Beispiele für Leistungsaufgaben ohne Hilfsmittel: Jahrgangsstufe 9 (WPFG II/III)

Stand: 09.06.2021

Jahrgangsstufe	9 (II/III)
Fach	Mathematik

Im Mittelpunkt des LehrplanPLUS steht der Erwerb von überdauernden Kompetenzen durch die Schülerinnen und Schüler. Diese Kompetenzen gehen über den reinen Erwerb von Wissen hinaus. Ein Ziel für die Gestaltung von Leistungsnachweisen ist es darum, Aufgaben zu entwickeln, die die Anwendung unterschiedlicher Kompetenzen in Bezug auf den jeweiligen Lerninhalt erfordern. Die folgenden Beispiele sollen exemplarisch veranschaulichen, wie dies umgesetzt werden kann. Dabei handelt es sich nicht um eine Zusammenstellung im Sinne einer „Muster-Stegreifaufgabe" o. ä., sondern um Beispiele, welche in Leistungsnachweisen vorkommen könnten.

Die Aufgabenauswahl sowie die Entscheidung, welche Kompetenzen in einem Leistungsnachweis abgeprüft werden, liegen in der Verantwortung der Lehrkraft. Selbstverständlich behalten auch Leistungsaufgaben zu Routineverfahren (wie Berechnungen, usw.) in Leistungsnachweisen ihre Berechtigung.

Voraussetzung für Leistungsaufgaben wie die im Folgenden dargestellten ist die Bearbeitung von Lernaufgaben, die ebenso unterschiedliche Kompetenzen im vorangegangenen Unterricht einforderten.

Die folgenden Aufgaben sind so konzipiert, dass sie sich für die Bearbeitung ohne Taschenrechner und Formelsammlung eignen.

Aufgabe 1

Betrachte den Term $T_1(x) = 2\sqrt{3} - \left(5\sqrt{3} + x\sqrt{3}\right) \quad (x \in \mathbb{R})$.

a) Gib den Termwert $T_1(0)$ für $x = 0$ an.

b) Für welche Belegungen von x erhält man den Termwert $2\sqrt{3}$ bzw. $4\sqrt{3}$?

c) Gegeben ist ein weiterer Term $T_2(x) = 2\sqrt{3} - 5\sqrt{3} + x\sqrt{3} \quad (x \in \mathbb{R})$.
Für welche Belegungen von x ist der Termwert $T_1(x)$ größer als der Termwert $T_2(x)$? Begründe.

Hinweise zur Lösung

a) $T_1(0) = -3\sqrt{3}$

b) $x = -5$ bzw. $x = -7$

c) Der Termwert $T_1(x)$ ist größer als der Termwert $T_2(x)$, wenn x negativ ist. Begründung:

$$2\sqrt{3} - \left(5\sqrt{3} + x\sqrt{3}\right) > 2\sqrt{3} - 5\sqrt{3} + x\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow \quad -x\sqrt{3} > x\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 > 2x\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 > x \qquad\qquad L = \{x \mid x < 0\}$$

Im Vordergrund stehende mathematische Leitideen und allgemeine mathematische Kompetenzen

(L1) Zahl	(K1) Mathematisch argumentieren
(L4) Funktionaler Zusammenhang	(K5) Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen

Aufgabe 2

Kreise jeweils den passenden Begriff ein.

Rationale / Irrationale / Reelle Zahlen lassen sich immer durch einen Bruch darstellen, bei dem der Zähler eine ganze Zahl und der Nenner eine natürliche Zahl ist.

Zahlen, die sich nicht durch einen solchen Bruch darstellen lassen, heißen *rationale / irrationale / ganze* Zahlen.

Rationale und irrationale Zahlen bilden zusammen die Menge der *ganzen / natürlichen / reellen* Zahlen $\mathbb{Z}$ / $\mathbb{N}$ / $\mathbb{R}$.

Der nicht negative Term unter der Wurzel heißt *Potenz / Radikand / Exponent*.

Den Vorgang des Wurzelziehens nennt man *Quadrieren / Radizieren / Potenzieren*.

Hinweise zur Lösung

Rationale / Irrationale / Reelle Zahlen lassen sich immer durch einen Bruch darstellen, bei dem der Zähler eine ganze Zahl und der Nenner eine natürliche Zahl ist.

Zahlen, die sich nicht durch einen solchen Bruch darstellen lassen, heißen *rationale / irrationale / ganze* Zahlen.

Rationale und irrationale Zahlen bilden zusammen die Menge der *ganzen / natürlichen / reellen* Zahlen $\mathbb{Z}$ / $\mathbb{N}$ / $\mathbb{R}$.

Der nicht negative Term unter der Wurzel heißt *Potenz / Radikand / Exponent*.

Den Vorgang des Wurzelziehens nennt man *Quadrieren / Radizieren / Potenzieren*.

Im Vordergrund stehende mathematische Leitideen und allgemeine mathematische Kompetenzen

(L1) Zahl	(K6) Kommunizieren

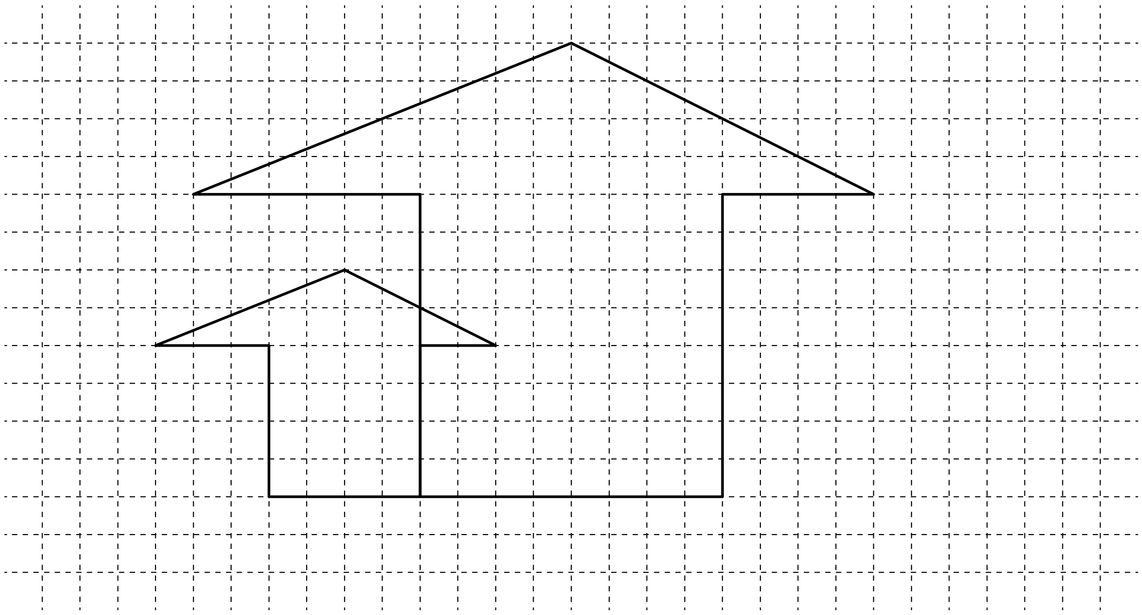
Aufgabe 3

Folgende Darstellungen zeigen jeweils zwei pfeilförmige Figuren, wobei die kleinere Figur durch eine oder mehrere Abbildungen auf die größere Figur abgebildet werden kann.

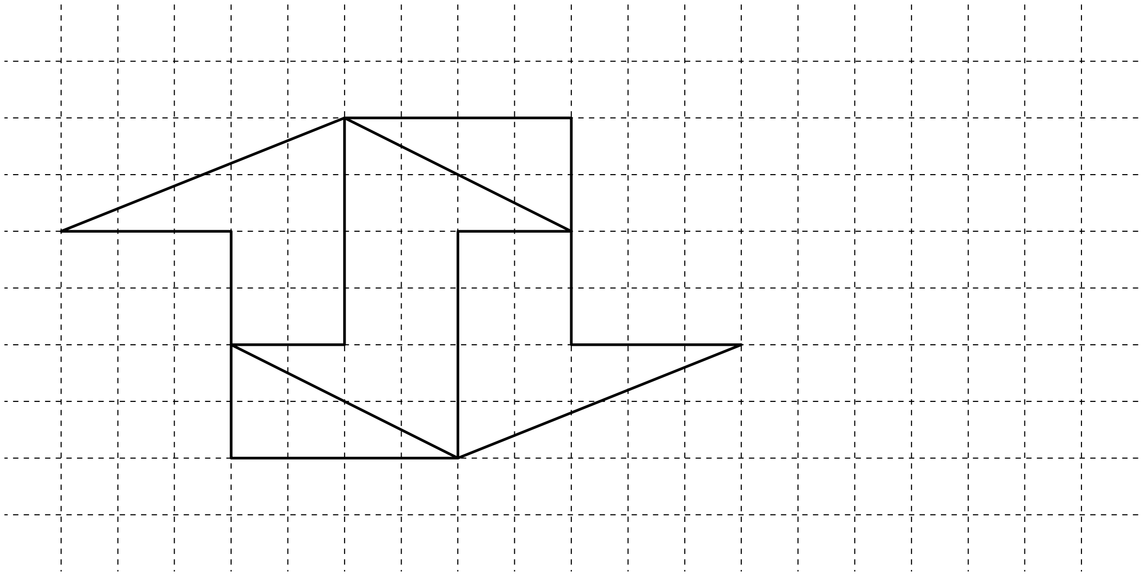
a) Kreuze die Darstellungen an, bei denen die kleinere Figur durch eine einzige zentrische Streckung direkt auf die größere Figur abgebildet werden kann.

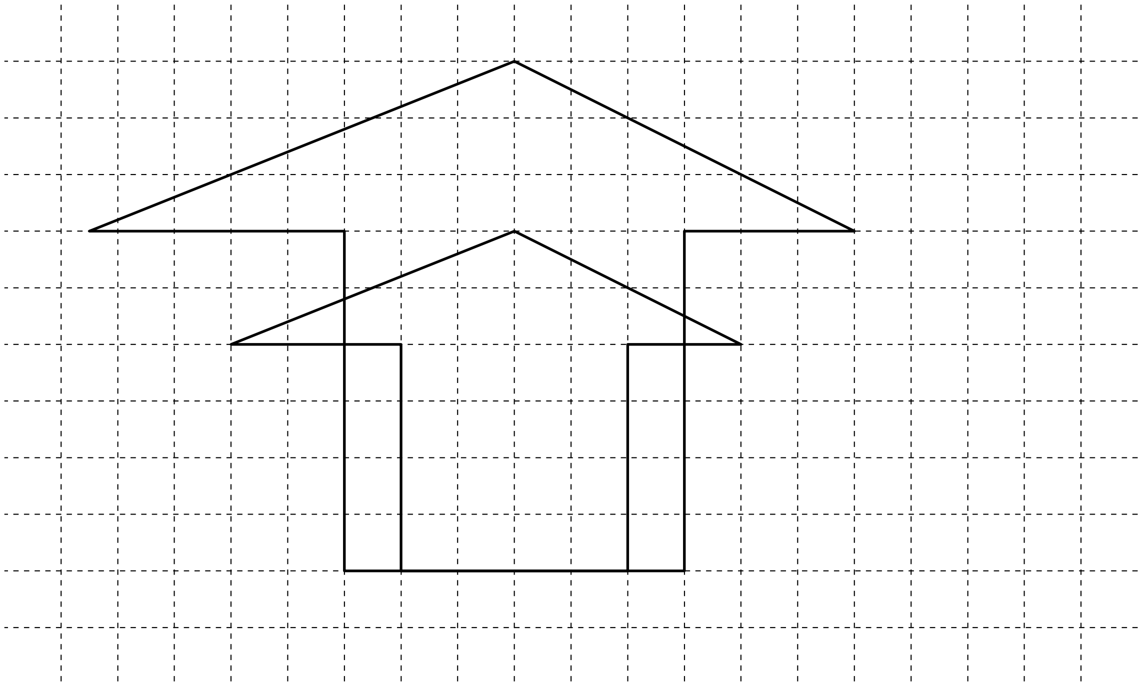
b) Bestimme für die Fälle, die du in a) angekreuzt hast, das Streckungszentrum Z und gib den Streckungsfaktor k an.

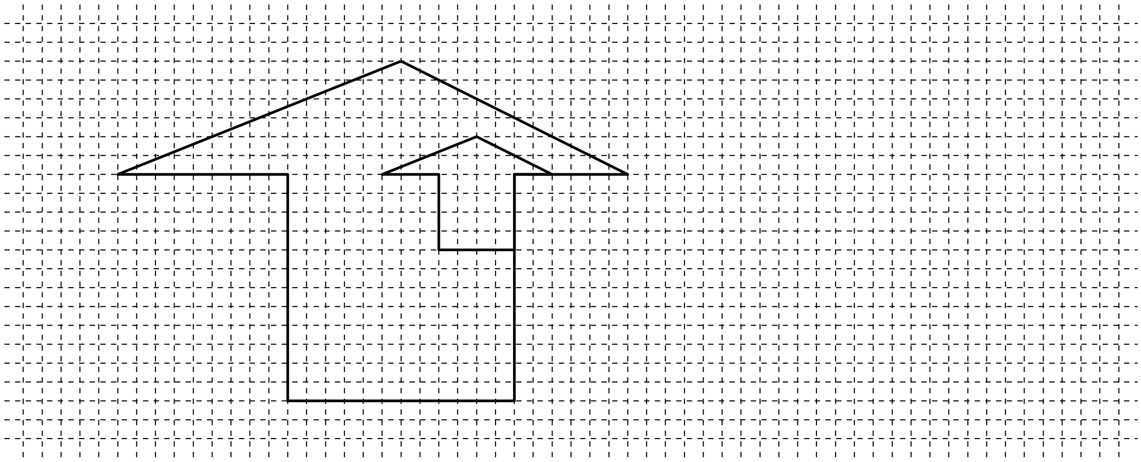
❑

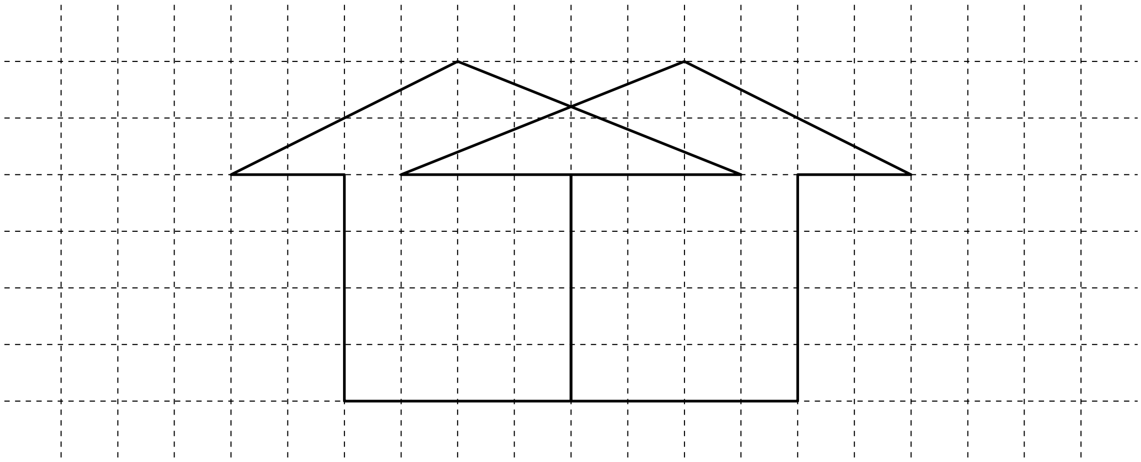


❑



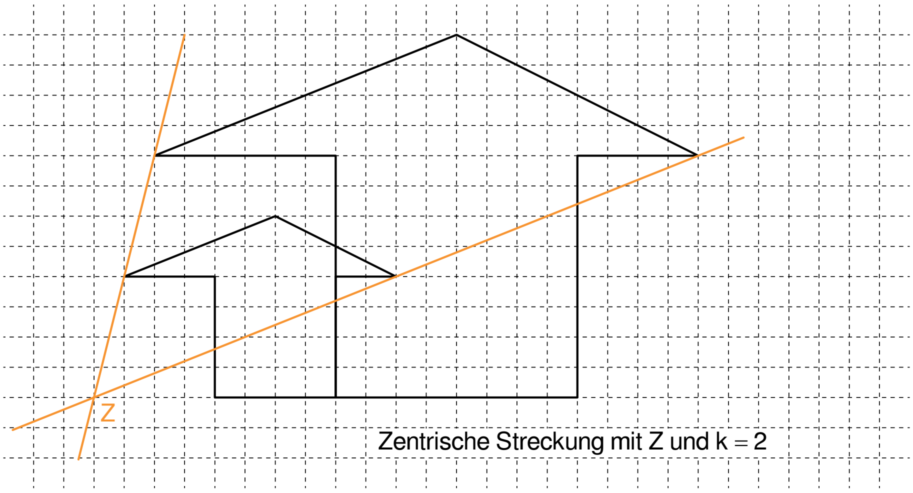
❑ 

❑ 

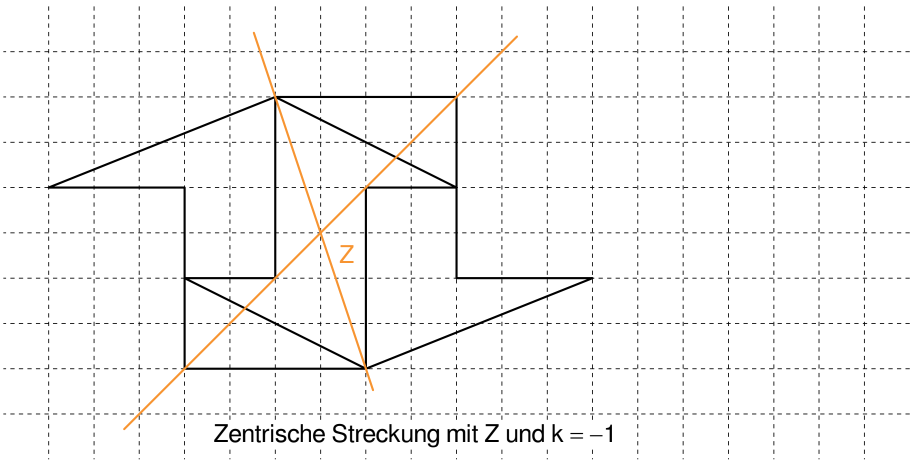
❑ 

Hinweise zur Lösung

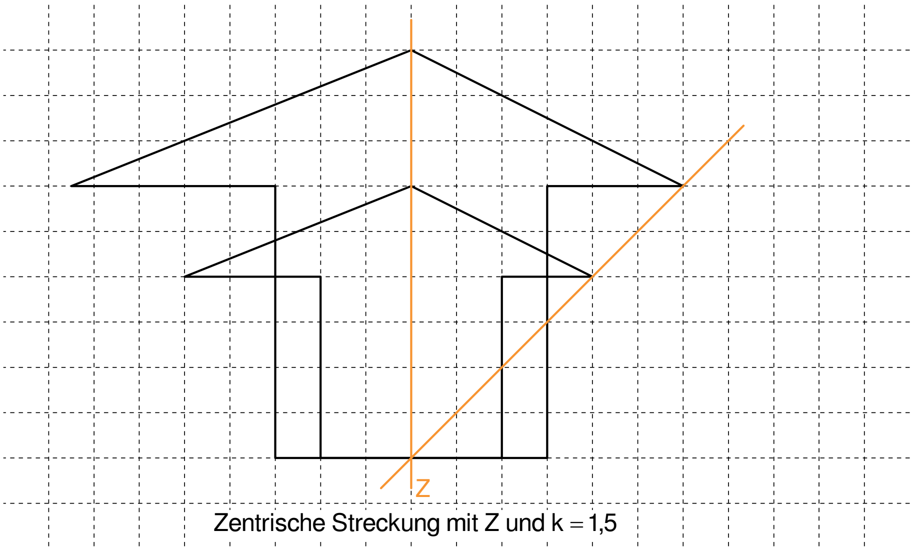
☒

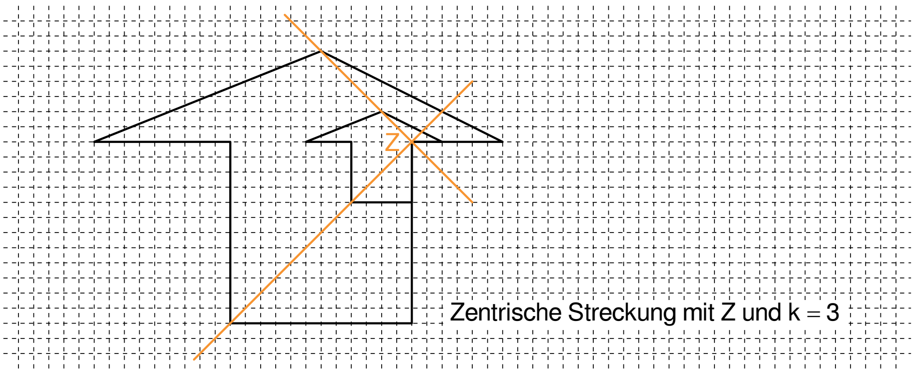


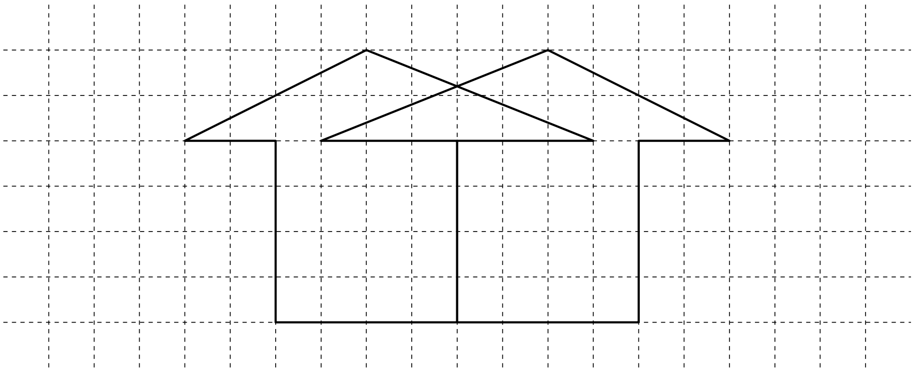
☒



☒



☒ 

☐ 

Im Vordergrund stehende mathematische Leitideen und allgemeine mathematische Kompetenzen

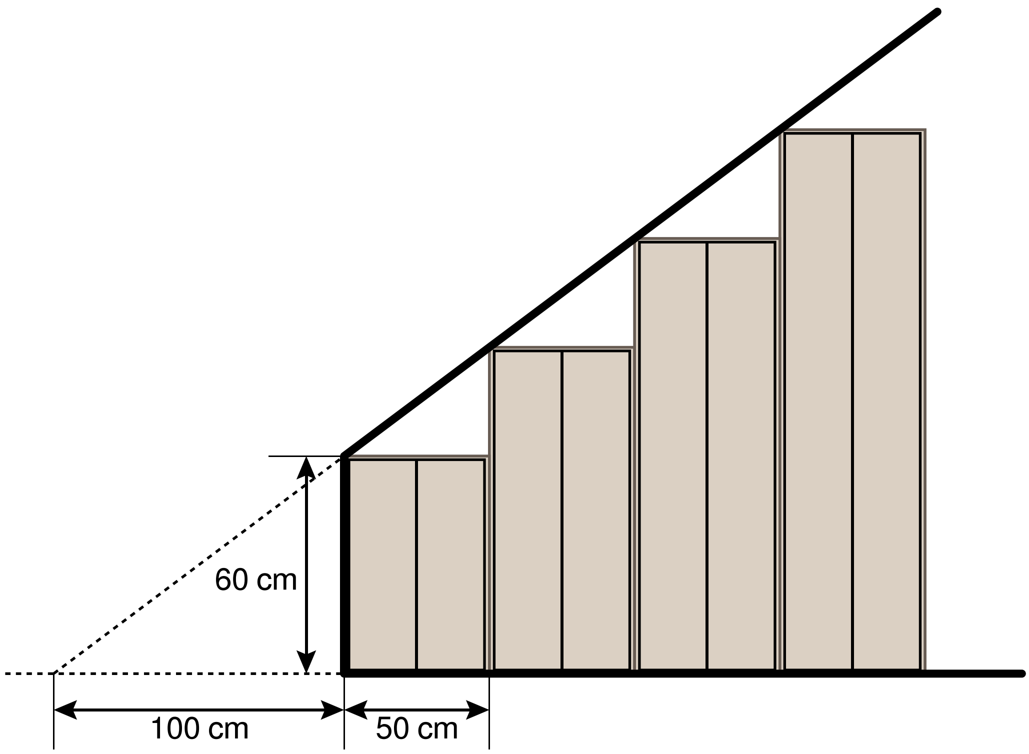
(L3) Raum und Form

(K4) Mathematische Darstellungen verwenden

(K5) Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen

Aufgabe 4

In einer Wohnung sollen vier Schränke mit einer Breite von jeweils 50 cm unter ein schräges Dach eingepasst werden. Der niedrigste Schrank mit einer Höhe von 60 cm kann exakt bis zur Wand geschoben werden (siehe Skizze). Berechne, welche maximale Höhe jeweils für die restlichen drei Schränke gewählt werden kann.



Hinweise zur Lösung

$$\frac{h_{2.\text{Schrank}}}{60\text{ cm}} = \frac{100\text{ cm} + 50\text{ cm}}{100\text{ cm}} \qquad h_{2.\text{Schrank}} = 90\text{ cm}$$

$$h_{2.\text{Schrank}} - h_{1.\text{Schrank}} = 90\text{ cm} - 60\text{ cm} = 30\text{ cm}$$

Folglich gilt: $h_{3.\text{Schrank}} = 90\text{ cm} + 30\text{ cm} = 120\text{ cm}$ und $h_{4.\text{Schrank}} = 120\text{ cm} + 30\text{ cm} = 150\text{ cm}$.

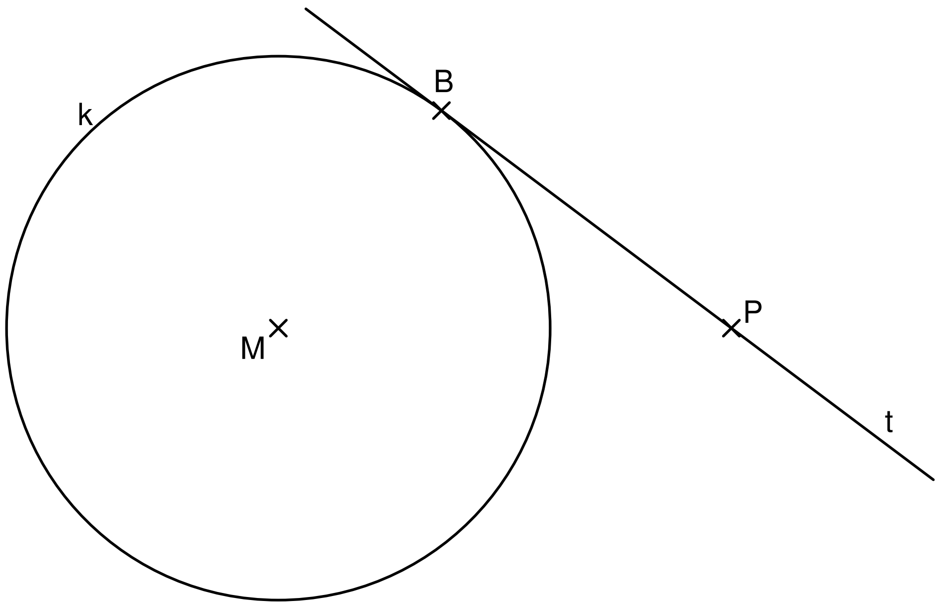
Im Vordergrund stehende mathematische Leitideen und allgemeine mathematische Kompetenzen

(L2) Messen	(K3) Mathematisch modellieren
(L3) Raum und Form	(K5) Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen

Aufgabe 5

Durch den Punkt P, der 20 cm vom Mittelpunkt M des Kreises k mit $k(M; r = 12\text{ cm})$ entfernt ist, ist an den Kreis k eine Tangente t mit dem Berührpunkt B gezeichnet.

Berechne die Länge der Strecke $\overline{BP}$.



Hinweise zur Lösung
$MB \perp t \;\Rightarrow\; \Delta BMP$ ist rechtwinklig $\Rightarrow\; \lvert\overline{BP}\rvert = \sqrt{20^2 - 12^2}\text{ cm}$ $\qquad \lvert\overline{BP}\rvert = 16\text{ cm}$

Im Vordergrund stehende mathematische Leitideen und allgemeine mathematische Kompetenzen

(L2) Messen	(K4) Mathematische Darstellungen verwenden
(L3) Raum und Form	(K5) Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen

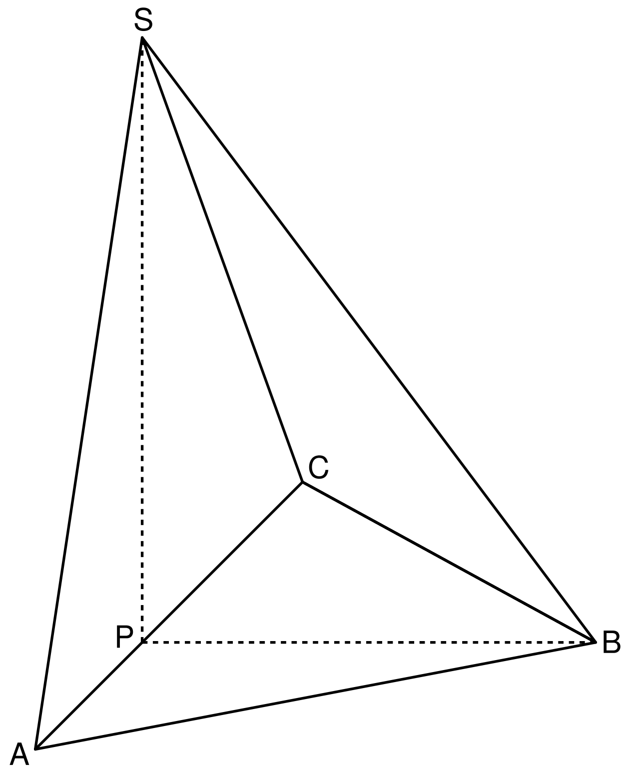
Aufgabe 6

Jan will ein Kantenmodell einer Pyramide aus Draht bauen.

Zur genaueren Planung zeichnet Jan ein Schrägbild der Pyramide (siehe Abbildung). Für die Zeichnung hat er folgende Angaben verwendet:

Die Pyramide ABCS hat die Höhe $\overline{PS}$ mit $P \in \overline{AC}$ und $PB \perp AC$. $\overline{PB}$ liegt auf der Schrägbildachse und es gilt: $\frac{|\overline{AP}|}{|\overline{PC}|} = \frac{2}{3}$.

Es gilt: $|\overline{AC}| = 10\text{ cm}$; $|\overline{PB}| = 6\text{ cm}$; $|\overline{PS}| = 8\text{ cm}$.



a) Berechne die Länge der Strecken $\overline{BS}$ und $\overline{CS}$.

b) Jan hat nur noch ein Drahtstück der Länge 50 cm und denkt, dass der Draht keinesfalls reicht. Hat er recht? Begründe.
Alternative: Jan hat nur noch ein Drahtstück mit 60 cm Länge. Reicht dieser Draht für das Kantenmodell? Begründe.

c) Bestimme das Maß des Winkels ACB.

Hinweise zur Lösung

a) $|\overline{BS}| = \sqrt{6^2 + 8^2}\ \text{cm}$ $\qquad$ $|\overline{BS}| = 10\ \text{cm}$

$|\overline{CS}| = \sqrt{|\overline{PC}|^2 + |\overline{PS}|^2}$

$|\overline{PC}| = \frac{3}{5} \cdot 10\ \text{cm}$ $\qquad$ $|\overline{PC}| = 6\ \text{cm}$

$|\overline{CS}| = \sqrt{6^2 + 8^2}\ \text{cm}$ $\qquad$ $|\overline{CS}| = 10\ \text{cm}$

b) $l_{\text{Draht}} = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{AC} + \overline{AS} + \overline{BS} + \overline{CS}$

$|\overline{AB}| = \sqrt{(10-6)^2 + 6^2}\ \text{cm} = \sqrt{52}\ \text{cm}$ $\qquad$ $|\overline{AB}| > 7\ \text{cm}$

$|\overline{BC}| = \sqrt{6^2 + 6^2}\ \text{cm} = \sqrt{72}\ \text{cm}$ $\qquad$ $|\overline{AB}| > 8\ \text{cm}$

$|\overline{AS}| = \sqrt{(10-6)^2 + 8^2}\ \text{cm} = \sqrt{80}\ \text{cm}$ $\qquad$ $|\overline{AS}| > 8\ \text{cm}$

$l_{\text{Draht}} > (7+8+10+8+10+10)\ \text{cm}$ $\qquad$ $l_{\text{Draht}} > 50\ \text{cm}$

Der Draht reicht also nicht. Jan hat recht.

Alternative:

$l_{\text{Draht}} = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{AC} + \overline{AS} + \overline{BS} + \overline{CS}$

$|\overline{BC}| = \sqrt{6^2 + 6^2}\ \text{cm} = \sqrt{72}\ \text{cm}$ $\qquad$ $|\overline{BC}| < 9\ \text{cm}$

$|\overline{AB}| = \sqrt{|\overline{AP}|^2 + |\overline{PB}|^2} < \sqrt{|\overline{PC}|^2 + |\overline{PB}|^2} = |\overline{BC}|$ $\qquad$ $|\overline{AB}| < 9\ \text{cm}$

$|\overline{AS}| = \sqrt{|\overline{AP}|^2 + |\overline{PS}|^2} < \sqrt{|\overline{PC}|^2 + |\overline{PS}|^2} = |\overline{CS}|$ $\qquad$ $|\overline{AS}| < 10\ \text{cm}$

$l_{\text{Draht}} < (9+9+10+10+10+10)\ \text{cm}$ $\qquad$ $l_{\text{Draht}} < 58\ \text{cm}$

Der Draht reicht also.

c) Das Dreieck PBC ist gleichschenklig-rechtwinklig. Damit ergibt sich für den Winkel ACB das Maß 45°.

Im Vordergrund stehende mathematische Leitideen und allgemeine mathematische Kompetenzen

(L2) Messen

(L3) Raum und Form

(K1) Mathematisch argumentieren

(K3) Mathematisch modellieren

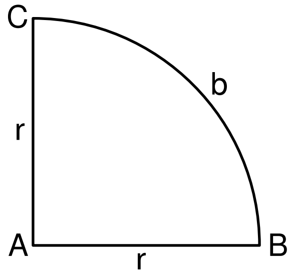
(K4) Mathematische Darstellungen verwenden

(K5) Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen

Aufgabe 7

Die nebenstehende Skizze zeigt einen Kreissektor mit dem Radius r und dem Mittelpunkt A.

Es gilt: $\left|\overline{AB}\right| = \left|\overline{AC}\right| = r$; $\sphericalangle BAC = 90°$.



a) Bestimme die Länge b des Kreisbogens $\overset{\frown}{BC}$ in Abhängigkeit von r.

b) Bestätige durch Rechnung, dass der Flächeninhalt A des Kreissegments, das vom Kreisbogen $\overset{\frown}{BC}$ und von der Strecke $\overline{BC}$ begrenzt wird, sich wie folgt darstellen lässt:
$A = \frac{1}{4}r^2(\pi - 2)$.

c) Für einen weiteren Kreissektor mit dem Radius $\left|\overline{AB'}\right| = \left|\overline{AC'}\right|$ und dem Mittelpunkt A gilt:
$\left|\overline{AB'}\right| = \left|\overline{AC'}\right| = 2r$; $\sphericalangle B'AC' = 90°$.
Ermittle den Zusammenhang zwischen der Länge b' des Kreisbogens $\overset{\frown}{B'C'}$ und der Länge b des Kreisbogens $\overset{\frown}{BC}$.

Hinweise zur Lösung

a) $b = \frac{1}{4} \cdot 2 \cdot r \cdot \pi$ $\qquad b = \frac{1}{2} r\pi$

b) $A = \frac{1}{4} \cdot r^2 \cdot \pi - \frac{1}{2} \cdot r \cdot r$ $\qquad A = \frac{1}{4} r^2 (\pi - 2)$

c) z. B.:
Es gibt einen direkt proportionalen Zusammenhang zwischen dem Radius und der Bogenlänge. Verdoppelt man den Radius bei gleichem Mittelpunktswinkel, so wird auch die Bogenlänge verdoppelt.
Somit gilt: $b' = 2 \cdot b$.
oder: $b' = \frac{1}{4} \cdot 2 \cdot r' \cdot \pi = \frac{1}{4} \cdot 2 \cdot 2 \cdot r \cdot \pi = 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot 2 \cdot r \cdot \pi = 2 \cdot b$

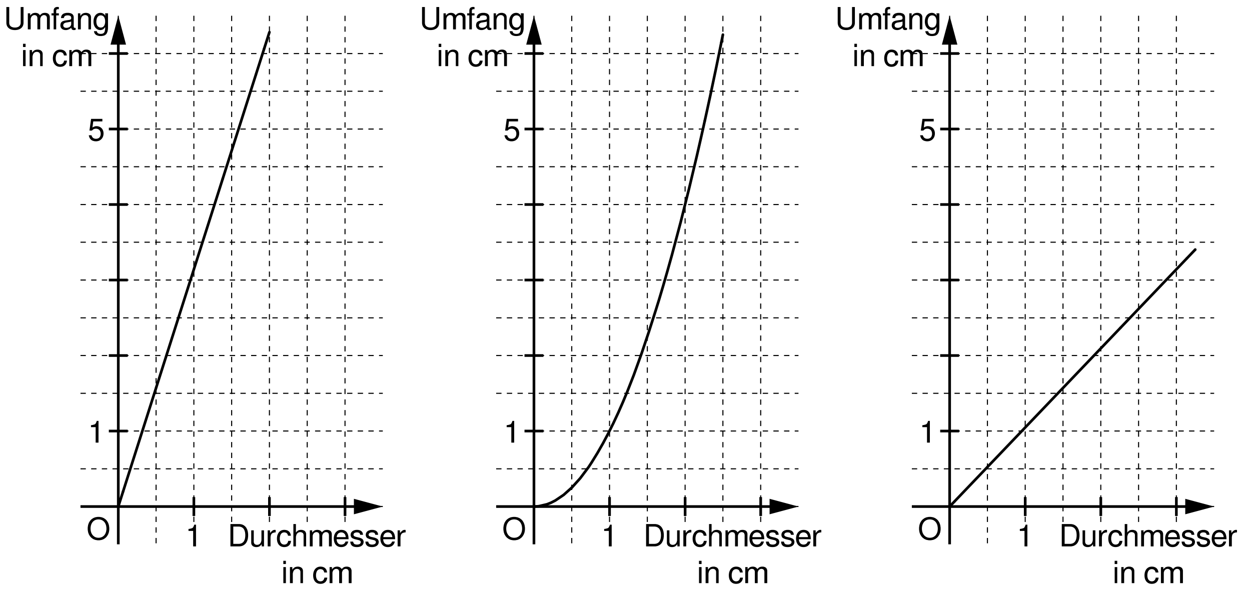
Im Vordergrund stehende mathematische Leitideen und allgemeine mathematische Kompetenzen

(L2) Messen	(K1) Mathematisch argumentieren
(L3) Raum und Form	(K2) Probleme mathematisch lösen
	(K6) Kommunizieren

Aufgabe 8

1) Gegeben ist ein Kreis mit einem Durchmesser von 5 cm.
   Gib den dazugehörigen Kreisumfang ohne zu runden an.

2) Einer der folgenden Graphen stellt den Zusammenhang zwischen dem Durchmesser und dem Umfang von Kreisen dar.
   Kreuze diesen Graphen an und begründe deine Wahl.



❏ ❏ ❏

Hinweise zur Lösung

1) $u = 5\pi$ cm

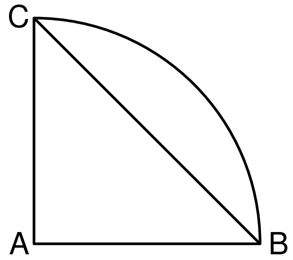
2) Die erste Lösung ist richtig.

   Begründung, z. B.: Der Kreisumfang u und der dazugehörige Kreisdurchmesser d sind direkt proportional zueinander. Es gilt: $u : d = \pi$ bzw. $u = \pi \cdot d$.
   Somit liegt der Graph auf einer Ursprungshalbgeraden mit der Steigung π.

Im Vordergrund stehende mathematische Leitideen und allgemeine mathematische Kompetenzen

(L2) Messen	(K1) Mathematisch argumentieren
(L4) Funktionaler Zusammenhang	(K4) Mathematische Darstellungen verwenden
	(K5) Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen

Aufgabe 9



Die nebenstehende Skizze zeigt einen Kreissektor mit dem Mittelpunkt A und dem Radius $r = \left|\overline{AB}\right| = \left|\overline{AC}\right|$. Die Strecke $\overline{BC}$ teilt diesen in ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck ABC mit der Basis $\overline{BC}$ und ein Kreissegment. Der Flächeninhalt des Dreiecks ABC ist $8\ \text{cm}^2$.

a) Bestätige durch Rechnung, dass gilt: $\left|\overline{AB}\right| = 4\ \text{cm}$.

b) Berechne den Flächeninhalt A sowie den Umfang u des Kreissegments, das durch die Strecke $\overline{BC}$ und den Kreisbogen $\overset{\frown}{BC}$ begrenzt ist. Gib die exakten Ergebnisse ohne zu runden an.

Hinweise zur Lösung

a) $\frac{1}{2} \cdot \left|\overline{AB}\right| \cdot \left|\overline{AB}\right| = 8\ \text{cm}^2$ $\qquad \left|\overline{AB}\right|^2 = 16\ \text{cm}^2$ $\qquad \left|\overline{AB}\right| = 4\ \text{cm}$

b) $A = \left(\frac{1}{4} \cdot 4^2 \cdot \pi - 8\right) \text{cm}^2$ $\qquad A = (4\pi - 8)\ \text{cm}^2$

$u = \left(\frac{1}{4} \cdot 2 \cdot 4 \cdot \pi + \sqrt{4^2 + 4^2}\right) \text{cm}$ $\qquad u = \left(2\pi + 4\sqrt{2}\right) \text{cm}$

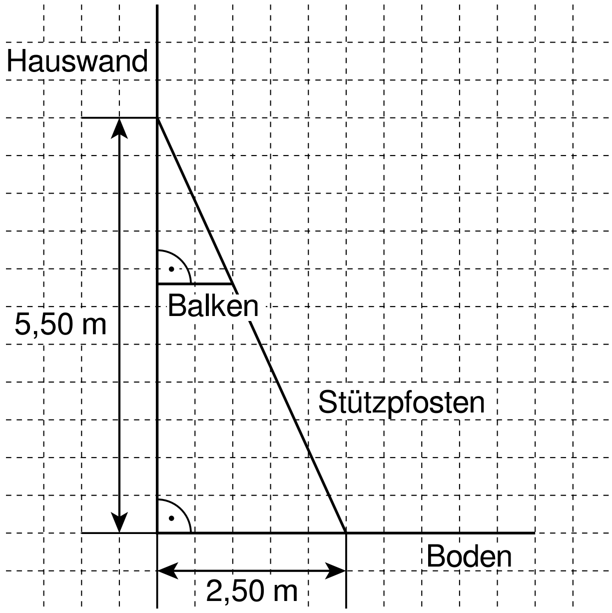
Im Vordergrund stehende mathematische Leitideen und allgemeine mathematische Kompetenzen

(L2) Messen

(K5) Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen

Aufgabe 10

Zur Stabilisierung einer alten Hauswand wird ein Stützpfosten angebracht. Als zusätzliche Befestigungen sollen Balken waagrecht zwischen Hauswand und Stützpfosten verankert werden (siehe Skizze).



a) Zeige rechnerisch, dass für den Zusammenhang zwischen der Länge x m des Balkens und der Höhe y m, auf der der Balken angebracht wird, näherungsweise gilt:
$y = -2{,}2x + 5{,}5 \quad (x \in \mathbb{Q}^+, y \in \mathbb{Q}^+)$.

b) Berechne, auf welcher Höhe ein Balken mit einer Länge von einem Meter ungefähr angebracht wird.

c) Ein zweiter Balken wird auf einer Höhe von 2,20 m montiert. Bestimme rechnerisch die ungefähre Länge dieses Balkens.

Hinweise zur Lösung

a) z. B.: $A(2{,}5 \mid 0)$ und $B(0 \mid 5{,}5)$ $\Rightarrow t = 5{,}5$

$\Rightarrow m = \frac{5{,}5}{-2{,}5} = -2{,}2$

$\Rightarrow y = -2{,}2x + 5{,}5$

b) Für $x = 1$ gilt: $y = -2{,}2 \cdot 1 + 5{,}5 = 3{,}3$ $\Rightarrow$ Der Balken wird in ca. 3,30 m Höhe angebracht.

c) Für $y = 2{,}2$ gilt: $2{,}2 = -2{,}2 \cdot x + 5{,}5 \Leftrightarrow x = 1{,}5$ $\Rightarrow$ Der zweite Balken ist ca. 1,50 m lang.

Im Vordergrund stehende mathematische Leitideen und allgemeine mathematische Kompetenzen

(L4) Funktionaler Zusammenhang

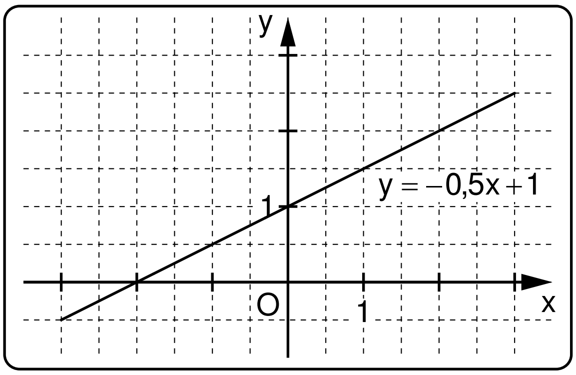
(K3) Mathematisch modellieren

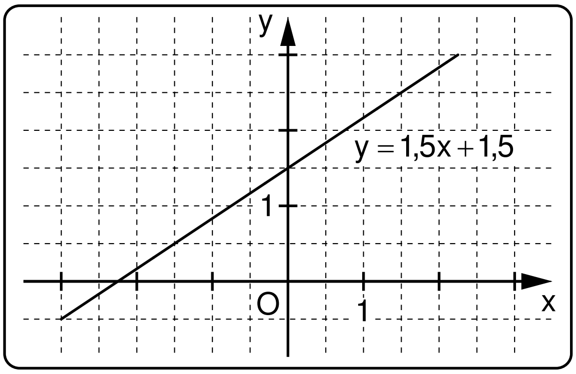
(K5) Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen

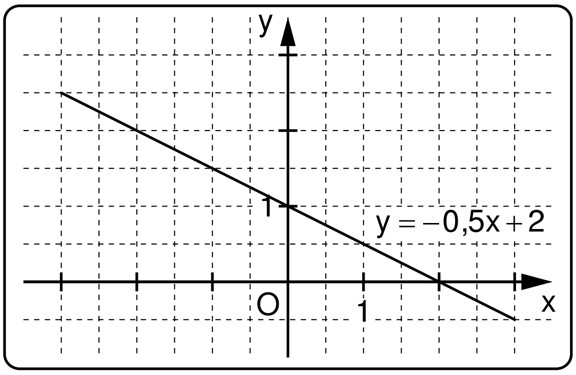
Aufgabe 11

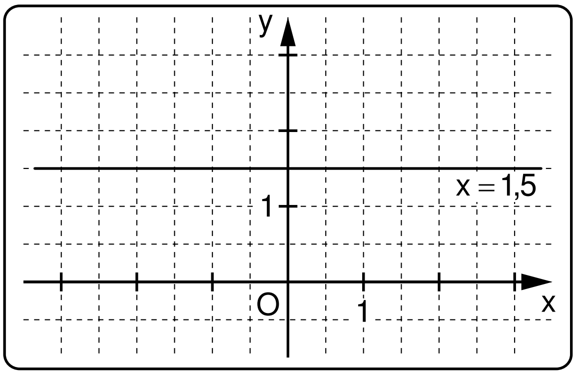
Es sollte zur jeweils angegebenen Gleichung die zugehörige Gerade gezeichnet werden.
In jeder Zeichnung wurde ein Fehler gemacht.

Verbinde jede Zeichnung mit der dazu passenden Beschreibung des Fehlers.



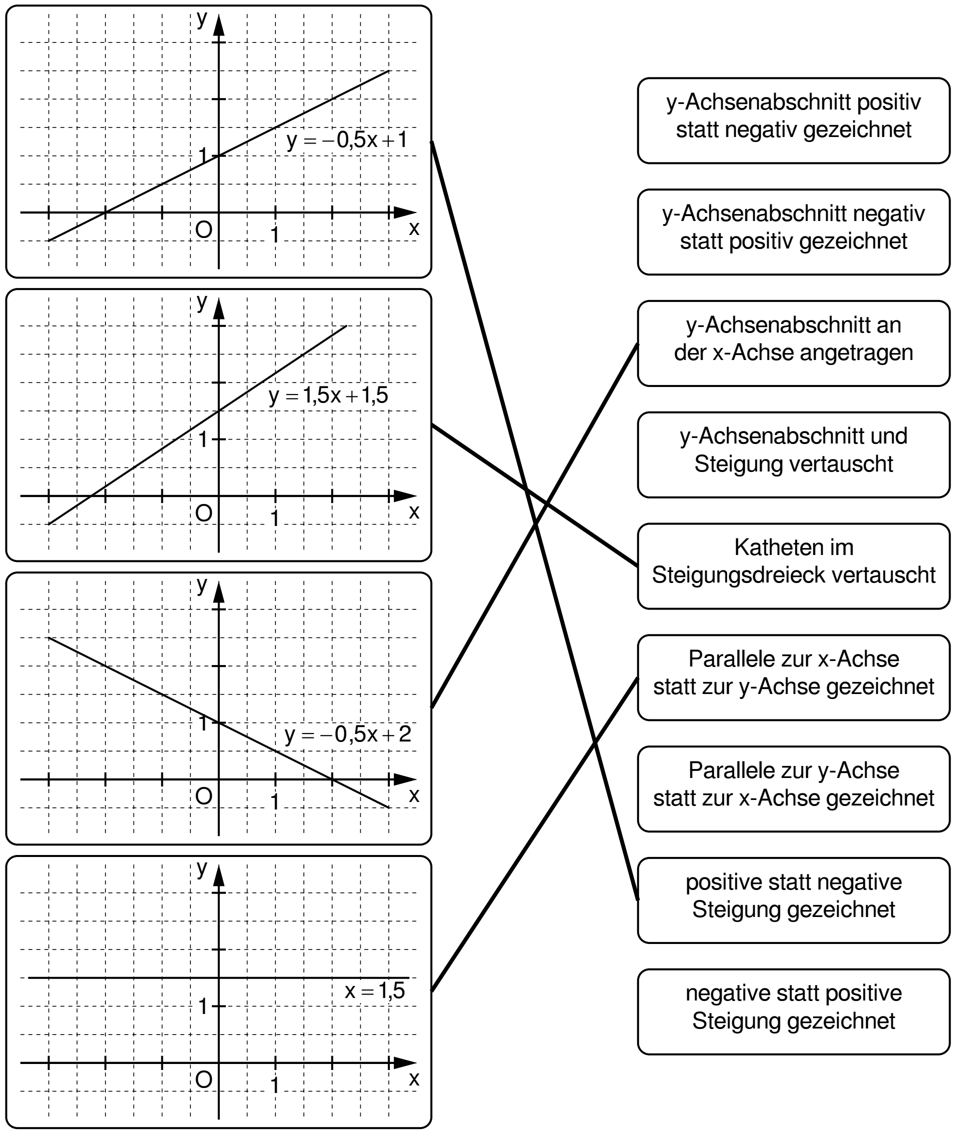






- y-Achsenabschnitt positiv statt negativ gezeichnet
- y-Achsenabschnitt negativ statt positiv gezeichnet
- y-Achsenabschnitt an der x-Achse angetragen
- y-Achsenabschnitt und Steigung vertauscht
- Katheten im Steigungsdreieck vertauscht
- Parallele zur x-Achse statt zur y-Achse gezeichnet
- Parallele zur y-Achse statt zur x-Achse gezeichnet
- positive statt negative Steigung gezeichnet
- negative statt positive Steigung gezeichnet

Hinweise zur Lösung



Im Vordergrund stehende mathematische Leitideen und allgemeine mathematische Kompetenzen

(L4) Funktionaler Zusammenhang

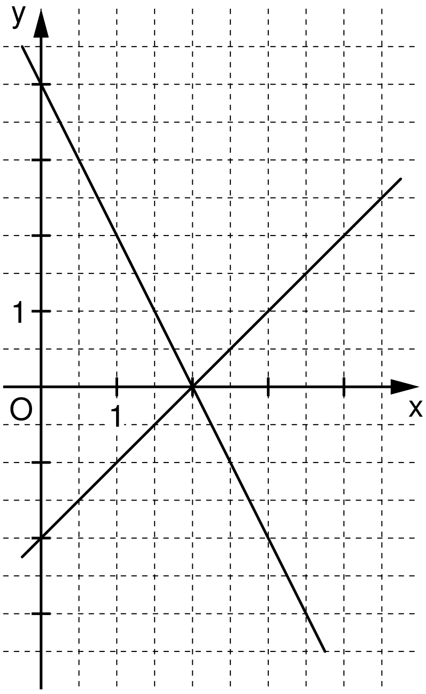
(K4) Mathematische Darstellungen verwenden

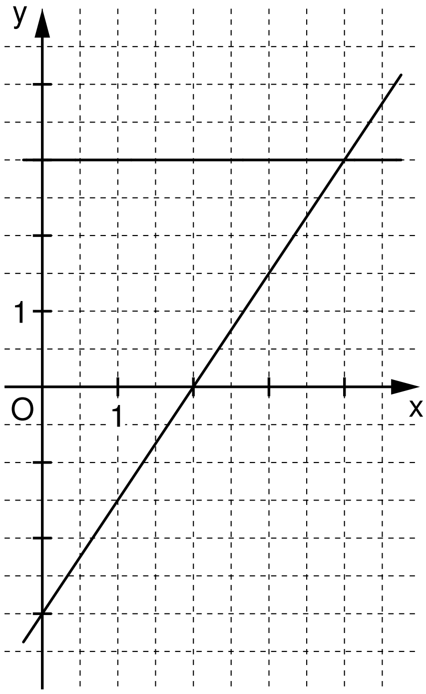
(K6) Kommunizieren

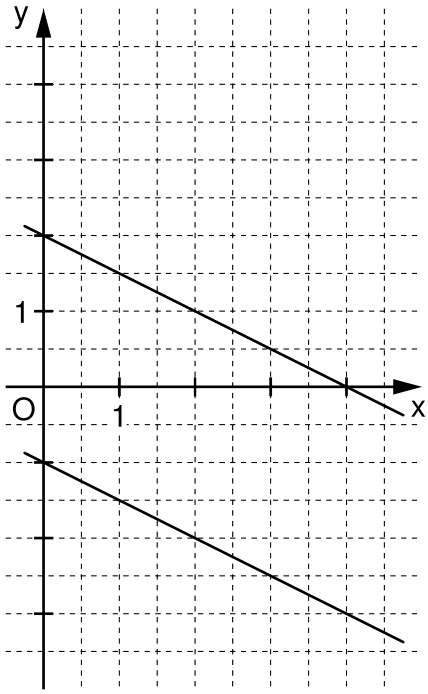
Aufgabe 12

In jedem der folgenden Koordinatensysteme ist ein lineares Gleichungssystem grafisch dargestellt $(x,y \in \mathbb{R})$. Bestimme jeweils mithilfe der Zeichnung das entsprechende Gleichungssystem und die zugehörige Lösungsmenge.

a) b) c)







Hinweise zur Lösung

z. B.:

a)
$$\left|\begin{array}{l} y = -2x + 4 \\ \wedge\ y = x - 2 \end{array}\right.$$
$L = \{(2|0)\}$

b)
$$\left|\begin{array}{l} y = 3 \\ \wedge\ y = 1{,}5x - 3 \end{array}\right.$$
$L = \{(4|3)\}$

c)
$$\left|\begin{array}{l} y = -0{,}5x + 2 \\ \wedge\ y = -0{,}5x - 1 \end{array}\right.$$
$L = \{\ \}$

Im Vordergrund stehende mathematische Leitideen und allgemeine mathematische Kompetenzen

(L4) Funktionaler Zusammenhang (K4) Mathematische Darstellungen verwenden

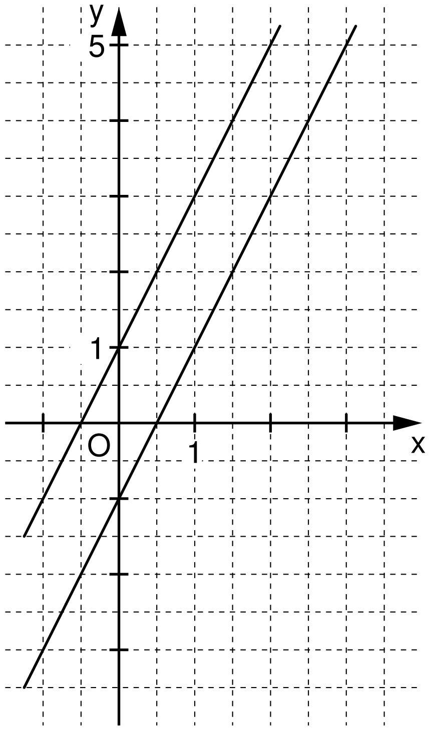
Aufgabe 13

Gegeben ist das folgende lineare Gleichungssystem $(x, y \in \mathbb{R})$:

$$\begin{vmatrix} & y = 2x + 1 \\ \wedge & y = 2 - 1x \end{vmatrix}$$

Georg hat versucht, das Gleichungssystem grafisch zu lösen, während Öznur ein rechnerisches Verfahren verwendet hat.

Georg entnimmt seiner Zeichnung, dass für die Lösungsmenge gilt: $L = \{\ \}$.



Öznur erhält $L = \left\{\left(\frac{1}{3} \middle| 1\frac{2}{3}\right)\right\}$.

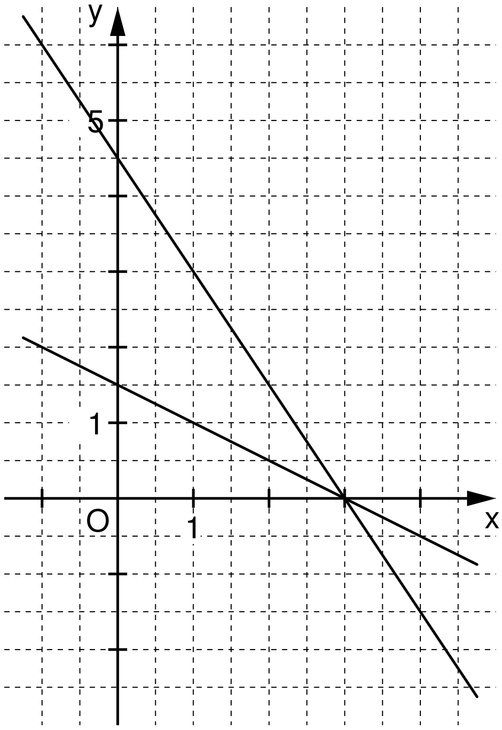
a) Beschreibe, welchen Fehler Georg bei seiner Zeichnung gemacht hat.

b) Bestätige mithilfe einer geeigneten Rechnung, dass Öznur die richtige Lösungsmenge erhalten hat.

c) Nun bearbeiten Öznur und Georg ein weiteres lineares Gleichungssystem $(x, y \in \mathbb{R})$:

$$\begin{vmatrix} & y = -0{,}5x + 1{,}5 \\ \wedge & 3y = -1{,}5x + 4{,}5 \end{vmatrix}$$

Diesmal fertigt Öznur folgende Zeichnung an und erhält als Lösungsmenge $L = \{(3 \mid 0)\}$:



Georg rechnet und erhält $L = \{(x|y) \mid y = -0{,}5x + 1{,}5\}$.

Wer hat die richtige Lösungsmenge erhalten? Begründe deine Antwort.

Hinweise zur Lösung
a) z. B.: Ein y-Achsenabschnitt und eine Steigung wurden vertauscht.
b) Rechnerische Lösung des Gleichungssystems
c) z. B.: Georg hat recht, weil man die erste Gleichung erhält, indem man den Links- und den Rechtsterm der zweiten Gleichung durch 3 dividiert.

Im Vordergrund stehende mathematische Leitideen und allgemeine mathematische Kompetenzen	
(L4) Funktionaler Zusammenhang	(K1) Mathematisch argumentieren
	(K4) Mathematische Darstellungen verwenden
	(K5) Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen
	(K6) Kommunizieren

Aufgabe 14

Die Mitgliedschaft in einem Kletterverein kostet pro Jahr 20 €. Für die Nutzung der Kletteranlagen haben die Vereinsmitglieder zwei Möglichkeiten:

- Pro Eintritt sind 10 € zu bezahlen.
- Zusätzlich zur Mitgliedschaft im Verein kann man eine „Climbing Card" für 80 € pro Jahr erwerben. Mit dieser reduziert sich der Preis pro Eintritt auf 5 €.

a) Der Gesamtpreis y € für eine bestimmte Anzahl an Eintritten x kann jeweils mit einer linearen Funktion beschrieben werden $\left(x \in \mathbb{N}_0 ; y \in \mathbb{N}\right)$.

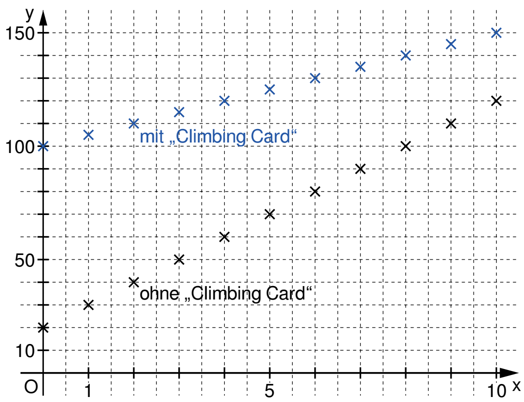
Stelle beide Möglichkeiten für $x \in [0;10]$ grafisch in einem Koordinatensystem dar.

Hinweis: Achte auf eine sinnvolle Unterteilung der y-Achse und auf den Platzbedarf.

b) Berechne, wie oft die Kletteranlage besucht werden muss, um durch die Anschaffung der "Climbing Card" einen finanziellen Vorteil zu haben.

Hinweise zur Lösung

a) z. B.:



b) z. B.:

$$20 + 10x = (20 + 80) + 5x \qquad x \in \mathbb{N}_0$$

...

$$\Leftrightarrow \quad x = 16 \qquad L = \{16\}$$

Man hat ab dem 17. Besuch einen finanziellen Vorteil.

Im Vordergrund stehende mathematische Leitideen und allgemeine mathematische Kompetenzen

(L4) Funktionaler Zusammenhang

(K3) Mathematisch modellieren

(K4) Mathematische Darstellungen verwenden

(K5) Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen

Aufgabe 15

In einem Päckchen befinden sich 10 gelbe, 20 rote und 20 grüne Kugeln.

Anna sagt: „Wenn ich zehnmal nacheinander jeweils eine Kugel aus dem Päckchen ziehe und diese dann jedes Mal wieder zurücklege, dann ziehe ich bestimmt viermal eine rote Kugel.“

Beurteile Annas Aussage.

Hinweise zur Lösung

z. B.: Die berechnete Wahrscheinlichkeit für das Ziehen einer roten Kugel könnte zu dieser Aussage führen, denn es gilt: $\frac{20}{50} = \frac{4}{10}$.

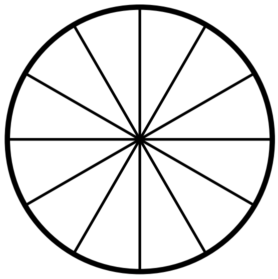
Allerdings ist die Anzahl der Versuche klein und das empirische Gesetz der großen Zahlen somit hier nicht anwendbar, so dass eine exakte Vorhersage des Versuchsausgangs nicht möglich ist.

Im Vordergrund stehende mathematische Leitideen und allgemeine mathematische Kompetenzen

(L5) Daten und Zufall	(K1) Mathematisch argumentieren
	(K3) Mathematisch modellieren

Aufgabe 16

Mit dem abgebildeten Glücksrad soll ein Zufallsversuch durchgeführt werden. Beschreibe jeweils eine mögliche Färbung der zwölf Sektoren, so dass die angegebene Gewinnwahrscheinlichkeit gilt.



a) Man gewinnt mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{6}$, indem man einen roten Sektor erreicht.

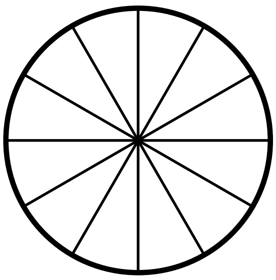
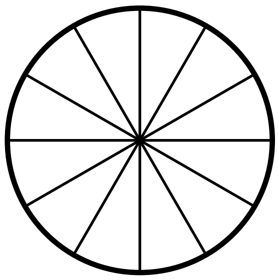
b) Man gewinnt, wenn man weder einen schwarzen noch einen weißen Sektor erreicht. Die Gewinnwahrscheinlichkeit ist $\frac{1}{3}$.

c) Man gewinnt, wenn man einen blauen oder roten Sektor erreicht. Die Gewinnwahrscheinlichkeit ist $\frac{5}{12}$, wobei es wahrscheinlicher ist, einen roten Sektor zu erreichen.

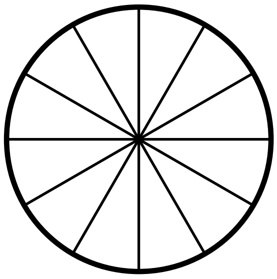
d) Man erhält mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{3}{4}$ keinen Gewinn. In diesem Fall hat man keinen gelben Sektor erreicht.

Aufgabenvariation:

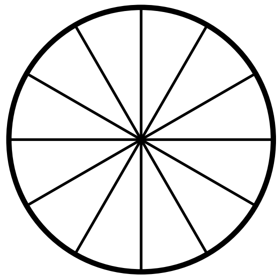
Mit dem abgebildeten Glücksrad soll ein Zufallsversuch durchgeführt werden. Färbe das vorgegebene Glücksrad jeweils so ein, dass die angegebene Gewinnwahrscheinlichkeit gilt.

a) Man gewinnt mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{6}$, indem man einen roten Sektor erreicht. 	b) Man gewinnt, wenn man weder einen schwarzen noch einen weißen Sektor erreicht. Die Gewinnwahrscheinlichkeit ist $\frac{1}{3}$. 

c) Man gewinnt, wenn man einen blauen oder roten Sektor erreicht. Die Gewinnwahrscheinlichkeit ist $\frac{5}{12}$, wobei es wahrscheinlicher ist, einen roten Sektor zu erreichen.



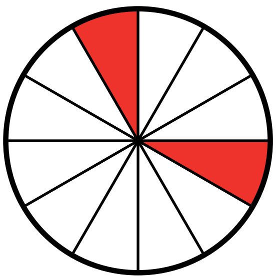
d) Man erhält mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{3}{4}$ keinen Gewinn. In diesem Fall hat man keinen gelben Sektor erreicht.



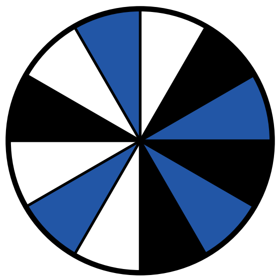
Hinweise zur Lösung

Beispiele für mögliche Lösungen, auch für die Aufgabenvariation:

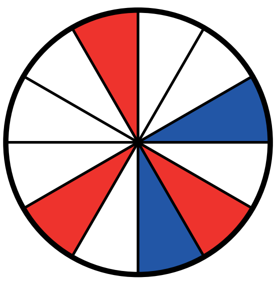
a) Zwei Sektoren sind rot und die anderen weiß.



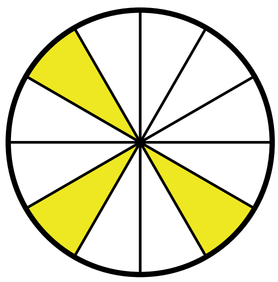
b) Jeweils 4 Sektoren sind schwarz, weiß und blau.



c) Drei Sektoren sind rot und zwei blau, die restlichen sind weiß.



d) Drei Sektoren sind gelb und die anderen weiß.



Im Vordergrund stehende mathematische Leitideen und allgemeine mathematische Kompetenzen

(L5) Daten und Zufall

(K4) Mathematische Darstellungen verwenden

(K6) Kommunizieren

Aufgabe 17

Mit einem gewöhnlichen Spielwürfel werden verschiedene Zufallsversuche durchgeführt.

Gib für jeden Zufallsversuch die zugehörige Gewinnwahrscheinlichkeit an. Ordne die Versuche sodann hinsichtlich der Gewinnwahrscheinlichkeit, indem du die Nummern der Versuche passend in die Kästchen einträgst.

(1) Der Spielwürfel wird einmal geworfen. Du gewinnst mit einer 3.

(2) Der Spielwürfel wird zweimal geworfen. Du gewinnst mit der Augensumme 10.

(3) Der Spielwürfel wird einmal geworfen. Du gewinnst mit einer geraden Augenzahl.

(4) Der Spielwürfel wird einmal geworfen. Du gewinnst mit einer Augenzahl größer 4.

(5) Der Spielwürfel wird zweimal geworfen. Du gewinnst mit zweimal der Augenzahl 6.

weniger wahrscheinlich → eher wahrscheinlich

☐	☐	☐	☐	☐

Hinweise zur Lösung

(1) $P_{(1)} = \frac{1}{6}$

(2) $P_{(2)} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$

(3) $P_{(3)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

(4) $P_{(4)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

(5) $P_{(5)} = \frac{1}{36}$

weniger wahrscheinlich → eher wahrscheinlich

(5)	(2)	(1)	(4)	(3)

Im Vordergrund stehende mathematische Leitideen und allgemeine mathematische Kompetenzen

(L5) Daten und Zufall

(K2) Probleme mathematisch lösen

(K5) Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen

Quellen- und Literaturangaben

Texte, Bilder (sofern nicht anders angegeben) und Material: ISB