07.09.2023

BESONDERE PRÜFUNG 2023
MATHEMATIK

Arbeitszeit: 140 Minuten

____
Name des Prüflings

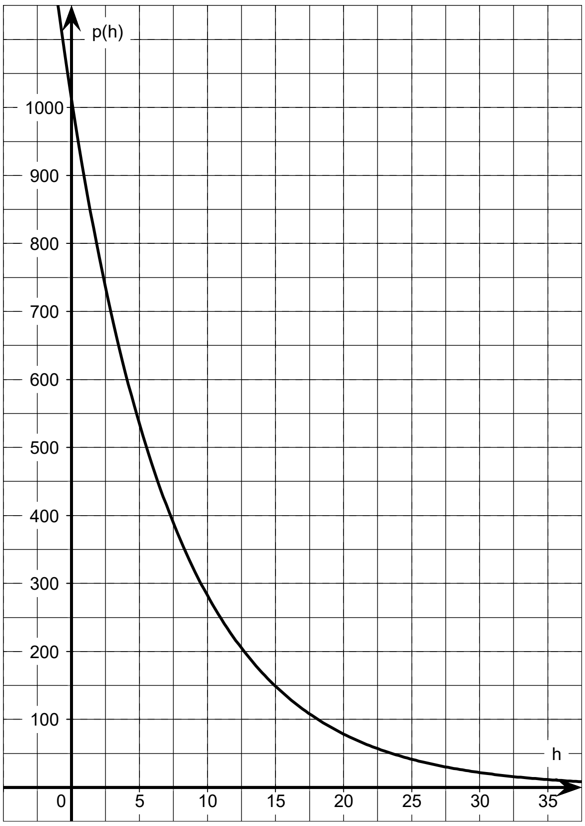
Bei der Bearbeitung der Aufgaben dürfen als Hilfsmittel verwendet werden

- die vom Staatsministerium genehmigte Merkhilfe für das Fach Mathematik,
- das vom Staatsministerium genehmigte Dokument mit mathematischen Formeln,
- ein Taschenrechner, der den vom Staatsministerium getroffenen Regelungen entspricht.

Das Geheft mit den Aufgabenstellungen ist abzugeben.

BE

1. Der Luftdruck – angegeben in der Einheit Hektopascal (hPa) – nimmt in der Atmosphäre mit der Höhe ab. Der Luftdruck kann in Abhängigkeit von der Höhe durch die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $p : h \mapsto 1013 \cdot 0{,}88^h$ beschrieben werden. Dabei ist h die Höhe in km über dem Meeresspiegel und $p(h)$ der Luftdruck in hPa. Der Graph von p ist in der nebenstehenden Abbildung dargestellt:



1 a) Geben Sie die Bedeutung der Zahl 1013 im Sachzusammenhang an.

3 b) Berechnen Sie jeweils, um wie viel Prozent der Luftdruck im Vergleich zu seinem Wert auf Höhe des Meeresspiegels geringer ist
- auf einem 1000 m hohen Berg,
- auf einem 2000 m hohen Berg.

(Fortsetzung nächste Seite)

BE

1 c) Die Qattara-Senke in Ägypten liegt 130 m unter dem Meeresspiegel und ist damit der tiefste Punkt der Erdoberfläche, der nicht mit Wasser bedeckt ist. Berechnen Sie den Luftdruck in hPa an diesem Ort.

4 d) Ermitteln Sie rechnerisch die Höhe, in welcher der Luftdruck nur noch 10 % des Luftdrucks auf der Höhe des Meeresspiegels beträgt.
Beschreiben Sie zudem, wie man diese Höhe mithilfe obiger Abbildung ermitteln kann.

2 e) In niedrigen Höhen über dem Meeresspiegel kann näherungsweise ein einfacher linearer Zusammenhang verwendet werden: „Pro 8 Meter Höhe sinkt der Luftdruck um 1 hPa.“ Stellen Sie einen zu dieser Näherung passenden Funktionsterm $p^*(x)$ auf, wobei x die Höhe in Metern über dem Meeresspiegel bezeichnet.

2. Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $f : x \mapsto a \cdot b^x$ mit $a \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R}^+$.
Die Punkte $A(1|5)$ und $B(2|9)$ liegen auf dem Graphen von f.

3 a) Bestimmen Sie die Werte der Parameter a und b.

(Zur Kontrolle: $f(x) = \frac{25}{9} \cdot \left(\frac{9}{5}\right)^x$)

2 b) Ermitteln Sie einen möglichen Wert q so, dass der Punkt $C(2{,}5|q)$ oberhalb des Graphen von f liegt.

2 3. a) Bestimmen Sie die Zahl $b \in \mathbb{R}^+$, für die gilt: $\log_b(0{,}25) = 2$.

2 b) Für eine bestimmte Zahl $c \in \mathbb{R}^+$ gilt $\log_c(11) = 2{,}5$.
Ermitteln Sie mit dieser Angabe den Wert von $\log_c(121)$.

3 c) Bestimmen Sie für $x \in \mathbb{R}$ die Lösung der Gleichung $3 \cdot 2^{x+1} = 5 \cdot 3^x$.

4 4. Begründen Sie für jede der beiden folgenden Aussagen, dass sie falsch ist.

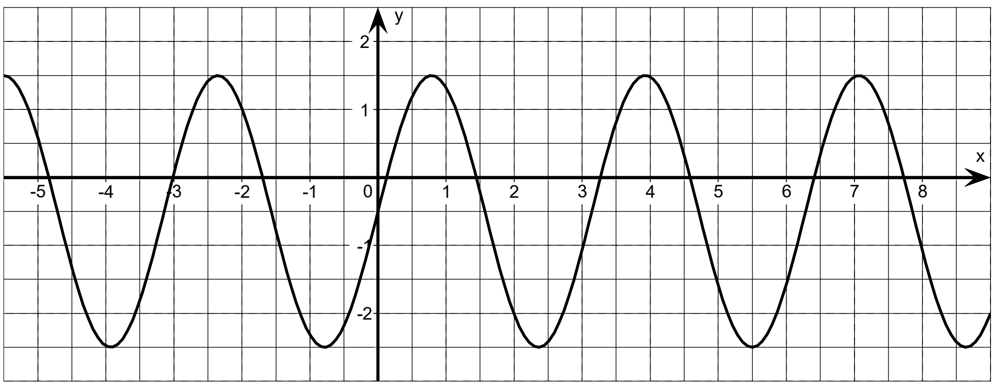
i. Für jedes $c \in [-1; 1]$ hat die Gleichung $\sin(x) = c$ genau zwei Lösungen im Intervall $[0{,}5\pi; 1{,}5\pi]$.

ii. Wenn die beiden in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen $f_1 : x \mapsto a_1 \cdot \sin(b_1 \cdot (x + c_1)) + d_1$ und $f_2 : x \mapsto a_2 \cdot \sin(b_2 \cdot (x + c_2)) + d_2$ mit $a_1, b_1, c_1, d_1, a_2, b_2, c_2, d_2 \in \mathbb{R}$ dieselbe Amplitude haben, dann sind ihre Graphen kongruent.

(Fortsetzung nächste Seite)

BE

4 5. Die Abbildung zeigt den Graphen einer in $\mathbb{R}$ definierten periodischen Funktion.



Begründen Sie für jeden der folgenden Terme, ob er zum abgebildeten Graphen passt.

- $f(x) = 2{,}5\sin(2x) - 0{,}5$
- $g(x) = 2\sin(2x - 0{,}5)$
- $h(x) = 2\sin(2(x + \pi)) - 0{,}5$

8 6. Zwei identische Kugeln mit Radius r werden einzeln verpackt, die erste in einer zylinderförmigen Schachtel, die zweite in einer würfelförmigen Schachtel. Die Abmessungen der Schachteln sind dabei so, dass die Kugeln jeweils an alle Wände der Verpackung anstoßen.
Geben Sie für jeden der beiden Fälle einen Term zur Berechnung des frei bleibenden Volumens in der Schachtel in Abhängigkeit von r an. Vereinfachen Sie den Term jeweils so weit wie möglich.
Berechnen Sie außerdem für jeden der beiden Fälle den Anteil des frei bleibenden Schachtelvolumens in Prozent.

7. Eine Firma stellt Radios in drei verschiedenen Städten her. In der Stadt A werden 25 % ihrer Radios hergestellt, in der Stadt B 35 % und der Rest in der Stadt C. Aufgrund von Produktionsfehlern sind 2 % der in der Stadt A produzierten Radios, 4 % der in der Stadt B produzierten Radios und 5 % der in der Stadt C produzierten Radios defekt.
Von allen produzierten Radios wird eines zufällig ausgewählt. Dabei werden folgende Ereignisse betrachtet:
A: „Das Radio wurde in der Stadt A produziert."
B: „Das Radio wurde in der Stadt B produziert."
C: „Das Radio wurde in der Stadt C produziert."
D: „Das Radio ist defekt."

3 a) Erstellen Sie zu der beschriebenen Situation ein vollständig beschriftetes Baumdiagramm.

2 b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das zufällig ausgewählte Radio defekt ist.

3 c) Geben Sie die Bedeutung des Gegenereignisses von $A \cap D$ im Sachzusammenhang an und berechnen Sie dessen Wahrscheinlichkeit.

(Fortsetzung nächste Seite)

BE	
	8. Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $f : x \mapsto 0{,}1 \cdot (x^3 - 4x) \cdot x \cdot (-3x + 9)$.
2	a) Geben Sie das Verhalten der Funktion f für $x \to -\infty$ und für $x \to +\infty$ an.
4	b) Geben Sie die Nullstellen von f und ihre jeweilige Vielfachheit an.
4	c) Berechnen Sie die Funktionswerte $f(-1{,}5)$ und $f(2{,}5)$ und skizzieren Sie den Graphen von f unter Verwendung aller bisherigen Informationen in ein geeignetes Koordinatensystem.
	9. Die ganzrationalen Funktionen f und g sind in $\mathbb{R}$ definiert.
1	a) Der Graph der Funktion $f : x \mapsto x^k + 3x$ mit $k \in \{1; 2; 3; ...\}$ ist symmetrisch bezüglich des Koordinatenursprungs. Geben Sie alle möglichen Werte von k an.
2	b) Der Graph der Funktion $g : x \mapsto 0{,}1 \cdot (x + 4)^n \cdot (x + c)^2$ mit $n \in \{1; 2; 3; ...\}$ und $c \in \mathbb{R}$ berührt die x-Achse im Punkt $A(4\|0)$ und ist symmetrisch bezüglich der y-Achse. Geben Sie die Werte von n und c an.
60	