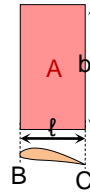


Betrachtet wird eine reibungsfreie Umströmung eines Tragflügels (Vorderkante B und Hinterkante C) mit Profiltiefe  $l$  und „unendlicher“ Spannweite  $b$  (also eine rein zweidimensionale Strömung).

Im Strömungsfernfeld herrscht der statische Druck  $p_\infty$ , das Flugzeug hat die Geschwindigkeit  $\vec{u}$  mit  $u_x = u$  und  $u_y = 0$  m/s.



## 1. Herleitung einer vereinfachten Form der Kutta-Joukowsky-Gleichung

Stark vereinfachende Annahmen:

- ▶ konstante Umströmungsgeschwindigkeiten oberhalb ( $v_{oben}$ ) und unterhalb ( $v_{unten}$ ) des Flügels
- ▶ konstanter Druck oberhalb ( $p_{oben}$ ) und unterhalb ( $p_{unten}$ ) des Flügels

Nach dem Bernoulli-Gesetz gilt:

$$p_{\text{oben}} + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_{\text{oben}}^2 = p_{\text{unten}} + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_{\text{unten}}^2$$

Damit ergibt sich:

$$F_A = A \cdot (p_{\text{unten}} - p_{\text{oben}}) = A \cdot \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot (v_{\text{oben}}^2 - v_{\text{unten}}^2) = A \cdot \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot (v_o + v_u) \cdot (v_o - v_u)$$

Wird  $u$  als Mittelwert von  $v_{\text{oben}}$  und  $v_{\text{unten}}$  angesehen, kann  $F_A$  geschrieben werden als:

$$F_A = A \cdot u \cdot \rho \cdot (v_{\text{oben}} - v_{\text{unten}}) \quad \text{wobei} \quad u = \frac{1}{2} \cdot (v_{\text{oben}} + v_{\text{unten}})$$

(Hinweis: Mit den obigen Annahmen ergibt sich  $\Gamma \approx v_{\text{oben}} \cdot \ell - v_{\text{unten}} \cdot \ell$  (vgl. 2c.), und damit die Kutta-Joukowski-Gleichung  $F_A = \rho \cdot b \cdot u \cdot \Gamma$ .)

## 2. Herleitung der Kutta-Joukowski-Gleichung mit weniger stark vereinfachenden Annahmen $\Delta F_A$

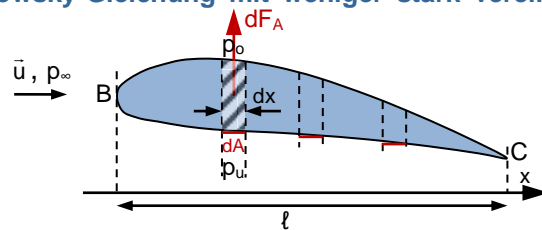
Die ungestörte Grundströmung mit der Geschwindigkeit  $\bar{u}$  wird durch den Tragflügel gestört:

$$\vec{v} = \vec{u} + \vec{\Delta u} = \begin{pmatrix} u \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta u_x \\ \Delta u_y \end{pmatrix} \quad (\blacktriangleleft).$$

Mit dem Bernoulli-Gesetz folgt für den Druck  $p$  am Tragflügel:

$$p_\infty + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot u^2 = p + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot \left( (u + \Delta u_x)^2 + \Delta u_y^2 \right) = p + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot \left( u^2 + 2 \cdot u \cdot \Delta u_x + \overbrace{\Delta u_x^2 + \Delta u_y^2}^{\text{Bernoulli}} \right)$$

Da  $|\vec{\Delta u}| \ll |\vec{u}|$ , gilt näherungsweise:  $p_\infty + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot u^2 \approx p + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot u^2 + \rho \cdot u \cdot \Delta u_x$



## 2a. Druck $p_{\text{unten}}$ , Druck $p_{\text{oben}}$

Auf der Oberseite des Profils ergibt sich durch die Zirkulation eine Geschwindigkeitserhöhung  $\Delta u_x = \Delta v_{\text{oben}} > 0$ , auf der Unterseite eine Geschwindigkeitsverringern

$$\Delta u_x = -\Delta v_{\text{unten}} < 0 \text{ . Damit gilt für die Drücke } p_{\text{unten}} \text{ und } p_{\text{oben}}:$$

$$p_{\infty} + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot u^2 \approx p_{\text{unten}} + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot u^2 - \rho \cdot u \cdot \Delta v_{\text{unten}} = p_{\text{oben}} + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot u^2 + \rho \cdot u \cdot \Delta v_{\text{oben}}$$

Damit ergibt sich:  $p_{\text{unten}} - p_{\text{oben}} = \rho \cdot u \cdot (\Delta v_{\text{unten}} + \Delta v_{\text{oben}})$

zweite vereinfachende Annahme:

Alle Zirkulationsströmungsbeiträge auf der Ober- und Unterseite sind für jeden Ort  $x$  gleich:  $\Delta v_{\text{oben}}(x) = \Delta v_{\text{unten}}(x) = \Delta v(x)$ .

Daher ergibt sich für den Druckunterschied  $p_{\text{unten}} - p_{\text{oben}}$ , der für die Auftriebskraft verantwortlich ist:

$$(p_{\text{unten}} - p_{\text{oben}})(x) = 2 \cdot \rho \cdot u \cdot \Delta v(x)$$

### 2b. Gesamtauftriebskraft $F_A$

Durch Integration über das ganze Profil ergibt sich:

$$F_A = \int_{\text{Tragfläche}} (p_{\text{unten}} - p_{\text{oben}}) dA = b \cdot \int_B^C (p_{\text{unten}} - p_{\text{oben}})(x) dx = 2 \cdot \rho \cdot b \cdot u \cdot \int_B^C \Delta v(x) dx$$

## 2c. Verwendung des Begriffs Zirkulation $\Gamma$

Der Begriff „Zirkulation“ beschreibt die Wirbelstärke des Strömungsfeldes und ist das „Linienintegral“ der Geschwindigkeit (hier um ein Kontrollvolumen, das das Profil enthält):

$$\Gamma = \oint \vec{v} \, d\vec{s} = \oint (v_x dx + v_y dy) \approx \oint v_x dx = \int_{\text{B: "oben"}}^C (u + \Delta v(x)) \, dx + \int_{\text{C: "unten"}}^B (u - \Delta v(x)) \, dx = 2 \cdot \int_B^C \Delta v(x) \, dx$$

Verwendet wurde dabei ( $\blacktriangleleft$ ) sowie die dritte vereinfachende Annahme, dass alle Zirkulationsströmungsbeiträge in y-Richtung vernachlässigt werden können (Vorstellung: flacher Tragflügel).

Daraus ergibt sich die (auch ohne Näherungen ableitbare) **Auftriebsgleichung**:

$$F_A = \rho \cdot b \cdot u \cdot \Gamma \quad \text{bzw.} \quad \frac{F_A}{b} = \rho \cdot u \cdot \Gamma \quad (\text{Kutta-Joukowski-Gleichung})$$

**siehe auch:**

Prof. Dr.-Ing. P. Hakenesch: Skript zur Vorlesung „Aerodynamik des Flugzeugs“  
([Handreichung](#) „Technik erleben“, S. 95ff)

