1 Erfassen, Auswerten und Interpretieren von Daten unter Verwendung von zusätzlichen Kenngrößen (Stichprobe, Gesamtheit)

Aufbauend auf den Erfahrungen aus den vorhergehenden Jahrgangsstufen lernen die Schüler Fragen zu stellen und Erhebungen zu planen, mit denen Daten zu einem oder mehreren Merkmalen in einer Grundgesamtheit erhoben werden. Sie kennen die Problematik der Auswahl einer repräsentativen Stichprobe und können durch zufällige Auswahl eine solche in einfachen Fällen gewinnen.
Eine Stichprobe ist eine Auswahl. Man macht Stichproben, weil es meist schwer bis unmöglich ist, die komplette Gesamtheit zu untersuchen. Wenn man beispielsweise verlässliche statistische Daten darüber haben will, wie viele Erwachsene täglich die Tagesschau sehen, dann muss man nicht die Gesamtheit aller Erwachsenen in Deutschland befragen, es mag reichen, wenn man eine Stichprobe von 100 Leuten nimmt.
Stichproben sollten nicht nur bequem zu machen sein, sondern auch repräsentativ. Für diese Untersuchung über die Fernsehteilnehmer der Tagesschau macht es z. B. keinen Sinn nur Frauen zu befragen, oder nur FDP-Wähler.

1.1 Sammeln von Daten

Die Schüler entwerfen einen Fragebogen (z. B. zur Freizeitbeschäftigung oder zum Medienverhalten ihrer Mitschüler).
Beispiel: Zum besseren kennen lernen haben die Schülerinnen und Schüler der Klasse 7a einen Fragebogen mit den Fragen „dein Lieblingstier“, „dein Lieblingssport“ und „wie lange schaust du täglich fern“ erstellt.
Um nicht alle 7. Klassen der Schule befragen zu müssen wurden die 23 Schülerinnen und Schüler der eigenen Klasse (7a) als Stichprobe gewählt.
Die Zusammensetzung der 7. Klassen in dieser Schule ist ziemlich gleich. Alle Schülerinnen und Schüler kommen aus dem gleichen Ortsteil, bis auf wenige Ausnahmen waren sie alle schon in der 6. Klasse an der Schule, in jeder 7. Klasse sind nur wenige Kinder von Migranten. Deshalb wurde angenommen, dass die Ergebnisse der Umfrage repräsentativ für alle Schülerinnen und Schüler der 7. Klasse der Schule sind.
Zur Überprüfung, ob diese Annahme, dass die Ergebnisse für alle Schülerinnen und Schüler der 7. Klasse der Schule repräsentativ sind, richtig ist, plant die Klasse die gleiche Umfrage in einer weiteren 7. Klasse durchzuführen. Dabei kam eine Schülerin auf die Idee lieber aus jeder der fünf 7. Klassen fünf nach dem Zufallsprinzip ausgewählte Schüler zu befragen. Es wurde beschlossen, auch diese Umfrage durchzuführen und die Ergebnisse mit den anderen Umfrageergebnissen zu vergleichen. Da die Daten später mit einem Tabellenkalkulationsprogramm ausgewertet werden wurde auch gleich eine Formel zur zufälligen Auswahl entdeckt. Für 25 Schüler nimmt man um eine Zahl (Nummer des Schülers) aus 1 ... 25 auszuwählen die Formel =RUNDEN(ZUFALLSZAHL()*24;0)+1.

1.2 Auswertung einer Urliste mithilfe eines Tabellenkalkulationsprogramms

Die Klasse hat eine Umfrage mit den Fragen „Dein Lieblingstier“, „Dein Lieblingssport“ und „wie lange schaust du täglich fern“ durchgeführt. Zur leichteren Auswertung wurden die Sportarten als Auswahl vorgegeben, bei der Fernsehdauer wurde eine Rundung auf halbe Stunden gefordert.
Die gewonnenen Daten werden in ein Tabellenkalkulationsprogramm übertragen, ausgewertet und mögliche Aussagen verbalisiert.
Die Auswertung der Umfrage wurde nach folgenden Gesichtspunkten geplant:

a) Wie lange schauen Jungen und Mädchen durchschnittlich täglich fern?
b) Sitzen Jungen oder Mädchen länger vor dem Fernsehgerät?
c) Welches Tier ist in der Klasse am beliebtesten?
d) Welche Tiere sind bei Mädchen besonders beliebt?
e) Stimmt es, dass in der Klasse Skifahren bei Mädchen viel beliebter ist als bei Jungen?
f) Gibt es eine typische Sportart für Jungen?

Zuerst wurden die Fragebögen zu einer Urliste in ein Tabellenkalkulationsblatt übertragen:

	A	B	C	D	E
1	Vorname	Junge/Mädchen	Lieblingstier	Lieblingssport	Fernsehen (tägl. h)
2	Tamara	M	Hund	Schwimmen	1
3	Christina	M	Katze	Inlineskating	2
4	Benedikt	J	Vogel	Tennis	1
5	Iris	M	Pferd	Reiten	3,5
6	Jasmin	M	Pferd	Reiten	0,5
7	Sabrina	M	Hamster	Volleyball	3
8	Patrick	J	Bär	Basketball	4
9	Julie	M	Schlange	Skifahren	1
10	Benny	J	Katze	Fußball	1,5
11	Lisa	M	Vogel	Tennis	2
12	Beatrice	M	Pferd	Skifahren	1
13	Michael	J	Pferd	Fußball	3
14	Andreas	J	Hamster	Mountainbiken	2,5
15	Maximilian	J	Bär	Fußball	0,5
16	Nico	J	Schlange	Schwimmen	2
17	Ulrich	J	Katze	Inlineskating	3
18	Ines	M	Vogel	Tennis	1,5
19	Marvin	J	Pferd	Reiten	4
20	Isabella	M	Pferd	Reiten	2
21	Katrin	M	Hamster	Volleyball	1,5
22	Maximilian	J	Tiger	Basketball	0
23	Anselm	J	Hund	Fußball	1
24	Julia	M	Pferd	Tennis	0,5

Numerische Auswertungen

Im Tabellenkalkulationsprogramm benützen wir für die Auswertungen die folgenden Formeln:

Berechnung	Formel
Mittelwert	=mittelwert()
Minimum	=min()
Maximum	=max()
Median	=median()
Modalwert	=modalwert()

Auswertung der Fragen zum täglichen Fernsehkonsum.
Wenn wir die Auswertung nach Jungen und Mädchen getrennt durchführen wollen sortieren wir die Daten zuerst nach diesem Merkmal (Daten/Sortieren).

	A	B	C	D	E	F	G
1	Vorname	Junge/Mädch	Lieblingstier	Lieblingssport	Fernsehen (tägl. h)		
2	Benedikt	J	Vogel	Tennis	1		
3	Patrick	J	Bär	Basketball	4		
4	Benny	J	Katze	Fußball	1,5		
5	Michael	J	Pferd	Fußball	3		
6	Andreas	J	Hamster	Mountainbiken	2,5		
7	Maximilian	J	Bär	Fußball	0,5		
8	Nico	J	Schlange	Schwimmen	2		
9	Ulrich	J	Katze	Inlineskating	3		
10	Marvin	J	Pferd	Reiten	4		
11	Maximilian	J	Tiger	Basketball	0		
12	Anselm	J	Hund	Fußball	1		
13	Tamara	M	Hund	Schwimmen	1		
14	Christina	M	Katze	Inlineskating	2		
15	Iris	M	Pferd	Reiten	3,5		
16	Jasmin	M	Pferd	Reiten	0,5		
17	Sabrina	M	Hamster	Volleyball	3		
18	Julie	M	Schlange	Skifahren	1		
19	Lisa	M	Vogel	Tennis	2		
20	Beatrice	M	Pferd	Skifahren	1		
21	Ines	M	Vogel	Tennis	1,5		
22	Isabella	M	Pferd	Reiten	2		
23	Katrin	M	Hamster	Volleyball	1,5		
24	Julia	M	Pferd	Tennis	0,5		
25							
26					Jungen	Mädchen	Insgesamt
27	Maximale tägliche Zeit vor dem Fernsehgerät:				4	3,5	4
28	Minimale tägliche Zeit vor dem Fernsehgerät:				0	0,5	0
29	Durchschnittliche tägliche Zeit vor dem Fernsehgerät:				2,0	1,6	1,8
30	Median für die tägliche Zeit vor dem Fernsehgerät:				2	1,5	1,5
31	Modalwert für die tägliche Zeit vor dem Fernsehgerät:				1	1	1

Die weitere Auswertung erfolgt mit Hilfe folgender Formeln:

Jungen	Mädchen
=MAX(E2:E12)	=MAX(E13:E24)
=MIN(E2:E12)	=MIN(E13:E24)
=MITTELWERT(E2:E12)	=MITTELWERT(E13:E24)
=MEDIAN(E2:E12)	=MEDIAN(E13:E24)
=MODALWERT(E2:E12)	=MODALWERT(E13:E24)

Mögliche Antworten zu den Fragen a) und b) sind:

- Jungen und Mädchen sitzen zwischen 0 und 4 Stunden täglich vor dem Fernsehgerät.
- Durchschnittlich sitzen sie 1,8 Stunden (1 Stunde und 48 Minuten) vor dem Fernsehgerät.
- Dabei übertrifft der Durchschnitt bei den Jungen mit 2 Stunden den der Mädchen mit 1,6 Stunden (1 Stunde und 36 Minuten).
- Die Hälfte der Jungen schauen mehr als 2 Stunden täglich.
- Die Hälfte der Mädchen schauen mehr als 1,5 Stunden täglich.
- Eine tägliche Zeit von 1 Stunde vor dem Fernsehgerät wurde von Jungen und Mädchen am häufigsten genannt.

Mithilfe der Formel =zählenwenn() können wir die Fragen nach dem Lieblingstier und nach dem Lieblingssport beantworten. Auch hier ist die Liste nach dem Merkmal Jungen/Mädchen sortiert.

	A	B	C	D	E	F
1	Vorname	Junge/Mädch	Lieblingstier	Lieblingssport	Fernsehen (tägl. h)	
2	Benedikt	J	Vogel	Tennis	1	
3	Patrick	J	Bär	Basketball	2	
4	Benny	J	Katze	Fußball	1	
5	Michael	J	Pferd	Fußball	3,5	
6	Andreas	J	Hamster	Mountainbiken	0,5	
7	Maximilian	J	Bär	Fußball	3	
8	Nico	J	Schlange	Schwimmen	4	
9	Ulrich	J	Katze	Inlineskating	1	
10	Marvin	J	Pferd	Reiten	1,5	
11	Maximilian	J	Tiger	Basketball	2	
12	Anselm	J	Hund	Fußball	1	
13	Tamara	M	Hund	Schwimmen	3	
14	Christina	M	Katze	Inlineskating	2,5	
15	Iris	M	Pferd	Reiten	0,5	
16	Jasmin	M	Pferd	Reiten	2	
17	Sabrina	M	Hamster	Volleyball	3	
18	Julie	M	Schlange	Skifahren	1,5	
19	Lisa	M	Vogel	Tennis	4	
20	Beatrice	M	Pferd	Skifahren	2	
21	Ines	M	Vogel	Tennis	1,5	
22	Isabella	M	Pferd	Reiten	0	
23	Katrin	M	Hamster	Volleyball	1	
24	Julia	M	Pferd	Tennis	0,5	
25						
26				Jungen	Mädchen	Insgesamt
27	Anzahl der Nennungen für		Bär	2	0	2
28			Hamster	1	2	3
29			Hund	1	1	2
30			Katze	2	1	3
31			Pferd	2	5	7
32			Schlange	1	1	2
33			Tiger	1	0	1
34			Vogel	1	2	3
35						
36			Basketball	2	0	2
37			Fußball	4	0	4
38			Inlineskating	1	1	2
39			Mountainbike	1	0	1
40			Reiten	1	3	4
41			Schwimmen	1	1	2
42			Skifahren	0	2	2
43			Tennis	1	3	4
44			Volleyball	0	2	2

Mögliche Antworten zu den Fragen c) bis f):

- Das Pferd ist das beliebteste Tier in der Klasse. Es ist besonders bei Mädchen beliebt.
- Skifahren ist bei Mädchen beliebter als bei Jungen.
- Fußball ist bei den Jungen am beliebtesten.

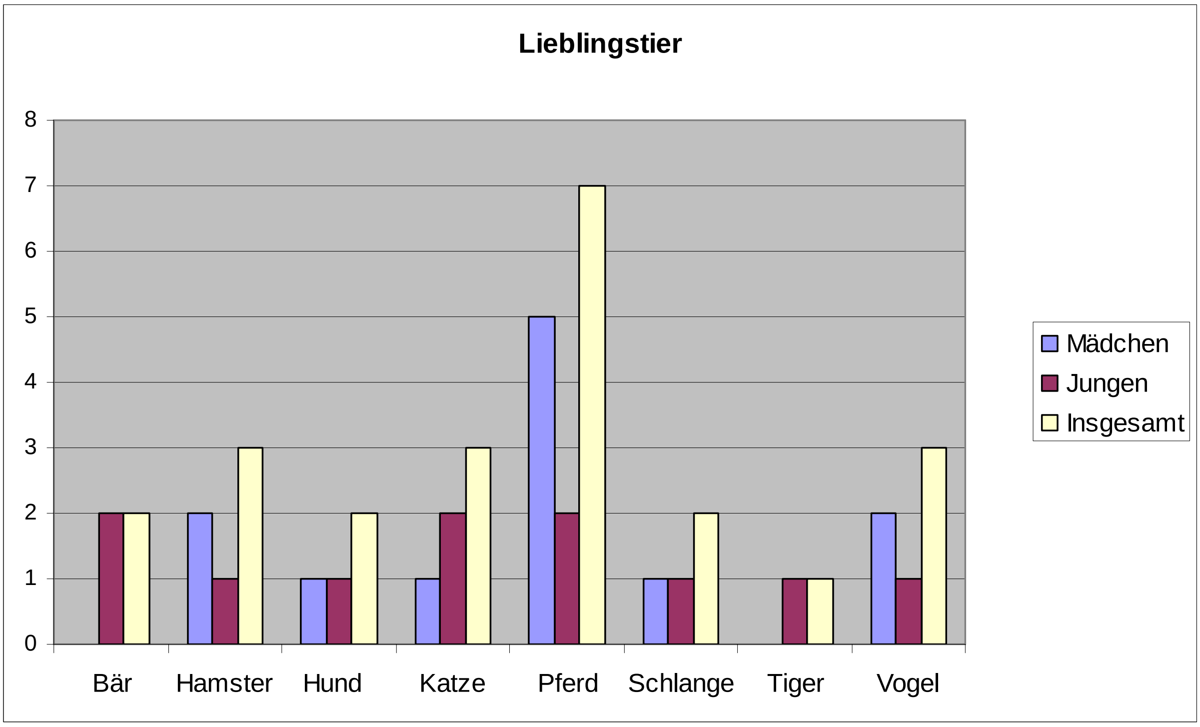
Hier taucht die Frage der Repräsentanz der Stichprobe auf.

- Sind die Zahlen bei einigen Sportarten zu nieder um eine allgemein gültige Aussage zu treffen?
- Kein Fußballverein für Mädchen in der Nähe?

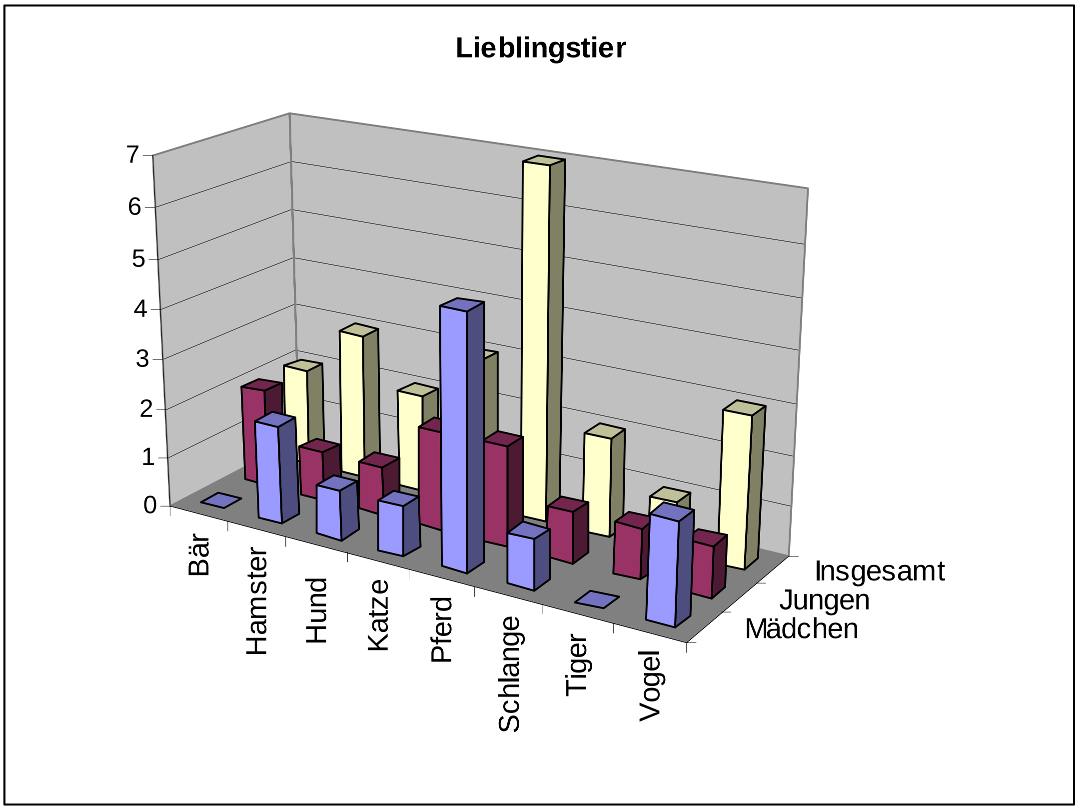
Graphische Auswertungen

Die graphischen Auswertungen ermöglichen eine schnelle qualitative Erfassung der Umfrageergebnisse.

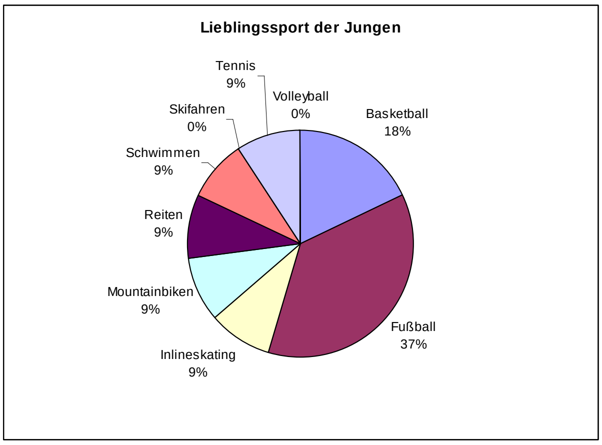
Auftrag 1: Sortiere die Auswertung nach absoluter Häufigkeit der Nennungen und fertige dann ein Säulendiagramm an.

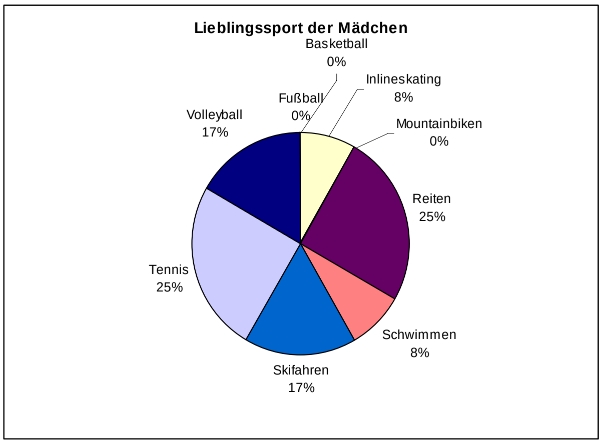


Manchmal erweckt eine räumliche Darstellung mehr Aufmerksamkeit:

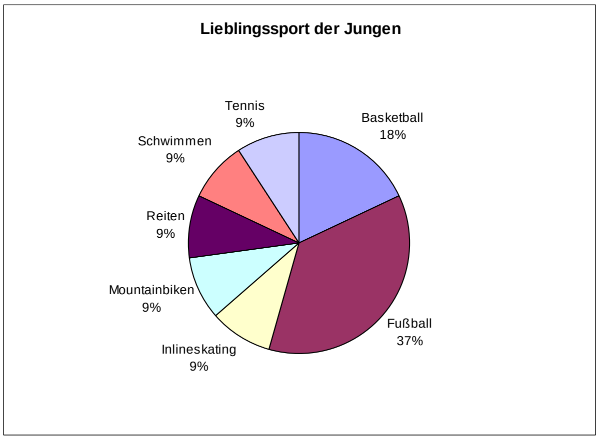


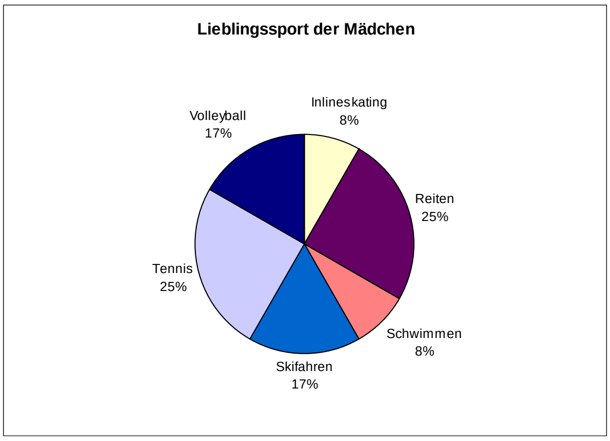
Auftrag 2: Fertige zur Frage nach dem Lieblingssport Kreisdiagramme getrennt nach Jungen und Mädchen an.





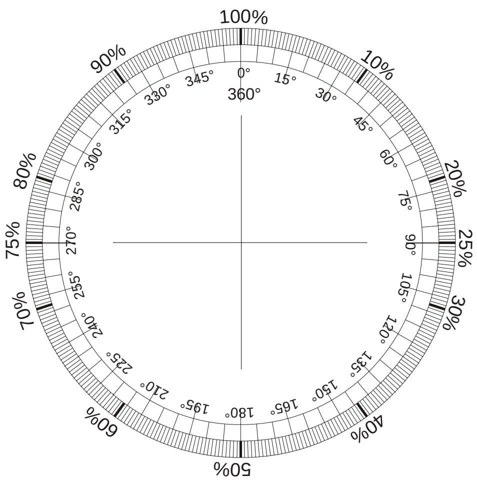
Oftmals werden 0% nicht dargestellt, die entsprechende Beschriftung wird entfernt.





Auftrag 3: Erstelle ein Kreisdiagramm zur Frage nach dem Lieblingstier von Mädchen. Einmal mit und einmal ohne Tabellenkalkulationsprogramm.

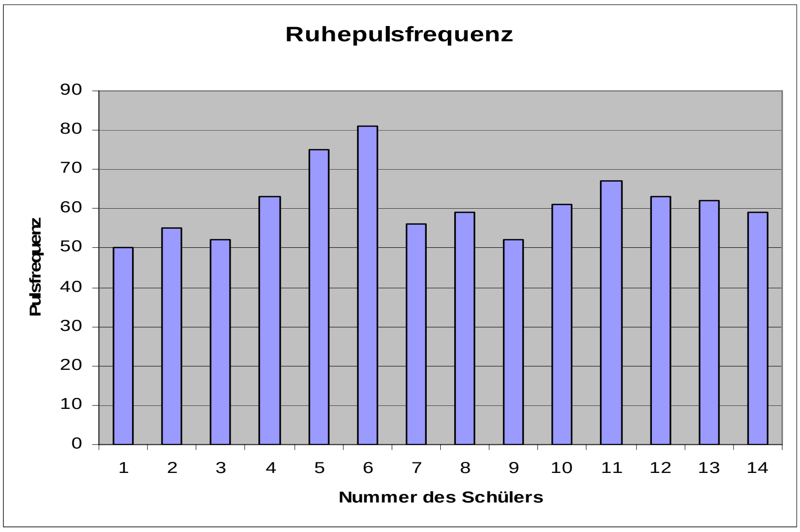
Damit die Schüler Kreisdiagramme besser erstellen und interpretieren können erhalten sie diese Winkelscheibe:



Beispiel
Im Rahmen einer Umfrage zum Gesundheitszustand von Schülern wurde von insgesamt 14 Schülern aus 7. Klassen die Ruhepulsfrequenz gemessen. Die Daten wurden anonymisiert, also ohne Namen ausgewertet.

Die Auswertung mit Hilfe eines Tabellenkalkulationsprogramms:

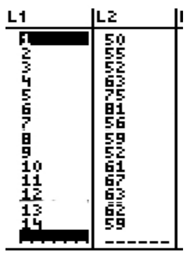
	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	**Auswertung der Ruhepulsfrequenzen von 14 Schülern**								
2									
3									
4	Schüler	Ruhepulsfrequenz		Mittelwert	Minimum	Maximum	Median	Erstes Quartil	Drittes Quartil
5	1	50							
6	2	55		61,07	50	81	60	55,25	63
7	3	52							
8	4	63							
9	5	75							
10	6	81							
11	7	56							
12	8	59							
13	9	52							
14	10	61							
15	11	67							
16	12	63							
17	13	62							
18	14	59							
19									



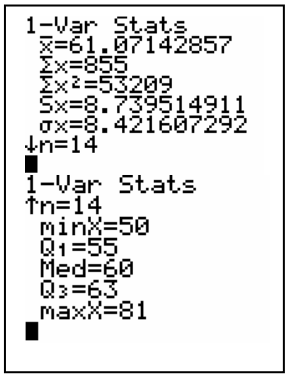
- Erstes Quartil 55,25 bedeutet, dass 25% einen Ruhepuls kleiner oder gleich 55 haben.
- Median 60 (zweites Quartil) bedeutet, dass 50% einen Ruhepuls kleiner oder gleich 60 haben.
- Drittes Quartil 63 bedeutet, dass 75% einen Ruhepuls kleiner oder gleich 63 haben.

Auswertung mit Hilfe eines grafikfähigen Taschenrechners
Zuerst werden die Werte in Listen übertragen:

- Die Liste L1 enthält die Nummer des Schülers.
- Die Liste L2 die Pulswerte.



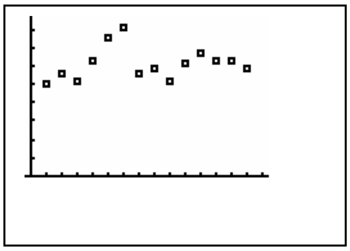
Numerisch:



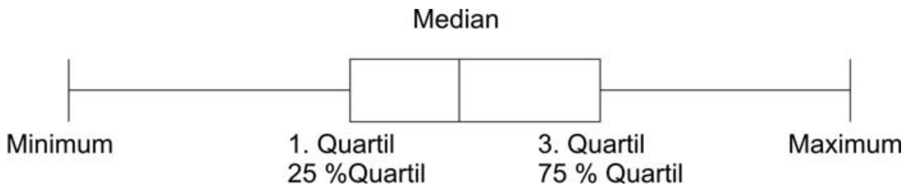
Mittelwert $\bar{x}$
Summe $\sum x$
Summe der Quadrate $\sum x^2$
Standardabweichung Sx
Varianz σx
Minimum minX
Obere Grenze des ersten Quartils Q_1
Median Med
Obere Grenze des dritten Quartils Q_3
Maximum maxX

Die Erklärung der rot geschriebenen Begriffe erfolgt in der 9. Jahrgangsstufe

Graphisch:
Darstellung in einem x-y-Diagramm

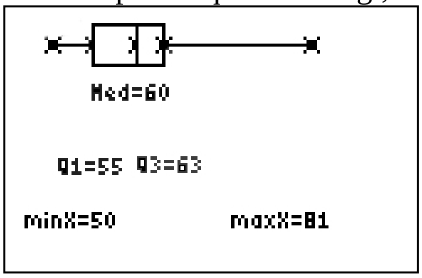


Mit dem graphikfähigen Taschenrechner können leicht aussagekräftige Boxplots erzeugt werden. Dazu erstellt der Rechner eine Rangliste und teilt diese in vier gleiche Abschnitte – die Quartile.



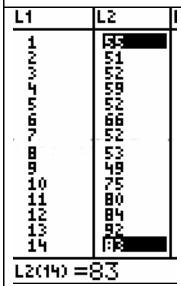
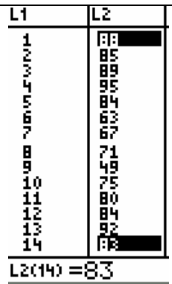
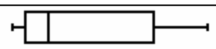
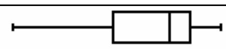
- Ein Boxplot zeigt die Verteilung der Daten innerhalb der Spannweite.
- Ist das Rechteck schmal, so zeigt dies, dass die Hälfte der Daten nah beieinander liegen.
- Ein Boxplot zeigt auch die (A)Symmetrie der Verteilung. Man kann sehen, ob das Minimum oder das Maximum weiter vom Zentralwert entfernt ist. Ist z. B. das rechte Teilrechteck (das dritte Quartil) breiter als das linke (das zweite Quartil), so zeigt dies, dass die höheren Werte über einen breiteren Bereich verteilt sind.
- Ein Viertel der Beobachtungen sind kleiner oder gleich als das untere Quartil.
- Ein Viertel der Beobachtungen sind größer oder gleich als das obere Quartil.

Der Boxplot zu den gemessenen Ruhepulsfrequenzen zeigt,



dass die Spannweite von 50 bis 81 Schläge pro Minute liegt.
dass der Zentralwert näher am Minimum als am Maximum liegt.
dass die Hälfte der Daten nahe beieinander im Bereich um den Zentralwert liegen.
dass die Werte des 3. Quartils näher am Zentralwert liegen als die des zweiten Quartils.

Aufgabe1: Die Pulsfrequenzen der 14 Schüler wurden noch zweimal gemessen. Hier die beiden Listen und die beiden Boxplots.

<table>
<tr><th>Liste a</th><th>Liste b</th><th>Boxplot 1</th><th>Boxplot 2</th></tr>
<tr>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
</tr>
</table>

a) Welcher Boxplot gehört zur Liste a bzw. zur Liste b?
b) Gib beide Listen in deinen grafikfähigen Taschenrechner ein, zeichne die Boxplots und ermittle jeweils Minimum, 1. Quartil, Median, 3. Quartil und Maximum.
c) Was könnte in der Zeit von der ersten (Ruhe-)Pulsmessung bis zu den Messungen Liste a und Liste b geschehen sein? Überlege und schreibe auf!

Aufgabe 2: Die folgende Tabelle wurde bei einer Internetsuche zu einem Handy ausgegeben.

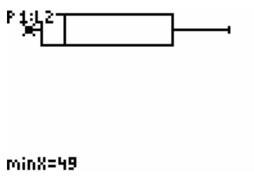
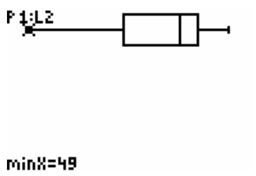
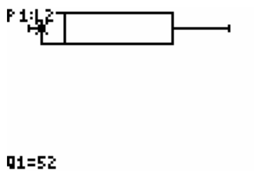
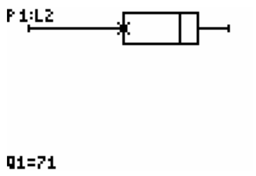
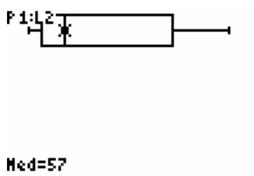
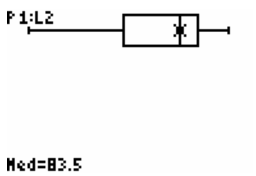
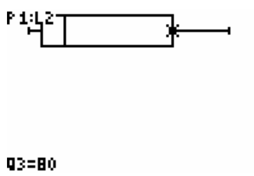
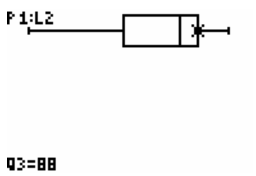
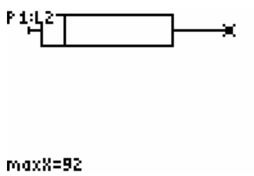
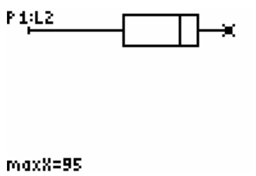
Produktbezeichnung	**Preis** inkl. MwSt	**Versandkosten**	**versicherter Versand**
Sibel C65	93,00 €	8,00 €	ja
Sibel C65	96,00 €	6,00 €	ja
Sibel C65	96,90 €	7,50 €	ja
Sibel C65	98,90 €	6,95 €	ja
Sibel C65	99,10 €	4,50€	nein
Sibel C65	99,90 €	5,95 €	nein
Sibel C65	102,30 €	6,00 €	nein
Sibel C65	107,00 €	4,00 €	nein
Sibel C65	109,00 €	12,50 €	ja
Sibel C65	109,80 €	19,95€	ja

a) Nach welchem Merkmal ist die Liste geordnet?
b) Welche Merkmale könnten für die Ordnung noch sinnvoll sein. Ordne entsprechend.

Lösungen

Aufgabe 1: a) Zur Liste a gehört der Boxplot 1 und zur Liste b gehört der Boxplot 2.

b)

<table>
<tr><th>Boxplot 1</th><th>Boxplot 2</th></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

c) Z. B.: Die Schüler sind gelaufen und haben den Ruhepuls erneut gemessen ohne ausreichend lange Zeit gewartet zu haben.

Aufgabe 2: a) Die Liste ist nach „Preis inkl. MwSt.“ geordnet.

b) Die Liste könnte nach „Versandkosten“ bzw. „versicherter Versand“ geordnet werden.
Sinnvoll wäre die Einführung einer weiteren Spalte „Preis inkl. MwSt. und Versandkosten“ und eine Sortierung nach diesem Merkmal.

2 Empirisches Gesetz der großen Zahlen; Laplace Wahrscheinlichkeit.

In einer Wiederholung soll kurz das Verständnis für „absolute und relative Häufigkeit“ geprüft bzw. geschärft werden. Dazu eignet sich z.B. eine Zeitungsmeldung wie:

> **Radarfalle an der Hauptstraße.**
> Am Freitag und am Samstag wurden an der Hauptstraße zwischen 14.00 und 16.00 Uhr die Geschwindigkeiten gemessen. Am Freitag waren 34 Fahrzeuge, am Samstag 25 Fahrzeuge um mehr als 5 km/h zu schnell unterwegs.

Hier kann erarbeitet werden, dass ein Vergleich der absoluten Zahlen der Geschwindigkeitsüberschreitungen wenig aussagekräftig ist. Es könnte ja sein, dass am Freitag 1000 Fahrzeuge, am Samstag jedoch nur 200 Fahrzeuge im angegebenen Zeitraum unterwegs waren. Eine sinnvolle Vergleichsmöglichkeit (z. B. am Freitag 3,4%, am Samstag 12,5% Geschwindigkeitsüberschreitungen) macht erst die Angabe der relativen Häufigkeiten möglich.
In der 7. Jahrgangsstufe sollte der Wahrscheinlichkeitsbegriff zuerst ohne Formalisierung und Erarbeitung einer Formel erfahren werden.
Später erfolgt die Formalisierung anhand der Auswertung von Zufallsexperimenten mit Münze, Reißnagel (für einen „unfairen Wurf“), Würfel, Riemer-Quader, Glücksrad und Kartenspiel.
In einzelnen Experimenten werden Münze und Würfel mehrmals geworfen bzw. Karten gezogen. Die relativen Häufigkeiten werden bestimmt und die Ergebnisse in einer Tabelle festgehalten. Es wird beobachtet, dass sich die relativen Häufigkeiten bei einer großen Zahl von Würfen bzw. Ziehungen bei bestimmten Werten einspielen. Dieses empirisches Gesetz der großen Zahlen wird mithilfe von Simulationen mit einem Tabellenkalkulationsprogramm verdeutlicht.
Die Begriffe Laplace-Versuch (ein Zufallsexperiment bei dem jedes Ergebnis gleichwahrscheinlich ist) und Laplace-Wahrscheinlichkeit werden eingeführt.

Hinführung zum Wahrscheinlichkeitsbegriff

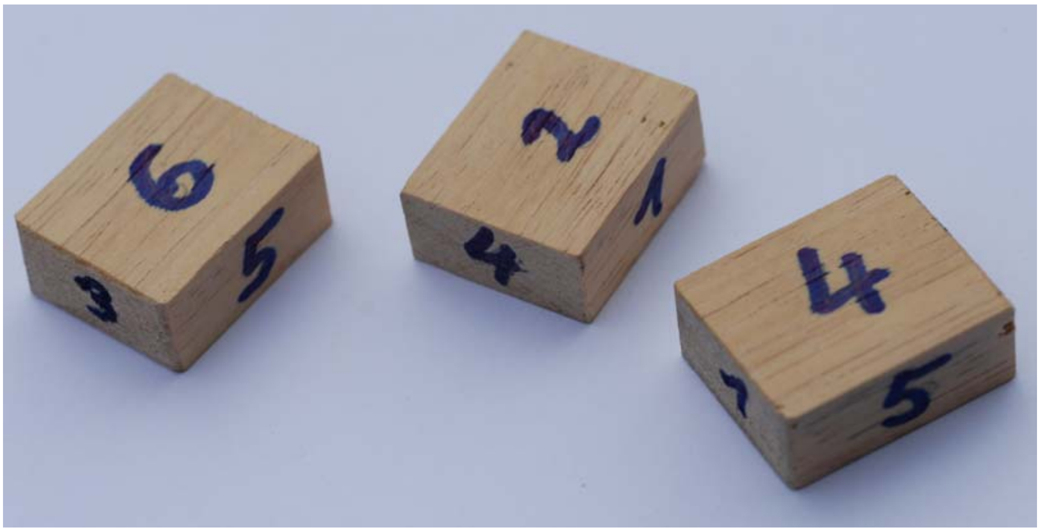
Auftrag 1: Zeichne fünf Wahrscheinlichkeitsskalen wie im Bild unten von unmöglich (Wahrscheinlichkeit ist 0 oder 0%), bis sicher (Wahrscheinlichkeit ist 1 oder 100%). Die Wahrscheinlichkeit nimmt also von links nach rechts von null bis eins bzw. von 0% bis 100% zu.

Wahrscheinlichkeitsskala

Trage nun in jeweils eine Wahrscheinlichkeitsskala deine Schätzwerte zur Wahrscheinlichkeit ein,

a) dass du in der nächsten Matheschulaufgabe eine 2 schreibst.
b) dass es Morgen regnet.
c) dass du im nächsten Winter Skilaufen gehst.
d) dass du mit 16 Jahren größer als 1,70 m bist.
e) dass FC-Bayern Meister wird.

Auftrag 2: Die Schüler würfeln mit normalen Würfeln (Laplace-Würfeln mit gleicher Wahrscheinlichkeit für jede zu würfelnde Zahl) und sog. Riemer-Quadern (mit ungleicher Wahrscheinlichkeit siehe Bild). Die Ergebnisse werden in einer Tabelle ausgewertet und diskutiert. Für die Wahrscheinlichkeiten bei den Riemer-Quadern werden verschiedene Hypothesen aufgestellt und überprüft. (Beispielsweise wird der Flächeninhalt der Quaderflächen im Verhältnis zur Oberfläche des Quaders in Bezug zur relativen Häufigkeit der gewürfelten Zahl gesetzt).



Riemer-Quader

Auftrag 3: Die Schüler spielen „Mensch ärgere dich nicht“ mit einem normalen Würfel (Laplace-Würfel). Bei einem zweiten Spiel dürfen sie aus 3 Riemer-Quadern denjenigen auswählen, der für ihre jeweilige Spielsituation der günstigste ist.

Auftrag 4: Die Schüler würfeln sechzigmal mit einem (Laplace-)Würfel und protokollieren die Ereignisse. Dann beantworten sie die folgenden Fragen:
Angenommen du würfelst 600-mal,

- wie oft erwartest du eine 1 (2; 3; ...)?
- wie oft erwartest du „keine sechs“?
- wie oft erwartest du „gerade Zahl“?
- wie oft erwartest du „größer als zwei“?

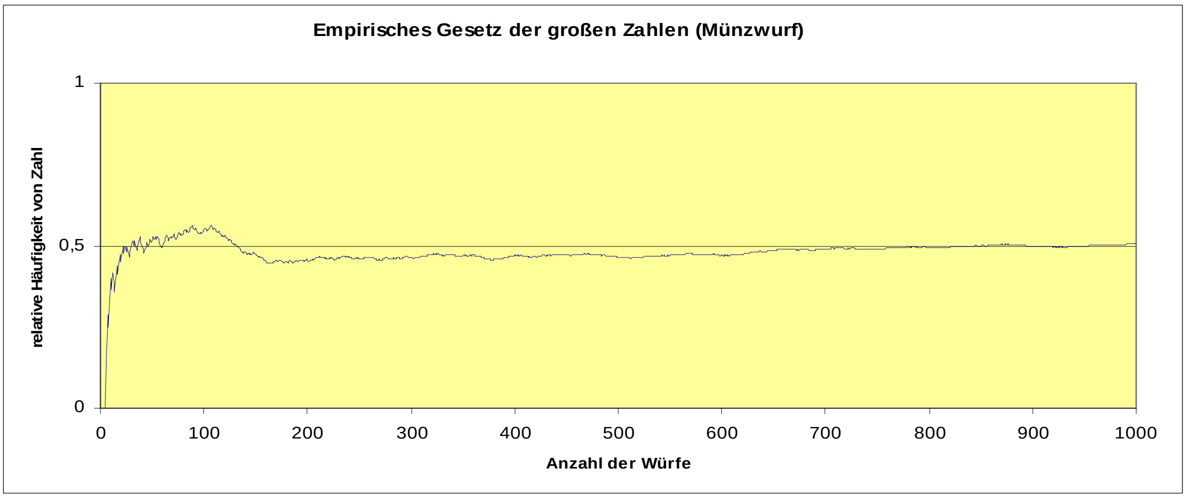
Unter der Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses verstehen wir die für dieses Ereignis vorhergesagte relative Häufigkeit.

Beispiel zu Laplace-Wahrscheinlichkeit

Auftrag 5: Wird eine Münze geworfen, so erhält man als Ergebnis entweder „Kopf“ oder „Zahl“.

a) Bestimme die absolute und die relative Häufigkeit für „Kopf“ und „Zahl“ nach 20, 50, 80 und 100 Würfen.
b) Stelle die relativen Häufigkeiten in unterschiedlichen Diagrammformen dar. Welche findest du in diesem Fall besonders anschaulich.
c) Simuliere den Versuch mithilfe eines Tabellenkalkulationsprogramms.

Die folgende Grafik zeigt eine solche Auswertung für 1000 Würfe. Man erkennt, dass sich die relativen Häufigkeiten mit der Zahl der Versuchsdurchführungen auf einen bestimmten Werte stabilisieren. Dieser Wert heißt Wahrscheinlichkeit. Die relative Häufigkeit eines Ereignisses in einer langen Versuchserie ist also vorhersagbar. Nicht vorhersagbar ist jedoch das Ergebnis eines einzelnen Versuchs.



Grafische Auswertung einer Simulation von 1000 Münzwürfen

d) Welche relative Häufigkeit für „Zahl“ („Kopf“) erwartest du bei 10 000 Würfen?
e) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit bei einem Münzwurf für „Zahl“?
f) Wie groß ist die Summe aus der Wahrscheinlichkeit für „Zahl“ und der Wahrscheinlichkeit für „Kopf“?

Aufgabe 1: Welche der drei folgenden Antworten bezogen auf die Aussagen a) und b) ist richtig?

Aussage a) Bei zehn Würfen mit einer Münze erscheint mindestens siebenmal Zahl.

Aussage b) Bei hundert Würfen mit einer Münze erscheint mindestens siebzigmal Zahl.

Antworten:

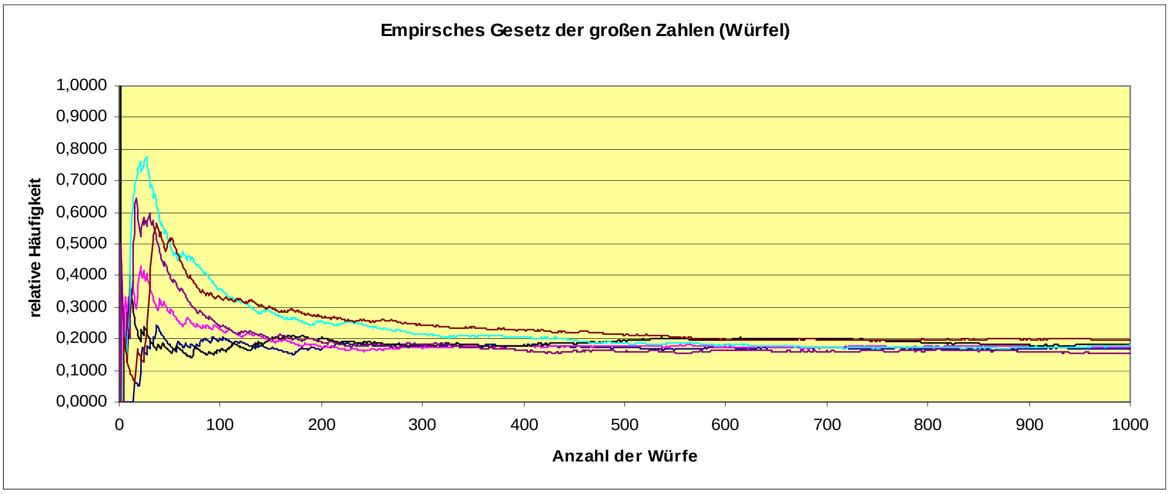
Antwort 1: a) ist wahrscheinlicher als b)

Antwort 2: b) ist wahrscheinlicher als a).

Antwort 3: a) und b) sind gleich wahrscheinlich..

Aufgabe 2: Wird ein Würfel geworfen, so erhält man entweder eine „Eins“, „Zwei“, „Drei“, „Vier“, „Fünf“ oder „Sechs“.

a) Bestimme die absoluten und die relativen Häufigkeiten für „Eins“, „Zwei“, „Drei“, „Vier“, „Fünf“ und „Sechs“ bei 20 Würfen.
b) Stelle die relativen Häufigkeiten in einem Säulendiagramm dar.
c) Welche absoluten Häufigkeiten erwartest du bei 10 000 Würfen?
d) Welche relativen Häufigkeiten erwartest du bei 10 000 Würfen?
e) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit bei einem Wurf für „Eins“?
f) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit bei einem Wurf für „nicht Eins“?
g) Wie groß ist die Summe aus der Wahrscheinlichkeit für „Eins“ und der Wahrscheinlichkeit für „Zwei“ .... und der Wahrscheinlichkeit für „Sechs“?
h) Simuliere den Versuch mithilfe eines Tabellenkalkulationsprogramms.

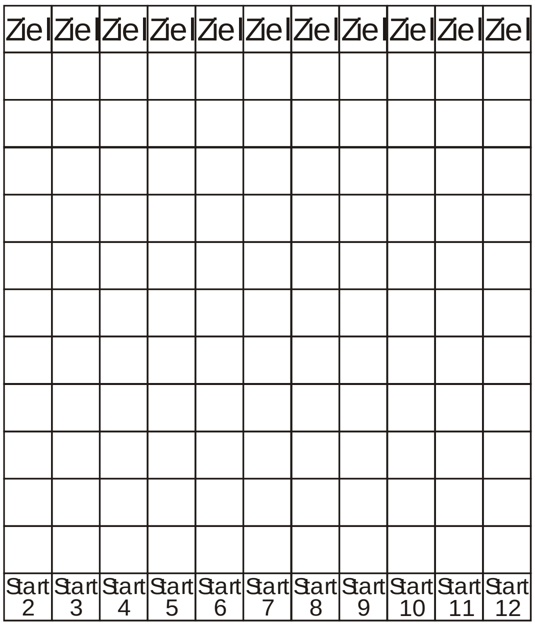


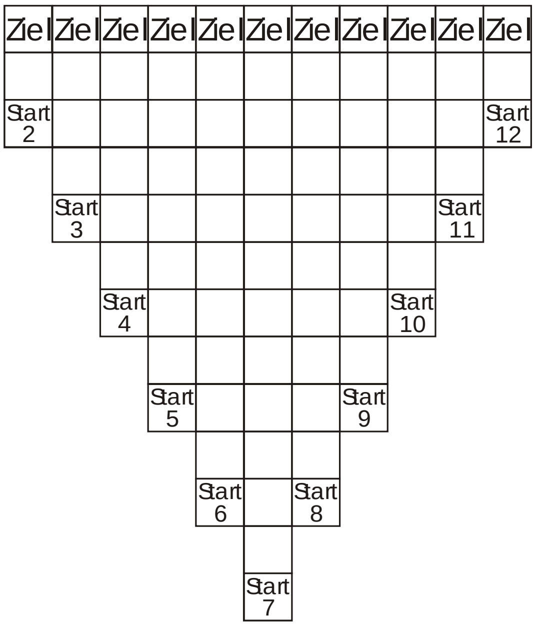
Grafische Auswertung von 1000 Würfen mit einem Würfel. Jede Farbe entspricht einer Augenzahl.

Aufgabe 3: Ein Spiel mit zwei Würfeln (Spielfeld wie im Bild links unten). Du wählst eine Augensumme und startest auf dem entsprechenden Spielfeld. Wenn du die gewählte Augensumme würfelst, dann darfst du ein Feld vorrücken.

a) Spielt das Spiel mehrmals mit drei Mitspielern und analysiert die Wahl der Sieger.

b) Entwerft ein Spielfeld, bei dem die Chancen für alle Spieler gleich groß sind (Bild unten rechts).

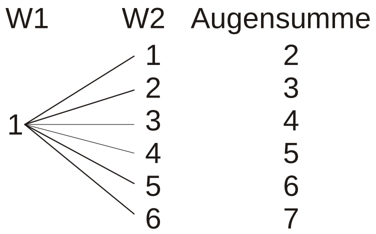


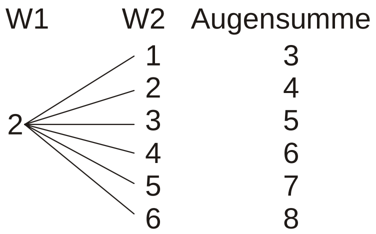


Aufgabe 4: Du würfelst mit 2 Würfeln und zählst jeweils die Augensumme.

a) Welche Kombinationen sind möglich? Vervollständige die nebenstehende Tabelle.

b) Fertige jeweils ein Baumdiagramm.
Beispiel:





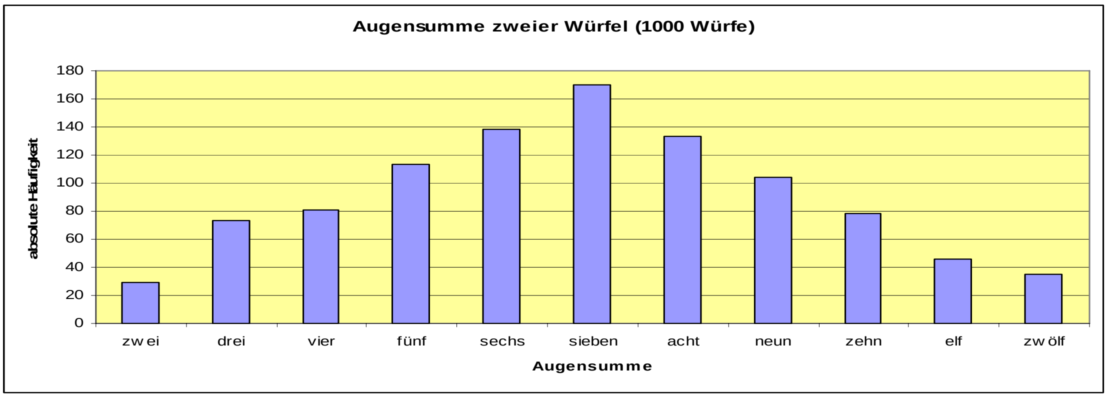
Augenzahl		Augensumme
Würfel 1	Würfel 2	
1	1	2
	2	3
	3	4
	4	5
	5	6
	6	7
2	1	3
	2	4
	.	.
	.	.
	.	.
…	…	…

c) Vervollständige die folgende Tabelle für alle möglichen Kombinationen:

Augensumme:	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
absolute Häufigkeit											
relative Häufigkeit											
Wahrscheinlichkeit	$\frac{1}{36}$										

d) Simuliere den Versuch mithilfe eines Tabellenkalkulationsprogramms.

e) Die folgende Grafik zeigt die Auswertung einer Simulation von 1000 Würfen. Berechne die relativen Häufigkeiten und vergleiche sie mit den in der Tabelle in Aufgabe 5 c) angegebenen Wahrscheinlichkeiten.



f) Erstelle ein Säulendiagramm mit den ermittelten Laplace-Wahrscheinlichkeiten und vergleiche es mit deinem „gerechten Spielfeld“ aus Aufgabe 3.

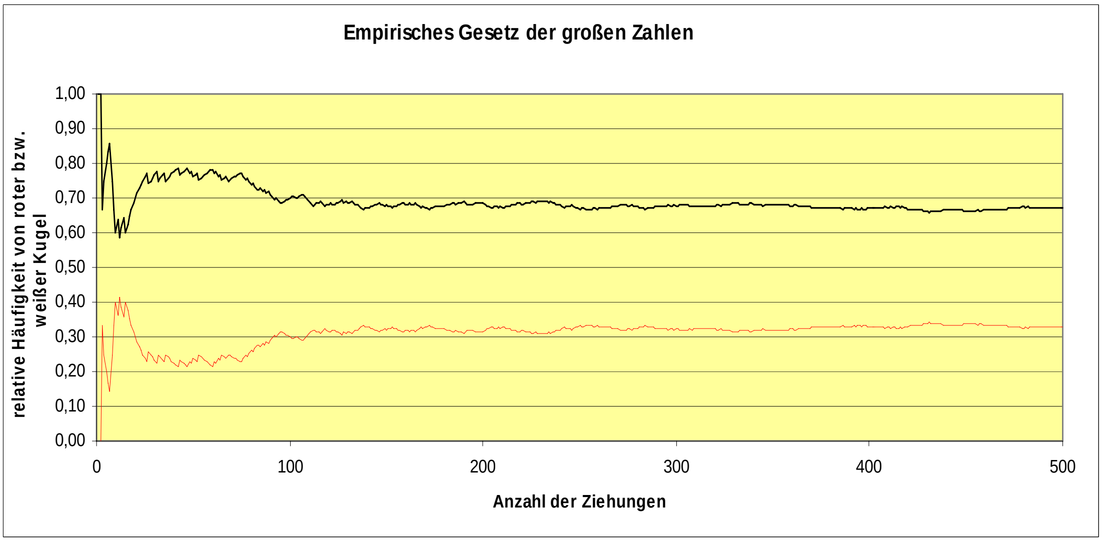
Aufgabe 5: In einem Behälter sind 15 Kugeln. Fünf der Kugeln sind rot, die anderen sind weiß. Du greifst blind hinein und nimmst eine heraus. Du merkst dir die Farbe und legst sie wieder zurück.

a) Führe dieses Experiment 10, 20, 30 und 50 mal durch, notiere die Farbe in einer Tabelle und werte dann diese Tabelle wie im Beispiel aus.

Anzahl der Versuche:	10	20	30	50
Anzahl roter Kugeln:	3	5	11	15
relative Häufigkeit:	$\frac{3}{10}$	$\frac{5}{20}$	$\frac{11}{30}$	$\frac{15}{50}$

b) Stelle die Werte für die relative Häufigkeit in einem Säulendiagramm dar.

c) Die folgende Grafik zeigt die Auswertung einer Simulation von 500 Ziehungen. Auf welche Werte stabilisieren sich die relativen Häufigkeiten?



Grafische Auswertung einer Simulation mit 500 Ziehungen

d) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass du eine rote Kugel ziehst? Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass du keine rote Kugel ziehst? Gib die Wahrscheinlichkeit jeweils als Bruchzahl, als Dezimalbruch und in Prozent an.

Aufgabe 6: Welche der drei folgenden Antworten bezogen auf die Aussagen a) und b) ist richtig?

a) 3 von den 10 ersten Geburten dieses Jahres sind Jungen.

b) 300 von den 1000 ersten Geburten dieses Jahres sind Jungen.

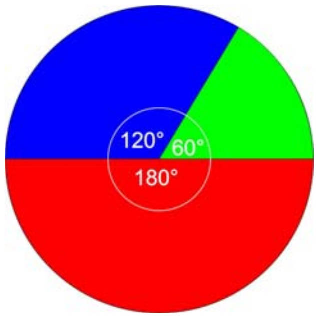
Antwort 1: a) und b) sind gleich wahrscheinlich.
Antwort 2: a) ist wahrscheinlicher als b).
Antwort 3: b) ist wahrscheinlicher als a).

Aufgabe 7: Glücksrad

a) Schätze wie oft bei nebenstehendem Glücksrad bei 100 Versuchen die Farbe rot, grün oder blau getroffen wird.

b) Für jeden Treffer gibt es Punkte. Lege die für jede Farbe vergebenen Punkte so fest, dass die Gewinnschancen bei jeder Farbe gleich sind.

c) Zeichne Glücksräder, bei denen folgende Ergebnisse zu erwarten sind:



	a)	b)	c)
Anzahl der Versuche:	100	180	200
Anzahl rot:	20	90	50
Anzahl grün:	40	30	60
Anzahl blau:	40	60	90

Aufgabe 8: Mithilfe eines Textverarbeitungsprogramms kannst du leicht die Anzahl von Zeichen in einem Text feststellen. (die Gesamtzahl der Zeichen findest du unter Datei Eigenschaften Statistik; die Anzahl z.B. der Buchstaben „e“ bzw. „E“ ermittelst du, indem du alle „e“ ohne Berücksichtigung der Groß- und Kleinschreibung durch z.B. „&“ ersetzt. Das Programm gibt die Anzahl der Ersetzungen aus. Mit der Rückgängigfunktion des Programms kannst du den ursprünglichen Text wieder herstellen.)

a) Bestimme die relative Häufigkeit von „e“ bzw. „E“ in verschiedenen deutschsprachigen Texten.

b) Mache eine Vorhersage, wie oft in deinem 1-seitigen Aufsatz „e“ bzw. „E“ vorkommt.

c) Mache eine Vorhersage, wie oft in deinem 20-seitigen Aufsatz „e“ bzw. „E“ vorkommt.

d) Welche der beiden Vorhersagen ist sicherer?

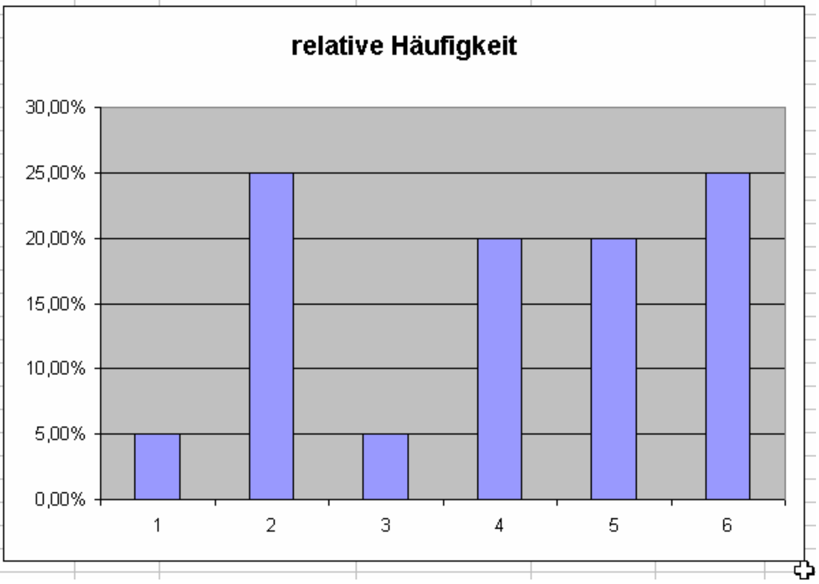
Aufgabe 9: Ermittle in Versuchsreihen die Wahrscheinlichkeit für die Lage „Spitze nach oben“ beim Wurf von Reißnägeln. Führe diese Untersuchung für unterschiedliche Reißnägel durch. Handelt es sich hier um ein Laplace-Experiment?

Lösungen

Aufgabe 1: Antwort 1

Aufgabe 2: a) Ein Tabellenblatt mit der Simulation von 20 Würfen
b) Ein Tabellenblatt mit der Simulation von 20 Würfen
h) Ein Tabellenblatt mit der Simulation von 20 Würfen

	B	C	D	E	F	G	H
1		Zwanzigmal würfeln					
2							
3	Wurf Nr.:	Zufallszahl			absolute Häufigkeit:	relative Häufigkeit	Taste F9 drücken
4	1	5		1	1	5,00%	
5	2	3		2	5	25,00%	
6	3	4		3	1	5,00%	
7	4	2		4	4	20,00%	
8	5	5		5	4	20,00%	
9	6	6		6	5	25,00%	
10	7	2					
11	8	1		Summe:	20	100,00%	
12	9	4					
13	10	2					
14	11	4					
15	12	2					
16	13	4					
17	14	6					
18	15	6					
19	16	5					
20	17	6					
21	18	2					
22	19	5					
23	20	6					



c) $\frac{10000}{6} = 1667$; Es werden ca. 1667 „Eins“; … ; 1667 „Sechs“ als absolute Häufigkeiten auftreten.

d) $\frac{1}{6}$ also jeweils 0,1667

e) $\frac{1}{6}$ oder 16,67%

f) $\frac{5}{6}$ oder 83,33%

g) 1 oder 100%

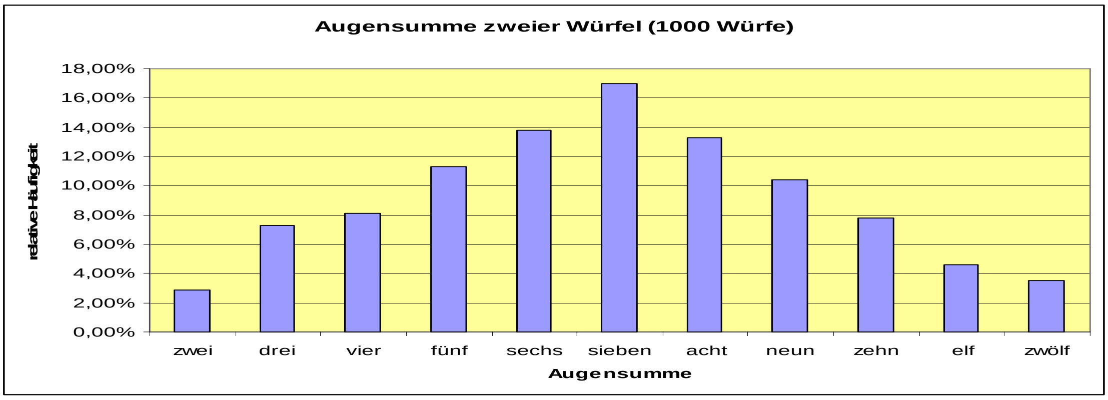
Aufgabe 4: c)

Augensumme:	2	3	4	5	6	7
absolute Häufigkeit	1	2	3	4	5	6
relative Häufigkeit	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$
Wahrscheinlichkeit	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$
	2,78%	5,56%	8,33%	11,11%	13,89%	16,67%

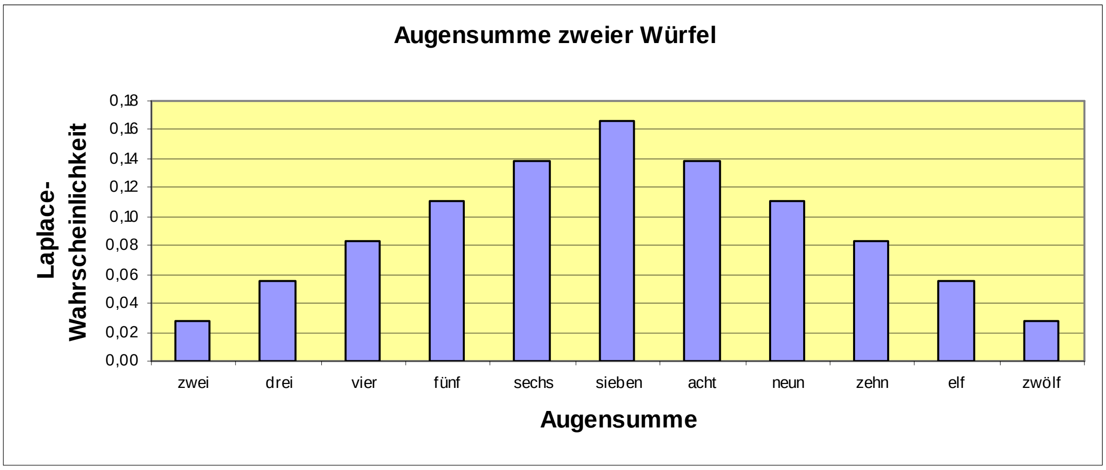
Augensumme:	8	9	10	11	12
absolute Häufigkeit	5	4	3	2	1
relative Häufigkeit	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$
Wahrscheinlichkeit	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$
	13,89%	11,11%	8,33%	5,56%	2,78%

d) möglicher Graph wie in der Aufgabenstellung 4e)

e) möglicher Graph:



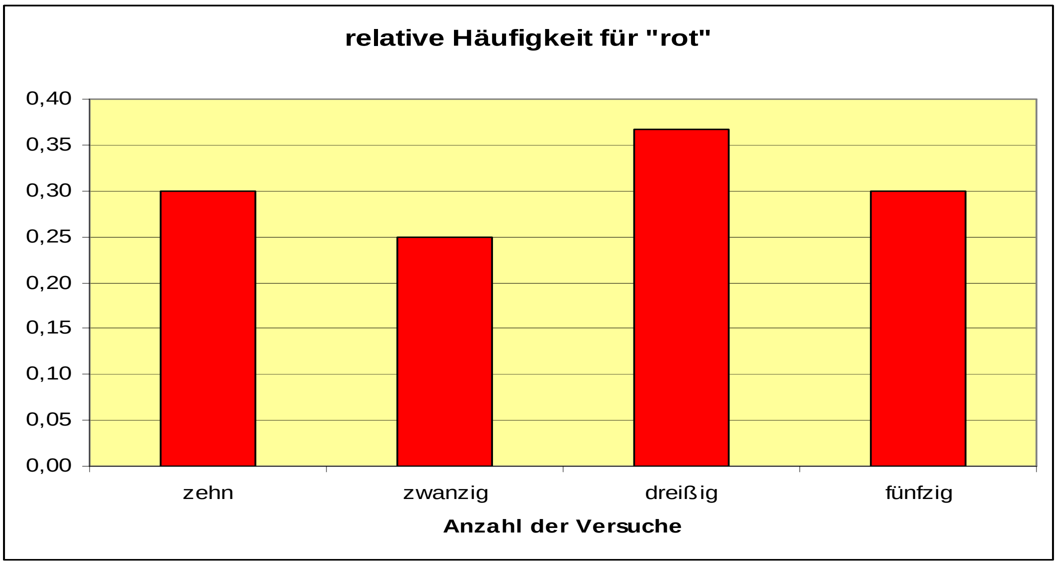
f)



Z. B.: Wenn man das Diagramm dreht, erkennt man das Spielfeld aus Aufgabe 3 wieder.

Aufgabe 5: a) die relativen Häufigkeiten stabilisieren sich bei $\frac{5}{15}=\frac{1}{3}$ für „rot“ und $\frac{10}{15}=\frac{2}{3}$ für „weiß“.

b)



Wahrscheinlichkeit für „rot“: $\frac{1}{3}=0,3333=33,33\%$

Wahrscheinlichkeit für „weiß“: $\frac{2}{3}=0,6667=66,67\%$

Aufgabe 6: Antwort 2

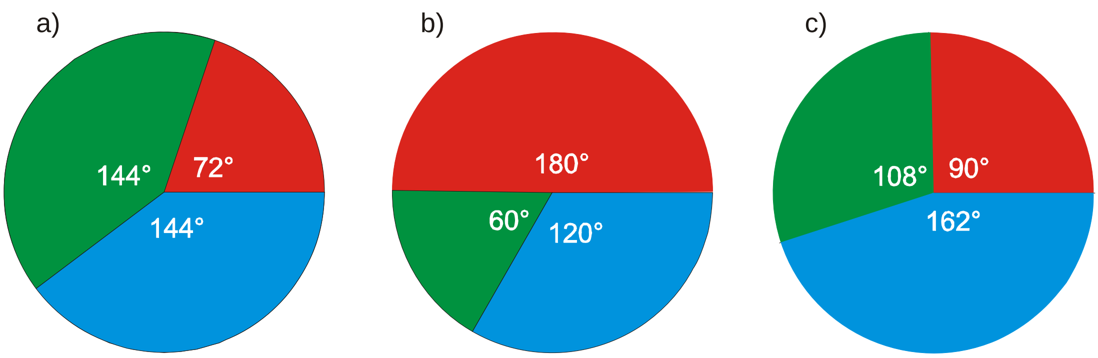
Aufgabe 7: a) die Wahrscheinlichkeit für „rot“: $\frac{1}{2}$; 50%

„blau“: $\frac{1}{3}$; 33,33%

„grün“: $\frac{1}{6}$; 16,67%

b) Die Punkte müssen im Verhältnis „rot“ : „blau“ : „grün“ wie 2 : 3 : 6 vergeben werden.

c)



Aufgabe 8:
a) Die relative Häufigkeit des Buchstaben „e“ bzw. „E“ in deutschen Texten beträgt etwa 19%.
b) Geht man von ca. 40 Zeichen pro Zeile und 25 Zeilen pro Seite aus, so sind das etwa 1000 Zeichen pro Seite. Davon sind etwa 190 „e“ bzw. “E“.
c) Im 20-seitigen Aufsatz sind das ca. 20000 Zeichen und 3800 „e“ bzw. “E“.
d) Die Vorhersage für den 20-seitigen Aufsatz ist sicherer, da dieser mehr Zeichen enthält.

Aufgabe 9: Hier handelt es sich **nicht** um ein Laplace-Experiment, da die Wahrscheinlichkeiten für die beiden möglichen Lagen eines Reißnagels nicht gleich ist.