Prüfungsdauer:
150 Minuten

Abschlussprüfung 2021

an den Realschulen in Bayern

Mathematik II

! inhaltlich unveränderte, an den Zeichenkatalog des LehrplanPLUS angepasste Fassung !

Name: ______________________ Vorname: ______________________

Klasse: __________ Platznummer: __________ Punkte: __________

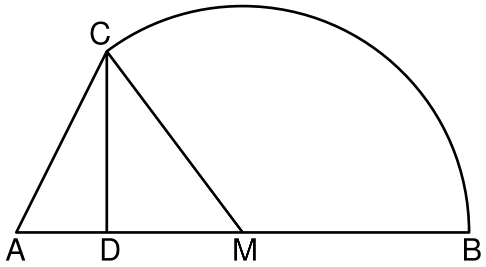
Aufgabe A 1 Haupttermin

A 1.0 Die nebenstehende Skizze zeigt die Figur, die durch die Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{AC}$ sowie den Kreisbogen $\overset{\frown}{BC}$ mit dem Mittelpunkt M und dem Radius $r = |\overline{MB}|$ begrenzt wird.

Es gilt:

$|\overline{AD}| = 2\text{ cm}$; $|\overline{MA}| = |\overline{MB}| = |\overline{MC}| = 5\text{ cm}$; $\sphericalangle MDC = 90°$.

Runden Sie im Folgenden auf zwei Stellen nach dem Komma.



A 1.1 Berechnen Sie das Maß des Winkels CMD und die Länge b des Kreisbogens $\overset{\frown}{BC}$.
[Teilergebnis: $\sphericalangle CMD = 53{,}13°$]

3 P

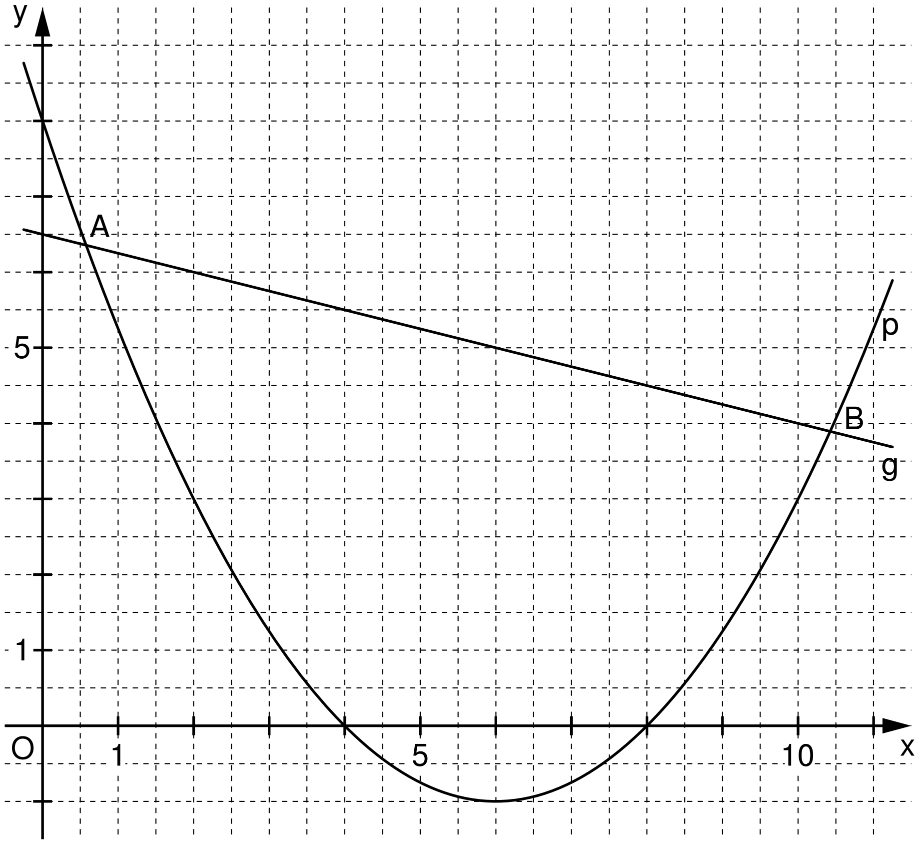
A 1.2 Ermitteln Sie rechnerisch den Flächeninhalt der Figur aus A 1.0.

2 P

A 2.0 Gegeben sind die Parabel p mit der Gleichung $y = 0{,}25x^2 - 3x + 8$ und die Gerade g mit der Gleichung $y = -0{,}25x + 6{,}5$. Es gilt: $x, y \in \mathbb{R}$.

Die Punkte A und B sind die Schnittpunkte der Parabel p und der Gerade g.

Runden Sie im Folgenden auf zwei Stellen nach dem Komma.



A 2.1 Berechnen Sie die Koordinaten der Punkte A und B.

3 P

A 2.2 Punkte $P_n\left(x\,\middle|\,0{,}25x^2-3x+8\right)$ auf p und Punkte $Q_n\left(x\,\middle|\,-0{,}25x+6{,}5\right)$ auf g haben dieselbe Abszisse x. Für die Strecken $\overline{P_nQ_n}$ gilt: $y_{Q_n} > y_{P_n}$. Die Mittelpunkte M_n der Strecken $\overline{P_nQ_n}$ sind zugleich Mittelpunkte von Kreisen k_n mit den Durchmessern $\left|\overline{P_nQ_n}\right|$.

Zeichnen Sie die Strecke $\overline{P_1Q_1}$ sowie den Mittelpunkt M_1 und den Kreis k_1 mit dem Durchmesser $\left|\overline{P_1Q_1}\right|$ für $x = 7$ in das Koordinatensystem zu A 2.0 ein. 2 P

A 2.3 Zeigen Sie rechnerisch, dass für die Länge der Strecken $\overline{P_nQ_n}$ in Abhängigkeit von der Abszisse x der Punkte P_n gilt: $\left|\overline{P_nQ_n}\right|(x) = \left(-0{,}25x^2 + 2{,}75x - 1{,}5\right)$ LE.

1 P

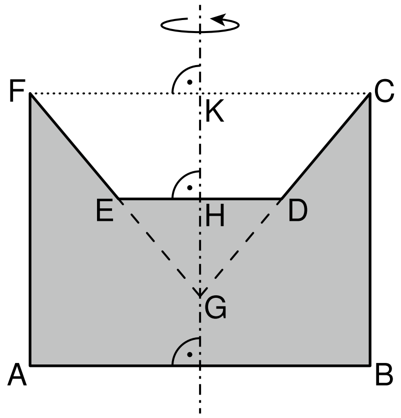
A 2.4 Unter den Kreisen k_n gibt es einen Kreis k_0 mit maximalem Umfang u_{max}.
Berechnen Sie u_{max}.

2 P

A 2.5 Ein Kreis k_3 hat den 4-fachen Durchmesser eines Kreises k_2.
Hat k_3 dann den 16-fachen Flächeninhalt von k_2? Begründen Sie Ihre Antwort.

2 P

A 3 Die nebenstehende Skizze zeigt den Axialschnitt ABCDEF eines Körpers mit der Rotationsachse GK. Der Punkt G ist der Schnittpunkt der Geraden CD und FE.



Es gilt:

$|\overline{AB}| = |\overline{CF}| = 5\text{ cm}$; $|\overline{AF}| = |\overline{BC}| = 4\text{ cm}$;

$|\overline{ED}| = 2{,}4\text{ cm}$; $\sphericalangle GFK = 50°$;

$\overline{AF} \parallel \overline{GK} \parallel \overline{BC}$.

Berechnen Sie das Volumen des Rotationskörpers auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet.

$\left[\text{Zwischenergebnisse: } |\overline{GK}| = 2{,}98\text{ cm};\ |\overline{GH}| = 1{,}43\text{ cm}\right]$

5 P

Prüfungsdauer:
150 Minuten

Abschlussprüfung 2021

an den Realschulen in Bayern

! inhaltlich unveränderte, an den Zeichenkatalog des LehrplanPLUS angepasste Fassung !

Mathematik II

Aufgabe B 1 **Haupttermin**

B 1.0 Die nebenstehende Skizze zeigt das Fünfeck ABCDE.

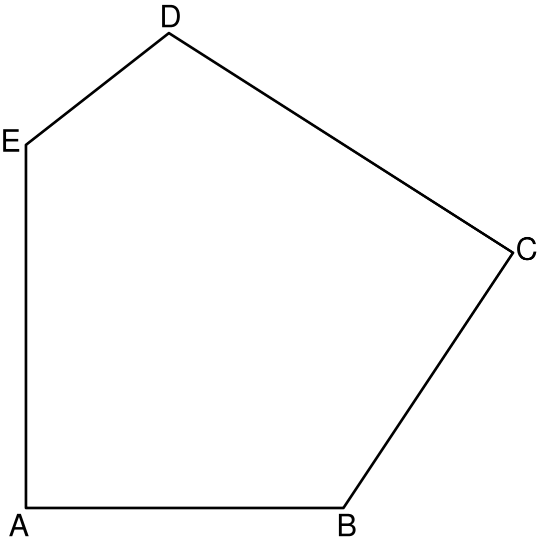
Es gilt:

$\left|\overline{AB}\right| = 7\text{ cm}$; $\left|\overline{AE}\right| = 8\text{ cm}$; $\left|\overline{DE}\right| = 4\text{ cm}$;

$\left|\overline{CE}\right| = 11\text{ cm}$; $\left|\overline{CD}\right| = 9\text{ cm}$;

$\sphericalangle BAE = 90°$; $\sphericalangle AED = 128°$.

Runden Sie im Folgenden auf zwei Stellen nach dem Komma.



B 1.1 Zeichnen Sie das Fünfeck ABCDE sowie die Strecken $\overline{BE}$ und $\overline{CE}$.

Berechnen Sie sodann die Länge der Strecke $\overline{BE}$ und das Maß des Winkels AEB.

$\left[\text{Teilergebnisse: } \left|\overline{BE}\right| = 10{,}63\text{ cm}; \sphericalangle AEB = 41{,}19°\right]$ 4 P

B 1.2 Ermitteln Sie durch Rechnung den Flächeninhalt des Vierecks ABCE.

$\left[\text{Zwischenergebnis: } \sphericalangle BEC = 36{,}33°\right]$ 4 P

B 1.3 Zeigen Sie rechnerisch, dass für die Länge der Strecke $\overline{BC}$ und das Maß des Winkels ECB gilt: $\left|\overline{BC}\right| = 6{,}75\text{ cm}$; $\sphericalangle ECB = 68{,}90°$. 2 P

B 1.4 Die Punkte $F \in \overline{CE}$ und $G \in \overline{BE}$ legen die Strecke $\overline{FG}$ fest, wobei gilt:
$\overline{FG} \parallel \overline{BC}$ und $\left|\overline{CF}\right| = 3\text{ cm}$.

Ergänzen Sie die Strecke $\overline{FG}$ in der Zeichnung zu B 1.1 und berechnen Sie den Flächeninhalt des Vierecks BCFG. 4 P

B 1.5 Ein Kreis mit dem Mittelpunkt A berührt die Strecke $\overline{BE}$ im Punkt R. Er schneidet die Strecke $\overline{AB}$ im Punkt Q und die Strecke $\overline{AE}$ im Punkt S.

Zeichnen Sie den Kreisbogen $\overset{\frown}{QS}$ und den Punkt R in die Zeichnung zu B 1.1 ein.

Ermitteln Sie sodann rechnerisch den Flächeninhalt des Sektors, der von den Strecken $\overline{AQ}$ und $\overline{AS}$ sowie dem Kreisbogen $\overset{\frown}{QS}$ begrenzt wird.

$\left[\text{Zwischenergebnis: } \left|\overline{AR}\right| = 5{,}27\text{ cm}\right]$ 3 P

Bitte wenden!

Prüfungsdauer:
150 Minuten

Abschlussprüfung 2021

an den Realschulen in Bayern

inhaltlich unveränderte, an den Zeichenkatalog des LehrplanPLUS angepasste Fassung

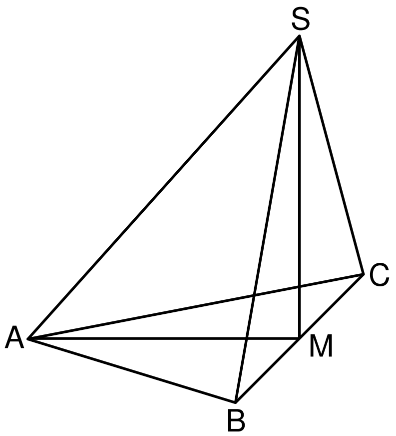
Mathematik II

Aufgabe B 2 **Haupttermin**

B 2.0 Die nebenstehende Skizze zeigt ein Schrägbild der Pyramide ABCS mit der Höhe $\overline{MS}$, deren Grundfläche das gleichschenklige Dreieck ABC ist. M ist der Mittelpunkt der Basis $\overline{BC}$.

Es gilt: $\left|\overline{AM}\right| = 9\text{ cm}$; $\left|\overline{BC}\right| = 12\text{ cm}$; $\left|\overline{MS}\right| = 10\text{ cm}$.

Runden Sie im Folgenden auf zwei Stellen nach dem Komma.



B 2.1 Zeichnen Sie das Schrägbild der Pyramide ABCS, wobei die Strecke $\overline{AM}$ auf der Schrägbildachse und der Punkt A links vom Punkt M liegen soll.

Für die Zeichnung gilt: $q = \frac{1}{2}$; $\omega = 45°$. 2 P

B 2.2 Berechnen Sie die Länge der Strecke $\overline{AS}$, das Maß des Winkels MAS sowie das Volumen der Pyramide ABCS.

$\left[\text{Ergebnisse: } \left|\overline{AS}\right| = 13{,}45\text{ cm}; \sphericalangle MAS = 48{,}01°; V_{ABCS} = 180\text{ cm}^3\right]$ 3 P

B 2.3 Für den Punkt $D \in \overline{AS}$ gilt: $\left|\overline{AD}\right| = 4\text{ cm}$.

Zeichnen Sie die Strecke $\overline{DM}$ in das Schrägbild zu B 2.1 ein und berechnen Sie das Maß des Winkels DMA. 3 P

B 2.4 Für Punkte R_n auf der Strecke $\overline{MS}$ gilt: $\left|\overline{SR_n}\right| = x\text{ cm}$ $(x \in \mathbb{R}; 0 < x < 10)$.

Parallelen zur Strecke $\overline{BC}$ durch die Punkte R_n schneiden die Strecke $\overline{BS}$ in den Punkten P_n und die Strecke $\overline{CS}$ in den Punkten Q_n. Die Dreiecke P_nMQ_n sind die Grundflächen von Pyramiden P_nMQ_nD mit der Höhe $\overline{DF}$, wobei $F \in \overline{MS}$ gilt.

Zeichnen Sie die Pyramide P_1MQ_1D und die Höhe $\overline{DF}$ für $x = 5$ in das Schrägbild zu B 2.1 ein. 2 P

B 2.5 Zeigen Sie rechnerisch, dass für das Volumen V der Pyramiden P_nMQ_nD in Abhängigkeit von x gilt: $V(x) = \left(-1{,}26x^2 + 12{,}64x\right)\text{cm}^3$.

$\left[\text{Zwischenergebnis: } \left|\overline{DF}\right| = 6{,}32\text{ cm}\right]$ 4 P

B 2.6 Es gibt Pyramiden P_2MQ_2D und P_3MQ_3D, deren Volumen jeweils um 90% kleiner ist als das Volumen der Pyramide ABCS.
Berechnen Sie die zugehörigen x-Werte. 3 P

Bitte wenden!

Lösungsmuster
und Bewertung

Abschlussprüfung 2021

an den Realschulen in Bayern

inhaltlich unveränderte, an den Zeichenkatalog des LehrplanPLUS angepasste Fassung

Mathematik II

Aufgabengruppe A **Haupttermin**

AUFGABE A 1: EBENE GEOMETRIE

A 1.1 $\cos\sphericalangle CMD = \dfrac{5-2}{5}$ $\sphericalangle CMD = 53{,}13°$

$b = \dfrac{\sphericalangle BMC}{360°} \cdot 2 \cdot \left|\overline{MB}\right| \cdot \pi$

$\sphericalangle BMC = 180° - 53{,}13°$ $\sphericalangle BMC = 126{,}87°$

$b = \dfrac{126{,}87°}{360°} \cdot 2 \cdot 5 \cdot \pi \text{ cm}$ $b = 11{,}07 \text{ cm}$

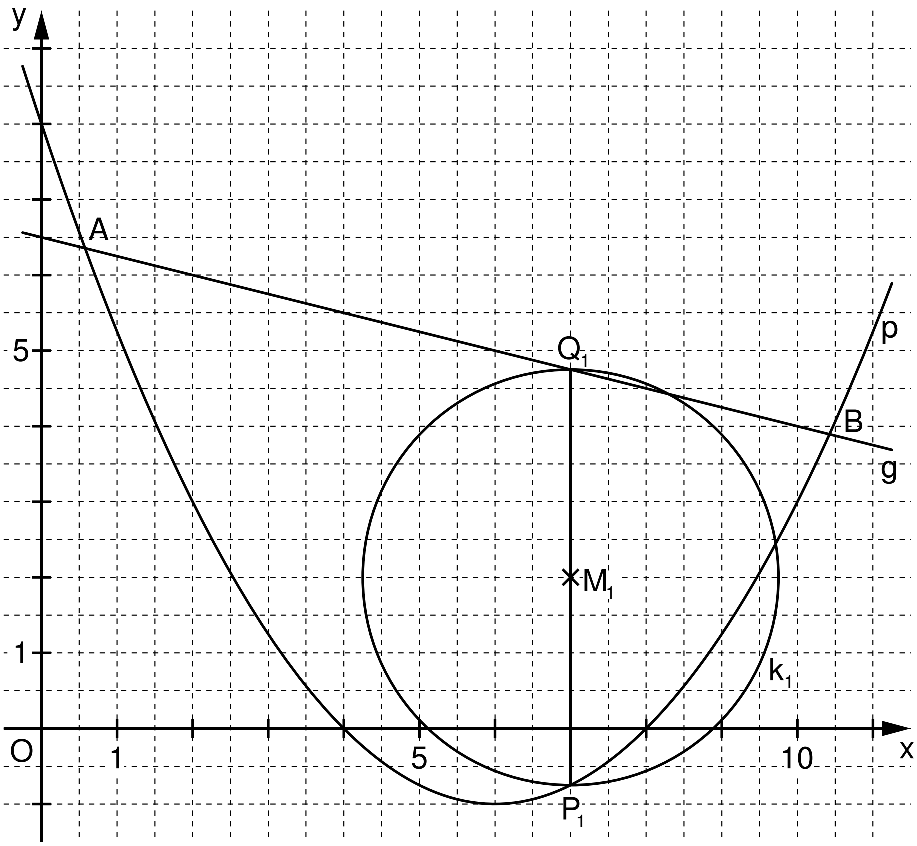
3 **L 2 K 5**

A 1.2 $A_{\text{Figur}} = \left(\dfrac{126{,}87°}{360°} \cdot 5^2 \cdot \pi + \dfrac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5 \cdot \sin 53{,}13°\right) \text{cm}^2$ $A_{\text{Figur}} = 37{,}68 \text{ cm}^2$

2 **L 2 K 5**

AUFGABE A 2: FUNKTIONEN

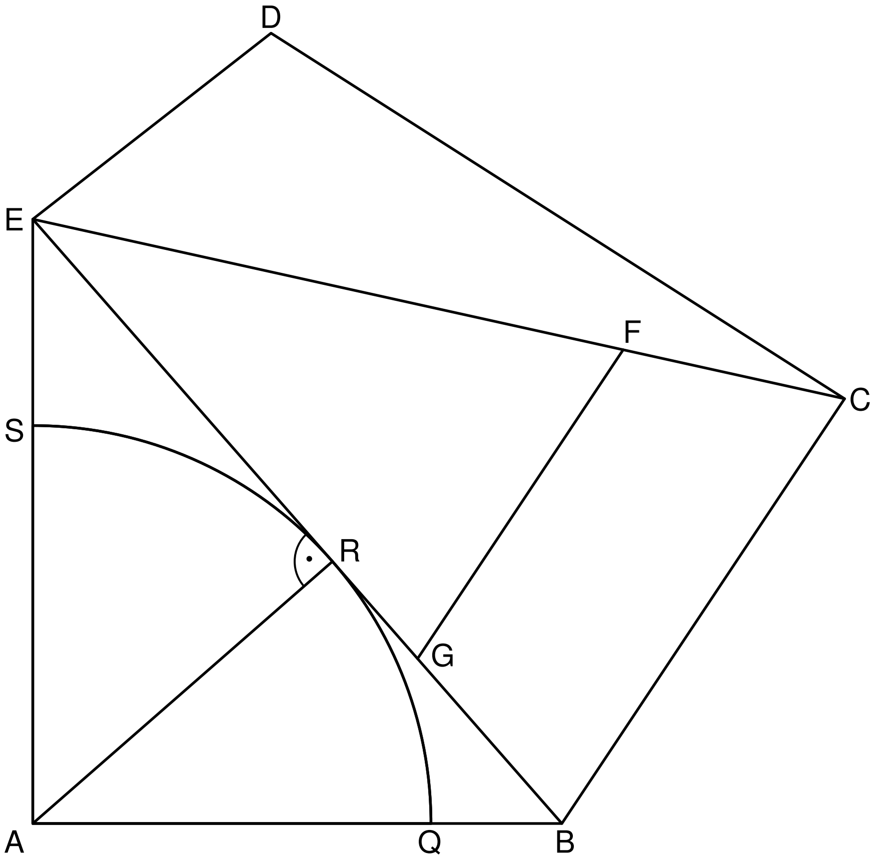
A 2.0



A 2.1	$0{,}25x^2-3x+8=-0{,}25x+6{,}5$ $\qquad x\in \mathbb{R}$ ... $\Leftrightarrow \quad x=0{,}58 \vee x=10{,}42$ $\qquad \mathbb{L}=\{0{,}58;10{,}42\}$ $A(0{,}58\mid -0{,}25\cdot 0{,}58+6{,}5)$ $\qquad A(0{,}58\mid 6{,}36)$ $B(10{,}42\mid -0{,}25\cdot 10{,}42+6{,}5)$ $\qquad B(10{,}42\mid 3{,}90)$	3	**L 4** **K 5**
A 2.2	Einzeichnen der Strecke $\overline{P_1Q_1}$ sowie des Punktes M_1 und des Kreises k_1	2	**L 4** **K 4**
A 2.3	$\lvert\overline{P_nQ_n}\rvert(x)=\left[-0{,}25x+6{,}5-\left(0{,}25x^2-3x+8\right)\right]\text{ LE}$ $\qquad x\in\mathbb{R};\ x\in\left]0{,}58;10{,}42\right[$ $\lvert\overline{P_nQ_n}\rvert(x)=\left(-0{,}25x^2+2{,}75x-1{,}5\right)\text{ LE}$	1	**L 4** **K 5**
A 2.4	$u(x)=\left(-0{,}25x^2+2{,}75x-1{,}5\right)\cdot\pi\text{ LE}$ $\qquad x\in\mathbb{R};\ x\in\left]0{,}58;10{,}42\right[$ ... $u_{max}=19{,}05\text{ LE}$	2	**L 3** **L 4** **K 2** **K 5**
A 2.5	k_3 hat den 16-fachen Flächeninhalt von k_2, denn es gilt: Aus $d_3=4\cdot d_2$ folgt: $r_3=4\cdot r_2$. Somit gilt: $A_3=r_3{}^2\cdot\pi=(4\cdot r_2)^2\cdot\pi=16\cdot r_2{}^2\cdot\pi=16\cdot A_2$.	2	**L 3** **K 1**
AUFGABE A 3: RAUMGEOMETRIE			
A 3	$V=\lvert\overline{FK}\rvert^2\cdot\pi\cdot\lvert\overline{AF}\rvert-\frac{1}{3}\cdot\lvert\overline{FK}\rvert^2\cdot\pi\cdot\lvert\overline{GK}\rvert+\frac{1}{3}\cdot\lvert\overline{EH}\rvert^2\cdot\pi\cdot\lvert\overline{GH}\rvert$ $\tan 50°=\frac{\lvert\overline{GK}\rvert}{0{,}5\cdot 5\text{ cm}}$ $\qquad \lvert\overline{GK}\rvert=2{,}98\text{ cm}$ $\frac{\lvert\overline{GH}\rvert}{2{,}98\text{ cm}}=\frac{2{,}4\text{ cm}}{5\text{ cm}}$ $\qquad \lvert\overline{GH}\rvert=1{,}43\text{ cm}$ $V=\left[(0{,}5\cdot 5)^2\cdot\pi\cdot 4-\frac{1}{3}\cdot(0{,}5\cdot 5)^2\cdot\pi\cdot 2{,}98+\frac{1}{3}\cdot(0{,}5\cdot 2{,}4)^2\cdot\pi\cdot 1{,}43\right]\text{cm}^3$ $V=61{,}19\text{ cm}^3$	5	**L 2** **K 5**
		20	

AUFGABE B 1: EBENE GEOMETRIE

B 1.1



$\left|\overline{BE}\right| = \sqrt{7^2 + 8^2}$ cm $\qquad \left|\overline{BE}\right| = 10{,}63$ cm

$\tan\sphericalangle AEB = \frac{7}{8} \qquad \sphericalangle AEB = 41{,}19°$

4

L 2
L 3
K 4
K 5

B 1.2 $A_{ABCE} = 0{,}5 \cdot \left|\overline{AB}\right| \cdot \left|\overline{AE}\right| + 0{,}5 \cdot \left|\overline{BE}\right| \cdot \left|\overline{CE}\right| \cdot \sin\sphericalangle BEC$

$\sphericalangle BEC = \sphericalangle AED - \sphericalangle AEB - \sphericalangle CED$

$9^2 = 11^2 + 4^2 - 2 \cdot 11 \cdot 4 \cdot \cos\sphericalangle CED \qquad \sphericalangle CED = 50{,}48°$

$\sphericalangle BEC = 128° - 41{,}19° - 50{,}48° \qquad \sphericalangle BEC = 36{,}33°$

$A_{ABCE} = (0{,}5 \cdot 7 \cdot 8 + 0{,}5 \cdot 10{,}63 \cdot 11 \cdot \sin 36{,}33°)\ \text{cm}^2 \qquad A_{ABCE} = 62{,}64\ \text{cm}^2$

4

L 2
K 2
K 5

B 1.3 $\left|\overline{BC}\right| = \sqrt{10{,}63^2 + 11^2 - 2 \cdot 10{,}63 \cdot 11 \cdot \cos 36{,}33°}$ cm $\qquad \left|\overline{BC}\right| = 6{,}75$ cm

$\frac{\sin\sphericalangle ECB}{10{,}63} = \frac{\sin 36{,}33°}{6{,}75} \qquad \sphericalangle ECB = 68{,}90°$

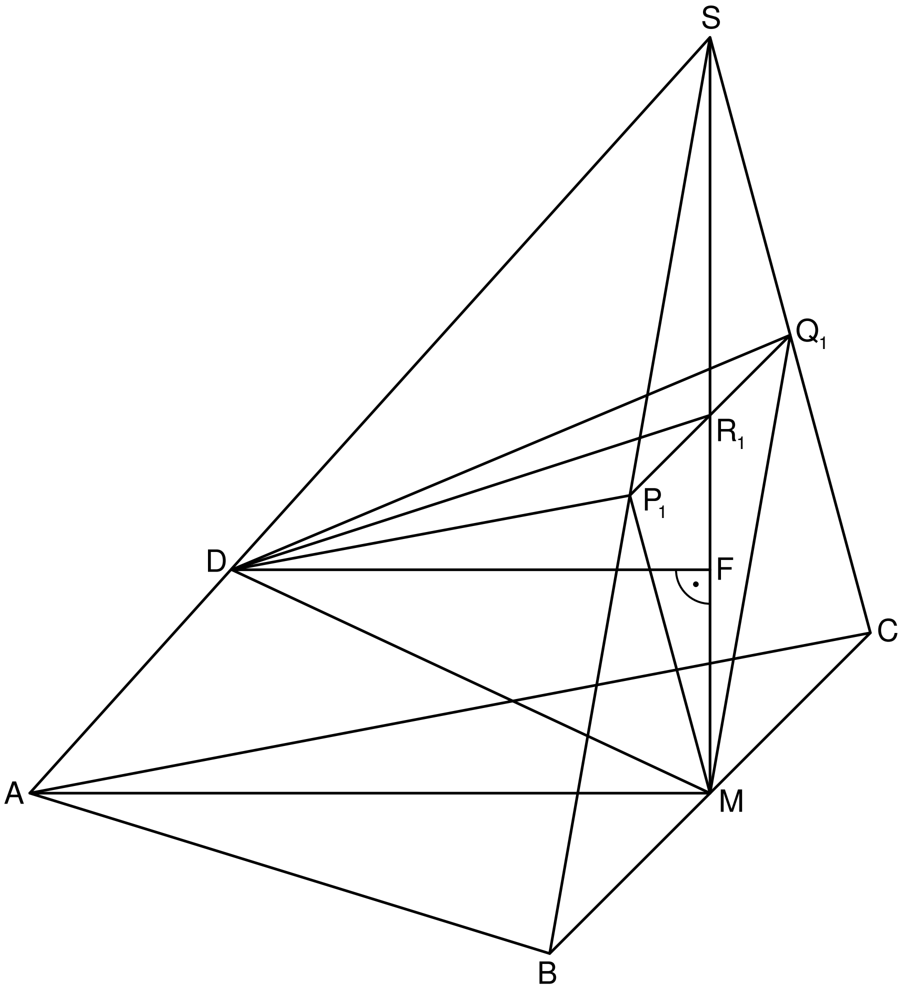
2

L 2
K 5

B 1.4 Einzeichnen der Strecke $\overline{FG}$ $A_{BCFG} = 0{,}5 \cdot \left(\left|\overline{BC}\right| + \left|\overline{FG}\right|\right) \cdot d(F;BC)$ $\frac{\left|\overline{FG}\right|}{6{,}75\text{ cm}} = \frac{(11-3)\text{ cm}}{11\text{ cm}}$ $\quad \left|\overline{FG}\right| = 4{,}91\text{ cm}$ $\sin 68{,}90^\circ = \frac{d(F;BC)}{3\text{ cm}}$ $\quad d(F;BC) = 2{,}80\text{ cm}$ $A_{BCFG} = 0{,}5 \cdot (6{,}75 + 4{,}91) \cdot 2{,}80\text{ cm}^2$ $\quad A_{BCFG} = 16{,}32\text{ cm}^2$	4	**L 2** **L 3** **K 2** **K 4** **K 5**
B 1.5 Einzeichnen des Kreisbogens $\widehat{QS}$ und des Punktes R $A_{Sektor} = \frac{\sphericalangle BAE}{360^\circ} \cdot \left|\overline{AR}\right|^2 \cdot \pi$ $\sin 41{,}19^\circ = \frac{\left|\overline{AR}\right|}{8\text{ cm}}$ $\quad \left|\overline{AR}\right| = 5{,}27\text{ cm}$ $A_{Sektor} = \frac{90^\circ}{360^\circ} \cdot 5{,}27^2 \cdot \pi\text{ cm}^2$ $\quad A_{Sektor} = 21{,}81\text{ cm}^2$	3	**L 2** **L 3** **K 4** **K 5**
	17	

AUFGABE B 2: RAUMGEOMETRIE

B 2.1



2

L 3
K 4

B 2.2 $\left|\overline{AS}\right| = \sqrt{9^2 + 10^2}$ cm $\qquad \left|\overline{AS}\right| = 13{,}45$ cm

$\tan\sphericalangle MAS = \frac{10}{9} \qquad \sphericalangle MAS = 48{,}01°$

$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 9 \cdot 10\ \text{cm}^3 \qquad V = 180\ \text{cm}^3$

3

L 2
K 5

B 2.3 Einzeichnen der Strecke $\overline{DM}$

$$\frac{\sin\sphericalangle DMA}{\left|\overline{AD}\right|} = \frac{\sin\sphericalangle MAS}{\left|\overline{DM}\right|}$$

$\left|\overline{DM}\right| = \sqrt{9^2 + 4^2 - 2 \cdot 9 \cdot 4 \cdot \cos 48{,}01°}$ cm $\qquad \left|\overline{DM}\right| = 6{,}99$ cm

$\frac{\sin\sphericalangle DMA}{4} = \frac{\sin 48{,}01°}{6{,}99} \qquad \sphericalangle DMA = 25{,}17°$

3

L 2
L 3
K 2
K 4
K 5

B 2.4 Einzeichnen der Pyramide P_1MQ_1D und der Höhe $\overline{DF}$	2	L 3 K 4
B 2.5 $V = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\lvert\overline{P_nQ_n}\rvert\cdot\lvert\overline{MR_n}\rvert\cdot\lvert\overline{DF}\rvert$ $\frac{\lvert\overline{P_nQ_n}\rvert(x)}{12\text{ cm}} = \frac{x\text{ cm}}{10\text{ cm}}$ $\lvert\overline{P_nQ_n}\rvert(x) = 1{,}2\cdot x\text{ cm}$ $x \in \mathbb{R}\,;\, 0 < x < 10$ $\frac{\lvert\overline{DF}\rvert}{9\text{ cm}} = \frac{(13{,}45-4)\text{ cm}}{13{,}45\text{ cm}}$ $\lvert\overline{DF}\rvert = 6{,}32\text{ cm}$ $V(x) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1{,}2\cdot x\cdot(10-x)\cdot 6{,}32\text{ cm}^3$ $x \in \mathbb{R}\,;\, 0 < x < 10$ $V(x) = (-1{,}26x^2 + 12{,}64x)\text{ cm}^3$	4	L 2 L 3 K 2 K 5
B 2.6 $-1{,}26x^2 + 12{,}64x = 0{,}1\cdot 180$ $x \in \mathbb{R}\,;\, 0 < x < 10$ ... $\Leftrightarrow$ $x = 1{,}72 \vee x = 8{,}31$ $L = \{1{,}72;\, 8{,}31\}$	3	L 4 K 5
	17	

Hinweis: Bei einigen Teilaufgaben sind auch andere Lösungswege möglich. Für richtige andere Lösungen gelten die jeweils angegebenen Punkte entsprechend; die Anzahl der Punkte bei den einzelnen Teilaufgaben darf jedoch nicht verändert werden. Insbesondere sind Lösungswege, bei denen der (grafikfähige) Taschenrechner verwendet wird, entsprechend ihrer Dokumentation bzw. ihrer Nachvollziehbarkeit zu bepunkten.

Bei der Korrektur ist zu beachten, dass die Vervielfältigung der Lösungsvorlage zu Verzerrungen der Zeichnungen führen kann.