

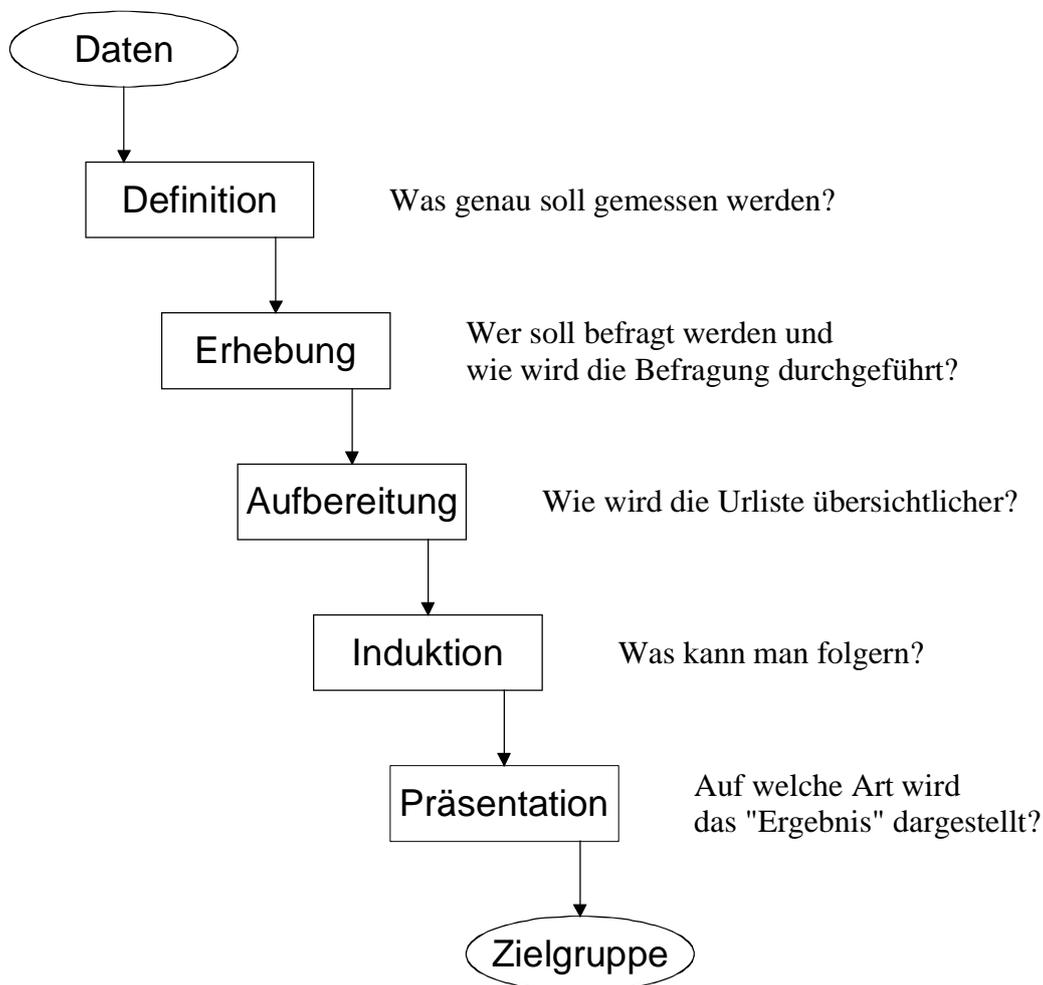
0 Vorbemerkungen

0.1 Daten

Der Austausch von Informationen und die Analyse empirischer Daten prägen unseren Alltag. Immer mehr Entscheidungen und Vorhersagen werden auf der Grundlage statistischer Daten getroffen. Ständig werden Daten erhoben, verarbeitet, präsentiert, Folgerungen aus ihnen gezogen. Auch die Gefahr des Missbrauchs und der Fehlinterpretation macht es notwendig, dass Schülerinnen und Schüler bereits in der Sekundarstufe I Datenkompetenz entwickeln.

Die oft riesigen Datenmengen werden systematischen und probierenden Reduktionen und Umgestaltungen in der Erwartung unterworfen, dass einfache Zusammenhänge als Muster sichtbar werden und so zu begründeten Vermutungen führen (J. W. Tukeys, *Exploratory Data Analysis*, 1977, Addison-Verlag).

Bei der Datenanalyse lassen sich folgende fünf Schritte unterscheiden:



Bei jedem der 5 Schritte sind Fehler, bewusste oder unbewusste Täuschungen möglich, was unzulässige Schlussfolgerungen nach sich ziehen kann. Anhand von Daten, die von Schülern selbst erhoben wurden, wird der gesamte Prozess durchlaufen (S. 3 - 12).

In der Jahrgangsstufe 5 sollen verbale Erläuterungen und Begründungen im Vordergrund stehen, stochastische Begriffe wie relative Häufigkeit sowie die Kenngrößen Mittelwert, Modalwert, Zentralwert usw. folgen in den nächsten Jahrgangsstufen.

0.2 Zufall

In der Vorlesungsausarbeitung 2003 „Didaktik der Stochastik I“ beschreibt Lisa Hefendel-Hebeker den Begriff Zufallsexperiment wie folgt:

Ein Vorgang heißt **Zufallsexperiment** (Zufallsversuch), wenn er folgende Bedingungen erfüllt:

1. Das Experiment erfolgt unter genau festgelegten Bedingungen, den so genannten Versuchsbedingungen.
2. Der Vorgang hat verschiedene mögliche Ergebnisse (Ausgänge),
 - die alle vor der Durchführung bekannt sind und
 - von denen jeweils genau eines eintritt.
3. Der Vorgang ist nicht durch logische oder andere Gründe determiniert, d. h., bevor der Vorgang abgelaufen ist, bleibt ungewiss, welches Ergebnis sich einstellt.
4. Der Vorgang ist (zumindest in der Vorstellung) beliebig oft unter gleichen Bedingungen wiederholbar.

Da diese Art der Beschreibung die Wirklichkeit idealisiert, spricht man auch von idealen Zufallsexperimenten. So enthält das Beispiel Münzwurf mit den Ergebnissen „Wappen“ (W) und „Zahl“ (Z) folgende Formen der Idealisierung:

1. Ignoriert werden
 - Fälle, in denen Versuchsausgänge nicht feststellbar sind (z. B. Münze fällt in Gully).
 - Versuchsausgänge wie „Münze bleibt auf der Kante stehen“
2. Die beliebige Wiederholbarkeit scheitert nicht an der Abnutzung der Münze.

Alle Ergebnisse eines Zufallsexperimentes werden zu einer Menge zusammengefasst, die üblicherweise als **Ergebnisraum** oder Ergebnismenge bezeichnet und durch Ω symbolisiert wird. Wesentlich ist, dass sich die möglichen Ausgänge eines Zufallsexperimentes mit Hilfe der Elemente von Ω identifizieren lassen. Darüber hinaus ist die Wahl von Ω , was die Bezeichnung der Elemente betrifft, willkürlich. Beispiel: Münzwurf $\Omega_1 = \{W; Z\}$ oder $\Omega_2 = \{0; 1\}$.

Ein Ergebnis wird bei einem Zufallsversuch auch **Ausfall** genannt. Ein einzelner Zufallsversuch heißt **Ereignis**. Zu jedem Ereignis (z. B. eine Sechs wurde gewürfelt) gibt es auch das Gegenereignis (keine Sechs wurde gewürfelt). Ein Ereignis ist eine Teilmenge des Ergebnisraumes, z. B. das Ereignis „Keine Sechs wurde gewürfelt“ $\subseteq \{1; 2; 3; 4; 5\} \subseteq \Omega$

Manche Zufallsexperimente sind aus einfacheren Zufallsexperimenten zusammengesetzt, die in einer bestimmten Reihenfolge ablaufen. Solche Zufallsexperimente heißen **mehrstufig**.

Komplizierte Zufallsexperimente lassen sich manchmal übersichtlicher darstellen, wenn man sie durch ein gleichwertiges, mehrstufiges Zufallsexperiment ersetzt.

Beispiel: Gleichzeitiges Werfen von zwei Würfeln mit den Ergebnissen aus dem Ergebnisraum $\Omega = \{2; 3; 4; \dots; 12\}$.

Man findet den Ergebnisraum für dieses Experiment dadurch, dass man es durch das zweistufige Experiment „Werfen des 1. Würfels, anschließend Werfen des 2. Würfels“ ersetzt. Alle Ergebnisse erscheinen dann als Paare $(a | b) \in \{1; 2; 3; \dots; 6\} \times \{1; 2; 3; \dots; 6\}$ von Augenzahlen.

In der Jahrgangsstufe 5 werden einfache Zufallsexperimente von den Schülern selbst durchgeführt. Die Versuchsergebnisse werden in Häufigkeitstabellen und Diagrammen erfasst. Anhand einfacher Beispiele wird das Abzählen mit Hilfe von Baumdiagrammen angebahnt.

1 Erfassen, Darstellen und Auswerten von Daten im Unterricht

Im Beispiel werten die Schülerinnen und Schüler reale Daten aus ihrem Umfeld aus, die sie durch eine Umfrage selbst erfasst haben, und stellen diese in Tabellen und Diagrammen dar. Dabei lernen sie Informationen aus Tabellen und Diagrammen herauszulesen und zu beurteilen, wobei auf Fachbegriffe weitestgehend verzichtet wird. Sie erkennen, dass bei der Darstellung in Tabellen und Diagrammen Informationen verloren gehen.

Die Schülerinnen und Schüler sind in der Lage, einfache Erhebungen zu planen, mit denen Daten zu Merkmalen in einer Grundgesamtheit erhoben werden. Sie können Strichlisten und Häufigkeitstabellen anfertigen und kennen die grafischen Darstellungen von eindimensionalen Daten im Streifendiagramm (Balkendiagramm oder Säulendiagramm). Sie erkennen fehlerhafte Darstellungen in einfachen Fällen.

Am Beispiel einer vorbereiteten Datenerhebung werden die Grundbegriffe Merkmal, Urliste, Tabelle, Rangliste, Minimum, Maximum, (absolute) Häufigkeit, Häufigkeitsliste, Säulendiagramm, Balkendiagramm und Klassen eingeführt.

1.1 Datendefinition/Datenerhebung

In der Klasse 5a wird der folgende Fragebogen (Steckbrief) mit den 6 **Merkmalen** – Vorname, Geburtstag (TT.MM.), Anzahl der Geschwister, Lieblingsfarbe, Haustier/e J/N und Körpergröße in cm – vom Lehrer ausgeteilt.

Hinweis: Hier ist es wichtig, Missverständnisse bei den Fragestellungen vor dem Ausfüllen zu besprechen und mögliche und unmögliche Antworten aufzuzeigen. Die durchaus sinnvolle Frage nach der Anzahl der Haustiere wird hier nicht gestellt – hier ist eventuell die Angabe sehr hoher Anzahlen möglich. Alle Schüler füllen danach den Steckbrief alleine aus (ein Hinweis auf den Datenschutz sollte hier nicht fehlen).

Klasse 5 a  Datum: 30.09.2005

Steckbrief

 Mein erster Vorname ist _____.

Geburtstag habe ich am . .

In meiner Familie leben _____ Kinder. 

Meine gegenwärtige Lieblingsfarbe ist _____.

Ich habe Haustiere: Ja Nein

Meine Körpergröße beträgt _____ cm. 

Aufgabe 1: In einem Fragebogen der Klasse 5c lautet eine Frage: „Welche Verkehrsmittel nutzt du für den Schulweg?“
Welche Antworten sind denkbar?

Aufgabe 2: Die Klasse 5d soll nach dem täglichen Fernsehkonsum befragt werden.
a) Formuliere geeignete Fragen.
b) Erkläre, welche Antworten auf deine Fragen möglich sind.

1.2 Datendarstellung/Dateninterpretation

Im Unterricht wird überlegt, was man alles (möglichst viel) aus den ausgefüllten Fragebögen herauslesen kann und wie man dabei am besten vorgeht. Dazu werden die Fragebögen jeweils sechsmal kopiert und in 6 Gruppen von den Schülern ausgewertet.

[Hinweis: Für die Auswertung muss man genug Zeit einplanen; in der Jahrgangsstufe 5 wollen (fast) alle Schülerinnen und Schüler in der Gruppenarbeit etwas beitragen. Die Fülle der Ideen ist bemerkenswert.]

- Die Fragebögen werden beim Auswerten nach (verschiedenen Merkmalen) sortiert
- Strichlisten werden angelegt
- Tabellen werden erstellt
- ...

In der nächsten Unterrichtsstunde werden die Ergebnisse der Gruppen vorgestellt, z. B.:

- 19 Schüler haben ein Haustier
- Iris ist die größte Schülerin
- 4 Schüler haben kein Haustier
- Ines hat 3 Geschwister
- Jasmin, Benny und Michael sind gleich groß
- Die am häufigsten genannte Lieblingsfarbe ist blau
- Die am häufigsten genannte Lieblingsfarbe der Mädchen* ist blau
- Im Juli und im September hat kein Schüler Geburtstag

*[*Hinweis: Auf die Lieblingsfarbe der Mädchen kann in dieser Klasse eindeutig aufgrund der Vornamen geschlossen werden, dies ist nicht in jeder Klasse möglich.]*

Aufgabe 1: Entwirf einen eigenen Fragebogen mit 3 Merkmalen. Überlege genau, was du von deinen Mitschülern erfahren willst und wie du dafür die Fragen stellst.

[Hinweis: Diese Aufgabe sollte nur gestellt werden, wenn der Fragebogen im Anschluss auch zum Einsatz kommt (eventuell im Fach Deutsch), sonst ist der Frust groß.]

Eine Sammlung aller ermittelten Daten nennt man **Urliste**. Die Urliste wird häufig in Form einer **Tabelle** (Datenmatrix) dargestellt.

In diesem Beispiel ist die Urliste in der Reihenfolge der Abgabe dargestellt; jede Zeile entspricht einem Fragebogen/Steckbrief, in den 6 Spalten stehen die Merkmale.

[Hinweis: Das Zusammenstellen der Urliste in einer Tabelle (Datenmatrix) erleichtert den Überblick im Vergleich zu den 23 Fragebögen.]

Vorname	Geb.TT.MM.	Kinderzahl in der Familie	Lieblingsfarbe	Haustiere J/N	Körpergröße (cm)
Tamara	17.12.	2	Orange	J	147
Christina	22.03.	2	Blau	J	132
Benedikt	13.08.	3	Grün	J	140
Iris	21.04.	3	Blau	J	160
Jasmin	09.11.	2	Orange	J	150
Sabrina	03.02.	2	Blau	J	152
Patrick	16.03.	2	Gelb	J	158
Julie	04.08.	2	Blau	N	146
Benny	16.11.	2	Schwarz	J	150
Lisa	21.04.	3	Blau	J	159
Beatrice	09.05.	1	Blau	J	147
Michael	14.12.	2	Rot	N	150
Andreas	22.05.	2	Rot	N	165
Maximilian	18.01.	2	Rot	J	163
Nico	04.12.	3	Schwarz	J	142
Ulrich	22.06.	3	Blau	J	140
Ines	30.08.	4	Blau	J	149
Marvin	31.01.	2	Gelb	J	160
Isabella	29.03.	2	Rot	J	152
Katrin	21.08.	2	Blau	N	149
Maximilian	15.10.	2	Grün	J	148
Anselm	01.12.	2	Grün	J	139
Julia	17.06.	2	Gelb	J	145

Wird eine Urliste geordnet (nach einer Regel sortiert), so spricht man von einer **Rangliste**.

Folgende Rangliste ist nach dem Merkmal „Körpergröße in cm“ sortiert.

Vorname	Geb.TT.MM.	Kinderzahl in der Familie	Lieblingsfarbe	Haustiere J/N	Körpergröße (cm)
Christina	22.03.	2	Blau	J	132
Anselm	01.12.	2	Grün	J	139
Benedikt	13.08.	3	Grün	J	140
...
Marvin	31.01.	2	Gelb	J	160
Maximilian	18.01.	2	Rot	J	163
Andreas	22.05.	2	Rot	N	165

Diese Liste beginnt mit der kleinsten Körpergröße (**Minimum**) und steigt dann bis zur größten Körpergröße (**Maximum**) an. Man sagt, diese Liste ist **aufsteigend** sortiert.

Beispiel: Minimum: die kleinste Schülerin hat eine Körpergröße von 132 cm
 Maximum: der größte Schüler hat eine Körpergröße von 165 cm

Folgende Rangliste ist alphabetisch nach dem Merkmal Vornamen sortiert.

Vorname	Geb.TT.MM.	Kinderzahl in der Familie	Lieblingsfarbe	Haustiere J/N	Körpergröße (cm)
Andreas	22.05.	2	Rot	N	165
Anselm	01.12.	2	Grün	J	139
Beatrice	09.05.	1	Blau	J	147
...
Sabrina	03.02.	2	Blau	J	152
Tamara	17.12.	2	Orange	J	147
Ulrich	22.06.	3	Blau	J	140

Folgende Rangliste ist nach dem Merkmal Geburtstag sortiert.

Vorname	Geb.TT.MM.	Kinderzahl in der Familie	Lieblingsfarbe	Haustiere J/N	Körpergröße (cm)
Maximilian	18.01.	2	Rot	J	163
Marvin	31.01.	2	Gelb	J	160
Sabrina	03.02.	2	Blau	J	152
...
Nico	04.12.	3	Schwarz	J	142
Michael	14.12.	2	Rot	N	150
Tamara	17.12.	2	Orange	J	147

Folgende Rangliste ist nach dem Merkmal Lieblingsfarbe (in der Reihenfolge, in der die Farben in der Urliste auftreten) sortiert.

Vorname	Geb.TT.MM.	Kinderzahl in der Familie	Lieblingsfarbe	Haustiere J/N	Körpergröße (cm)
Tamara	17.12.	2	Orange	J	147
Jasmin	09.11.	2	Orange	J	150
Christina	22.03.	2	Blau	J	132
...
Andreas	22.05.	2	Rot	N	165
Maximilian	18.01.	2	Rot	J	163
Isabella	29.03.	2	Rot	J	152

Ein Minimum oder Maximum ist z. B. beim Merkmal Lieblingsfarbe und bei Merkmalen, die mit Ja (J) oder Nein (N) belegt sind, nicht sinnvoll.

Aufgabe 2: Suche zu den Merkmalen Vorname, Geburtstag, Kinderzahl in der Familie und Körpergröße in cm jeweils das Maximum (Minimum).

Aufgabe 3: Erstelle eine absteigende Rangliste zum Merkmal „Kinderzahl in der Familie“.

Aufgabe 4: Welchen Vorteil hat eine Rangliste gegenüber der Urliste?

Aufgabe 5: Die dargestellten Ranglisten zeigen die Ergebnisse zweier Wettbewerbe. Um welche Wettbewerbe könnte es sich dabei handeln, wenn der Sieger jeweils in der ersten Zeile steht?

Schüler	Zeit in Sekunden
Benedikt	89
Patrick	92
Michael	92
Andreas	94
Ulrich	95
Anselm	98

Schüler	Zeit in Sekunden
Anselm	98
Ulrich	95
Andreas	94
Michael	92
Patrick	92
Benedikt	89

1.3 Datenpräsentation

Häufigkeitsliste

In der Urliste und den Ranglisten liegen die Daten in einer Form vor, in der sie sich zwar gut weiterverarbeiten lassen, in der jedoch Zusammenhänge und Muster nur schwer oder gar nicht erkennbar sind. Zudem ist das Sortieren der ganzen Urliste (ohne Hilfsmittel) sehr zeitaufwändig. Daher werden meist einzelne Merkmale ausgewählt, die dann in einer Form dargestellt werden, aus der Zusammenhänge und Muster erkennbar werden. Bei statistischen Untersuchungen ist die Häufigkeit, mit der ein bestimmtes Ergebnis (ein bestimmter Wert) vorkommt, eine wesentliche Frage. Um festzustellen, wie oft welche Ausprägung des Merkmals aufgetreten ist, wird eine Häufigkeitsliste/Häufigkeitstabelle angefertigt. Die Strichliste ist auch eine Häufigkeitsliste. Häufigkeitslisten sind erste Schritte der Datenreduktion und die Grundlage für viele grafische Darstellungen von Daten.

In der Strichliste bzw. Häufigkeitsliste ist erfasst, wie viele der Schülerinnen und Schüler die gleiche Kinderzahl in ihrer Familie haben.

Kinderzahl	1	2	3	4
Anzahl der Familien		 		

Kinderzahl	1	2	3	4
Anzahl der Familien	1	16	5	1

Die (**absolute**) **Häufigkeit** gibt an, wie oft ein bestimmtes Ereignis eingetreten ist.

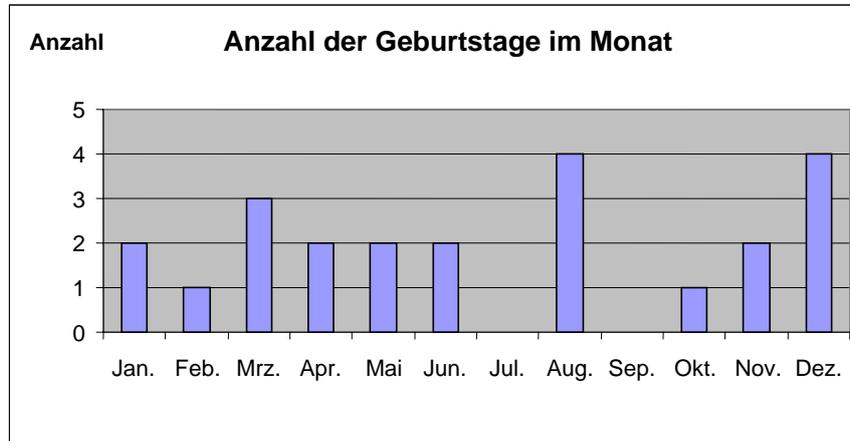
Beispiel: In 5 Familien gibt es 3 Kinder.

Aufgabe 1: Was lässt sich aus der Häufigkeitsliste nicht mehr ablesen?

Aufgabe 2: Erstelle eine Häufigkeitsliste für das Merkmal Lieblingsfarbe.

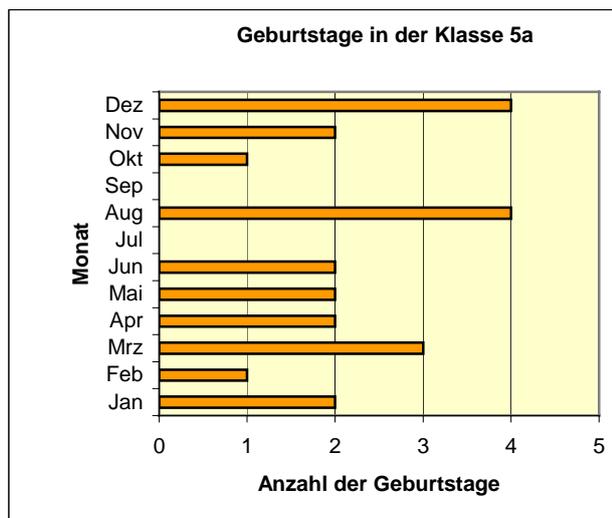
Sehr oft werden grafische Darstellungen von Häufigkeitslisten verwendet, um das Wesentliche von statistischen Untersuchungen zu verdeutlichen.

In einem **Säulendiagramm** (column chart) lassen sich die Zahlenangaben (Häufigkeiten) als nebeneinander gestellte Säulen grafisch veranschaulichen. Die (absolute) Häufigkeit der Merkmale wird als Höhe von Säulen dargestellt.



Aufgabe 3: Erstelle ein Säulendiagramm für die Kinderzahlen in den Familien.

Wird die Anzahl mit Hilfe von Balken dargestellt, so spricht man von einem **Balkendiagramm** (bar chart).



Aufgabe 4: Was lässt sich aus dem Balkendiagramm „Anzahl der Geburtstage im Monat“ able- sen?

Aufgabe 5: Für eine andere Klasse werden folgende Daten ermittelt.

Monat	Jan.	Feb.	Mrz.	Apr.	Mai	Jun.	Jul.	Aug.	Sep.	Okt.	Nov.	Dez.
Anzahl der Geburtstage	2	3	3	2	5	2	1	0	2	1	3	2

Erstelle dazu ein Balkendiagramm.

Aufgabe 6: Ist die Erstellung eines Balkendiagramms für das Merkmal „Vorname“ sinnvoll?

Aufgabe 7: Die Klasse 5c bekommt ihre 1. Schulaufgabe aus der Mathematik zurück. Peter sitzt in der ersten Reihe und schreibt rasch alle Noten auf.

2	1	6	4	5	2	4	6	2	4	3	1
5	2	1	5	4	3	5	4	2	5	2	3

Für die Klasse 5d hat Franz die Noten mitgeschrieben

2	4	3	1	5	4	3	3	2	6	4	3
2	3	3	2	1	4	3	3	1	4	2	5
2	3	5	4								

Erstelle für die beiden Klassen eine Häufigkeitsliste.

Beschreibe die Notenverteilung in den beiden Klassen.

Aufgabe 8: Jeder Mensch hat eine der vier möglichen Blutgruppen A, B, AB oder 0 (Null). An der Schule findet regelmäßig eine Blutspende statt. Von 100 Spenderinnen und Spendern wurden die folgenden Blutgruppen bestimmt:

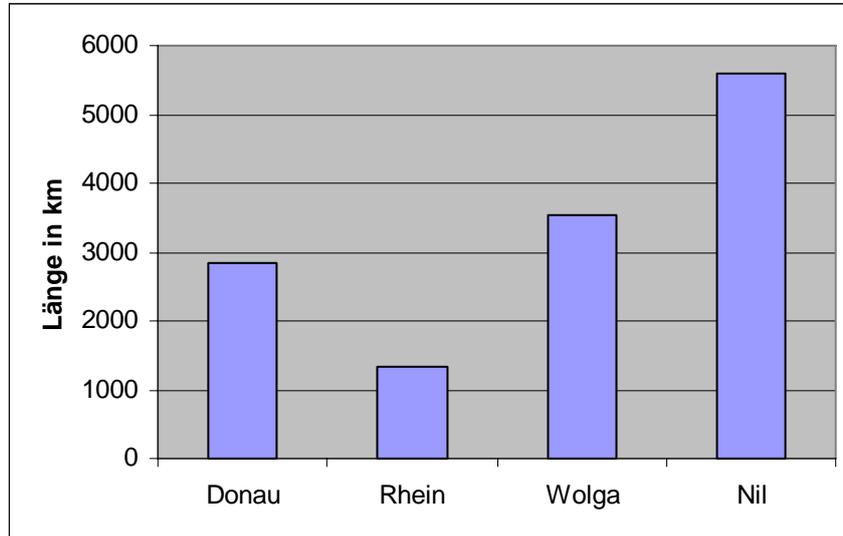
A 0 A A 0 A B AB 0 B A 0 A 0 0 A A AB 0 A 0 B 0 A
 A 0 AB 0 A B 0 A 0 A 0 0 0 A A 0 A B 0 B A 0 A 0 0 0
 A A 0 A B A 0 A 0 AB 0 A B A 0 A A 0 A A 0 0 A A B
 AB 0 A B A A 0 A 0 0 A A A 0 A B A 0 A 0 AB 0 A B
 A

- a) Erstelle eine Häufigkeitstabelle für die Blutgruppenverteilung.
- b) Stelle die Tabelle als Säulendiagramm dar.
- c) Welche Aussage lässt sich dem Diagramm entnehmen?

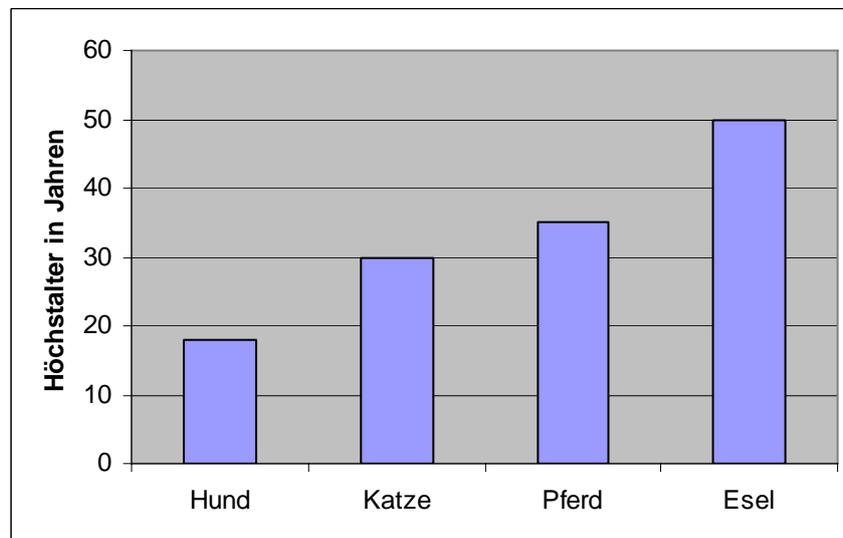
Aufgabe 9: Suche aus dem Erdkundebuch ein Beispiel für Säulendiagramme oder für Balkendiagramme.

Erkläre, was aus diesem Diagramm herausgelesen werden kann.

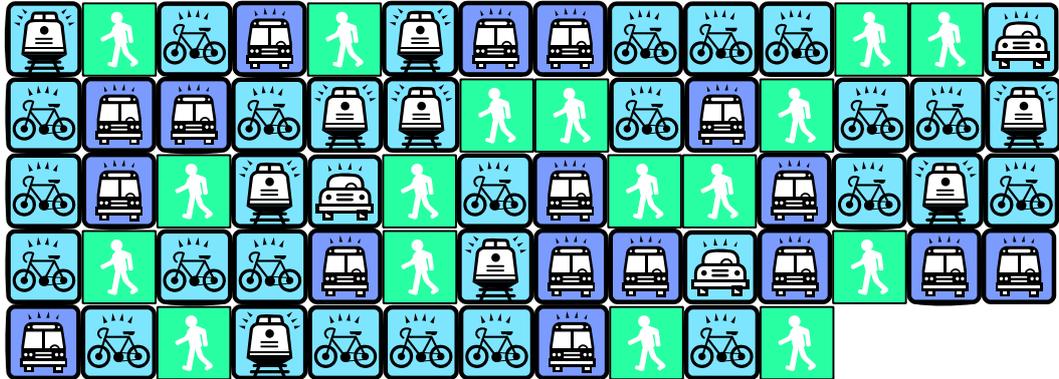
Aufgabe 10: Wie lang sind die im Diagramm dargestellten Flüsse?



Aufgabe 11: Welches Höchstalter erreichen die Tiere jeweils?



Aufgabe 12: Die Schülerinnen und Schüler der Jahrgangsstufe 5 kleben in der Aula die Kärtchen für das Verkehrsmittel, mit dem sie in die Schule kommen, an die Pinnwand.
Erstelle eine Häufigkeitstabelle



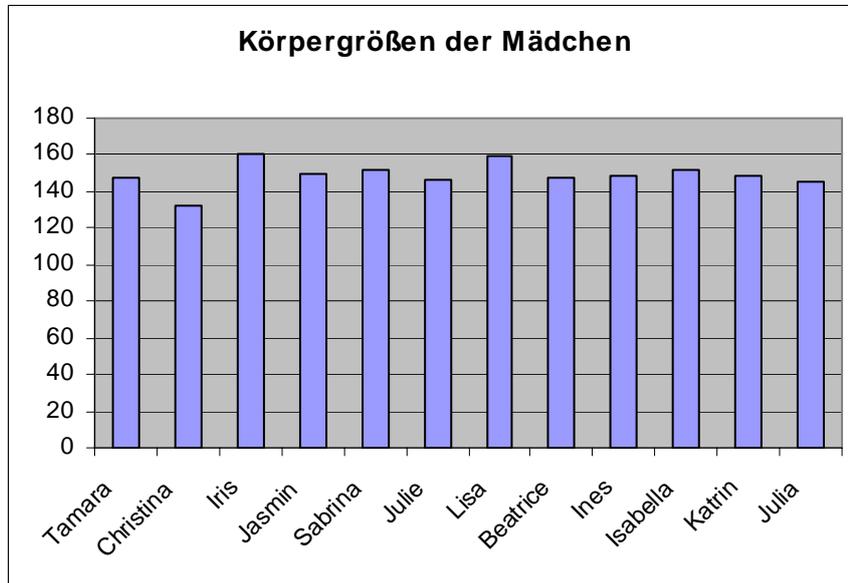
Häufigkeitstabelle:

Verkehrsmittel					
Anzahl					

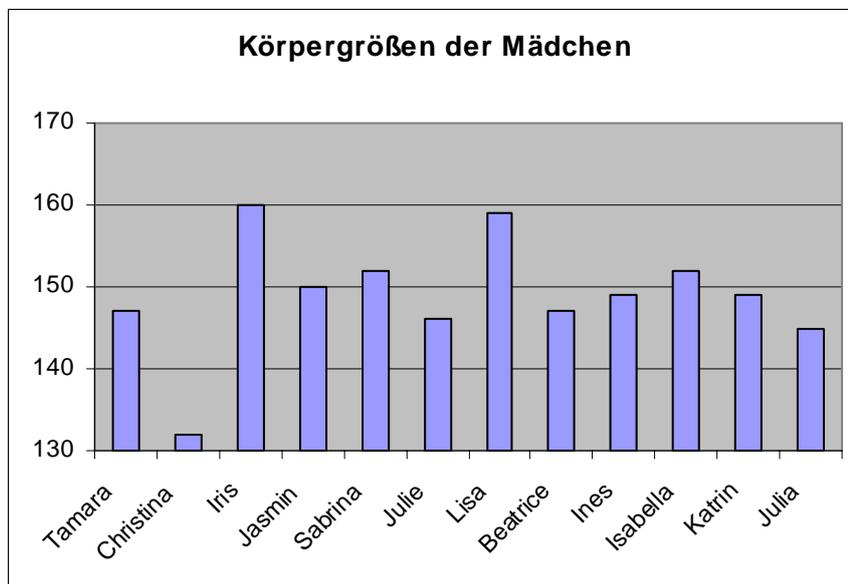
1.4 Darstellungen, die zu fehlerhaften Interpretationen verleiten

Den beiden Säulendiagrammen liegen die gleichen Daten für die Körpergrößen der Mädchen zugrunde.

Säulendiagramm 1:



Säulendiagramm 2:



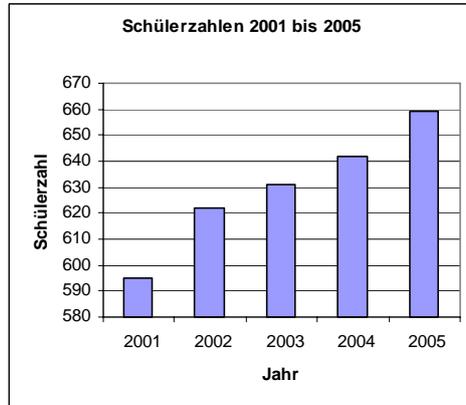
Das 1. Säulendiagramm erweckt den Eindruck, dass sich die Körpergrößen der Mädchen nur wenig unterscheiden.

Das 2. Säulendiagramm erweckt den Eindruck, dass sich die Körpergrößen der Mädchen sehr stark unterscheiden.

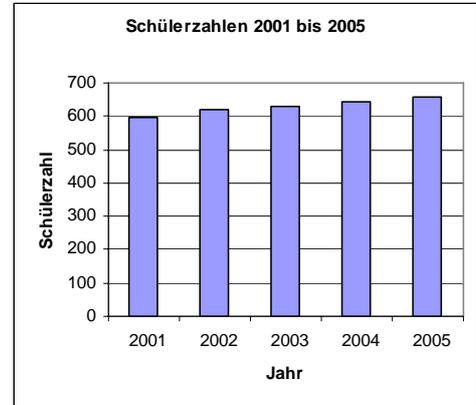
Aufgabe 1: Den drei Säulendiagrammen liegen die gleichen Daten für die Schülerzahlen in den Jahren 2001 bis 2005 zugrunde.

Welchen Eindruck hast du beim Betrachten der Diagramme? Warum ist das so?

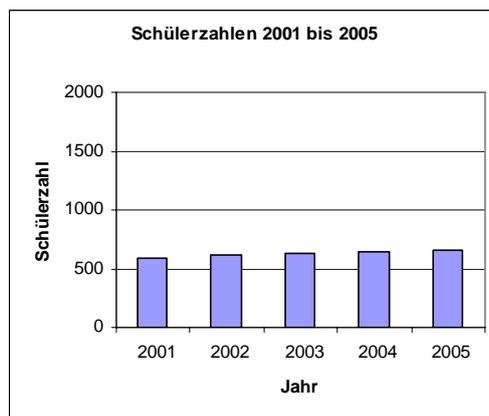
Säulendiagramm 1



Säulendiagramm 2



Säulendiagramm 3



In der Urliste sind die Körpergrößen enthalten. Legen wir eine **Häufigkeitsliste** für die Körpergrößen an, so erhalten wir die folgende Liste.

Körpergröße in cm	132	133	134	135	136	137	138	139	140	141	142	143	144	145
Anzahl	1	0	0	0	0	0	0	1	2	0	1	0	0	1

Körpergröße in cm	146	147	148	149	150	151	152	153	154	155	156	157	158	159
Anzahl	1	2	1	2	3	2	0	0	0	0	0	0	1	1

Körpergröße in cm	160	161	162	163	164	165
Anzahl	2	0	0	1	0	1

Wenn wir Körpergrößen, die nicht vorkommen, herauslassen, bleibt die Häufigkeitsliste immer noch umfangreich und unübersichtlich.

Körpergröße in cm	132	139	140	142	145	146	147	148	149	150	151	158	159	160	163	165
Anzahl	1	1	2	1	1	1	2	1	2	3	2	1	1	2	1	1

Teilt man die Körpergrößen in **Größenbereiche (Klassen)**, so wird die Liste übersichtlicher.

Körpergröße in cm	130 – 139	140 – 149	150 – 159	160 – 169
Anzahl	2	10	7	4

Im Beispiel ist jede der vier Klassen „gleich breit“, sie hat jeweils eine Breite von 10. Aus Tabellen mit Klasseneinteilungen lassen sich die einzelnen Werte nicht mehr ablesen. Im Beispiel kann nicht mehr abgelesen werden, welche Körpergrößen tatsächlich vorkommen.

Die „Klassenbreite“ muss nicht immer gleich sein.

Beispiel: In Deutschland gehören Kinder bis zum vollendeten 12. Lebensjahr, die kleiner als 150 cm sind, in den Kindersitz (§ 21 Abs. 1a StVO).

Körpergröße in cm	132 – 149	150 – 165
Anzahl	12	11

Aufgabe 2: Wie viele Werte umfasst hier die Klasse von 132 – 150 cm?

Beispiel: In der folgenden Klasseneinteilung überschneiden sich die Klassen.

Körpergröße in cm	130 - 145	140 - 155	150 - 165	155 - 165
Anzahl	6	15	11	6

Hier kann man fälschlicherweise annehmen,

- dass die Körpergröße von 38 Schülern gemessen wird,
- dass 21 Schüler kleiner als 156 cm sind.

In der folgenden Häufigkeitsliste ist erfasst, wie viele Schüler der Klasse 5a in den jeweiligen Monaten (Klassen) Geburtstag haben.



Monat	Jan.	Feb.	Mrz.	Apr.	Mai	Jun.	Jul.	Aug.	Sep.	Okt.	Nov.	Dez.
Anzahl der Geburtstage	2	1	3	2	2	2	0	4	0	1	2	4

Aus ihr lässt sich z. B. schnell ablesen, in welchem Monat kein Schüler Geburtstag hat.

Aufgabe 3: Was lässt sich noch aus dieser Häufigkeitstabelle herauslesen?

Aufgabe 4: Welche Daten (Merkmalsausprägungen) lassen sich aus der Häufigkeitstabelle nicht mehr ablesen?

Aufgabe 5: Erstelle eine Klasseneinteilung für das Merkmal „Geburtstag“ mit den Klassen „Geburtstag im Frühling, im Sommer, im Herbst und im Winter“.

[Hinweis: Wird die Anzahl der Merkmalsausprägungen sehr umfangreich (übersteigt sie die Grenze dessen, was man visuell verarbeiten kann), so sinkt der Informationsgehalt der Darstellung. Daher werden die Merkmalsausprägungen weniger fein, aber ausreichend informativ dargestellt. Die gröbere Darstellung nennt man Klassenbildung, Klasseneinteilung oder auch Gruppenbildung (eine Klasse ist ein Intervall). Damit eine eindeutige Zuordnung einer Merkmalsausprägung möglich ist, müssen Klassen lückenlos und überschneidungsfrei sein.

Den Schülerinnen und Schülern sind Klasseneinteilungen aus dem Alltag bekannt – Gewichtsklassen (beim Boxen, Ringen und z. B. bei der Einteilung von Eiern), Leistungsklassen (im Sport, Notenschlüssel). Bei der Einteilung in sehr wenige Klassen gehen zu viele Informationen verloren, bei einer zu großen Zahl von Klassen kommt es nicht zu einer ausreichenden Datenreduktion. Üblicherweise werden Klassenbildungen für quantitative Merkmale durchgeführt.]

Aufgabe 6: Die dargestellte Tabelle zeigt die Gewichtsklassen für Hühnereier.

Bezeichnung	Kurzbezeichnung	Gewichtsklasse
klein	S	unter 53 g
mittel	M	53 g bis unter 63 g
groß	L	63 g bis unter 73 g
sehr groß	XL	73 g und darüber

- a) Was kannst du über ein Hühnerei sagen, das in die Klasse L eingeteilt wurde?
- b) Überprüfe mit einer Waage, ob auf den Hühnereiern im Kühlschrank die korrekte Klasse aufgedruckt ist.
- c) Nenne Beispiele für Klasseneinteilungen im Sport.

2.1 Abzählen mit Hilfe von Baumdiagrammen

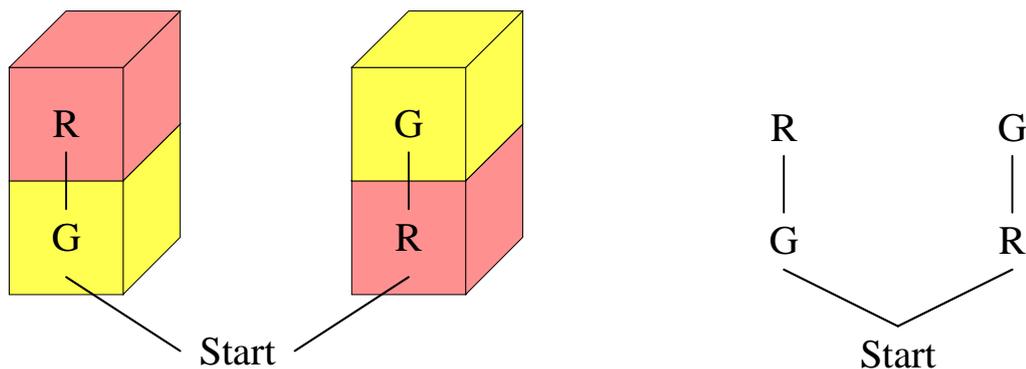
In der Kombinatorik werden verschiedene Möglichkeiten der Anordnung von Gegenständen untersucht. Die Anzahl der möglichen Anordnungen kann durch Probieren oder durch Überlegung bestimmt werden. In einem **Baumdiagramm** lassen sich die möglichen Anordnungen bzw. Reihenfolgen übersichtlich und vollständig grafisch darstellen. Jeder Streckenzug vom Start bis zum Ende eines Astes heißt Weg oder Pfad und beschreibt eine mögliche Anordnung (einen Ausfall eines Versuches).

In der Jahrgangsstufe 5 eignen sich ausschließlich Kombinationen unterscheidbarer Gegenstände, in denen alle Anordnungen abzählbar sind.

[Hinweis: In dieser Jahrgangsstufe ist es hilfreich, die Anordnung an das zu lösende Problem anzupassen. Wird das Baumdiagramm dynamisch betrachtet, sieht man z. B. den Aufbau eines Turmes. Statisch betrachtet zeigt das Baumdiagramm alle möglichen Anordnungen.

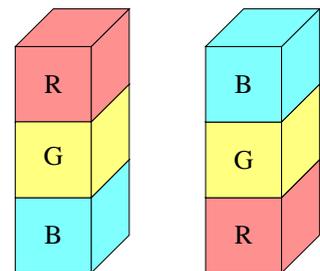
Die Schüler sollen alle möglichen Türme erst bauen (Legobausteine eignen sich, da sie fest verbunden werden), bevor sie die Anordnungen im Baumdiagramm darstellen.]

Aus zwei Bausteinen in den Farben Rot und Gelb lassen sich zwei verschiedene Türme bauen (anordnen).

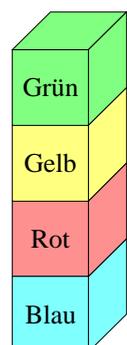


Aus drei Bausteinen in den Farben Rot, Gelb und Blau lassen sich verschiedene Türme bauen (siehe die zwei Beispiele rechts).

Aufgabe 1: Wie viele unterschiedliche Türme lassen sich damit bauen?

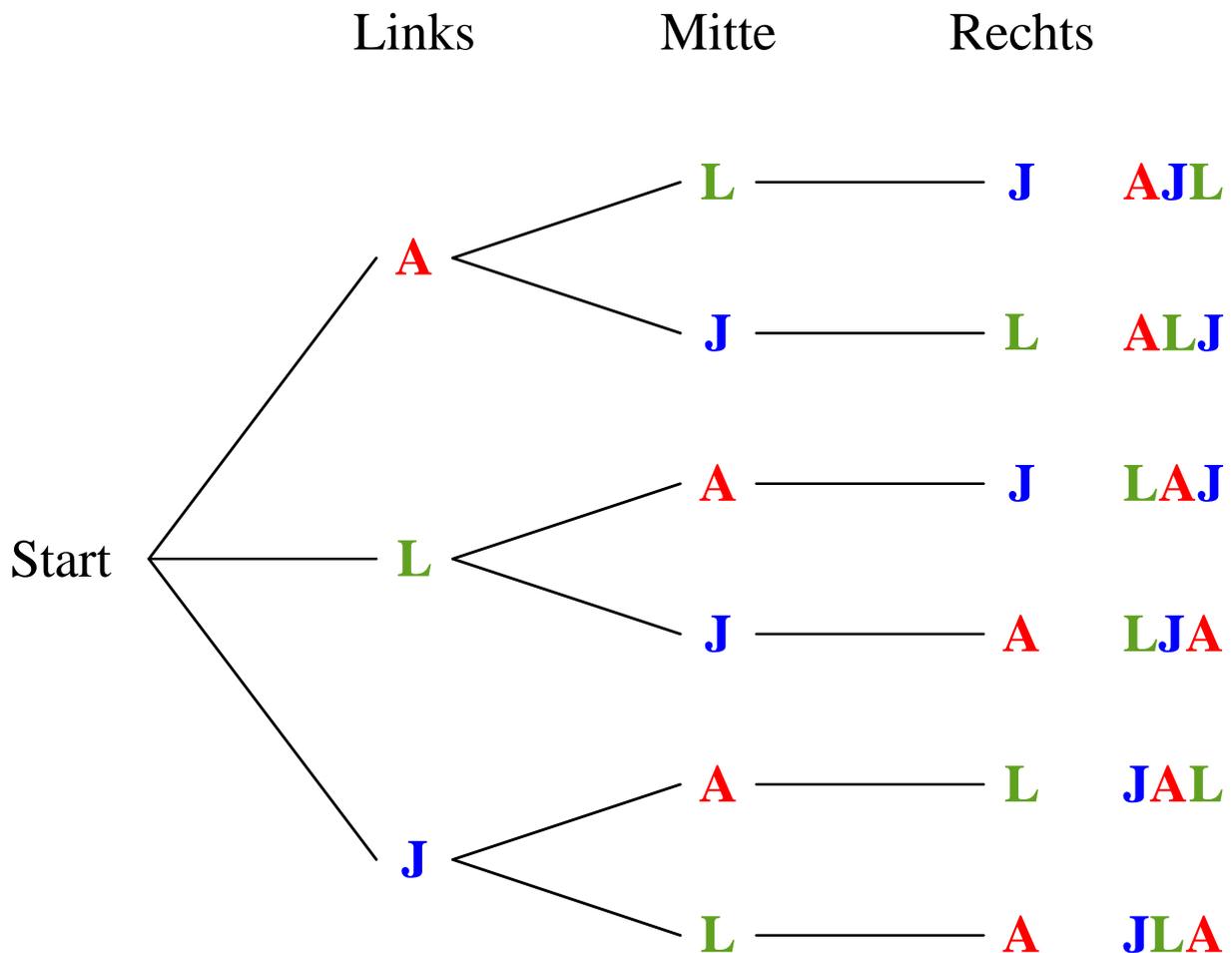
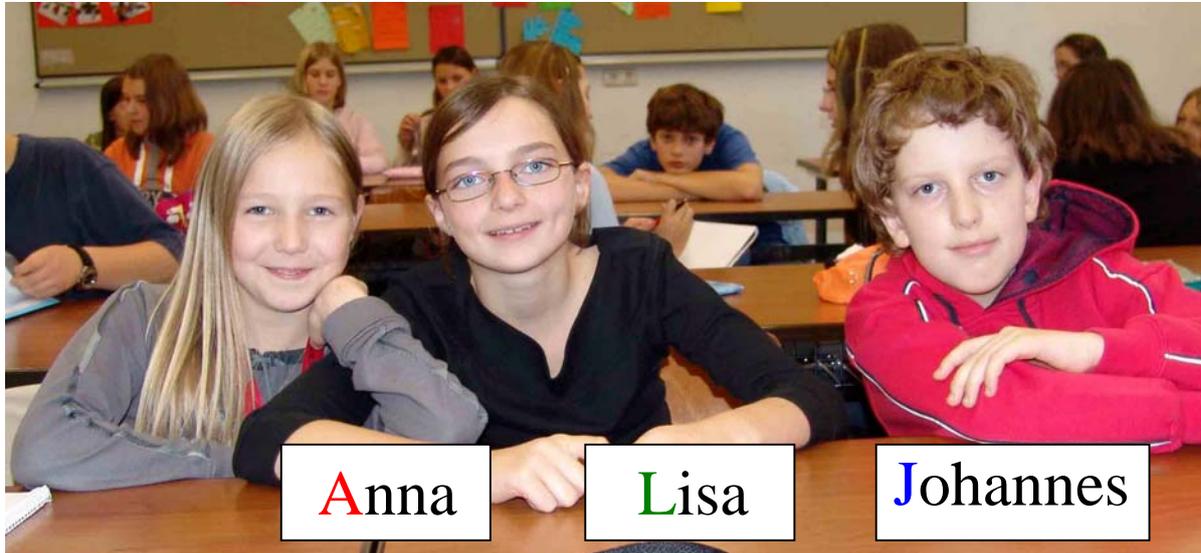


Aufgabe 2: Wie viele unterschiedliche Türme lassen sich aus den vier Bausteinen in den Farben Blau, Rot, Gelb und Grün bauen?



Anna, Lisa und Johannes sitzen in der ersten Bankreihe. Lehrer Gingkium behauptet, dass er nun die Namen der Schülerinnen und Schüler nicht mehr verwechsle, da er sich einen Sitzplan gemacht habe.

In wie vielen verschiedenen Reihenfolgen können sich Anna, Lisa und Johannes setzen, um diese Behauptung zu überprüfen?



Es gibt 6 mögliche Pfade, also 6 mögliche Anordnungen.

- Aufgabe 3: Auf wie viele Arten lassen sich die Buchstaben O, R und T anordnen?
Wie viele sinnvolle Worte entstehen dabei?
- Aufgabe 4: Auf wie viele verschiedene Arten lassen sich die vier Buchstaben O,O,T,T anordnen?
- Aufgabe 5: Aus den drei Silben FANT, GU und LE lassen sich Fantasietiere „erfinden“, wie z. B. ein LEGUFANT.
Wie viele Fantasietiere lassen sich aus den drei Silben erfinden?

2.2 Durchführung von ein- und zweistufigen Zufallsversuchen

Aus dem Alltag kennen die Schüler bereits viele Beispiele für **Zufallsversuche** (Zufallsexperimente) - Würfelspiele, Glücksräder, Ziehen von Karten oder Streichhölzern, Lottoziehung. Stets hängt das Ergebnis vom Zufall ab und lässt sich nicht mit Sicherheit vorhersagen. Solch ein Ergebnis wird bei einem Zufallsversuch auch **Ausfall** genannt, ein einzelner Zufallsversuch heißt **Ereignis**. Zu jedem Ereignis (z. B. eine Sechs wurde gewürfelt) gibt es auch das Gegenereignis (keine Sechs wurde gewürfelt).

Zweistufig heißt ein Zufallsversuch, wenn er sich aus zwei hintereinander ausgeführten Teilversuchen zusammensetzen lässt (z. B. zweimal Würfeln).

Zufallsversuche müssen zunächst genau beschrieben werden. Der Ausgang eines Zufallsexperiments ist eindeutig eines von bestimmten, vorher festgelegten **Ergebnissen**.

In der Jahrgangsstufe 5 sollte man sich auf Vorgänge beschränken, die sich – wenigstens im Prinzip – beliebig oft wiederholen lassen.



Franziska und Paul haben unterschiedlich oft gewürfelt.
Dabei haben sie jeweils die Augenzahlen in einer Strichliste erfasst.

Augenzahl						
Franziska						
Paul						

- Aufgabe 1: a) Was lässt sich aus der Tabelle ablesen?
b) Würfle selbst 35-mal und erstelle dazu eine Häufigkeitstabelle.

Beispiel: Eine 1-Euro-Münze wird 10-mal geworfen und die Verteilung der Ergebnisse für Wappen (W) oder Zahl (Z) werden notiert.

ZZWZWWZZWZ



- Aufgabe 2: a) Führe das Experiment für 100 Würfe durch.
Erstelle dazu eine Strichliste und eine Häufigkeitstabelle.
b) Welche Informationen kann man der Strichliste und der Tabelle nicht mehr entnehmen?

Werfen mit zwei Würfeln – zweistufiger Zufallsversuch

Mit einem roten Würfel und einem gelben Würfel wird gleichzeitig (oder nacheinander) gewürfelt.



[Hinweis: Die verwendeten Würfel sollten beim gleichzeitigen Würfeln unterscheidbar sein.]

Aufgabe 3: a) Würfle mit den beiden Würfeln 100-mal.
Notiere jeweils die beiden Augenzahlen und die Augensumme.

Wurf	roter Würfel	gelber Würfel	Augensumme
1			7
2	1	4	5
...			

b) Werte deine Ergebnisse in unterschiedlichen Tabellen aus.
Was stellst du dabei fest?

Ein aus zwei „nacheinander“ ablaufenden Teilvorgängen bestehendes Zufallsexperiment heißt **zweistufiges Zufallsexperiment**.

Aufgabe 4: Eine deutsche 1-Euro-Münze (Zahl/Wappen) und eine italienische 2-Euro-Münze (Zahl/Kopf) werden nacheinander geworfen.
Wie viele verschiedene Vorhersagen sind möglich?



Aufgabe 5: In einem Karton liegen drei rote, zwei gelbe und eine blaue Kugel. Mit geschlossenen Augen werden nacheinander zwei Kugeln gezogen.
Wie viele verschiedene mögliche Ziehungsergebnisse gibt es?

Aufgabe 6: Aus einer Urne mit zwei roten, einer grünen und einer blauen Kugel werden nacheinander zwei Kugeln gezogen.
Veranschauliche die möglichen Ergebnisse in einem Baudiagramm:

Aufgabe 7: Anna und Peter spielen „Schere, Stein, Papier“. Beide zählen bis drei und zeigen dann gleichzeitig mit einer Hand das Symbol für Schere, Stein oder Papier.

Dabei gelten die folgenden Regeln:

- Schere schneidet Papier, d. h., Schere gewinnt gegen Papier
- Stein macht Schere stumpf, d. h., Stein gewinnt gegen Schere
- Papier wickelt Stein ein, d. h., Papier gewinnt gegen Stein

Zeigen beide Spieler das gleiche Symbol, so wird dies unentschieden gewertet.

Nenne alle möglichen Spielausgänge und gib jeweils an, wer dabei gewinnt.

Lösungen

1.1 Datendefinition/Datenerhebung

Aufgabe 1: Denkbare Antworten sind:
Bahn, Bus, Fahrrad, Auto, Fahrrad und Bahn, ...

Aufgabe 2: a) Mögliche Fragen sind:
Wie viele Minuten siehst du an Schultagen durchschnittlich fern?
Wie viele Sendungen/Filme siehst du täglich mindestens an?
Wie viele Minuten sitzt du an den Schultagen höchstens vor dem Fernseher?
...

b) Mögliche Antworten sind:
60 Minuten, 0 Minuten, ...
3 Sendungen/Filme, 0 Sendungen/Filme, ...
90 Minuten, 0 Minuten, ...

1.2 Datendarstellung/Dateninterpretation

Aufgabe 1: Zum Beispiel will ich von meinen Mitschülern erfahren,

- wie viel Taschengeld sie im Monat bekommen,
- wie viel Zeit sie für die Hausaufgabe in einer Woche gebraucht haben und
- welches Unterrichtsfach in der 5. Klasse ihr Lieblingsfach ist.

Die dazugehörigen Fragen lauten:

- Wie viel Taschengeld erhältst du im Monat? (Wer sein Taschengeld wöchentlich bekommt, soll den Betrag mal vier nehmen!)
- Wie viel Zeit brauchst du für Hausaufgaben in der nächsten Woche? (Schreibe dazu die Zeit für jeden Wochentag auf!)
- Welches Unterrichtsfach ist in diesem Schuljahr dein Lieblingsfach? (Nur ein Fach darf genannt werden!)

Aufgabe 2: Für das Merkmal Vorname hat das Maximum den Wert Ulrich.
Für das Merkmal Vorname hat das Minimum den Wert Andreas.
Für das Merkmal Geburtstag hat das Maximum den Wert 17.12..
Für das Merkmal Geburtstag hat das Minimum den Wert 18.01..
Für das Merkmal Kinderzahl in der Familie hat das Maximum den Wert 4.
Für das Merkmal Kinderzahl in der Familie hat das Minimum den Wert 1.
Für das Merkmal Körpergröße in cm hat das Maximum den Wert 165.
Für das Merkmal Körpergröße in cm hat das Minimum den Wert 132.

Aufgabe 3: Absteigende Rangliste zum Merkmal „Anzahl der Geschwister“.

Vorname	Geb.TT.MM.	Kinderzahl in der Familie	Lieblingsfarbe	Haustiere J/N	Körpergröße (cm)
Ines	30.08.	4	Blau	J	149
Benedikt	13.08.	3	Grün	J	140
Iris	21.04.	3	Blau	J	160
Lisa	21.04.	3	Blau	J	159
Nico	04.12.	3	Schwarz	J	142
Ulrich	22.06.	3	Blau	J	140
Tamara	17.12.	2	Orange	J	147
Christina	22.03.	2	Blau	J	132
Jasmin	09.11.	2	Orange	J	150
Sabrina	03.02.	2	Blau	J	152
Patrick	16.03.	2	Gelb	J	158
Julie	04.08.	2	Blau	N	146
Benny	16.11.	2	Schwarz	J	150
Michael	14.12.	2	Rot	N	150
Andreas	22.05.	2	Rot	N	165
Maximilian	18.01.	2	Rot	J	163
Marvin	31.01.	2	Gelb	J	160
Isabella	29.03.	2	Rot	J	152
Katrin	21.08.	2	Blau	N	149
Maximilian	15.10.	2	Grün	J	148
Anselm	01.12.	2	Grün	J	139
Julia	17.06.	2	Gelb	J	145
Beatrice	09.05.	1	Blau	J	147

Aufgabe 4: Beim sortierten Merkmal hat man einen raschen Überblick.

Aufgabe 5: Bei der linken Rangliste könnte es sich um einen 400m-Lauf handeln.
Die rechte Rangliste könnte das Ergebnis eines Geschicklichkeitswettbewerbs darstellen, bei dem die Zeit bis zum Ausscheiden gemessen wurde.

1.3 Datenpräsentation

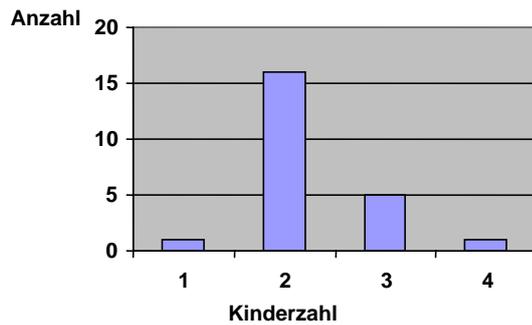
Aufgabe 1 Aus der Häufigkeitsliste lässt sich z. B. nicht mehr ablesen, wer wie viele Geschwister hat, ...

Aufgabe 2 Häufigkeitsliste für das Merkmal Lieblingsfarbe.

Lieblingsfarbe	Blau	Gelb	Grün	Orange	Rot	Schwarz
Häufigkeit	9	3	3	2	4	2

*[*Hinweis: Die Anordnung der Lieblingsfarbe in der Häufigkeitsliste ist willkürlich. Hier sind die Farben alphabetisch angeordnet.]*

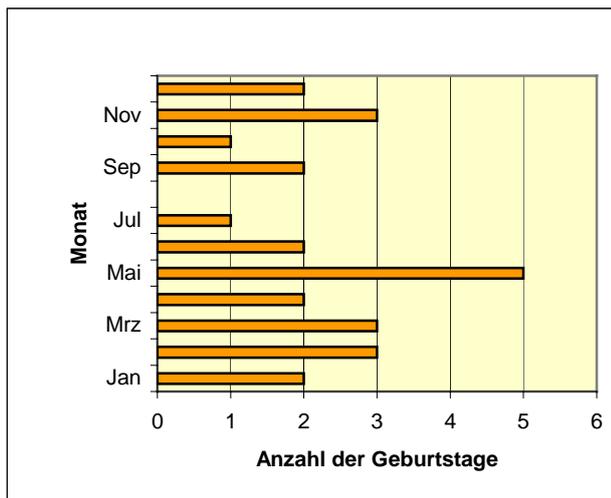
Aufgabe 3: Säulendiagramm für die Kinderzahl in den Familien



Aufgabe 4: Aus dem Balkendiagramm lässt sich ablesen, dass

- im Juli und im September in der Klasse 5a niemand Geburtstag hat,
- jeweils 4 Schüler im August und im Dezember Geburtstag haben,
- die Klasse 5a 23 Schüler hat,
- in der ersten Jahreshälfte (Januar bis Juni) 12 Schüler Geburtstag haben,
- ...

Aufgabe 5: Balkendiagramm für die andere Klasse



Aufgabe 6: Da nur der Vorname Maximilian 2-mal vorkommt, alle anderen Vornamen nur einmal, müssten 22 Balken eingetragen werden, von denen 21 gleich lang sind. Die Erstellung wäre nicht sinnvoll.

Aufgabe 7: Klasse 5c

Note	1	2	3	4	5	6
Anzahl	3	6	3	5	5	2

Klasse 5d

Note	1	2	3	4	5	6
Anzahl	3	6	9	6	3	1

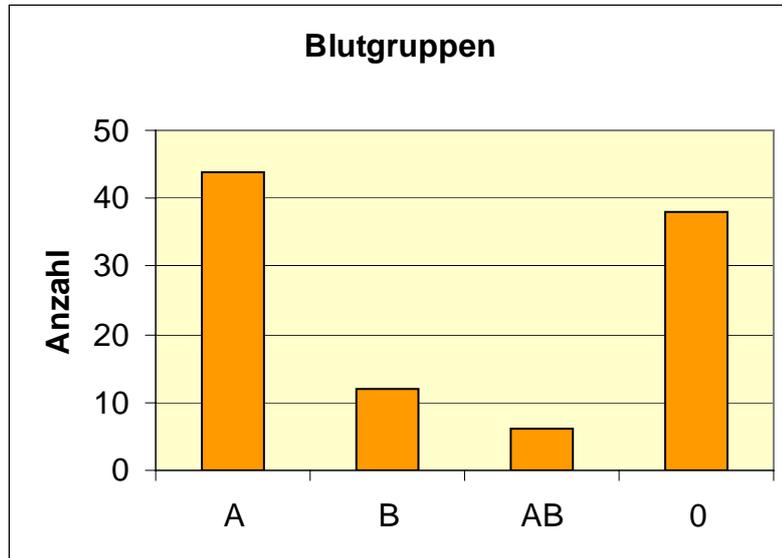
In beiden Klassen gibt es drei Einser und sechs Zweier. Die Klasse 5c hat mehr Fünfer und Sechser. Die häufigste Note in der Klasse 5c ist die Zwei. Die häufigste Note in der Klasse 5d ist die Drei. ...

In der Klasse 5c haben 24 Schüler, in der Klasse 5d 28 Schüler bei der Schulaufgabe mitgeschrieben.

Aufgabe 8: Häufigkeitstabelle:

Blutgruppe	A	B	AB	0
Anzahl	44	12	6	38

Säulendiagramm:



Dem Diagramm lässt sich z. B. entnehmen, dass die Blutgruppe A am häufigsten bestimmt wurde.

Aufgabe 9: nach eingeführtem Buch im Fach Erdkunde

Aufgabe 10: Die Donau ist ca. 2900 km lang, der Rhein ca. 1300 km, die Wolga ca. 3600 km und der Nil ca. 5600 km.

Aufgabe 11: Der Hund erreicht ein Höchstalter von ca. 18 Jahren, die Katze von ca. 30 Jahren, das Pferd von ca. 35 Jahren und der Esel von ca. 50 Jahren.

Aufgabe 12: Häufigkeitstabelle

Verkehrsmittel					
Anzahl	17	21	17	3	9

1.4 Darstellungen, die zu fehlerhaften Interpretationen verleiten

Aufgabe 1: Das 1. Säulendiagramm erweckt den Eindruck, dass die Schülerzahl im Laufe der Jahre stark zunimmt.

Das 2. Säulendiagramm erweckt den Eindruck, dass die Schülerzahl im Laufe der Jahre nur wenig zunimmt

Das 3. Säulendiagramm erweckt den Eindruck einer unverändert geringen Schülerzahl.

Im 1. Säulendiagramm beginnt die Schülerzahl bei 580, im 2. Säulendiagramm beginnt sie bei 0 und im 3. Säulendiagramm ist der Höchstwert der Schülerzahl 2000.

Aufgabe 2: Die Klasse von 132 – 150 cm umfasst 15 Werte.

Aufgabe 3: Aus dieser Häufigkeitstabelle lässt sich herauslesen, dass

- der August und der Dezember die Monate mit den meisten Geburtstagsfeiern sind.
- die Klasse 5a insgesamt 23 Schüler hat.
- 12 Schüler Geburtstag in der ersten Jahreshälfte feiern.
- in den ersten 6 Monaten zwölf Schüler Geburtstag feiern.
- ...

Aufgabe 4: Es lässt sich z. B. nicht mehr ablesen, an welchem Datum Andreas Geburtstag hat oder welche Schüler im November Geburtstag feiern.

Aufgabe 5: Klasseneinteilung Geburtstage nach Jahreszeiten

Jahreszeiten	Frühling 20.03.-20.06.	Sommer 21.06.-22.09.	Herbst 23.09.-20.12.	Winter 21.12.-19.03.
Anzahl der Geburtstage	7	5	7	4

Aufgabe 6: a) Seine Masse beträgt mindestens 63 g und sie liegt unter 73 g.

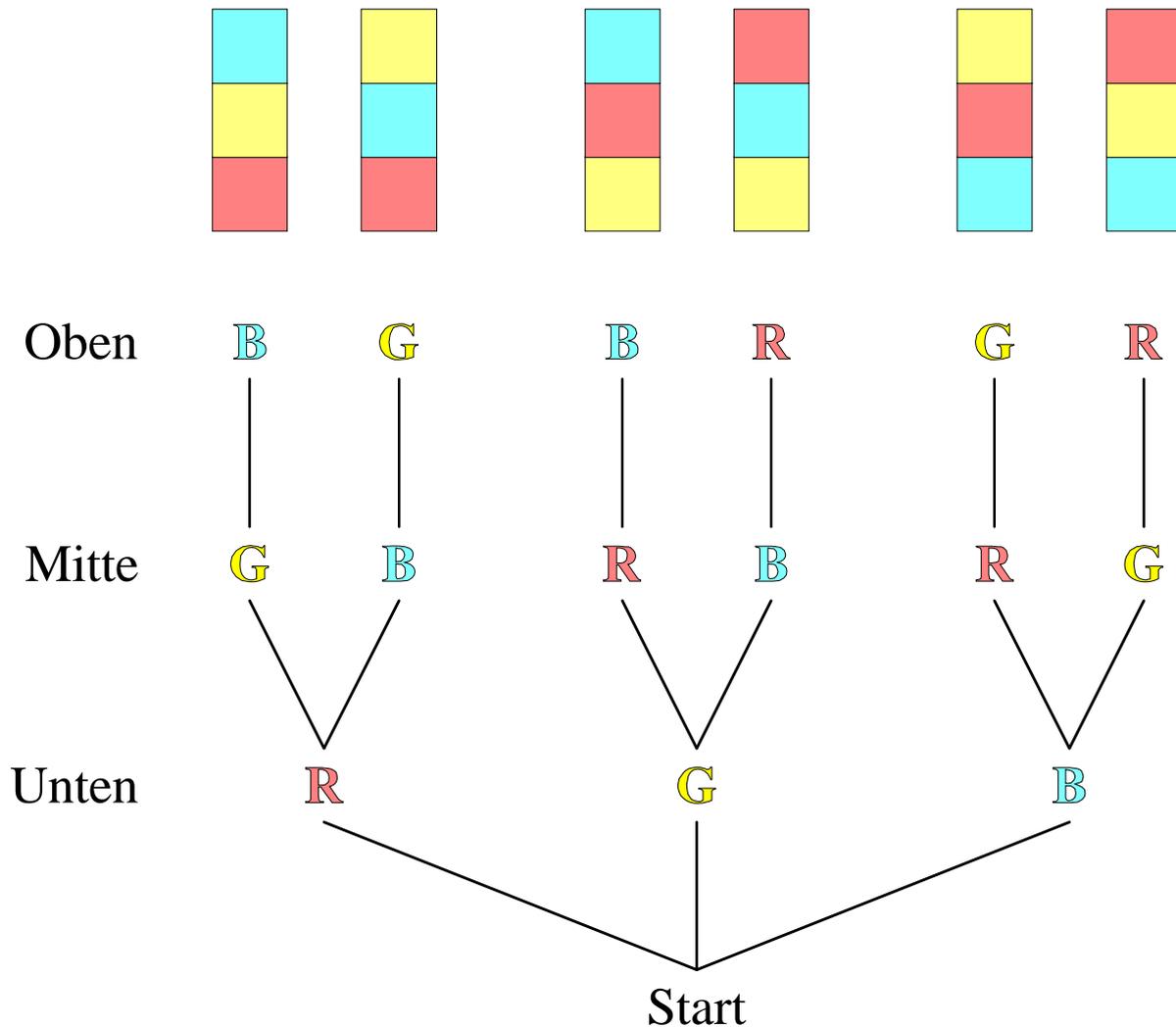
b) Das Hühnerei auf eine Küchenwaage legen und seine Masse bestimmen. Mit der Masse die Gewichtsklasse aus der Tabelle bestimmen und mit der aufgedruckten Gewichtsklasse vergleichen.

c) Klasseneinteilungen im Sport sind z. B. die Gewichtsklassen im Ringen, die Jugendklassen im Fußball, ...

2.1 Abzählen mit Hilfe von Baumdiagrammen

Aufgabe 1 Da sich aus zwei Bausteinen zwei verschiedene Türme bauen lassen, bei denen nun der dritte Stein jeweils oben, in der Mitte oder unten dazu gesteckt werden kann, sind es 6 verschiedene Türme.

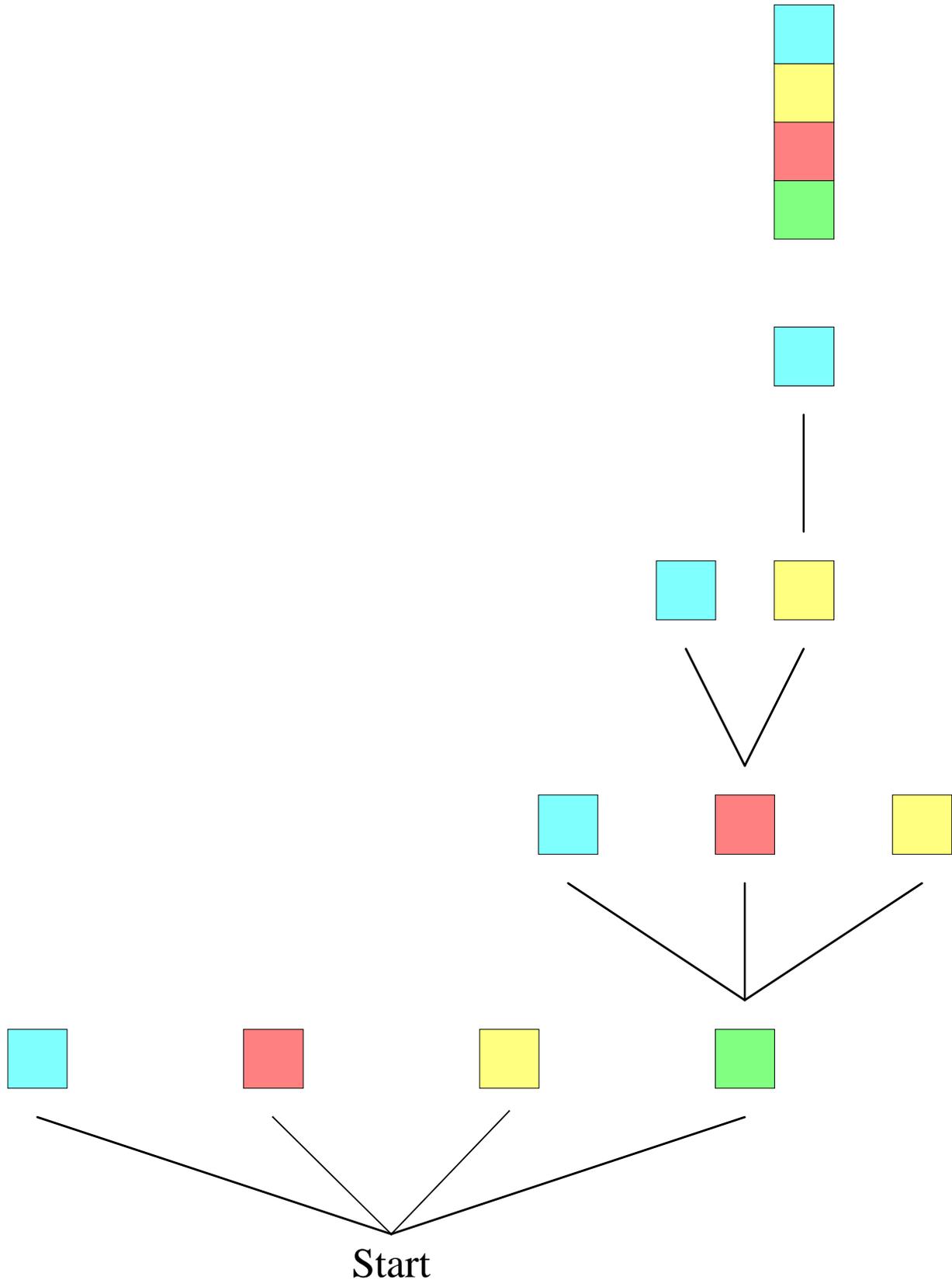
Oder Abzählen mit Hilfe des Baumdiagramms:



Es gibt 6 ($3 \cdot 2 \cdot 1$) mögliche Pfade, also 6 verschiedene Türme.

Aufgabe 2 Da ein vierter Stein dazukommt, der bei jedem der 6 Türme aus drei Steinen an vier verschiedenen Positionen eingebaut werden kann, gibt es bei vier (verschiedenen) Legosteinen 24 ($4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$) unterschiedliche Türme.

Oder Abzählen mit Hilfe des Baumdiagramms:



Es gibt 24 ($4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$) mögliche Pfade, also 24 verschiedene Türme.

Aufgabe 3: Aus den Buchstaben ergeben sich die 6 Anordnungen:
 ORT, OTR, ROT, RTO, TOR, TRO.
 Die drei sinnvollen Worte sind ORT, ROT und TOR.

Aufgabe 4: Die vier Buchstaben lassen sich auf 6 verschiedene Arten anordnen (Lösung durch Probieren):
 OOTT, OTOT, OTTO, TTOO, TOTO, TOOT

Aufgabe 5: Silben auf Kärtchen schreiben und systematisch probieren:
 FANT GU LE
 FANT LE GU
 GU LE FANT
 GU FANT LE
 LE FANT GU
 LE GU FANT
 Es lassen sich 6 Fantasiere „erfinden“.

2.2 Durchführung von ein- und zweistufigen Zufallsversuchen

Aufgabe 1: a) Franziska hat 35-mal gewürfelt, Paul hat 47-mal gewürfelt.
 Paul hat dreimal so oft eine 1 gewürfelt wie Franziska.
 oder ...

b) 3 5 1 5 3 3 1 6 4 1 3 6 2 4 3 6 4 6 4 1 2 5 5 5 3 3 6 4 1 3 2 4 2 6 3

Strichliste:

Augenzahl						
Anzahl						

Häufigkeitstabelle:

Augenzahl						
Anzahl	5	4	9	6	5	6

Aufgabe 2: a) WZWZZWZWWWZZZZWZWWWWZZZZWWWZWWZWWZWWZ
 ZWZWWZZWZWWZZWZWWZZWZWWWWZWWZWWZWWZWWZWWZ
 WZWWZWWWWWWZWWZWWZZWZZWZZWZWWZWW

Strichliste:

Wappen	Zahl

Häufigkeitstabelle:

	Wappen	Zahl
Anzahl	54	46

b) Der Strichliste lässt sich die Reihenfolge der Würfe nicht mehr entnehmen. Auch wie häufig z. B. Wappen hintereinander geworfen wurde, kann nicht entnommen werden.

Aufgabe 3 a) z. B. roter Würfel

Augenzahl						
Anzahl	12	21	11	22	20	14

gelber Würfel

Augenzahl						
Anzahl	18	13	20	16	15	18

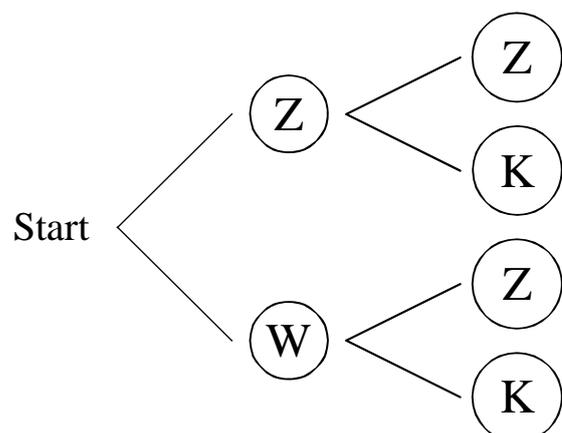
Augensumme	2	3	4	5	6	7	8	9	11	11	12
Anzahl	3	5	9	11	14	12	13	15	10	5	3

b) Die Augensummen 2 und 12 kommen jeweils nur dreimal vor. Auch die Augensummen 3 und 11 kommen weniger häufig vor als die anderen.

Aufgabe 4: Mögliche Vorhersagen sind:

- Zahl und Zahl
- Zahl und Kopf
- Wappen und Zahl
- Wappen und Kopf

Es gibt vier mögliche Vorhersagen für die zwei Würfe.



Aufgabe 5: Mögliche Ziehungsergebnisse sind:

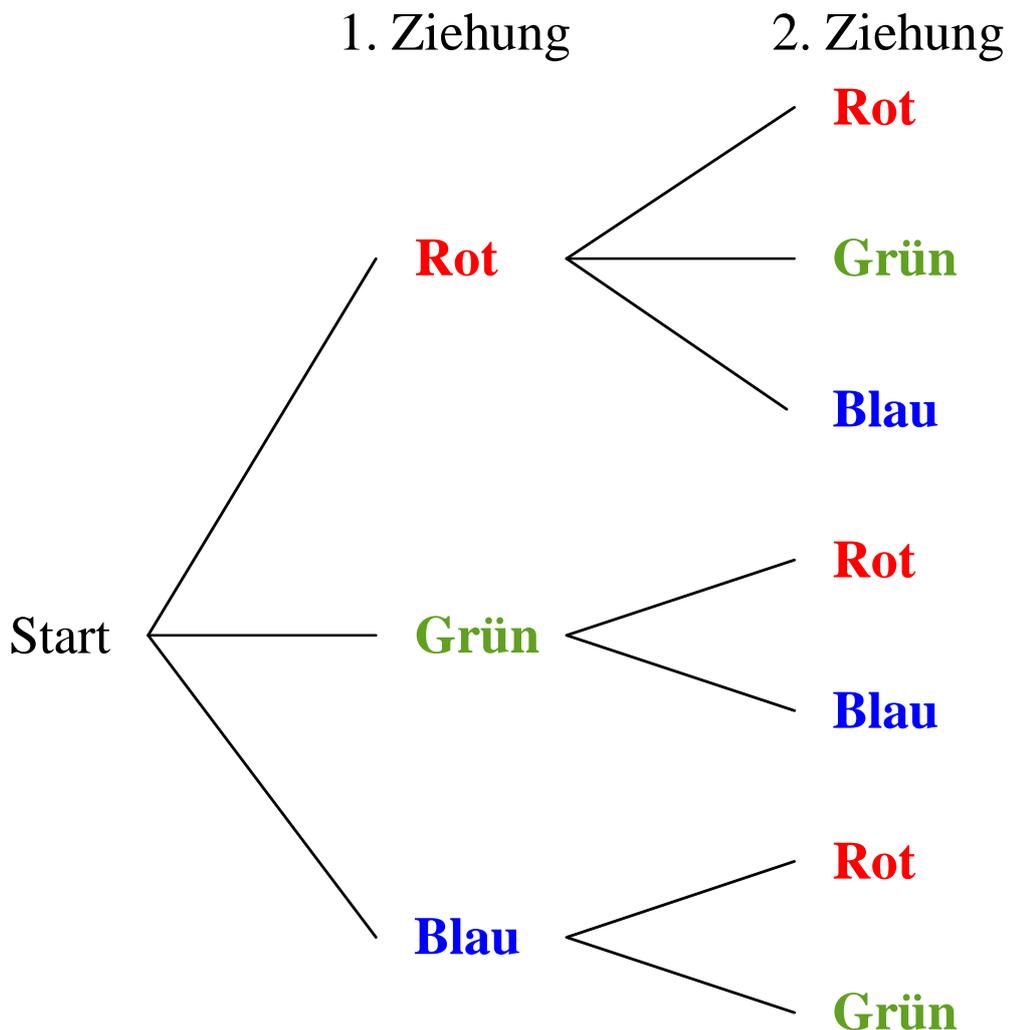
- die 1. Kugel ist rot und die zweite Kugel ist rot
- die 1. Kugel ist rot und die zweite Kugel ist gelb
- die 1. Kugel ist rot und die zweite Kugel ist blau
- die 1. Kugel ist gelb und die zweite Kugel ist gelb
- die 1. Kugel ist gelb und die zweite Kugel ist rot
- die 1. Kugel ist gelb und die zweite Kugel ist blau
- die 1. Kugel ist blau und die zweite Kugel ist rot
- die 1. Kugel ist blau und die zweite Kugel ist gelb

Es gibt 8 verschiedene Ergebnisse, wenn die Reihenfolge der Ziehungen berücksichtigt wird.

Werden die zwei Kugeln gleichzeitig gezogen, so unterscheiden sich nur die fünf Ausfälle:

- zwei rote Kugeln
- eine Kugel ist rot, die andere Kugel ist gelb
- eine Kugel ist rot, die andere Kugel ist blau
- zwei gelbe Kugeln
- eine Kugel ist gelb, die andere Kugel ist blau

Aufgabe 6: Es gibt insgesamt 7 mögliche Ergebnisse.



Aufgabe 7:

