05.09.2013

Besondere Prüfung 2013
Mathematik

Arbeitszeit: 120 Minuten

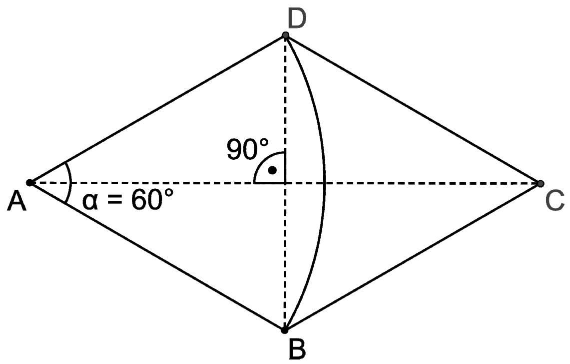
____

Name des Prüflings

Das Geheft mit den Aufgabenstellungen ist abzugeben.

BE

1 Gegeben ist eine Raute ABCD mit der Seitenlänge 3 cm (vgl. Abbildung). Der Kreisbogen mit dem Mittelpunkt A und dem Radius 3 cm verläuft durch die Punkte B und D. Die Größe des Winkels $\alpha = \sphericalangle BAD$ beträgt 60°.



3 **a)** Bestimmen Sie für den Kreissektor ABD den Flächeninhalt A und den Umfang U.

(zur Kontrolle: $A \approx 4{,}71\text{cm}^2$)

4 **b)** Ermitteln Sie auf drei Stellen genau, wie viel Prozent des Flächeninhalts der Raute der Kreissektor einnimmt.

4 **2** Geben Sie für die folgenden Gleichungen jeweils die Lösungsmenge über der Grundmenge $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ an.

a) $3^x = 7$ **b)** $3^x = -7$ **c)** $x^{-3} = 7$ **d)** $x^3 = -7$

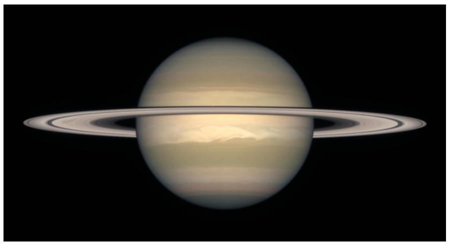
3 **3** Betrachtet wird die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $h: x \mapsto \sin(x+a)$ mit $a \in [0; 2\pi]$. Bestimmen Sie alle Werte von a, für die der jeweilige Graph von h die y-Achse im Punkt $(0\,|\,0{,}5)$ schneidet.

3 **4** Gegeben sind in einem Koordinatensystem die Punkte $A(1\,|\,2)$ und $B(-2\,|\,6)$. Berechnen Sie den Abstand dieser beiden Punkte.

(Fortsetzung nächste Seite)

BE

5 Der Planet Saturn mit seinem Ring ist eine besondere Erscheinung in unserem Sonnensystem.



4 **a)** Der Saturn hat ohne den Ring einen Durchmesser von $1{,}205 \cdot 10^5$ km. Berechnen Sie sein Volumen.
Die Materie, aus der der Saturn besteht, hat im Mittel pro Kubikzentimeter eine Masse von 0,621 g. Berechnen Sie die Masse des Saturns ohne den Ring.

4 **b)** Der Ring des Saturns hat näherungsweise die Form eines flachen Kreisrings mit dem Innendurchmesser $d_i = 1{,}340 \cdot 10^5$ km und dem Flächeninhalt $A = 7{,}097 \cdot 10^{11}\,\text{km}^2$.

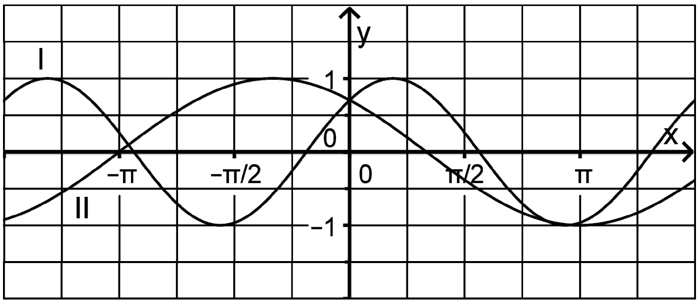
Zeigen Sie, dass der Außendurchmesser d_a des Rings durch den Term $\sqrt{\frac{4A}{\pi} + d_i^2}$ angegeben wird, und berechnen Sie d_a.

Der Saturn benötigt etwa 29,46 Erdenjahre, um die Sonne einmal zu umlaufen. Der Abstand des Mittelpunkts der Sonne vom Mittelpunkt des Saturn beträgt etwa 1,43 Milliarden Kilometer. Die Bahn ist näherungsweise eine Kreisbahn, auf der sich der Saturn mit konstanter Geschwindigkeit bewegt.

4 **c)** Berechnen Sie die Länge des Bogens, den der Saturn auf seiner Bahn während eines Erdenjahres zurücklegt.
Bestimmen Sie anschließend die Geschwindigkeit (in $\frac{\text{km}}{\text{h}}$), mit der sich der Saturn auf seiner Bahn bewegt.

3 **6** Jeder der abgebildeten Graphen I und II gehört zu einer der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen

$f: x \mapsto \sin\left(\frac{3}{4} \cdot (x + \pi)\right)$ und $g: x \mapsto \sin\left(\frac{4}{3} \cdot \left(x + \frac{3}{16} \cdot \pi\right)\right)$.



Ordnen Sie die Funktionen den Graphen zu und begründen Sie Ihre Zuordnung.

(Fortsetzung nächste Seite)

BE

7 Ein großes Unternehmen bietet seinen Mitarbeitern einen firmeneigenen Handyvertrag an. Die Tabelle gibt die Anzahl N der Mitarbeiter, die einen firmeneigenen Handyvertrag abgeschlossen haben, in Abhängigkeit von der Zeit x (in Jahren) an, die seit Beginn der Einführung des Handyvertrags vergangen sind.

x	1	2	3	4	5
N	400	420	441	463	486

Um die Entwicklung der Anzahl der firmeneigenen Vertragsabschlüsse genauer zu untersuchen, soll N in Abhängigkeit von x näherungsweise durch eine Funktion beschrieben werden.

4 **a)** Zunächst soll zur Beschreibung eine lineare Funktion verwendet werden, deren Graph durch die Punkte $(1|400)$ und $(2|420)$ verläuft. Bestimmen Sie den zugehörigen Funktionsterm.
Beurteilen Sie, ob diese lineare Funktion dafür geeignet ist, N in Abhängigkeit von x näherungsweise zu beschreiben. Gehen Sie dabei davon aus, dass der Unterschied zwischen einem in der Tabelle angegebenen Wert von N und dem zugehörigen Funktionswert der linearen Funktion maximal 2 betragen soll.

5 **b)** Nun soll die Entwicklung der Anzahl der Vertragsabschlüsse durch eine Exponentialfunktion beschrieben werden, deren Graph durch die Punkte $(1|400)$ und $(2|420)$ verläuft. Bestimmen Sie den zugehörigen Funktionsterm.
Beurteilen Sie, ob diese Exponentialfunktion dafür geeignet ist, N in Abhängigkeit von x näherungsweise zu beschreiben. Gehen Sie dabei davon aus, dass der Unterschied zwischen einem in der Tabelle angegebenen Wert von N und dem zugehörigen Funktionswert der Exponentialfunktion maximal 2 betragen soll.

8 An einer Schule unterrichten 60 Lehrkräfte. Zwei Drittel aller Lehrkräfte trinken gerne Kaffee, darunter 12 der 24 männlichen Lehrkräfte.

3 **a)** Erstellen Sie zu der beschriebenen Situation eine vollständig ausgefüllte Vierfeldertafel.

3 **b)** Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine zufällig ausgewählte Lehrkraft

α) weiblich ist.

β) weiblich ist oder nicht gerne Kaffee trinkt.

3 **c)** Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine zufällig ausgewählte Lehrkraft männlich ist, wenn bekannt ist, dass sie nicht gerne Kaffee trinkt.

(Fortsetzung nächste Seite)

9 Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto x^4 - 4x^2$ mit Definitionsmenge $\mathbb{R}$.

3 **a)** Bestimmen Sie die Nullstellen von f und untersuchen Sie das Symmetrieverhalten des Graphen von f bezüglich des Koordinatensystems.

3 **b)** Skizzieren Sie den Graphen von f unter Verwendung der Ergebnisse aus Aufgabe 9a.

2 **c)** Nun wird zusätzlich die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $g: x \mapsto 4x^2 - x^4$ betrachtet. Geben Sie mithilfe der Ergebnisse aus Aufgabe 9a die Nullstellen von g sowie das Symmetrieverhalten des Graphen von g an.

2 **d)** Peter stellt fest: „Wenn man zum Funktionsterm der Funktion f die Zahl 5 addiert, ergibt sich der Term einer neuen Funktion f_1. Der Graph der Funktion f_1 schneidet die x-Achse nicht.“

Er behauptet nun: „Bei jeder Funktion kann man durch Addieren einer genügend großen Zahl zu ihrem Funktionsterm den Term einer neuen Funktion erhalten, deren Graph die x-Achse nicht schneidet.“

Ist Peters Behauptung richtig? Begründen Sie Ihre Antwort.

60