Beispiele für Leistungsaufgaben ohne Hilfsmittel: Jahrgangsstufe 8 (WPFG II/III)

Stand: 18.08.2020

Jahrgangsstufe	8 (II/IIII)
Fach	Mathematik

Im Mittelpunkt des LehrplanPLUS steht der Erwerb von überdauernden Kompetenzen durch die Schülerinnen und Schüler. Diese Kompetenzen gehen über den reinen Erwerb von Wissen hinaus. Ein Ziel für die Gestaltung von Leistungsnachweisen ist es darum, Aufgaben zu entwickeln, die die Anwendung unterschiedlicher Kompetenzen in Bezug auf den jeweiligen Lerninhalt erfordern. Die folgenden Beispiele sollen exemplarisch veranschaulichen, wie dies umgesetzt werden kann. Dabei handelt es sich nicht um eine Zusammenstellung im Sinne einer „Muster-Stegreifaufgabe“ o. ä., sondern um Beispiele, welche in Leistungsnachweisen vorkommen könnten.

Die Aufgabenauswahl sowie die Entscheidung, welche Kompetenzen in einem Leistungsnachweis abgeprüft werden, liegen in der Verantwortung der Lehrkraft. Selbstverständlich behalten auch Leistungsaufgaben zu Routineverfahren (wie Berechnungen, usw.) in Leistungsnachweisen ihre Berechtigung.

Voraussetzung für Leistungsaufgaben wie die im Folgenden dargestellten ist die Bearbeitung von Lernaufgaben, die ebenso unterschiedliche Kompetenzen im vorangegangenen Unterricht einforderten.

Die folgenden Aufgaben sind so konzipiert, dass sie sich für die Bearbeitung ohne Hilfsmittel eignen.

Aufgabe 1

Existiert ein Dreieck ABC mit folgenden Maßen? Begründe deine Antwort.

Umfang $u = 48\text{ cm}$, $\left|\overline{AC}\right| = 24\text{ cm}$

Hinweise zur Lösung	
Ein solches Dreieck existiert nicht, da die Summe der beiden anderen Seitenlängen nicht größer als die Länge der Seite $\overline{AC}$ ist. Somit ist die Dreiecksungleichung nicht erfüllt.	
Im Vordergrund stehende mathematische Leitideen und allgemeine mathematische Kompetenzen	
(L3) Raum und Form	(K1) Mathematisch argumentieren
	(K6) Kommunizieren

Aufgabe 2

Lena wird an der Tafel ausgefragt und soll folgende Aufgabe lösen:

> Konstruiere das Dreieck ABC mit den folgenden Maßen:
> $a = 7\text{ cm}; \alpha = 80°; \beta = 45°$.

Stelle einen Lösungsweg dar, mit dem Lena die Aufgabe geschickt lösen kann. Verwende zur Erklärung die mathematische Fachsprache.

Hinweise zur Lösung

Lena sollte zu Beginn eine Skizze anfertigen.

Dann kann sie über die Innenwinkelsumme des Dreiecks das Winkelmaß γ berechnen.

Anschließend sollte sie bei der Konstruktion mit der Seite $\overline{BC}$ beginnen und dann die Winkel mit den Maßen γ und β antragen. Den Punkt A erhält sie als Schnittpunkt der beiden so entstehenden freien Schenkel dieser Winkel.

Im Vordergrund stehende mathematische Leitideen und allgemeine mathematische Kompetenzen

(L3) Raum und Form	(K2) Probleme mathematisch lösen
	(K6) Kommunizieren

Aufgabe 3

Sofias Flugdrachen soll ein Drachenviereck als Vorlage haben.

Für die beiden symmetrisch zueinander liegenden Innenwinkel wählt sie jeweils das Maß 140°. Bevor sie mit dem Bau des Flugdrachens beginnt, überlegt sie, dass dann die beiden anderen Innenwinkel jeweils ein Maß von 40° haben müssen.

Beurteile Sofias Überlegung.

Hinweise zur Lösung
z. B.: Aufgrund der Innenwinkelsumme im Viereck ergibt sich für die Summe der beiden anderen Winkelmaße der Wert 80°. Diese beiden Winkel müssen aber nicht maßgleich sein. Daher kann beispielsweise ein Winkel das Maß 60° und der andere das Maß 20° haben.

Im Vordergrund stehende mathematische Leitideen und allgemeine mathematische Kompetenzen	
(L3) Raum und Form	(K1) Mathematisch argumentieren
	(K3) Mathematisch modellieren

Aufgabe 4

Kreuze an, um welche Sonderform des Vierecks es sich jeweils handelt.

a) Das Viereck ist achsensymmetrisch, die Diagonalen stehen senkrecht aufeinander und die gegenüberliegenden Winkel sind jeweils gleich groß.

❑ gleichschenkliges Trapez ❑ Raute ❑ Drachenviereck ❑ Rechteck

b) Die gegenüberliegenden Seiten des Vierecks sind parallel zueinander, die Maße der gegenüberliegenden Winkel ergänzen sich jeweils zu 180° und die Diagonalen stehen senkrecht aufeinander.

❑ Quadrat ❑ Parallelogramm ❑ Drachenviereck ❑ Raute

c) Das Viereck ist achsensymmetrisch, die Diagonalen halbieren sich gegenseitig.

❑ gleichschenkliges Trapez ❑ Parallelogramm ❑ Raute ❑ Drachenviereck

Hinweise zur Lösung
a) Die zweite Lösung ist richtig: Raute
b) Die erste Lösung ist richtig: Quadrat
c) Die dritte Lösung ist richtig: Raute

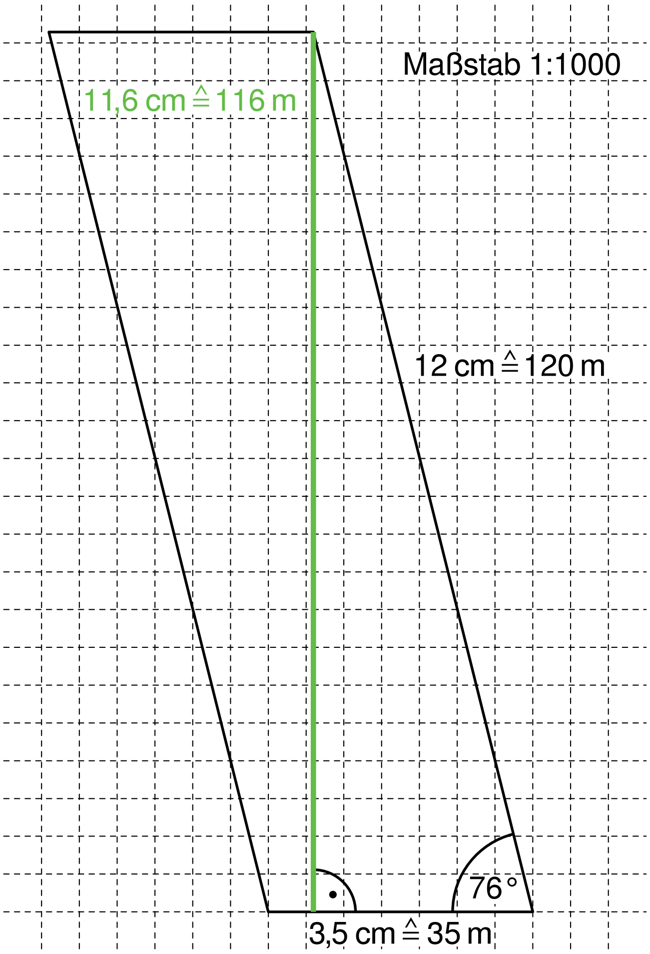
Im Vordergrund stehende mathematische Leitideen und allgemeine mathematische Kompetenzen	
(L3) Raum und Form	(K4) Mathematische Darstellungen verwenden
	(K6) Kommunizieren

Aufgabe 5

Die „Puerta de Europa“-Türme in Madrid wurden von den Architekten Philip Johnson und John Burgee aus New York geplant und 1996 nach sieben Jahren Bauzeit eröffnet. Ihre quadratischen Grundrisse haben eine Seitenlänge von jeweils 35 m. Die hier dargestellten frontalen Ansichten haben jeweils die Form eines Parallelogramms. Ein Innenwinkelmaß dieser Parallelogramme beträgt 76°. Die nach oben ragende Seite der Parallelogramme ist 120 m lang.

Ermittle mithilfe einer geeigneten, maßstabsgetreuen Zeichnung die Höhe der Türme.

Hinweise zur Lösung



Ergänzende Anmerkung:
Die tatsächliche Höhe der Türme beträgt 114 m (bei 75,7° Neigung).

Im Vordergrund stehende mathematische Leitideen und allgemeine mathematische Kompetenzen

(L2) Messen	(K3) Mathematisch modellieren
(L3) Raum und Form	(K4) Mathematische Darstellungen verwenden

Aufgabe 6

Das Quadrat ABCD mit dem Diagonalenschnittpunkt M ist die Grundfläche einer Pyramide ABCDS mit der Höhe $\overline{MS}$.

Es gilt: $|\overline{AB}| = |\overline{MS}| = 4\text{ m}$.

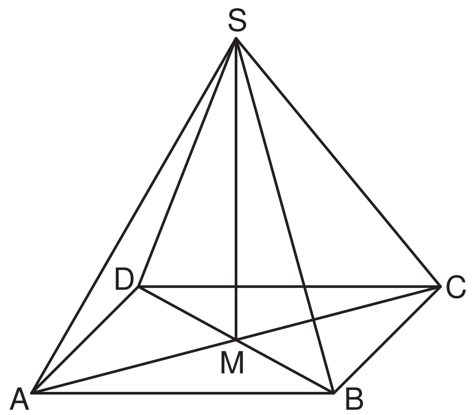
a) Zeichne das Schrägbild der Pyramide ABCDS im Maßstab 1:100, wobei die Strecke $\overline{AB}$ auf der Schrägbildachse und der Punkt A links vom Punkt B liegen soll.

Für die Zeichnung gilt: $q = 0{,}5;\ \omega = 45°$.

b) Begründe, weshalb das Volumen der Pyramide ABCDS kleiner als 64 m^3 sein muss.

Hinweise zur Lösung

a) 4 cm in der Zeichnung entsprechen 4 m in der Wirklichkeit.



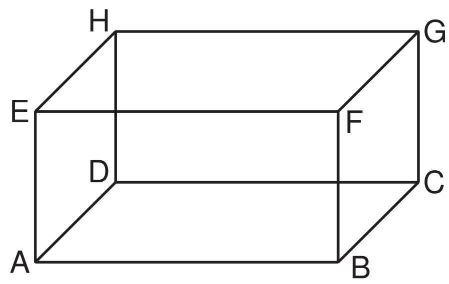
b) Das Volumen eines Würfels mit der Kantenlänge 4 m beträgt 64 m^3. Die Pyramide ABCDS hat die gleiche Grundfläche wie dieser Würfel und ebenfalls eine Höhe von 4 m. Darum muss ihr Volumen kleiner als 64 m^3 sein.

Im Vordergrund stehende mathematische Leitideen und allgemeine mathematische Kompetenzen

(L3) Raum und Form	(K1) Mathematisch argumentieren
	(K2) Probleme mathematisch lösen
	(K4) Mathematische Darstellungen verwenden

Aufgabe 7

Gegeben ist der Quader ABCDEFGH.



a) Begründe, warum die Strecken $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$ in Wirklichkeit gleich lang sind, obwohl diese im Schrägbild mit unterschiedlichen Längen dargestellt werden.

b) Die Strecke $\overline{AC}$ liegt in einer Ebene, die senkrecht auf der Grundfläche ABCD steht.
Nenne drei Punkte dieser Ebene.

Hinweise zur Lösung

a) Da die Grundfläche eines Quaders ein Rechteck ist, sind die Diagonalen $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$ gleich lang.

b) z. B.: A, C und G

Im Vordergrund stehende mathematische Leitideen und allgemeine mathematische Kompetenzen

(L3) Raum und Form	(K1) Mathematisch argumentieren
	(K4) Mathematische Darstellungen verwenden
	(K6) Kommunizieren

Aufgabe 8

1) Gib den Extremwert sowie die Art des Extremwerts und die zugehörige Belegung von x an $(x \in \mathbb{Q})$.

   a) $T(x) = -(x-3)^2 + 4$

   b) $T(x) = -2 + x^2$

2) Gib zwei verschiedene quadratische Terme $T_1(x)$ und $T_2(x)$ $(x \in \mathbb{Q})$ an, die für $x = 2$ ein Maximum von 5 haben.

3) Bestimme rechnerisch einen quadratischen Term $T_2(x)$, der für $x = 4$ den gleichen minimalen Termwert hat wie der Term $T_1(x) = 3x^2 + 12x + 3$ $(x \in \mathbb{Q})$.

Hinweise zur Lösung
a) i) $T_{max} = 4$ für $x = 3$
ii) $T_{min} = -2$ für $x = 0$
b) z. B.: $T_1(x) = -(x-2)^2 + 5$ $(x \in \mathbb{Q})$ und $T_2(x) = -13(x-2)^2 + 5$ $(x \in \mathbb{Q})$
c) z. B.: $T_1(x) = 3x^2 + 12x + 3$
$T_1(x) = 3\left[\left(x^2 + 4x + 2^2\right) - 2^2\right] + 3$
$T_1(x) = 3(x+2)^2 - 9$ $\Rightarrow T_2(x) = 3(x-4)^2 - 9$ $(x \in \mathbb{Q})$

Im Vordergrund stehende mathematische Leitideen und allgemeine mathematische Kompetenzen	
(L4) Funktionaler Zusammenhang	(K2) Probleme mathematisch lösen
	(K5) Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen

Aufgabe 9

Ordne den fünf quadratischen Termen jeweils die passende Beschreibung ihres Extremwerts zu $(x \in \mathbb{Q})$.

Verbinde dazu zusammengehörige Kästchen.

	$T_{max} = 2{,}5$ für $x = -3$
$T(x) = -2{,}5(x+3)^2 - 3{,}5$	$T_{max} = -3{,}5$ für $x = -2{,}5$
$T(x) = 3{,}5 + 3(2{,}5 - x)^2$	$T_{min} = 3{,}5$ für $x = 3$
$T(x) = 2{,}5 - 3{,}5(x+3)^2$	$T_{min} = 2{,}5$ für $x = -3$
$T(x) = -3(x+2{,}5)^2 + 3{,}5$	$T_{max} = -3{,}5$ für $x = -3$
$T(x) = 2{,}5(x-3)^2 + 3{,}5$	$T_{min} = 3{,}5$ für $x = 2{,}5$
	$T_{max} = 3{,}5$ für $x = -2{,}5$

Hinweise zur Lösung

	$T_{max} = 2{,}5$ für $x = -3$
$T(x) = -2{,}5(x+3)^2 - 3{,}5$	$T_{max} = -3{,}5$ für $x = -2{,}5$
$T(x) = 3{,}5 + 3(2{,}5 - x)^2$	$T_{min} = 3{,}5$ für $x = 3$
$T(x) = 2{,}5 - 3{,}5(x+3)^2$	$T_{min} = 2{,}5$ für $x = -3$
$T(x) = -3(x+2{,}5)^2 + 3{,}5$	$T_{max} = -3{,}5$ für $x = -3$
$T(x) = 2{,}5(x-3)^2 + 3{,}5$	$T_{min} = 3{,}5$ für $x = 2{,}5$
	$T_{max} = 3{,}5$ für $x = -2{,}5$

Im Vordergrund stehende mathematische Leitideen und allgemeine mathematische Kompetenzen

(L4) Funktionaler Zusammenhang (K6) Kommunizieren

Aufgabe 10

Bei einem Quadrat mit der Seitenlänge x cm $\left(x \in \mathbb{Q}^{+}\right)$ werden zwei gegenüberliegende Seiten um jeweils 5 cm so verlängert, dass ein Rechteck entsteht. Der Umfang dieses Rechtecks ist doppelt so groß wie der Umfang des Quadrates.

Mit welchen Gleichungen kann die Seitenlänge x cm des Quadrats berechnet werden?

Kreuze alle passenden Gleichungen an.

❑ $4x+10=8x$ ❑ $2(x+5)+2x=4x:2$ ❑ $x(x+5)=2x^2$ ❑ $[2x+2(x+5)]:2=4x$

Hinweise zur Lösung			
Die erste und die vierte Gleichung sind richtig: $4x+10=8x$ und $[2x+2(x+5)]:2=4x$			
Im Vordergrund stehende mathematische Leitideen und allgemeine mathematische Kompetenzen			
(L4)	Funktionaler Zusammenhang	(K5)	Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen

Aufgabe 11

Bei einem Rechteck mit den Seitenlängen 12 cm und 17 cm wurde die kürzere Seite um x cm verlängert und gleichzeitig die längere Seite um x cm verkürzt, so dass neue Rechtecke entstehen $\left(x \in \mathbb{Q}^+\right)$.

a) Felix hat den Flächeninhalt der Rechtecke berechnet, die für $x = 1$ und $x = 2$ entstehen. Dabei hat er festgestellt, dass der Flächeninhalt dieser Rechtecke jeweils größer ist als der Flächeninhalt des ursprünglichen Rechtecks.

Zeige rechnerisch, dass diese Feststellung richtig ist.

b) Bei der Untersuchung der neuen Rechtecke mithilfe eines Geometrieprogramms findet Felix heraus, dass der Flächeninhalt für $x = 2{,}5$ maximal wird.
Um diesen Wert zu bestätigen, berechnet er den Flächeninhalt der Rechtecke in Abhängigkeit von x und erhält dafür den Term $A(x) = \left(x^2 + 5x + 204\right)\,\text{cm}^2$.

Begründe ohne Rechnung, dass Felix einen Fehler gemacht hat.

Hinweise zur Lösung

a) ursprüngliches Rechteck: $A = 204\,\text{cm}^2$

Rechteck für $x = 1$: $A = 208\,\text{cm}^2 > 204\,\text{cm}^2$

Rechteck für $x = 2$: $A = 210\,\text{cm}^2 > 204\,\text{cm}^2$

b) z. B.: Da vor dem x^2 im Term kein Minuszeichen steht, würde Felix einen minimalen Flächeninhalt angeben können, aber keinen maximalen.

Im Vordergrund stehende mathematische Leitideen und allgemeine mathematische Kompetenzen

(L4) Funktionaler Zusammenhang	(K1) Mathematisch argumentieren
	(K5) Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen

Aufgabe 12

Definitionsmenge:

a) Gib zwei verschiedene Bruchterme an, bei denen die Definitionsmenge $D = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ ist.

b) Gib einen Bruchterm an, bei dem die Definitionsmenge $D = \mathbb{Q} \setminus \{-1; 5\}$ ist.

Hinweise zur Lösung
a) z. B.: $\frac{1}{x}$ und $\frac{1}{x \cdot x}$
b) z. B.: $\frac{1}{(x+1) \cdot (x-5)}$

Im Vordergrund stehende mathematische Leitideen und allgemeine mathematische Kompetenzen	
(L1) Zahl	(K5) Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen

Aufgabe 13

Kreuze die passende Definitionsmenge zu folgender Bruchgleichung an.

$$\frac{x-3}{(x-2{,}5)\cdot x}=\frac{4}{x-2} \qquad G=\mathbb{Q}$$

❑ $D=\mathbb{Q}\setminus\{2\}$ ❑ $D=\mathbb{Q}\setminus\{3\}$ ❑ $D=\mathbb{Q}\setminus\{2;2{,}5\}$ ❑ $D=\mathbb{Q}\setminus\{0;2;2{,}5\}$ ❑ $D=\mathbb{Q}\setminus\{0;2;2{,}5;3\}$

Hinweise zur Lösung	
Die vierte Lösung ist richtig: $D=\mathbb{Q}\setminus\{0;2;2{,}5\}$	
Im Vordergrund stehende mathematische Leitideen und allgemeine mathematische Kompetenzen	
(L1) Zahl	(K5) Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen

Aufgabe 14

Gib die Definitionsmenge D an und bestimme mithilfe von Äquivalenzumformungen die Lösungsmenge L der folgenden Bruchgleichung.

$\frac{1}{x-6} = \frac{5}{x}$ $\qquad G = \mathbb{N}$

Hinweise zur Lösung
$\frac{1}{x-6} = \frac{5}{x} \qquad G = \mathbb{N} \qquad D = \mathbb{N} \setminus \{6\}$ $\Leftrightarrow \quad 1 \cdot x = 5 \cdot (x-6)$ $\Leftrightarrow \quad x = 5x - 30 \quad \vert -5x$ $\Leftrightarrow \quad -4x = -30 \quad \vert :(-4)$ $\Leftrightarrow \quad x = 7{,}5 \qquad L = \{\ \}$

Im Vordergrund stehende mathematische Leitideen und allgemeine mathematische Kompetenzen	
(L4) Funktionaler Zusammenhang	(K5) Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen

Aufgabe 15

Angelika möchte die Lösungsmenge der angegebenen Bruchgleichung bestimmen:

$$\frac{7}{x-3} = \frac{5}{x-3} \quad | \cdot (x-3) \qquad G = \mathbb{Q}$$

$$\Leftrightarrow \quad 7x - 21 = 5x - 15 \quad | -5x$$

$$\Leftrightarrow \quad 2x - 21 = -15 \quad | +21$$

$$\Leftrightarrow \quad 2x = 6 \quad | : 2$$

$$\Leftrightarrow \quad x = 3 \qquad \underline{\underline{L = \{3\}}}$$

Beschreibe, welchen Fehler Angelika dabei gemacht hat.

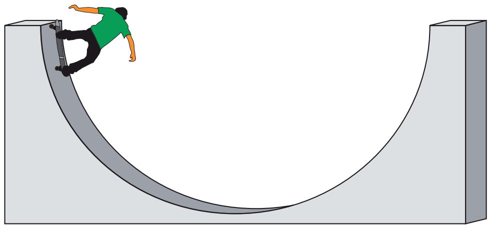
Hinweise zur Lösung

z. B.: Angelika hat beim Angeben der Lösungsmenge die Definitionsmenge nicht beachtet. Die Zahl 3 ist nicht in der Definitionsmenge und damit auch nicht in der Lösungsmenge.

Im Vordergrund stehende mathematische Leitideen und allgemeine mathematische Kompetenzen

(L4) Funktionaler Zusammenhang (K6) Kommunizieren

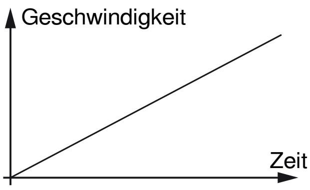
Aufgabe 16



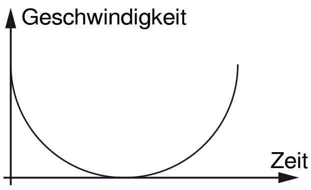
Der rechts abgebildete Skater durchfährt einmal die Half-Pipe.

Welches der unten stehenden Diagramme passt am besten zu der Fahrt des Skaters?

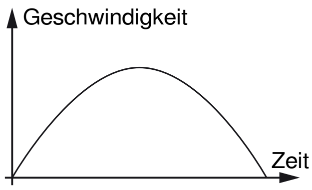
Kreuze an und begründe deine Entscheidung.



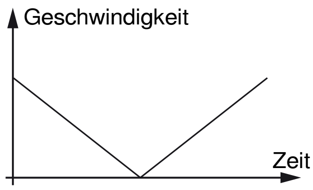
❑



❑



❑



❑

Hinweise zur Lösung

Die dritte Lösung ist richtig, da nur bei diesem Diagramm die Geschwindigkeit ansteigt und dann wieder nachlässt.

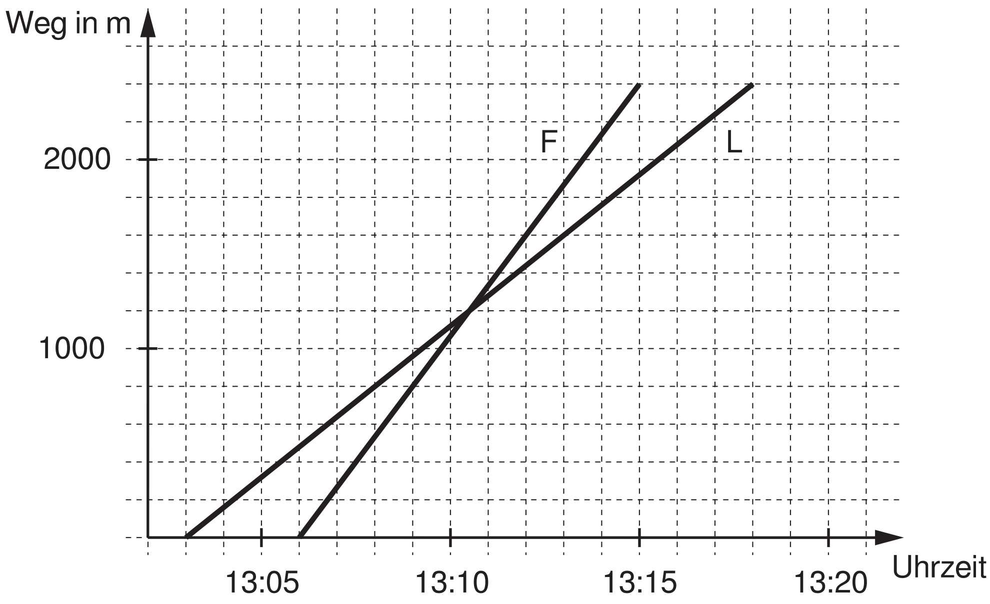
Quelle: verändert nach Jahrgangsstufentest 2012

Im Vordergrund stehende mathematische Leitideen und allgemeine mathematische Kompetenzen

(L4)	Funktionaler Zusammenhang	(K1)	Mathematisch argumentieren
		(K3)	Mathematisch modellieren

Aufgabe 17

Folgendes Weg-Zeit-Diagramm beschreibt Fynns (F) und Lars' (L) Weg von der Schule nach Hause. Fynn fährt mit dem Fahrrad und Lars mit seinem Longboard.



Kreuze an, welche Aussagen zum Diagramm passen.

❑ Fynn ist mit dem Fahrrad schneller als Lars.

❑ Fynn und Lars haben kurz nach 13:10 Uhr jeweils ca. 1200 m zurückgelegt.

❑ Lars hat einen längeren Weg nach Hause als Fynn.

Hinweise zur Lösung
Die Aussagen 1 und 2 passen zum Diagramm. Quelle: Jahrgangsstufentest 2016
Im Vordergrund stehende mathematische Leitideen und allgemeine mathematische Kompetenzen
(L4) Funktionaler Zusammenhang (K4) Mathematische Darstellungen verwenden

Aufgabe 18

In der Klasse 8 A wurden bei einem Sportwettkampf acht von 24 Schülern geehrt. In der Klasse 8 B waren dies nur sieben Schüler. Dennoch behauptet Paul aus der 8 B: „Die erfolgreichere Klasse beim Wettkampf waren trotzdem wir.“ Begründe, warum dies so sein kann.

Hinweise zur Lösung

z. B.: Wenn in der Klasse 8 B weniger als 21 Schüler sind, so ist die relative Häufigkeit der geehrten Schüler in der 8 B im Vergleich zur 8 A größer.

Im Vordergrund stehende mathematische Leitideen und allgemeine mathematische Kompetenzen

(L5) Daten und Zufall	(K1) Mathematisch argumentieren

Aufgabe 19

In einem blickdichten Säckchen befinden sich vier gleichartige Kugeln: eine rote, eine gelbe, eine schwarze und eine blaue Kugel. Aus diesem Säckchen werden nacheinander zwei Kugeln gezogen. Untersucht wird folgendes Ereignis: *Die zweite Kugel ist gelb*.

a) Nimm an, dass die erste Kugel nicht zurückgelegt wird.

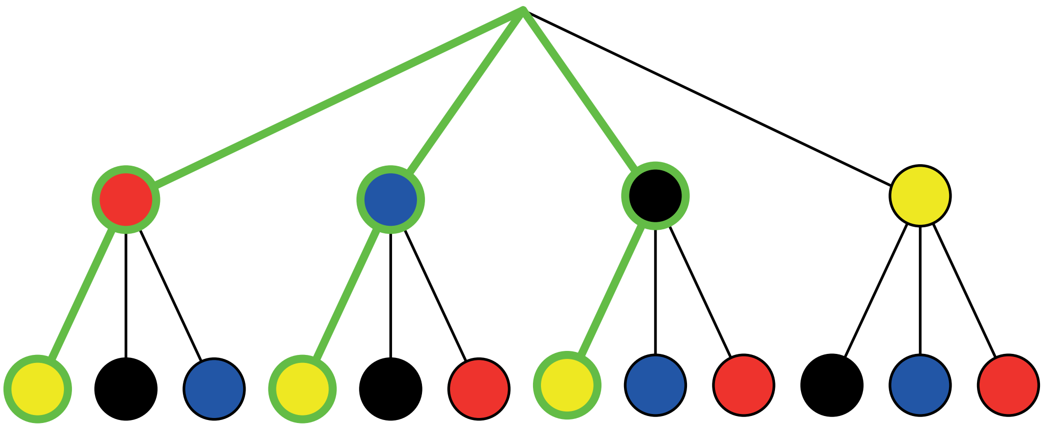
Erstelle ein passendes Baumdiagramm und markiere darin alle Pfade farbig, die zu dem genannten Ereignis gehören.

b) Die Aufgabe a) wird so abgeändert, dass die erste Kugel wieder zurückgelegt wird.

Beschreibe die beiden Unterschiede, die sich im Vergleich zur Lösung von Aufgabe a) ergeben.

Hinweise zur Lösung

a)



b) z. B.: Für die zweite Kugel ergeben sich nun jeweils vier anstelle von drei Verzweigungen. Zudem ist ein zusätzlicher Pfad zu markieren, der zum Ergebnis „gelb-gelb“ gehört.

Quelle: verändert nach Grundwissentest 9I, 2018

Im Vordergrund stehende mathematische Leitideen und allgemeine mathematische Kompetenzen

(L5) Daten und Zufall	(K4) Mathematische Darstellungen verwenden
	(K6) Kommunizieren

Aufgabe 20

Die 40 Mädchen eines Fußballvereins gehen gemeinsam zum Entenangeln auf ein Volksfest. In einem Wasserbecken befinden sich 120 Plastikenten. Auf der Unterseite der Enten ist der Gewinn beschrieben: 114 Enten sind Nieten, 6 Enten sind Gewinne.

Der Reihe nach angelt nun jedes der 40 Mädchen eine Ente. Erst danach werden alle geangelten Enten zurück in das Becken gelegt.

Olga beginnt und Marie ist als Letzte an der Reihe. Zwei Gewinne wurden bis dahin bereits geangelt. Marie überlegt sich, wie ihre Gewinnchance im Vergleich zu Olga ist:

Bei Olga galt: $\frac{6}{120} = \frac{1}{20}$.

Bei mir gilt: $\frac{4}{80} = \frac{1}{20}$.

Ich habe also die gleiche Gewinnchance wie Olga.

Beurteile Maries Einschätzung.

Hinweise zur Lösung

z. B.: Vor Marie haben 39 Mädchen geangelt. Es sind also noch 81 Enten vorhanden und nicht 80, wie Marie annimmt. Marie hat somit eine geringere Gewinnchance als Olga.

Im Vordergrund stehende mathematische Leitideen und allgemeine mathematische Kompetenzen

(L5) Daten und Zufall	(K1) Mathematisch argumentieren
	(K3) Mathematisch modellieren

Quellen- und Literaturangaben

Texte, Bilder (sofern nicht anders angegeben) und Material: ISB