Prüfungsdauer:
150 Minuten

Abschlussprüfung 2021

an den Realschulen in Bayern

Mathematik I

inhaltlich unveränderte, an den Zeichenkatalog des LehrplanPLUS angepasste Fassung

Name: ________________________________ Vorname: ________________________________

Klasse: ____________ Platznummer: ____________ Punkte: ____________

Aufgabe A 1 **Haupttermin**

A 1.0 Informationen über die Leistungsfähigkeit eines Sportlers kann man mithilfe von sogenannten Laktat-Tests ermitteln, da die Laktat-Konzentration im Blut mit steigender Laufgeschwindigkeit zunimmt.

Bei einem solchen Test wird die Laktat-Konzentration $y\,\frac{\text{mmol}}{\text{l}}$ (Millimol pro Liter Blut) in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit $x\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ erfasst.

Für Paul lässt sich dieser Zusammenhang bei einem Test näherungsweise durch die Funktion f mit der Gleichung $y = 0{,}01 \cdot 1{,}5^x + 0{,}85$ $\left(x, y \in \mathbb{R}_0^+\right)$ beschreiben.

Runden Sie im Folgenden auf zwei Stellen nach dem Komma.

A 1.1 Bei Paul wurde für die Geschwindigkeiten von $10\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ und $12\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ jeweils eine Messung der Laktat-Konzentration durchgeführt.

Berechnen Sie mithilfe der Funktion f die zugehörigen Funktionswerte für diese beiden Geschwindigkeiten und ermitteln Sie sodann, um wie viel Prozent sich die Laktat-Konzentration zwischen diesen beiden Messungen erhöht hat.

3 P

A 1.2 Berechnen Sie die nach y aufgelöste Gleichung der Umkehrfunktion zu f.

2 P

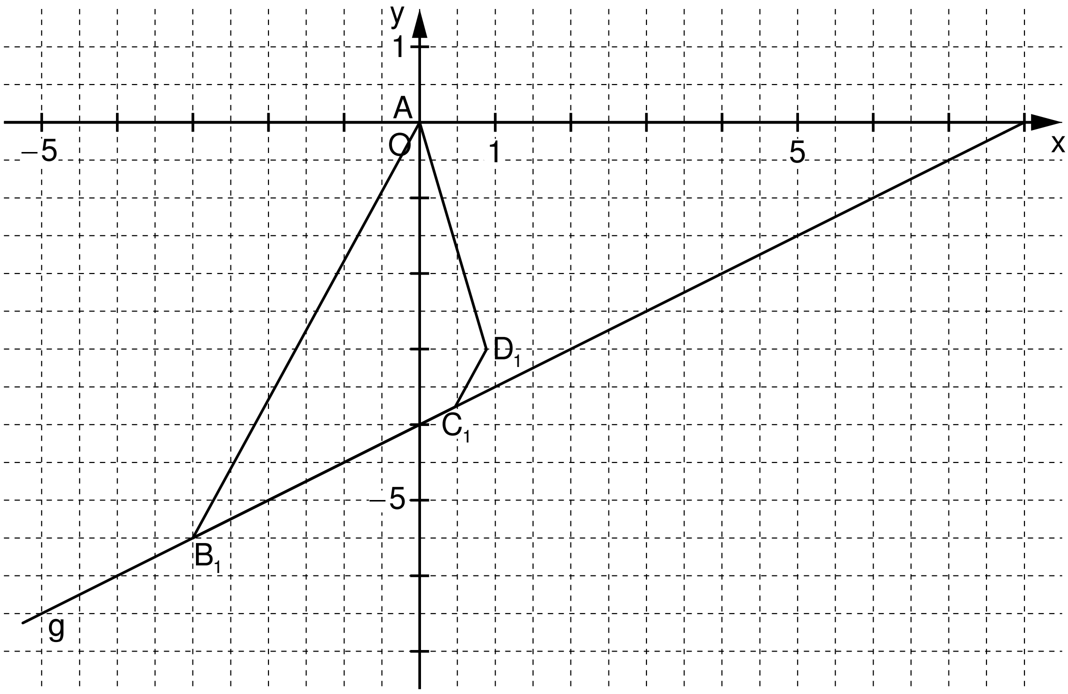
A 2.0 Punkte $B_n\left(x\,\middle|\,0{,}5x-4\right)$ und Punkte C_n liegen auf der Geraden g mit der Gleichung $y = 0{,}5x - 4$ $(x, y \in \mathbb{R})$. Sie sind für $x > -4{,}25$ zusammen mit dem Punkt $A(0|0)$ und Punkten D_n Eckpunkte von Trapezen $AB_nC_nD_n$.

Es gilt: $\sphericalangle B_nAD_n = 45°$; $\left|\overline{AD_n}\right| = \frac{1}{2} \cdot \left|\overline{AB_n}\right|$; $\overline{AB_n} \parallel \overline{D_nC_n}$.

Runden Sie im Folgenden auf zwei Stellen nach dem Komma.

A 2.1 Im Koordinatensystem sind die Gerade g und das Trapez $AB_1C_1D_1$ für $x = -3$ bereits eingezeichnet.

Zeichnen Sie das Trapez $AB_2C_2D_2$ für $x = 2$ ein.



1 P

A 2.2 Im Trapez $AB_3C_3D_3$ gilt: $\sphericalangle C_3B_3A = 90°$.
Berechnen Sie den zugehörigen Wert von x.

3 P

A 2.3 Zeigen Sie rechnerisch, dass für die Koordinaten der Punkte D_n in Abhängigkeit von x gilt: $D_n\left(0{,}18x+1{,}41 \,\middle|\, 0{,}53x-1{,}41\right)$.

3 P

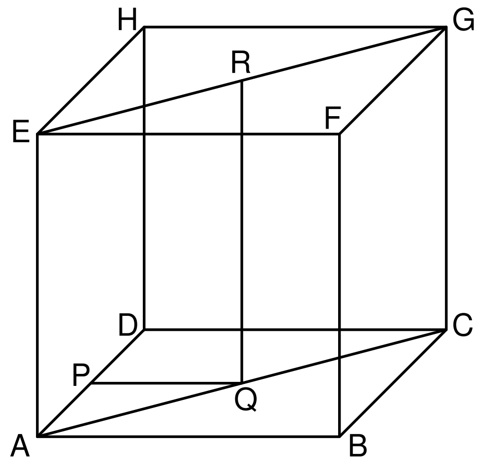
A 2.4 Berechnen Sie die Gleichung des Trägergraphen t der Punkte D_n und zeichnen Sie diesen in das Koordinatensystem zu A 2.1 ein.

3 P

A 3.0 Gegeben ist ein Schrägbild des Würfels ABCDEFGH mit $\left|\overline{AB}\right| = 4\ \text{cm}$.

P ist der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AD}$, Q ist der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AC}$ und R ist der Mittelpunkt der Strecke $\overline{EG}$.

Runden Sie im Folgenden auf zwei Stellen nach dem Komma.



A 3.1 Punkte $S_n \in \overline{QR}$ legen zusammen mit P und Q Winkel QPS_n mit dem Maß φ fest. Sie sind für $\varphi \in [\,0°; 63{,}43°\,[$ die Spitzen von Pyramiden $EFGHS_n$ mit der Grundfläche EFGH.

Zeichnen Sie die Strecke $\overline{PS_1}$ und die Pyramide $EFGHS_1$ für $\varphi = 30°$ in die Zeichnung zu A 3.0 ein. 1 P

A 3.2 Zeigen Sie rechnerisch, dass für das Volumen V der Pyramiden $EFGHS_n$ in Abhängigkeit von φ gilt: $V(\varphi) = (21{,}33 - 10{,}67 \cdot \tan\varphi)\ \text{cm}^3$.

3 P

A 3.3 Unter den Pyramiden $EFGHS_n$ hat die Pyramide $EFGHS_0$ das maximale Volumen V_0. Begründen Sie, weshalb gilt: $V_{\text{Würfel}} : V_0 = 3:1$.

2 P

Prüfungsdauer:
150 Minuten

Abschlussprüfung 2021

an den Realschulen in Bayern

inhaltlich unveränderte, an den Zeichenkatalog des LehrplanPLUS angepasste Fassung

Mathematik I

Aufgabe B 1 **Haupttermin**

B 1.0 Gegeben ist die Funktion f_1 mit der Gleichung $y = 3 \cdot \log_3(x+7) - 4 \; (x, y \in \mathbb{R})$.

Runden Sie im Folgenden auf zwei Stellen nach dem Komma.

B 1.1 Geben Sie die Gleichung der Asymptote h des Graphen zu f_1 an.

Zeichnen Sie sodann den Graphen zu f_1 für $x \in [-4; 9]$ in ein Koordinatensystem.
Für die Zeichnung: Längeneinheit 1 cm; $-4 \leq x \leq 9$; $-6 \leq y \leq 4$ 2 P

B 1.2 Der Graph der Funktion f_1 wird durch Achsenspiegelung an der x-Achse und anschließende Parallelverschiebung mit dem Vektor $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ auf den Graphen der Funktion f_2 abgebildet.

Bestätigen Sie durch Rechnung, dass für die Gleichung der Funktion f_2 gilt:
$y = -3 \cdot \log_3(x+6) + 2 \; (x, y \in \mathbb{R})$.

Zeichnen Sie sodann den Graphen zu f_2 für $x \in [-4; 9]$ in das Koordinatensystem zu B 1.1 ein. 3 P

B 1.3 Punkte $A_n(x \mid -3 \cdot \log_3(x+6) + 2)$ auf dem Graphen zu f_2 und Punkte $D_n(x \mid 3 \cdot \log_3(x+7) - 4)$ auf dem Graphen zu f_1 haben dieselbe Abszisse x. Sie sind für $x > -3{,}46$ zusammen mit Punkten B_n und C_n Eckpunkte von Parallelogrammen $A_nB_nC_nD_n$. Die Punkte B_n liegen dabei ebenfalls auf dem Graphen zu f_2, ihre x-Koordinate ist stets um 4 größer als die Abszisse x der Punkte A_n.

Zeichnen Sie das Parallelogramm $A_1B_1C_1D_1$ für $x = -1{,}5$ und das Parallelogramm $A_2B_2C_2D_2$ für $x = 4$ in das Koordinatensystem zu B 1.1 ein. 2 P

B 1.4 Zeigen Sie rechnerisch, dass für den Flächeninhalt A der Parallelogramme $A_nB_nC_nD_n$ in Abhängigkeit von der Abszisse x der Punkte A_n gilt:
$A(x) = [12 \cdot \log_3(x^2 + 13x + 42) - 24]$ FE. 3 P

B 1.5 Im Parallelogramm $A_3B_3C_3D_3$ liegt der Punkt D_3 auf der x-Achse.

Bestimmen Sie rechnerisch den Flächeninhalt des Parallelogramms $A_3B_3C_3D_3$. 3 P

B 1.6 Das Parallelogramm $A_4B_4C_4D_4$ hat einen Flächeninhalt von 16 FE.

Bestimmen Sie rechnerisch die Koordinaten des Punktes B_4. 4 P

Bitte wenden!

Prüfungsdauer:
150 Minuten

Abschlussprüfung 2021

an den Realschulen in Bayern

inhaltlich unveränderte, an den Zeichenkatalog des LehrplanPLUS angepasste Fassung

Mathematik I

Aufgabe B 2 **Haupttermin**

B 2.0 Die Diagonalen $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$ des Drachenvierecks ABCD schneiden sich im Punkt M. Das Drachenviereck ABCD ist die Grundfläche der Pyramide ABCDS mit der Spitze S und der Höhe $\overline{MS}$.

Es gilt: $\left|\overline{AC}\right| = 11\,\text{cm}$; $\left|\overline{AM}\right| = 4{,}5\,\text{cm}$; $\left|\overline{BD}\right| = 10\,\text{cm}$; $\left|\overline{MS}\right| = 9\,\text{cm}$.

Runden Sie im Folgenden auf zwei Stellen nach dem Komma.

B 2.1 Zeichnen Sie das Schrägbild der Pyramide ABCDS, wobei $\overline{AC}$ auf der Schrägbildachse und der Punkt A links vom Punkt C liegen soll.

Für die Zeichnung gilt: $q = \frac{1}{2}$; $\omega = 45°$.

Berechnen Sie sodann das Maß des Winkels MSC.

$\left[\text{Ergebnis: } \sphericalangle MSC = 35{,}84°\right]$ 3 P

B 2.2 Punkte P_n liegen auf der Strecke $\overline{CS}$. Die Winkel P_nMS haben das Maß φ mit $\varphi \in \left]0°;90°\right[$. Die Punkte P_n sind zusammen mit den Punkten B und D die Eckpunkte von Dreiecken BDP_n.

Zeichnen Sie die Strecke $\overline{MP_1}$ sowie das Dreieck BDP_1 für $\varphi = 30°$ in das Schrägbild zu B 2.1 ein.

Zeigen Sie sodann, dass für die Länge der Strecken $\overline{MP_n}$ in Abhängigkeit von φ gilt: $\left|\overline{MP_n}\right|(\varphi) = \dfrac{5{,}27}{\sin(\varphi + 35{,}84°)}\,\text{cm}$. 3 P

B 2.3 Das Dreieck BDP_2 ist gleichseitig. Berechnen Sie den zugehörigen Wert für φ. 3 P

B 2.4 Die Pyramiden $BDSP_n$ haben die Grundfläche BDS und die Spitzen P_n. Die Höhenfußpunkte F_n der Pyramiden $BDSP_n$ liegen auf der Strecke $\overline{MS}$.

Zeichnen Sie die Höhe $\overline{F_1P_1}$ in das Schrägbild zu B 2.1 ein.

Berechnen Sie sodann das Volumen V der Pyramiden $BDSP_n$ in Abhängigkeit von φ.

$\left[\text{Zwischenergebnis: } \left|\overline{F_nP_n}\right|(\varphi) = \dfrac{5{,}27 \cdot \sin\varphi}{\sin(\varphi + 35{,}84°)}\,\text{cm}\right]$ 3 P

B 2.5 Die Pyramiden ABDS und $BDSP_3$ haben das gleiche Volumen.

Berechnen Sie den zugehörigen Wert für φ. 3 P

Bitte wenden!

Lösungsmuster und Bewertung

Abschlussprüfung 2021

an den Realschulen in Bayern

Mathematik I

inhaltlich unveränderte, an den Zeichenkatalog des LehrplanPLUS angepasste Fassung

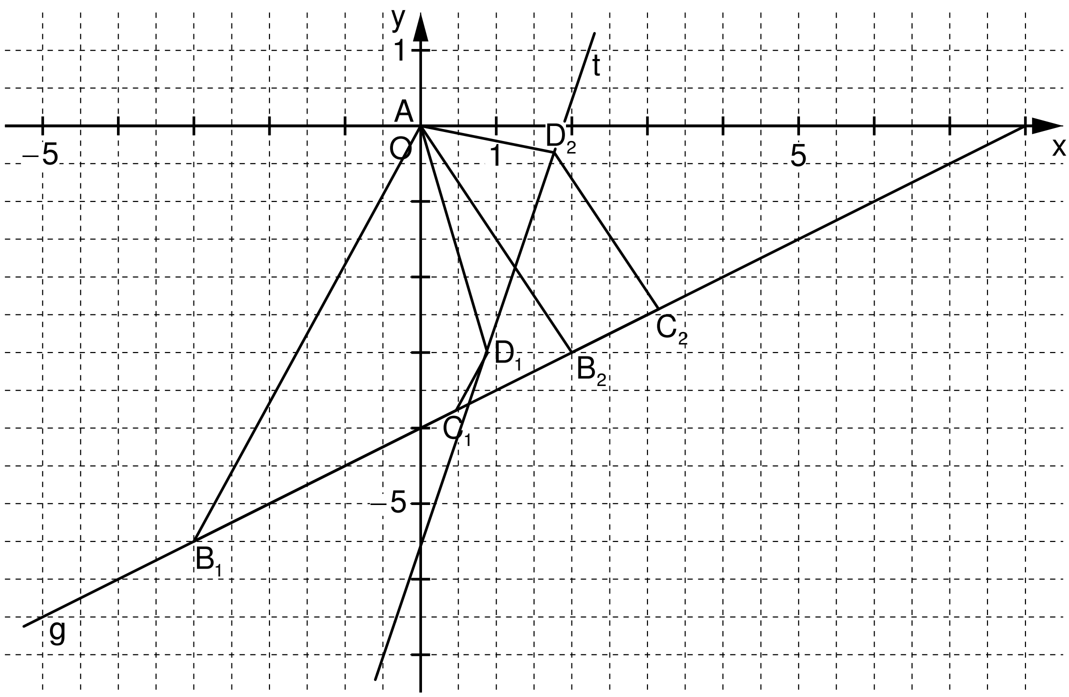
Aufgabengruppe A **Haupttermin**

AUFGABE A 1: FUNKTIONEN

A 1.1 $f(10)=0{,}01\cdot 1{,}5^{10}+0{,}85$ $\quad f(10)=1{,}43$ $f(12)=0{,}01\cdot 1{,}5^{12}+0{,}85$ $\quad f(12)=2{,}15$ $\frac{2{,}15-1{,}43}{1{,}43}\cdot 100\,\%=50{,}35\,\%$ Die Laktat-Konzentration hat sich um $50{,}35\,\%$ erhöht.	3	L 1 L 4 K 3 K 5
A 1.2 $x=0{,}01\cdot 1{,}5^{y}+0{,}85$ $\quad x,y\in \mathbb{R}_0^+$ ... $\Leftrightarrow \quad y=\log_{1{,}5}(100x-85)$	2	L 4 K 5

AUFGABE A 2: EBENE GEOMETRIE

A 2.1



1	L 3 K 4

A 2.2 $\overrightarrow{AB_3} \odot \overrightarrow{v_g} = 0$

$$\overrightarrow{AB_n}(x) = \begin{pmatrix} x \\ 0{,}5x-4 \end{pmatrix} \qquad x \in \mathbb{R}; x > -4{,}25$$

$$\overrightarrow{v_g} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ 0{,}5x-4 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \qquad x \in \mathbb{R}; x > -4{,}25$$

...

$\Leftrightarrow \quad x = 1{,}6 \qquad \mathbb{L} = \{1{,}6\}$

3 — L 3, L 4, K 2, K 5

A 2.3 $\overrightarrow{AB_n} \xmapsto{A;\alpha=45^\circ} \overrightarrow{AB_n'} \xmapsto{A;k=0,5} \overrightarrow{AD_n}$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = 0{,}5 \cdot \begin{pmatrix} \cos 45^\circ & -\sin 45^\circ \\ \sin 45^\circ & \cos 45^\circ \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ 0{,}5x-4 \end{pmatrix} \qquad x', y', x \in \mathbb{R}; x > -4{,}25$$

...

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}18x+1{,}41 \\ 0{,}53x-1{,}41 \end{pmatrix} \qquad D_n(0{,}18x+1{,}41 \mid 0{,}53x-1{,}41)$$

3 — L 3, K 2, K 5

A 2.4

$$\left| \begin{array}{l} x_{D_n} = 0{,}18x+1{,}41 \\ \wedge\ y_{D_n} = 0{,}53x-1{,}41 \end{array} \right. \qquad x_{D_n}, y_{D_n}, x \in \mathbb{R}; x > -4{,}25$$

...

$\Rightarrow \quad y_{D_n} = 2{,}94x_{D_n} - 5{,}56$

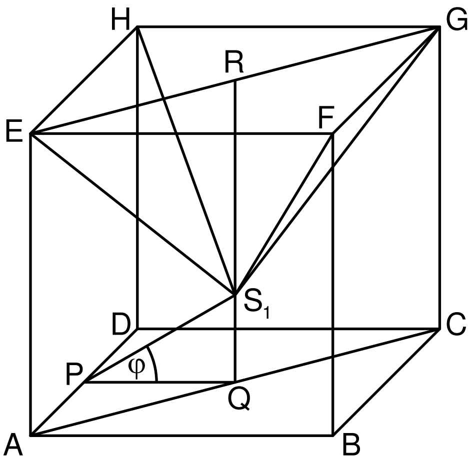
$t\!: y = 2{,}94x - 5{,}56 \qquad x, y \in \mathbb{R}$

Einzeichnen des Trägergraphen

3 — L 4, K 4, K 5

AUFGABE A 3: RAUMGEOMETRIE

A 3.0



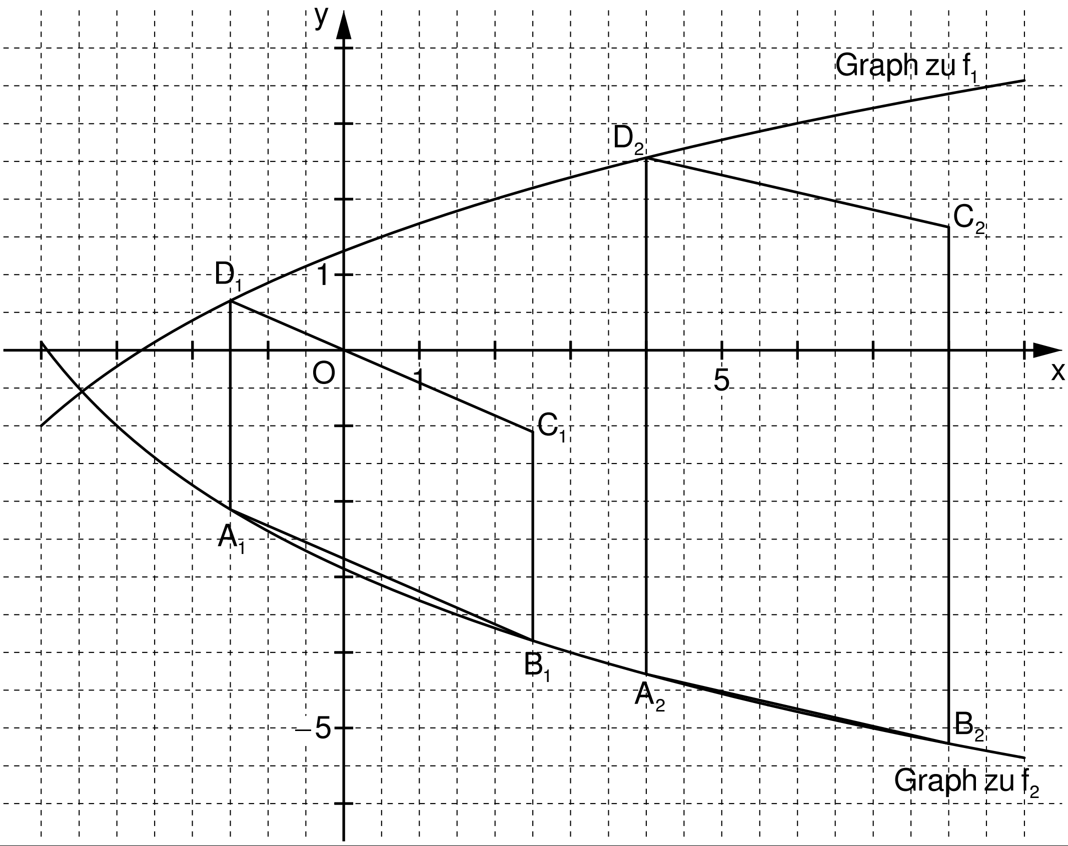
A 3.1 Einzeichnen der Pyramide $EFGHS_1$

1 — L 3, K 4

A 3.2 $V=\frac{1}{3}\cdot\left|\overline{EF}\right|^2\cdot\left|\overline{RS_n}\right|$ $\left|\overline{RS_n}\right|=\left|\overline{QR}\right|-\left|\overline{QS_n}\right|$ $\tan\varphi=\frac{\left|\overline{QS_n}\right|}{0{,}5\cdot 4\text{ cm}}$ $\quad\left|\overline{QS_n}\right|(\varphi)=2\cdot\tan\varphi\text{ cm}\quad \varphi\in[\,0°;63{,}43°\,[$ $\left|\overline{RS_n}\right|(\varphi)=(4-2\cdot\tan\varphi)\text{ cm}\quad \varphi\in[\,0°;63{,}43°\,[$ $V(\varphi)=\frac{1}{3}\cdot 4^2\cdot(4-2\cdot\tan\varphi)\text{ cm}^3\quad \varphi\in[\,0°;63{,}43°\,[$ $V(\varphi)=(21{,}33-10{,}67\cdot\tan\varphi)\text{ cm}^3$	3	L 3 L 4 K 2
A 3.3 Für die Pyramide $EFGHS_0$ gilt: $\left|\overline{RS_0}\right|=\left|\overline{RQ}\right|=4\text{ cm}$. $V_0=\frac{1}{3}\cdot\underbrace{4^2\cdot 4\text{ cm}^3}_{V_{\text{Würfel}}}=\frac{1}{3}\cdot V_{\text{Würfel}}\quad\Rightarrow\quad V_{\text{Würfel}}:V_0=3:1$	2	L 3 K 1
	21	

Aufgabengruppe B **Haupttermin**

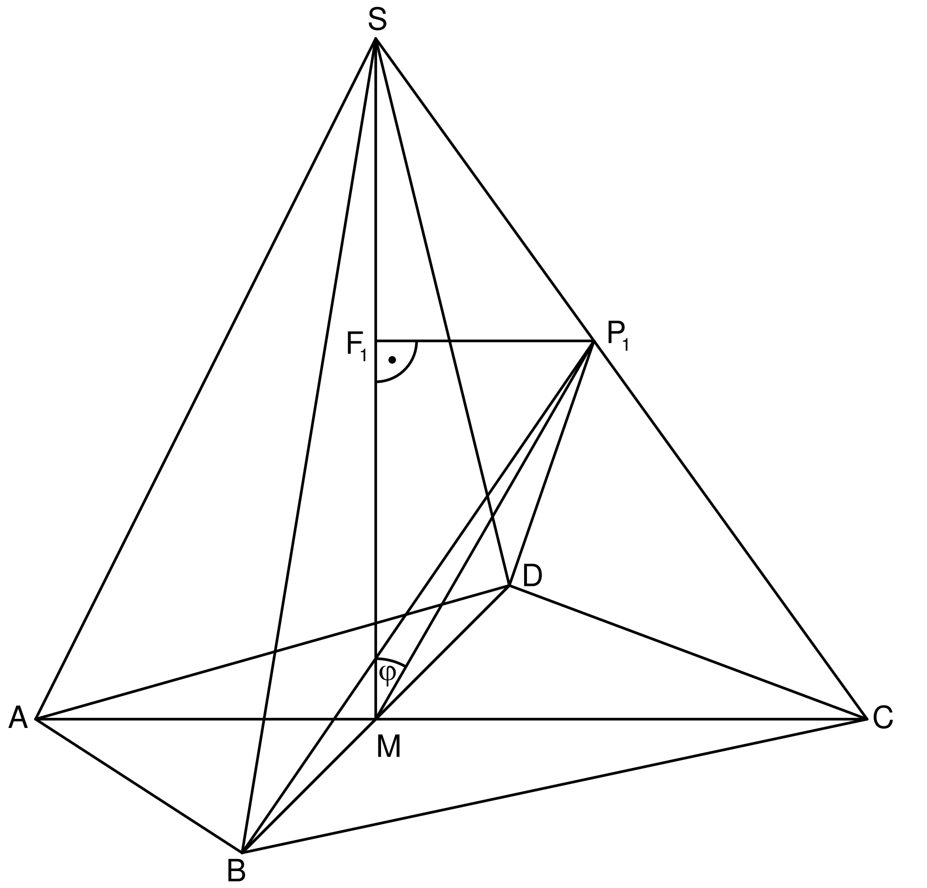
AUFGABE B 1: FUNKTIONEN

B 1.1 h: $x=-7$ 	2	L 4 K 4 K 5

B 1.2 $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -(3 \cdot \log_3(x+7)-4) \end{pmatrix}$ $\quad x', y', x \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow \quad y' = -3 \cdot \log_3(x'+7)+4$ $\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ -3 \cdot \log_3(x'+7)+4 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ $\quad x'', y'', x' \in \mathbb{R}$ ... $\Rightarrow \quad y'' = -3 \cdot \log_3(x''+6)+2$ $f_2 \colon y = -3 \cdot \log_3(x+6)+2 \quad x, y \in \mathbb{R}$ Einzeichnen des Graphen zu f_2	3	L 4 K 4 K 5
B 1.3 Einzeichnen der Parallelogramme $A_1B_1C_1D_1$ und $A_2B_2C_2D_2$	2	L 3 K 4
B 1.4 $A = \lvert \overline{A_nD_n} \rvert \cdot d(A_n; B_nC_n)$ $\lvert \overline{A_nD_n} \rvert(x) = [3 \cdot \log_3(x+7)-4-(-3 \cdot \log_3(x+6)+2)]$ LE $\quad x \in \mathbb{R}; x > -3{,}46$ ... $\lvert \overline{A_nD_n} \rvert(x) = [3 \cdot \log_3(x^2+13x+42)-6]$ LE $A(x) = [3 \cdot \log_3(x^2+13x+42)-6] \cdot 4$ FE $\quad x \in \mathbb{R}; x > -3{,}46$ $A(x) = [12 \cdot \log_3(x^2+13x+42)-24]$ FE	3	L 3 L 4 K 2 K 5
B 1.5 $3 \cdot \log_3(x+7)-4 = 0 \quad x \in \mathbb{R}; x > -3{,}46$ ... $\Leftrightarrow \quad x = -2{,}67 \quad \mathbb{L} = \{-2{,}67\}$ $A(-2{,}67) = 5{,}15$ FE	3	L 4 K 2 K 5
B 1.6 $12 \cdot \log_3(x^2+13x+42)-24 = 16 \quad x \in \mathbb{R}; x > -3{,}46$ ... $\Leftrightarrow \quad x = -0{,}24 \quad \mathbb{L} = \{-0{,}24\}$ $B_4(-0{,}24+4 \mid -3 \cdot \log_3(-0{,}24+4+6)+2) \quad B_4(3{,}76 \mid -4{,}22)$	4	L 3 L 4 K 2 K 5
	17	

AUFGABE B 2: RAUMGEOMETRIE

B 2.1



$\tan\sphericalangle MSC = \frac{11-4,5}{9}$ $\qquad$ $\sphericalangle MSC = 35,84°$

3

L 2
L 3
K 4
K 5

B 2.2 Einzeichnen der Strecke $\overline{MP_1}$ sowie des Dreiecks BDP_1

$$\frac{\left|\overline{MP_n}\right|}{\sin 35,84°} = \frac{9\text{ cm}}{\sin\left(180° - (\varphi + 35,84°)\right)} \qquad \varphi \in \left]0°;90°\right[$$

$$\left|\overline{MP_n}\right|(\varphi) = \frac{5,27}{\sin(\varphi + 35,84°)}\text{ cm}$$

3

L 3
L 4
K 2
K 4

B 2.3 Für das Dreieck BDP_2 gilt: $\left|\overline{MP_2}\right| = \frac{10}{2}\sqrt{3}\text{ cm}$.

$$\frac{10}{2}\sqrt{3} = \frac{5,27}{\sin(\varphi + 35,84°)} \qquad \varphi \in \left]0°;90°\right[$$

...

$\Leftrightarrow \qquad \varphi = 1,64°$ $\qquad$ $L = \{1,64°\}$

3

L 3
L 4
K 2
K 5

B 2.4 Einzeichnen der Höhe $\overline{F_1P_1}$ $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left\|\overline{BD}\right\| \cdot \left\|\overline{MS}\right\| \cdot \left\|\overline{F_nP_n}\right\|$ $\sin\varphi = \frac{\left\|\overline{F_nP_n}\right\|}{\left\|\overline{MP_n}\right\|}$ $\varphi \in]0°;90°[$ $\left\|\overline{F_nP_n}\right\|(\varphi) = \frac{5{,}27 \cdot \sin\varphi}{\sin(\varphi + 35{,}84°)}$ cm $V(\varphi) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 9 \cdot \frac{5{,}27 \cdot \sin\varphi}{\sin(\varphi + 35{,}84°)}$ cm³ $\varphi \in]0°;90°[$ $V(\varphi) = \frac{79{,}05 \cdot \sin\varphi}{\sin(\varphi + 35{,}84°)}$ cm³	3	L 3 L 4 K 2 K 4
B 2.5 Für die Pyramide $BDSP_3$ gilt: $\left\|\overline{F_3P_3}\right\| = 4{,}5$ cm. $4{,}5 = \frac{5{,}27 \cdot \sin\varphi}{\sin(\varphi + 35{,}84°)}$ $\varphi \in]0°;90°[$ ... $\Leftrightarrow$ $\varphi = 58{,}38°$ $\mathbb{L} = \{58{,}38°\}$	3	L 3 L 4 K 2 K 5
	15	

Hinweis: Bei einigen Teilaufgaben sind auch andere Lösungswege möglich. Für richtige andere Lösungen gelten die jeweils angegebenen Punkte entsprechend; die Anzahl der Punkte bei den einzelnen Teilaufgaben darf jedoch nicht verändert werden. Insbesondere sind Lösungswege, bei denen der (grafikfähige) Taschenrechner verwendet wird, entsprechend ihrer Dokumentation bzw. ihrer Nachvollziehbarkeit zu bepunkten.

Bei der Korrektur ist zu beachten, dass die Vervielfältigung der Lösungsvorlage zu Verzerrungen der Zeichnungen führen kann.