$ fest. Die Winkel $E_n\text{BA}$ haben das Maß φ mit $\varphi \in]0^\circ; 110^\circ]$.

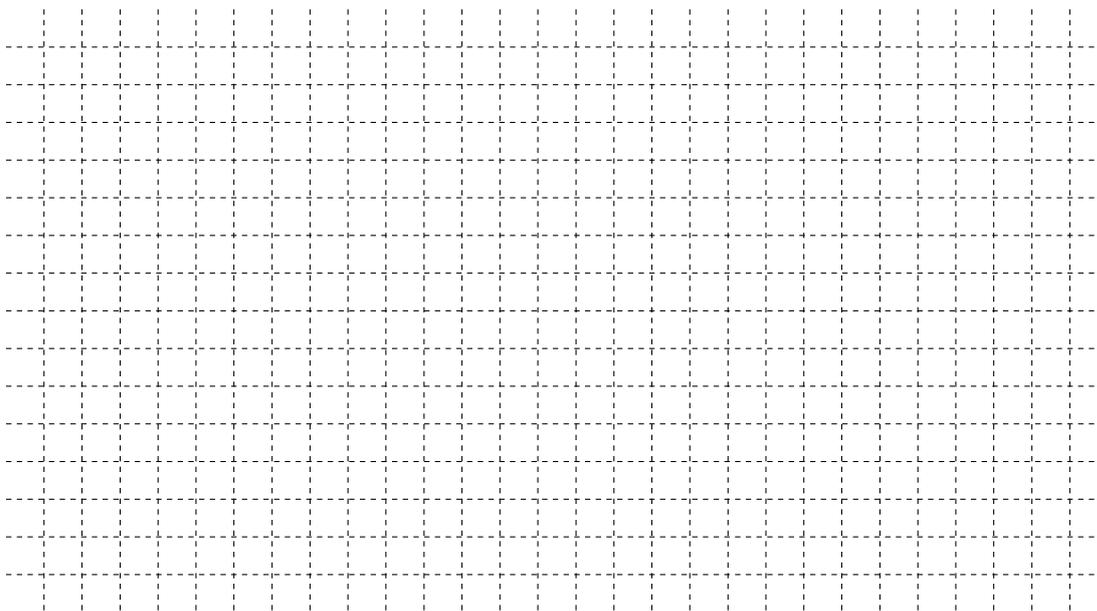
Zeichnen Sie die Strecke $\overline{BE_1}$ für $\varphi = 15^\circ$ in die Zeichnung zu A 2.0 ein und zeigen Sie durch Rechnung, dass für die Länge der Strecken $\overline{BE_n}$ in Abhängigkeit von φ

$$\text{gilt: } |\overline{BE_n}|(\varphi) = \frac{4,23}{\sin(\varphi + 25^\circ)} \text{ cm.}$$



A 2.2 Das Dreieck ABE_2 ist gleichschenkelig mit der Basis \overline{AB} .

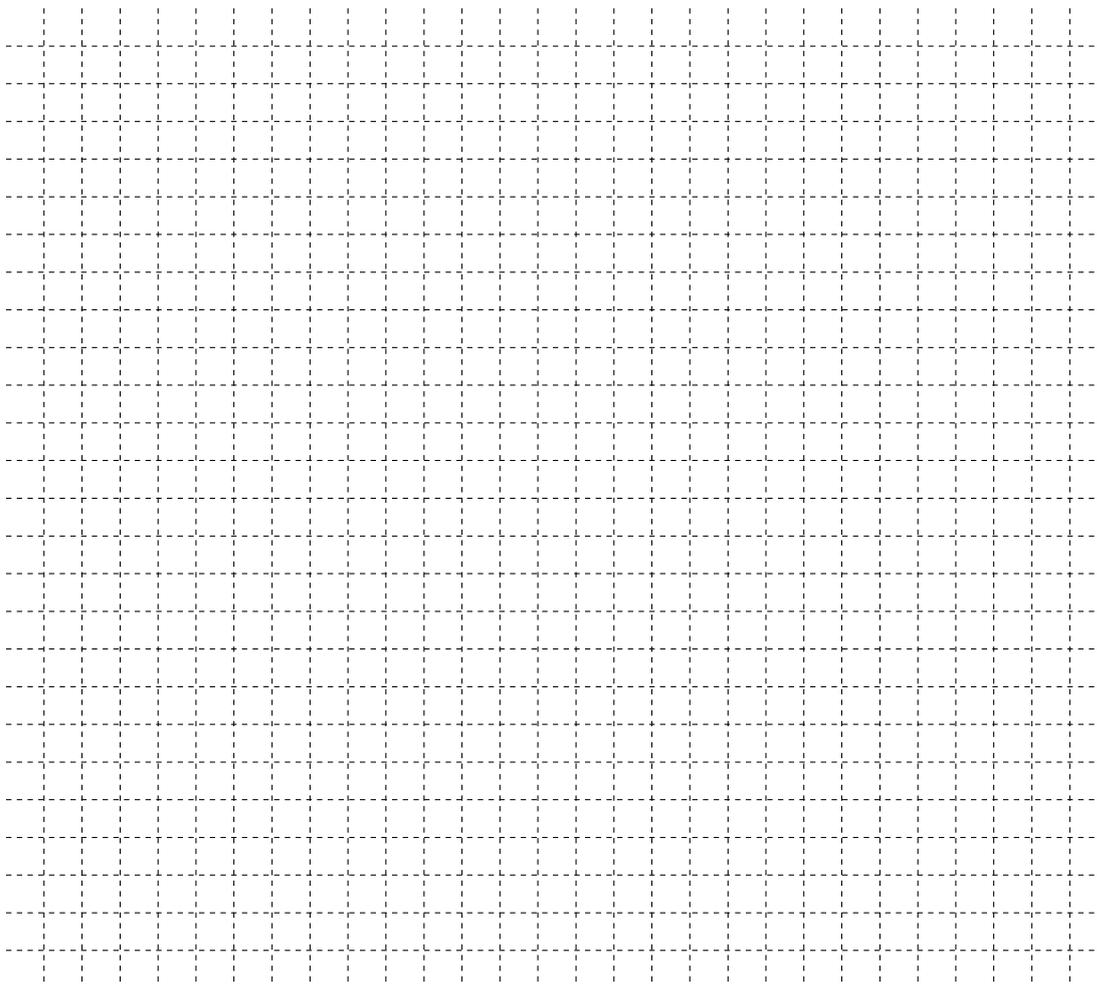
Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks ABE_2 .



2 P

A 2.3 Der Punkt E_3 ist der Mittelpunkt des Inkreises des Drachenvierecks ABCD.

Zeichnen Sie den Punkt E_3 sowie den Inkreis in die Zeichnung zu A 2.0 ein und berechnen Sie den Radius r des Inkreises.

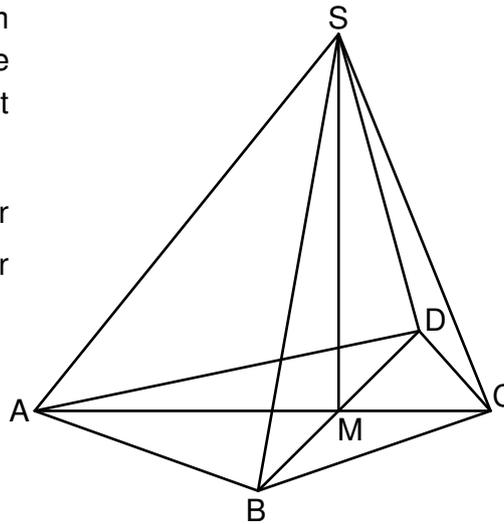


4 P

A 3.0 Das Drachenviereck ABCD mit dem Diagonalschnittpunkt M ist die Grundfläche der Pyramide ABCDS mit der Höhe \overline{MS} .

Die Zeichnung zeigt ein Schrägbild der Pyramide ABCDS, wobei \overline{AC} auf der Schrägbildachse liegt.

Es gilt: $|\overline{AC}| = 6 \text{ cm}$; $|\overline{AM}| = 4 \text{ cm}$;
 $|\overline{BD}| = 6 \text{ cm}$; $|\overline{MS}| = 5 \text{ cm}$.

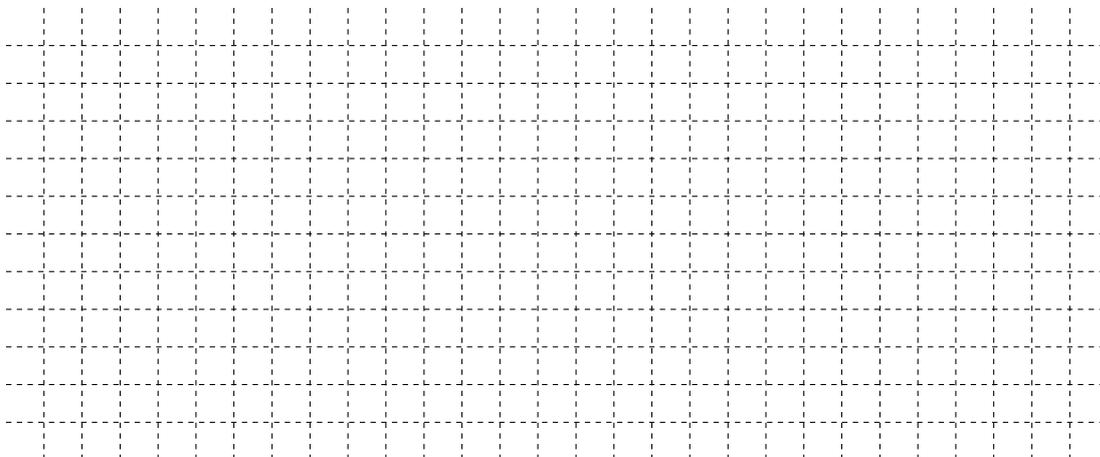


A 3.1 Der Punkt E liegt auf der Halbgeraden $[\overline{AC}$ mit $|\overline{AE}| = 7,5 \text{ cm}$. Punkte P_n liegen auf der Strecke \overline{MS} . Die Winkel $\angle MAP_n$ haben das Maß φ . Die Punkte P_n sind für $\varphi \in]0^\circ; 51,34^\circ]$ die Spitzen von Pyramiden $ABEDP_n$ mit dem Drachenviereck ABED als Grundfläche sowie den Höhen $\overline{MP_n}$.

Zeichnen Sie die Pyramide $ABEDP_1$ für $\varphi = 30^\circ$ in das Schrägbild zu A 3.0 ein.

2 P

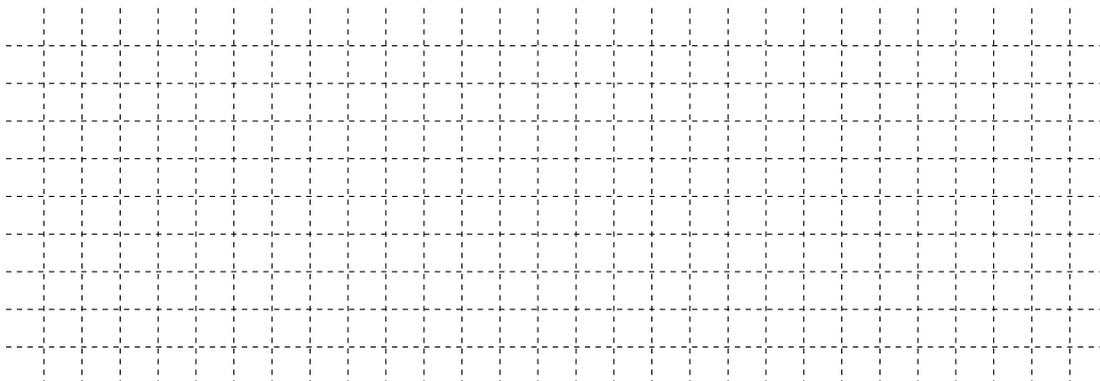
A 3.2 Berechnen Sie das Volumen V der Pyramiden $ABEDP_n$ in Abhängigkeit von φ .
 [Ergebnis: $V(\varphi) = 30 \cdot \tan \varphi \text{ cm}^3$]



2 P

A 3.3 Das Volumen der Pyramide $ABEDP_2$ ist genau so groß wie das Volumen der Pyramide ABCDS.

Bestimmen Sie den zugehörigen Wert für φ .



2 P

Aufgabe B 1

Nachtermin

B 1.0 Gegeben ist die Funktion f_1 mit der Gleichung $y = 0,2 \cdot 2^{x-1} - 2$ ($x, y \in \mathbb{R}$).

Runden Sie im Folgenden auf zwei Stellen nach dem Komma.

B 1.1 Geben Sie die Wertemenge von f_1 an und zeichnen Sie sodann den Graphen zu f_1 für $x \in [-3; 6]$ in ein Koordinatensystem.

Für die Zeichnung: Längeneinheit 1 cm; $-3 \leq x \leq 8$; $-3 \leq y \leq 10$

2 P

B 1.2 Der Graph der Funktion f_1 wird durch orthogonale Affinität mit der x-Achse als Affinitätsachse und dem Affinitätsmaßstab $k = 2$ sowie anschließende Parallelverschiebung mit dem Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}$ auf den Graphen der Funktion f_2 abgebildet.

Bestätigen Sie durch Rechnung, dass für die Gleichung der Funktion f_2 gilt:
 $y = 0,4 \cdot 2^{x-2} + 3$ ($x, y \in \mathbb{R}$).

Zeichnen Sie sodann den Graphen zu f_2 für $x \in [-3; 6]$ in das Koordinatensystem zu B 1.1 ein.

3 P

B 1.3 Punkte $A_n(x | 0,2 \cdot 2^{x-1} - 2)$ liegen auf dem Graphen zu f_1 . Punkte $B_n(x+3 | -1)$ haben eine um 3 größere x-Koordinate als die Punkte A_n . Punkte C_n liegen auf dem Graphen der Funktion f_2 und ihre x-Koordinate ist um 1 größer als die Abszisse x der Punkte A_n . Die Punkte A_n , B_n und C_n sind die Eckpunkte von Dreiecken $A_n B_n C_n$.

Zeichnen Sie das Dreieck $A_1 B_1 C_1$ für $x = -1$ und das Dreieck $A_2 B_2 C_2$ für $x = 4$ in das Koordinatensystem zu B 1.1 ein.

2 P

B 1.4 Zeigen Sie, dass für die Vektoren $\overrightarrow{A_n B_n}$ und $\overrightarrow{A_n C_n}$ in Abhängigkeit von der Abszisse x der Punkte A_n gilt:

$$\overrightarrow{A_n B_n}(x) = \begin{pmatrix} 3 \\ -0,2 \cdot 2^{x-1} + 1 \end{pmatrix}; \quad \overrightarrow{A_n C_n}(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0,2 \cdot 2^{x-1} + 5 \end{pmatrix}.$$

3 P

B 1.5 Begründen Sie rechnerisch, dass der Flächeninhalt der Dreiecke $A_n B_n C_n$ stets größer als 7 FE ist.

3 P

B 1.6 Im Dreieck $A_3 B_3 C_3$ liegt die Strecke $\overline{A_3 B_3}$ parallel zur x-Achse.

Berechnen Sie die x-Koordinate des Punktes A_3 sowie das Maß des Winkels $B_3 A_3 C_3$.

4 P

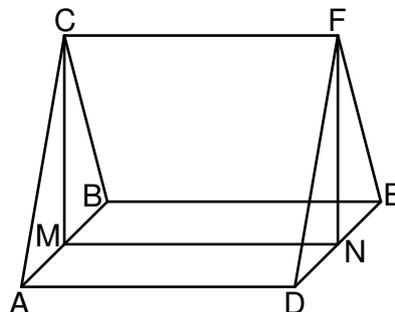
Aufgabe B 2

Nachtermin

B 2.0 Die nebenstehende Skizze zeigt ein Schrägbild des geraden Prismas ABCDEF. Die Grundfläche dieses Prismas ist das gleichseitige Dreieck ABC mit der Höhe \overline{MC} . N ist der Mittelpunkt der Strecke \overline{DE} .

Es gilt: $|\overline{AB}| = 8 \text{ cm}$; $|\overline{AD}| = 9 \text{ cm}$.

Runden Sie im Folgenden auf zwei Stellen nach dem Komma.



B 2.1 Zeigen Sie, dass für die Strecke \overline{MC} gilt: $|\overline{MC}| = 6,93 \text{ cm}$. Zeichnen Sie sodann das Schrägbild des Prismas ABCDEF, wobei die Strecke \overline{MN} auf der Schrägbildachse und der Punkt M links vom Punkt N liegen soll.

Für die Zeichnung gilt: $q = 0,5$; $\omega = 45^\circ$.

3 P

B 2.2 Der Punkt K liegt auf der Strecke \overline{CF} mit $|\overline{FK}| = 3 \text{ cm}$.

Zeichnen Sie die Strecke \overline{NK} in das Schrägbild zu B 2.1 ein und zeigen Sie rechnerisch, dass für den Winkel NKF gilt: $\sphericalangle NKF = 66,59^\circ$.

2 P

B 2.3 Punkte P_n auf der Strecke \overline{NK} sind zusammen mit Punkten A und B die Eckpunkte von Dreiecken AP_nB . Die Winkel $\sphericalangle NMP_n$ haben das Maß φ mit $\varphi \in]0^\circ; 49,11^\circ]$.

Zeichnen Sie die Strecke $\overline{MP_1}$ und das Dreieck AP_1B für $\varphi = 30^\circ$ in das Schrägbild zu B 2.1 ein.

1 P

B 2.4 Zeigen Sie durch Rechnung, dass für die Länge der Strecken $\overline{MP_n}$ in Abhängigkeit

$$\text{von } \varphi \text{ gilt: } |\overline{MP_n}|(\varphi) = \frac{8,26}{\sin(\varphi + 66,59^\circ)} \text{ cm.}$$

Begründen Sie sodann, dass für den Flächeninhalt A der Dreiecke AP_nB gilt: $A \geq 33,04 \text{ cm}^2$.

4 P

B 2.5 Die Punkte P_n sind die Spitzen von Pyramiden $ADEBP_n$ mit der Grundfläche ADEB und den Höhen $\overline{P_nH_n}$, deren Fußpunkte H_n auf der Strecke \overline{MN} liegen.

Zeichnen Sie die Pyramide $ADEBP_1$ und ihre Höhe $\overline{P_1H_1}$ in das Schrägbild zu B 2.1 ein und ermitteln Sie sodann rechnerisch das Volumen V der Pyramiden $ADEBP_n$ in Abhängigkeit von φ .

$$\left[\text{Ergebnis: } V(\varphi) = \frac{198,24 \cdot \sin \varphi}{\sin(\varphi + 66,59^\circ)} \text{ cm}^3 \right]$$

3 P

B 2.6 Berechnen Sie den prozentualen Anteil des Volumens der Pyramide $ADEBP_1$ am Volumen des Prismas ABCDEF.

3 P

Bitte wenden!

Aufgabengruppe A

Nachtermin

AUFGABE A 1: FUNKTIONEN

A 1.1	$218 = 4500 \cdot k^2$... $\Leftrightarrow k = 0,22$ Folglich gilt: $y = 4500 \cdot 0,22^x$ ($x, y \in \mathbb{R}_0^+$).	$k \in \mathbb{R}^+$ $L = \{0,22\}$	2	L 4 K 3 K 5
A 1.2	Die Stromstärke verringert sich pro Sekunde um 78 %.		1	L 1 K 5
A 1.3	Stromstärke der ersten Spule nach 3 s (lt. Tabelle): 48 mA $48 = y_0 \cdot 0,25^3$ Die Stromstärke beträgt in diesem Moment 3072 mA.	$y_0 = 3072$	2	L 4 K 3 K 5

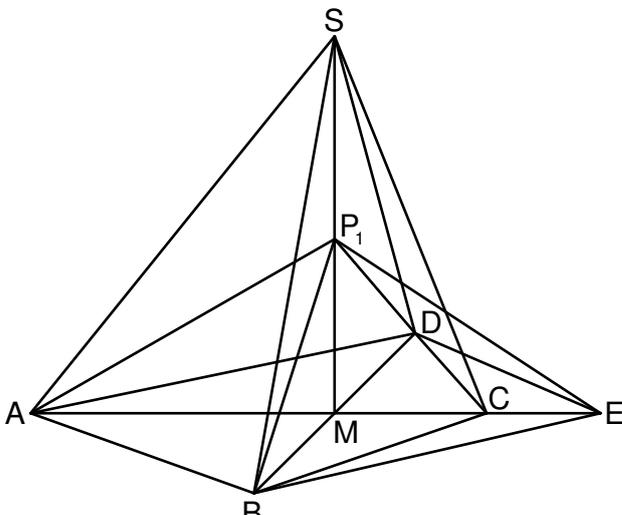
AUFGABE A 2: EBENE GEOMETRIE

A 2.0

A 2.1	Einzeichnen der Strecke $\overline{BE_1}$		3	L 2 L 3 K 4 K 5
$\frac{ \overline{BE_n} }{\sin \sphericalangle BAC} = \frac{ \overline{AB} }{\sin \sphericalangle AE_n B}$ $\sphericalangle BAC = 0,5 \cdot 50^\circ \qquad \sphericalangle BAC = 25^\circ$ $\frac{ \overline{BE_n} }{\sin 25^\circ} = \frac{10 \text{ cm}}{\sin(180^\circ - (\varphi + 25^\circ))} \qquad \overline{BE_n} (\varphi) = \frac{4,23}{\sin(\varphi + 25^\circ)} \text{ cm} \quad \varphi \in]0^\circ; 110^\circ]$				

<p>A 2.2 $A_{ABE_2} = 0,5 \cdot \overline{AB} \cdot \overline{BE_2} \cdot \sin \sphericalangle E_2BA$ $\sphericalangle E_2BA = \sphericalangle BAC$ $\overline{BE_2} = \frac{4,23}{\sin(25^\circ + 25^\circ)} \text{ cm}$ $A_{ABE_2} = 0,5 \cdot 10 \cdot 5,52 \cdot \sin 25^\circ \text{ cm}^2$</p>	2	L 2 L 3 K 2 K 5
<p>A 2.3 Einzeichnen des Punktes E_3 sowie des Inkreises $\sin \sphericalangle CBE_3 = \frac{r}{ \overline{BE_3} }$ $\sphericalangle CBE_3 = 0,5 \cdot 110^\circ$ $\overline{BE_3} = \frac{4,23}{\sin(55^\circ + 25^\circ)} \text{ cm}$ $\sin 55^\circ = \frac{r}{4,30 \text{ cm}}$</p>	4	L 2 L 3 K 2 K 4 K 5

AUFGABE A 3: RAUMGEOMETRIE

<p>A 3.0</p> 		
--------------------------------------------------------------------------------------------------	--	--

<p>A 3.1 Einzeichnen der Pyramide $ABEDP_1$</p>	2	L 3 K 4
------------------------------------------------------------	---	------------

<p>A 3.2 $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \overline{AE} \cdot \overline{BD} \cdot \overline{MP_n}$ $\tan \varphi = \frac{ \overline{MP_n} }{4 \text{ cm}}$ $V(\varphi) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 7,5 \cdot 6 \cdot 4 \cdot \tan \varphi \text{ cm}^3$</p>	2	L 3 L 4 K 5
<p>$\overline{MP_n} (\varphi) = 4 \cdot \tan \varphi \text{ cm}$ $V(\varphi) = 30 \cdot \tan \varphi \text{ cm}^3$</p>		

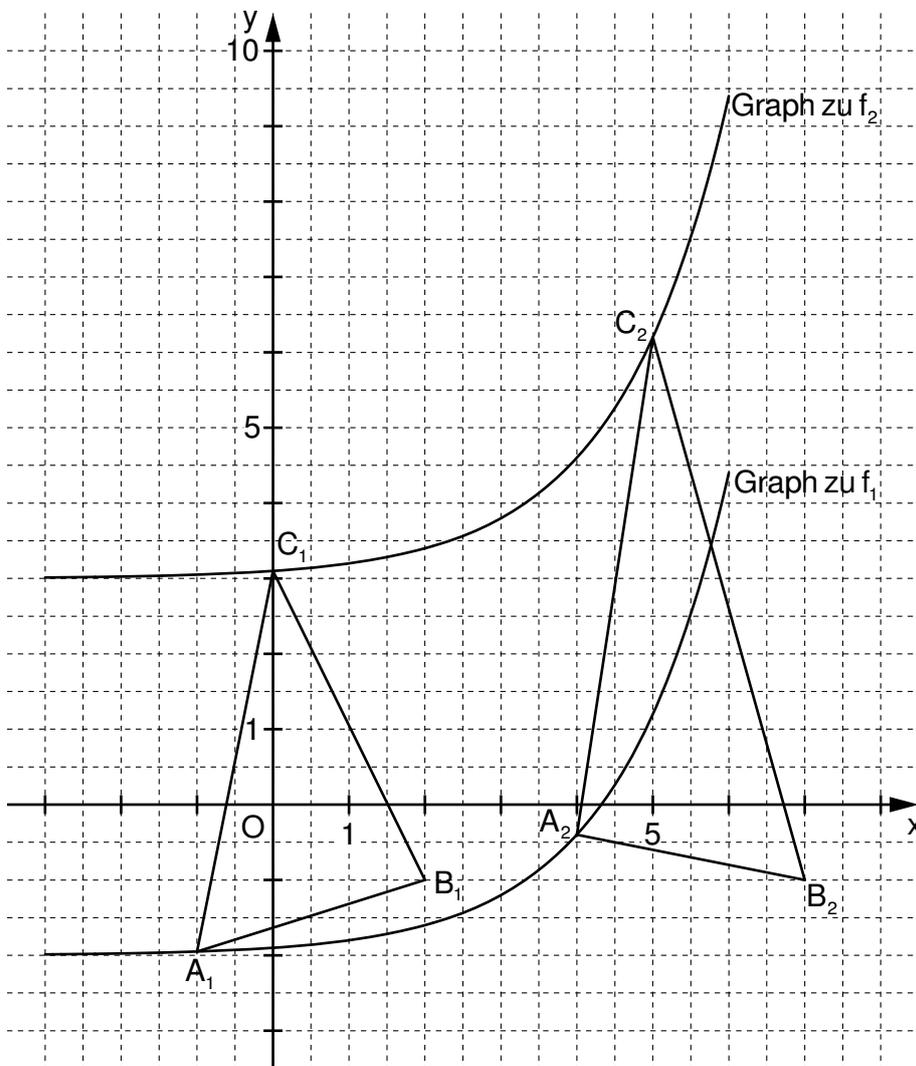
A 3.3	$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot 5 = 30 \cdot \tan \varphi$	$\varphi \in]0^\circ; 51,34^\circ]$	2	L 3 L 4 K 5
	$\Leftrightarrow \varphi = 45^\circ$	$L = \{45^\circ\}$		
			20	

Aufgabengruppe B

Nachtermin

AUFGABE B 1: FUNKTIONEN

B 1.1 Wertemenge von $f_1: \{y \mid y > -2\}$



2

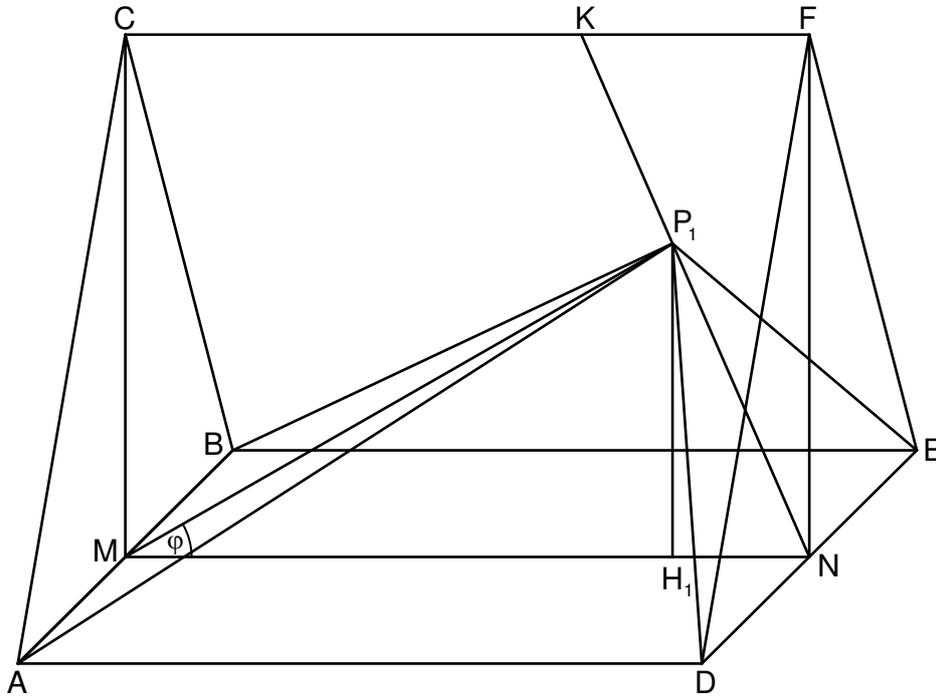
L 4
K 4
K 5

B 1.2	$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 2 \cdot (0,2 \cdot 2^{x-1} - 2) \end{pmatrix}$ $\Rightarrow y' = 0,4 \cdot 2^{x-1} - 4$ $\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ 0,4 \cdot 2^{x-1} - 4 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}$ <p>...</p> $\Rightarrow y'' = 0,4 \cdot 2^{x-2} + 3$ $f_2: y = 0,4 \cdot 2^{x-2} + 3$ <p>Einzeichnen des Graphen zu f_2</p>	$x', y', x \in \mathbb{R}$ $x'', y'', x' \in \mathbb{R}$ $x, y \in \mathbb{R}$	3	L 4 K 4 K 5	
B 1.3	Einzeichnen der Dreiecke $A_1B_1C_1$ und $A_2B_2C_2$		2	L 3 K 4	
B 1.4	$\overrightarrow{A_n B_n}(x) = \begin{pmatrix} x+3-x \\ -1 - (0,2 \cdot 2^{x-1} - 2) \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{A_n C_n}(x) = \begin{pmatrix} x+1-x \\ 0,4 \cdot 2^{x-1} + 3 - (0,2 \cdot 2^{x-1} - 2) \end{pmatrix}$	$\overrightarrow{A_n B_n}(x) = \begin{pmatrix} 3 \\ -0,2 \cdot 2^{x-1} + 1 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{A_n C_n}(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0,2 \cdot 2^{x-1} + 5 \end{pmatrix}$	$x \in \mathbb{R}$ $x \in \mathbb{R}$ $x \in \mathbb{R}$	3	L 3 L 4 K 5
B 1.5	$A(x) = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -0,2 \cdot 2^{x-1} + 1 & 0,2 \cdot 2^{x-1} + 5 \end{vmatrix} \text{ FE}$ <p>...</p> $A(x) = \underbrace{(0,4 \cdot 2^{x-1} + 7)}_{\substack{>0 \\ >7}} \text{ FE}$	$x \in \mathbb{R}$	3	L 3 L 4 K 1 K 5	
B 1.6	$0,2 \cdot 2^{x-1} - 2 = -1$ <p>...</p> $\Leftrightarrow x = 3,32$ $\overrightarrow{A_3 C_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0,2 \cdot 2^{3,32-1} + 5 \end{pmatrix}$ $\tan \sphericalangle B_3 A_3 C_3 = \frac{6,00}{1}$	$x \in \mathbb{R}$ $L = \{3,32\}$ $\overrightarrow{A_3 C_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6,00 \end{pmatrix}$ $\sphericalangle B_3 A_3 C_3 = 80,54^\circ$	4	L 2 L 4 K 2 K 5	
			17		

AUFGABE B 2: RAUMGEOMETRIE

B 2.1 $|\overline{MC}| = \frac{8}{2} \cdot \sqrt{3} \text{ cm}$

$|\overline{MC}| = 6,93 \text{ cm}$



3

L 2
L 3
K 4
K 5

B 2.2 Einzeichnen der Strecke \overline{NK}

$\tan \sphericalangle NKF = \frac{6,93}{3}$

$\sphericalangle NKF = 66,59^\circ$

2

L 2
L 3
K 4
K 5

B 2.3 Einzeichnen der Strecke $\overline{MP_1}$ und des Dreiecks AP_1B

1

L 3
K 4

B 2.4 $\frac{|\overline{MP_n}|}{\sin 66,59^\circ} = \frac{9 \text{ cm}}{\sin(180^\circ - (66,59^\circ + \varphi))}$

$\varphi \in]0^\circ; 49,11^\circ]$

$|\overline{MP_n}|(\varphi) = \frac{8,26}{\sin(\varphi + 66,59^\circ)} \text{ cm}$

Wegen $\sin(\varphi + 66,59^\circ) \leq 1$ ($\varphi \in]0^\circ; 49,11^\circ]$) gilt für die Strecken $\overline{MP_n}$:

$|\overline{MP_n}| \geq 8,26 \text{ cm}.$

Folglich gilt: $A \geq 0,5 \cdot 8 \cdot 8,26 \text{ cm}^2$, also $A \geq 33,04 \text{ cm}^2$.

4

L 3
L 4
K 1
K 5

<p>B 2.5 Einzeichnen der Pyramide $ADEBP_1$ und ihrer Höhe $\overline{P_1H_1}$</p> $V = \frac{1}{3} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{AD} \cdot \overline{P_nH_n} $ $\sin \varphi = \frac{ \overline{P_nH_n} }{ \overline{MP_n} } \quad \overline{P_nH_n} (\varphi) = \frac{8,26 \cdot \sin \varphi}{\sin(\varphi + 66,59^\circ)} \text{ cm} \quad \varphi \in]0^\circ; 49,11^\circ]$ $V(\varphi) = \frac{1}{3} \cdot 8 \cdot 9 \cdot \frac{8,26 \cdot \sin \varphi}{\sin(\varphi + 66,59^\circ)} \text{ cm}^3 \quad \varphi \in]0^\circ; 49,11^\circ]$ $V(\varphi) = \frac{198,24 \cdot \sin \varphi}{\sin(\varphi + 66,59^\circ)} \text{ cm}^3$	3	L 3 L 4 K 4
<p>B 2.6 $V_{ABCDEF} = 0,5 \cdot 8 \cdot 6,93 \cdot 9 \text{ cm}^3$</p> $V_{ADEBP_1} = \frac{198,24 \cdot \sin 30^\circ}{\sin(30^\circ + 66,59^\circ)} \text{ cm}^3$ $\frac{99,78}{249,48} \cdot 100\% = 40,00\%$	3	L 1 L 2 K 5
16		

Hinweis: Bei einigen Teilaufgaben sind auch andere Lösungswege möglich. Für richtige andere Lösungen gelten die jeweils angegebenen Punkte entsprechend; die Anzahl der Punkte bei den einzelnen Teilaufgaben darf jedoch nicht verändert werden. Insbesondere sind Lösungswege, bei denen der (grafikfähige) Taschenrechner verwendet wird, entsprechend ihrer Dokumentation bzw. ihrer Nachvollziehbarkeit zu bepunkten.

Bei der Korrektur ist zu beachten, dass die Vervielfältigung der Lösungsvorlage zu Verzerrungen der Zeichnungen führen kann.