09.09.2021

Besondere Prüfung 2021
Mathematik

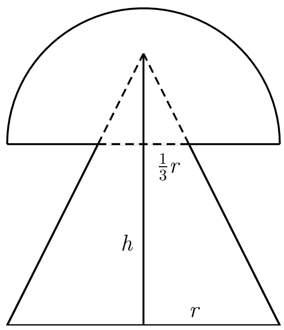
Arbeitszeit: 120 Minuten

____
Name des Prüflings

Das Geheft mit den Aufgabenstellungen ist abzugeben.

BE

1. In einem Souvenirladen werden Holzpilze zur Dekoration von Gärten vertrieben. Die Pilze besitzen alle die gleiche Form: Die Pilzkappe bildet eine Halbkugel mit dem Radius r und der Pilzstiel einen Kegelstumpf, dessen Grundfläche ebenfalls den Radius r besitzt. In der nachstehenden Abbildung ist der Querschnitt dargestellt.
Bei der Herstellung wird zunächst ein Kegel der Höhe h parallel zur Grundfläche bei $\frac{2}{3}$ der Höhe abgesägt, so dass eine kreisförmige Schnittfläche mit Radius $\frac{1}{3}r$ entsteht. Anschließend wird die Halbkugel als Pilzkopf aufgesetzt.



4 a) Geben Sie einen Term für das Volumen des Stiels in Abhängigkeit von r und h an und vereinfachen Sie den Term so weit wie möglich.

Nach dem Zusammenbau werden die Pilze weiterverarbeitet.

5 b) Zunächst werden die Pilzkappen auf der Oberseite und der noch sichtbaren Unterseite braun gestrichen. Dabei beträgt bei 20 gleich großen Pilzen der Inhalt der gestrichenen Gesamtfläche 4 m^2. Berechnen Sie daraus den Radius r eines Pilzes auf Zentimeter gerundet.

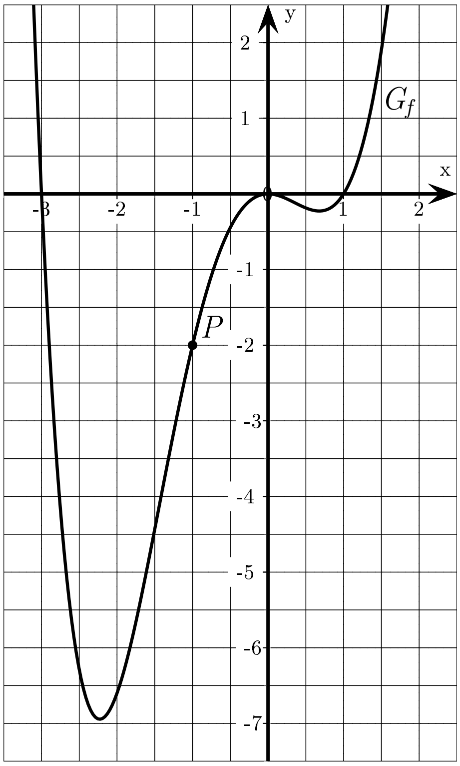
(Zur Kontrolle: Inhalt der sichtbaren Oberfläche: $\frac{26}{9}\pi r^2$)

2 c) Danach wird die Mantelfläche des Stiels mit einer Folie beklebt. Fertigen Sie eine nicht notwendigerweise maßstabsgetreue Skizze an, aus der die geometrische Form dieser Folie erkennbar ist.

(Fortsetzung nächste Seite)

BE

2. Die Abbildung zeigt den Graphen G_f einer in $\mathbb{R}$ definierten ganzrationalen Funktion f fünften Grades. Alle Nullstellen von f sind ganzzahlig. Drei von ihnen können der Abbildung entnommen werden.



2 a) Begründen Sie, dass f mehr als drei Nullstellen besitzt.

Die Funktion f besitzt noch die weitere Nullstelle $x = 9$; ihr Graph verläuft durch den Punkt $P(-1|-2)$.

6 b) Bestimmen Sie einen Funktionsterm von f.

Betrachtet werden die in $\mathbb{R}$ definierte quadratische Funktion p sowie die zugehörige Parabel G_p. Der Scheitel von G_p ist der Koordinatenursprung. Außerdem verläuft G_p durch den Punkt P.

2 c) Geben Sie einen Funktionsterm von p an.

2 d) G_p hat mit G_f für $x \in [-1; 0]$ nur die Punkte $(0|0)$ und P gemeinsam. G_p hat für $x \in [-1; 0]$ einen sehr ähnlichen Verlauf wie G_f. Beschreiben Sie, wie man rechnerisch untersuchen kann, ob G_p für $x \in [-1; 0]$ oberhalb oder unterhalb von G_f verläuft.

3. Die Varroa-Milbe trägt wesentlich zum Sterben von Bienenvölkern bei. Sie schädigt sowohl die Brut von Bienen als auch erwachsene Bienen. Da sich die Milbe nur in den Brutzellen vermehren kann und die Anzahl der Brutzellen von der Jahreszeit abhängt, schwankt auch die Anzahl der Milben in einem Bienenvolk sehr stark mit den Jahreszeiten. Die Beobachtung eines Bienenvolkes im Zeitraum vom 1. März bis zum 1. Oktober gab Aufschluss über die zeitlich veränderliche Anzahl der Milben in diesem Bienenvolk.
Die Anzahl der Milben in diesem Bienenvolk lässt sich modellhaft durch den Term $f(x) = 50 \cdot 1{,}8^{\frac{x}{21}}$ einer Funktion f beschreiben, wobei x die Anzahl der seit dem 1. März vergangenen Tage angibt.

1 a) Geben Sie die Bedeutung der im Term enthaltenen Zahl 50 im Sachzusammenhang an.

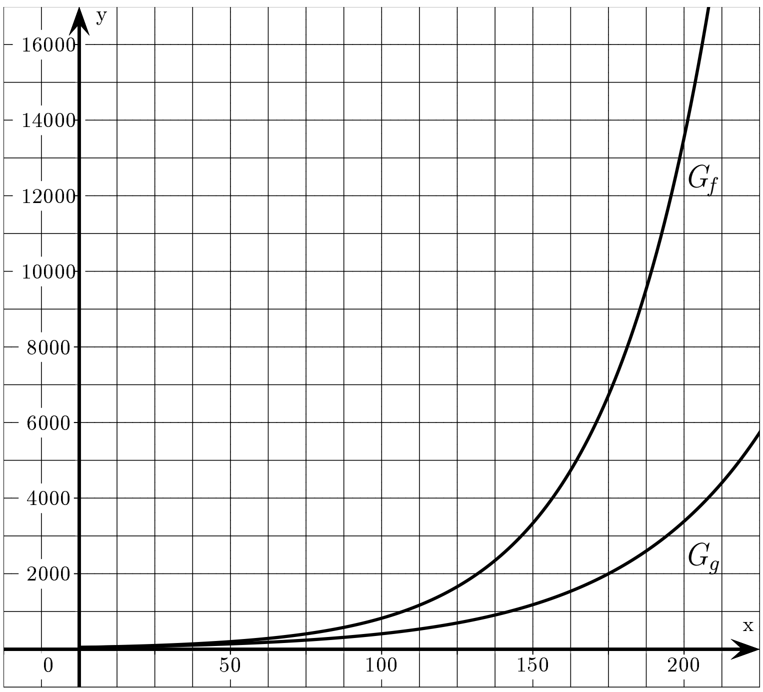
2 b) Zeigen Sie durch Rechnung, dass $f(x) \approx 50 \cdot 1{,}0284^x$ gilt. Geben Sie überdies die Bedeutung der im Term enthaltenen Zahl 1,0284 im Sachzusammenhang an.

2 c) Es wird behauptet, dass der Zeitraum, in dem sich die Anzahl der Milben verdoppelt, größer als 20 Tage ist.
Begründen Sie, dass man dieser Aussage ohne weitere Rechnung zustimmen kann.

(Fortsetzung nächste Seite)

BE

Die folgende Abbildung zeigt den Graphen G_f, der den vorliegenden Sachzusammenhang beschreibt. Außerdem ist der Graph G_g einer weiteren Funktion abgebildet, die erst in Teilaufgabe e benötigt wird.



5 d) Wird die Anzahl von etwa 9200 Milben in einem Bienenvolk überschritten, so geht das Volk mit hoher Wahrscheinlichkeit in der Folgezeit zugrunde.
Bestimmen Sie rechnerisch, nach wie vielen Tagen beim betrachteten Bienenvolk dieser Zeitpunkt erreicht ist. Veranschaulichen Sie in obiger Abbildung Ihr Ergebnis, indem Sie den berechneten Wert auch graphisch ermitteln.

4 e) Bei ansonsten gleichen Anfangsbedingungen kann durch geeignete Maßnahmen der Wachstumsfaktor reduziert werden. In obiger Abbildung ist der Graph G_g der Funktion g dargestellt, die diesen neuen Sachzusammenhang beschreibt.
Bestimmen Sie mithilfe der Abbildung näherungsweise einen Term von g.

4. Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $f : x \mapsto -4\sin(0{,}5x) - 4$.

4 a) Beschreiben Sie, wie der Graph von f schrittweise aus dem Graphen der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion $k : x \mapsto \sin(x)$ hervorgeht.

3 b) Zeichnen Sie den Graphen von f im Bereich $-2\pi \leq x \leq 4\pi$.

3 c) Geben Sie die Periode sowie alle Nullstellen der Funktion f an.

2 d) Der Graph der Funktion f soll in x-Richtung so verschoben werden, dass der neu entstandene Graph symmetrisch bezüglich der y-Achse ist. Geben Sie eine mögliche Verschiebung und den zugehörigen Funktionsterm an.

(Fortsetzung nächste Seite)

BE

5. In einem Sportverein spielen 20 % der Vereinsmitglieder Fußball. Davon sind 25 % weiblich. Die übrigen Vereinsmitglieder, von denen 60 % weiblich sind, spielen nicht Fußball.
Ein Vereinsmitglied wird zufällig ausgewählt. Betrachtet werden die folgenden Ereignisse:
F: „Das Vereinsmitglied spielt Fußball."
W: „Das Vereinsmitglied ist weiblich."

4 a) Erstellen Sie zu der beschriebenen Situation ein Baumdiagramm und berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein Vereinsmitglied nicht weiblich ist und nicht Fußball spielt.

3 b) Bei einem Vereinsjubiläum wird unter allen Mitgliedern ein Preis verlost. Nachdem dabei ein Name aus dem Losbehälter gezogen wurde, wird verkündet, dass eine Frau den Preis gewonnen hat.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Gewinnerin Fußball spielt.

4 c) Max weiß aus Erfahrung, dass er mit einer Wahrscheinlichkeit von 40 % beim Elfmeter ein Tor erzielt. Max schießt im Training sieben Elfmeter hintereinander.
Berechnen Sie jeweils die Wahrscheinlichkeit dafür,
- dass Max bei allen sieben Elfmetern trifft.
- dass Max genau dreimal trifft und diese drei Treffer unmittelbar hintereinander erfolgen.

60