Besondere Prüfung 2010

Mathematik

Arbeitszeit: 120 Minuten

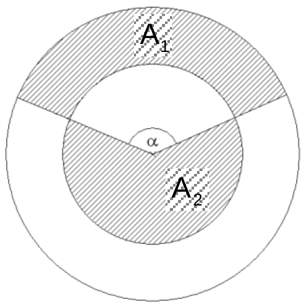
Name des Prüflings

Das Geheft mit den Aufgabenstellungen ist abzugeben.

BE

4 **1** 100 Würfel aus Wachs mit einer Kantenlänge von 3,0 cm werden geschmolzen und zu einer einzigen kugelförmigen Kerze geformt. Dabei tritt ein Wachsverlust von 6,0 % auf. Berechnen Sie den Durchmesser der Wachskugel. Das Volumen des Dochts kann dabei vernachlässigt werden.

2 Gegeben sind zwei konzentrische Kreise mit den Radien 4,0 cm bzw. 6,0 cm (Abbildung nicht maßstabsgetreu). Die beiden grau markierten Flächenstücke haben die Inhalte A_1 bzw. A_2.



3 **a)** Berechnen Sie für $\alpha = 120^\circ$ den Flächeninhalt A_1.

4 **b)** Bestimmen Sie den Winkel α so, dass die Flächeninhalte A_1 und A_2 gleich groß sind.

3 **3 a)** Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto a \cdot \cos(bx) + c$ mit $a, b \in \mathbb{R}^+$, $c \in \mathbb{R}$ und Definitionsbereich $\mathbb{R}$.

Bestimmen Sie a, b und c so, dass folgende Bedingungen erfüllt sind:

- Die Periodenlänge von f beträgt 6π.
- Der Punkt $(0\,|\,5)$ liegt auf dem Graphen von f.
- Der Wertebereich von f ist $[-1; 5]$.

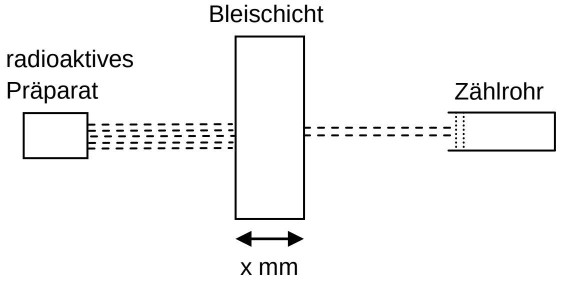
2 **b)** Geben Sie (auf Grad gerundet) alle Winkel α mit $0^\circ \le \alpha \le 360^\circ$ an, für die $\sin\alpha = -0{,}6428$ gilt.

4 **c)** Zeichnen Sie die Graphen der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen $g: x \mapsto \sin x$ und $h: x \mapsto \cos x$ für $x \in [-2\pi; 2\pi]$ in ein gemeinsames Koordinatensystem ein.
Geben Sie mithilfe der Zeichnung die Lösungsmenge der Ungleichung $\sin x > \cos x$ für $x \in [-2\pi; 2\pi]$ an. Verwenden Sie die Intervallschreibweise mit exakten Grenzen.

(Fortsetzung nächste Seite)

BE

4 Die Abbildung zeigt den Aufbau eines Versuchs, mit dem die Schwächung von Gammastrahlung aus einem radioaktiven Präparat beim Durchgang durch Blei untersucht werden soll.



Die von der Strahlungsquelle ausgehende Gammastrahlung (energiereiche Photonen) trifft auf eine Bleischicht, deren Dicke schrittweise verändert wird. Mit einem Zählrohr wird jeweils die Anzahl derjenigen Photonen festgestellt, die die Bleischicht durchdringen. Ohne Bleiabschirmung werden pro Sekunde 149 Photonen aus dem Präparat gezählt. Die Tabelle gibt einige der Messwerte an (x: Maßzahl der Schichtdicke in mm; Z: Anzahl der Photonen pro Sekunde).

x	0,0	3,0	9,0
Z	149	116	70

4 **a)** Nehmen Sie zunächst an, dass zwischen x und Z ein linearer Zusammenhang besteht. Berechnen Sie unter dieser Annahme ausgehend von den Wertepaaren für $x = 0{,}0$ und $x = 3{,}0$,

α) wie viele Photonen pro Sekunde man bei Verwendung einer 9,0 mm dicken Bleischicht mit dem Zählrohr messen müsste.

β) wie dick die Bleischicht mindestens sein müsste, um die Gammastrahlung vollständig abzuschirmen.

4 **b)** Zeigen Sie nun, dass die Wertepaare für $x = 0{,}0$ und $x = 3{,}0$ zu einer exponentiellen Abnahme von Z um 8,0 % pro mm Blei passen.
Stellen Sie einen Term Z(x) auf, der den exponentiellen Zusammenhang von x und Z beschreibt, und überprüfen Sie damit den Messwert für $x = 9{,}0$.

3 **c)** Zur Beschreibung des Zusammenhangs von x und Z ist auch der Term $Z(x) = 149 \cdot 2^{-0{,}12x}$ geeignet. Ermitteln Sie damit, bei welcher Schichtdicke nur 5,0 % der auf die Bleischicht treffenden Photonen das Zählrohr erreichen.

5 Gegeben sind die in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen $f_1 : x \mapsto 0{,}5 \cdot 2^x$ und $f_2 : x \mapsto 1{,}5 \cdot 0{,}5^x$.

3 **a)** Zeichnen Sie die Graphen von f_1 und f_2 in ein gemeinsames Koordinatensystem ein.

4 **b)** Berechnen Sie die x-Koordinate des Schnittpunkts der Graphen von f_1 und f_2 (auf zwei Dezimalstellen gerundet).

(Fortsetzung nächste Seite)

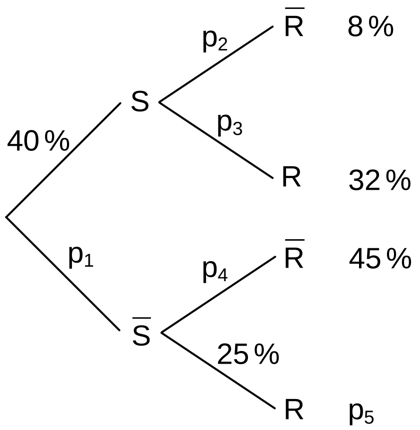
BE

6 Ein Fernsehsender untersuchte die Beliebtheit einer Fernsehshow bei verschiedenen Altersgruppen mittels einer Umfrage unter 2000 Personen. Dabei wurden folgende Ereignisse betrachtet.

R: „Die befragte Person ist älter als 50 Jahre.“

S: „Die befragte Person sieht sich die Show regelmäßig an.“

Die im Rahmen der Umfrage ermittelten relativen Häufigkeiten sind im abgebildeten Baumdiagramm angegeben und werden im Folgenden als Wahrscheinlichkeiten interpretiert.



2 **a)** Beschreiben Sie das Ereignis, dessen Wahrscheinlichkeit mit 8 % angegeben ist, in Worten.

5 **b)** Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten p_1, p_2, p_3, p_4 und p_5.

3 **c)** Erstellen Sie für die Ereignisse S und R eine vollständig ausgefüllte Vierfeldertafel.

1 **d)** Wie groß ist unter allen Befragten der prozentuale Anteil der Personen, die älter als 50 Jahre sind?

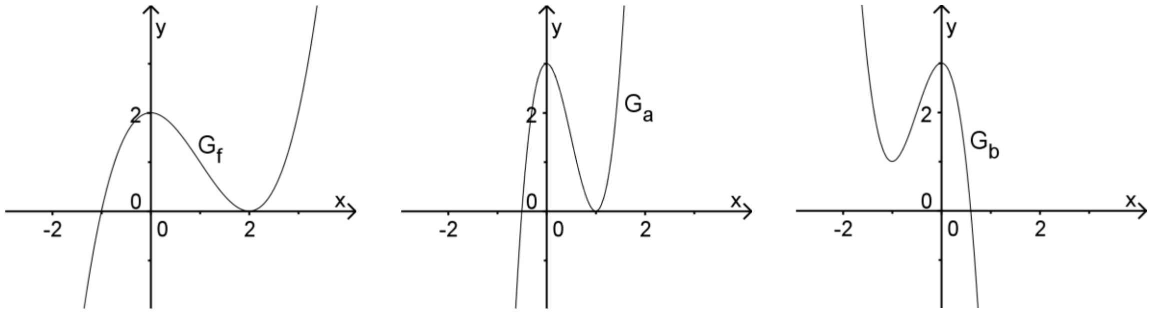
2 **e)** Unter den befragten Personen, die höchstens 50 Jahre alt sind, wählt man zufällig eine Person aus. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sieht sie sich die Show regelmäßig an?

3 **7** Der Graph einer ganzrationalen Funktion f vierten Grades schneidet die x-Achse bei $x_1 = -1{,}5$ sowie $x_2 = 0$ und berührt diese bei $x_3 = 2$. Geben Sie zwei mögliche Funktionsterme von f in der Form $f(x) = a \cdot (x-b) \cdot (x-c) \cdot (x-d) \cdot (x-e)$ an, indem Sie geeignete Werte für $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$ festlegen.

(Fortsetzung nächste Seite)

BE

6 **8** Die Abbildungen zeigen den Graphen G_f einer in $\mathbb{R}$ definierten Funktion f sowie zwei weitere Graphen G_a und G_b.



G_a und G_b gehören zu jeweils einer der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen f_1 bis f_6, deren Terme sich mithilfe des Funktionsterms von f ausdrücken lassen:

$f_1(x) = f(-2x) + 1$ $\qquad$ $f_2(x) = -2 \cdot f(x) + 1$ $\qquad$ $f_3(x) = \frac{1}{2} \cdot f(-x)$

$f_4(x) = f(-\frac{1}{2}x) + 1$ $\qquad$ $f_5(x) = \frac{3}{2} \cdot f(2x)$ $\qquad$ $f_6(x) = \frac{1}{2} \cdot f(x+1)$

Ordnen Sie die Graphen G_a und G_b dem jeweils zugehörigen Funktionsterm zu. Begründen Sie Ihre Entscheidungen.