Besondere Prüfung 2007 – Mathematik

6. September 2007

Arbeitszeit: 120 Minuten

Die Angabe ist vom Prüfling mit dem Namen zu versehen und mit abzugeben.

Name: ……………………..……………………..

BE

1. Vereinfachen Sie so weit wie möglich ($a, b, c, d \in \mathbb{R}^+$; $n \in \mathbb{N}$):

1 a) $\left(\dfrac{1}{a^{-\frac{1}{2}}}\right)^4$

3 b) $\dfrac{b}{c^{-2}\sqrt{b^4}} : \dfrac{b^{-7}}{(c^3)^2}$

3 c) $\left(-\dfrac{d^5}{d^2}\cdot d^{-3}\right)^{n+1} + (-1)^n$

5 2. Die Gleichung $x^3 + x^2 - 5x + 3 = 0$ hat in der Grundmenge $G = \mathbb{R}$ die Lösung $x_1 = 1$. Berechnen Sie alle weiteren Lösungen der Gleichung und geben Sie den Term $x^3 + x^2 - 5x + 3$ so weit wie möglich faktorisiert an.

3 3. a) Bestimmen Sie in der Grundmenge $\mathbb{R}$ die maximale Definitionsmenge des Terms $\log_{10}\left(x^2 - 16\right)$.

3 b) Bestimmen Sie in der Definitionsmenge $\mathbb{R}$ die Lösungsmenge der Gleichung $\log_4\left(x^2 + 15\right) = 3$.

(Fortsetzung nächste Seite)

BE	
	4. Eine Firma stellt durchsichtige Kunststoffplatten her. Bei einer Überprüfung der Lichtdurchlässigkeit der Platten stellt sich heraus, dass senkrecht auftreffendes weißes Licht auf jedem Millimeter seines Weges durch die Platte den gleichen Prozentsatz seiner vorher noch vorhandenen Intensität (Helligkeit) verliert.
	Für die mathematische Beschreibung dieser Intensitätsabnahme ist die Funktion f mit Gleichung $y = y_0 \cdot 2^{-kx}$, $k \in \mathbb{R}^+$, geeignet.
	Diese Funktion f gibt an, wie groß die Intensität y noch ist, wenn das Licht x mm in die Platte eingedrungen ist; y_0 bezeichnet die Anfangsintensität des Lichts beim Auftreffen auf die Platte.
3	a) *„Die Intensität des senkrecht auftreffenden Lichts hat sich um 2,0 % verringert, nachdem es 1,0 mm eingedrungen ist.“* Bestimmen Sie k so, dass die Funktion f diese Bedingung erfüllt. Runden Sie das Ergebnis für k auf 3 Nachkommastellen.
2	b) Rechnen Sie jetzt mit k = 0,029: Wie viel Prozent der Anfangsintensität des Lichts werden beim Durchgang durch die Platte „verschluckt“, wenn diese 19,0 mm dick ist?
2	c) Die Funktion g mit der Gleichung $y = y_0(1 - 0{,}02x)$ genügt ebenfalls der Bedingung aus Teilaufgabe 4 a, wobei y_0 und x dieselbe Bedeutung haben wie oben. Begründen Sie, warum die Funktion g für die Beschreibung der eingangs beschriebenen Intensitätsabnahme trotzdem nicht geeignet ist.

(Fortsetzung nächste Seite)

Besondere Prüfung 2007 – Mathematik

6. September 2007

BE

5. Es werden Potenzfunktionen mit der Zuordnungsvorschrift $x \mapsto y = x^n$, $n \in \mathbb{Z}$, in ihrem maximalen Definitionsbereich $\mathbb{D}$ betrachtet.

4 a) Skizzieren Sie je ein Beispiel eines Graphen einer derartigen Funktion nach folgenden Vorgaben für n in getrennte Koordinatensysteme:

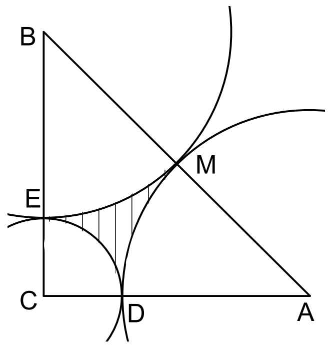
- n ist positiv und gerade
- n ist negativ und ungerade

Geben Sie entsprechend den Formulierungen in Teilaufgabe 5a die Werte an, die für n in Frage kommen, wenn man weiß:

2 b) f ist streng monoton zunehmend auf ganz $\mathbb{D}$.

2 c) f ist in $]-\infty\,;0[$ streng monoton zunehmend und der Graph enthält den Punkt $(-1/1)$.

6. Das Dreieck ABC ist gleichschenklig-rechtwinklig, die Schenkel sind 5 cm lang, M ist der Mittelpunkt der Basis $[AB]$. Die drei Kreisbögen haben die Mittelpunkte A, B und C und berühren sich auf den Dreiecksseiten in den Punkten D, E und M.



2 a) Berechnen Sie die Streckenlängen $\overline{AM}$ und $\overline{CD}$.

[Teilergebnis: $\overline{AM} = 2{,}5\sqrt{2}$ cm]

4 b) Berechnen Sie den Flächeninhalt des schraffierten Flächenstücks DME, das von den Kreisbögen begrenzt wird. Geben Sie das Ergebnis in cm² auf drei Nachkommastellen gerundet an.

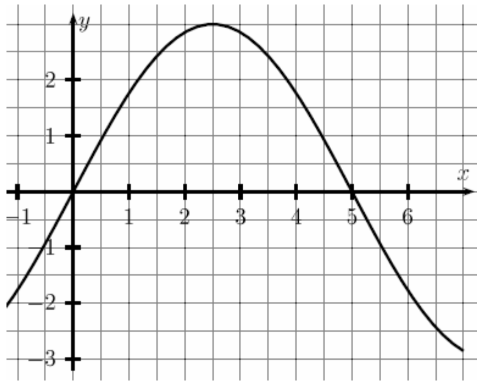
4 7. In einer Wanderkarte (Maßstab 1 : 50000) ist ein geradlinig verlaufender Skilift eingezeichnet. Man entnimmt der Karte, dass der Skilift einen Höhenunterschied von 280 m überbrückt. Auf der Karte ist der Abstand zwischen Tal- und Bergstation 3,5 cm. Erstellen Sie eine beschriftete Skizze und berechnen Sie die durchschnittliche Steigung des Geländes unter dem Skilift in Prozent.

(Fortsetzung nächste Seite)

BE

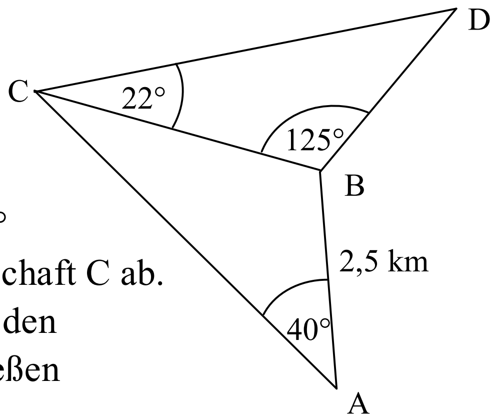
4 8. Das Bild zeigt einen Ausschnitt des Graphen der Funktion $f : x \mapsto a \cdot \sin(bx)$ mit $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$ und $a, b \in \mathbb{R}$.

Bestimmen Sie aus dem Graphen jeweils mit kurzer Begründung je einen möglichen Wert für a und für b.



9. Wie in der nicht maßstäblichen Skizze dargestellt, verbindet ein 2,5 km langes gerades Straßenstück die Ortschaften A und B.

In A zweigt unter einem Winkel von 40° ein gerader, 4,2 km langer Weg zur Ortschaft C ab. Von B aus führen zwei gerade Wege zu den Ortschaften C und D. Diese Wege schließen einen Winkel von 125° ein.



D und C sind durch einen geraden Pfad verbunden, der unter 22° auf den Weg von B nach C trifft.

3 a) Berechnen Sie $\overline{CB}$.
[Ergebnis: $\overline{CB} \approx 2{,}8$ km]

5 b) Berechnen Sie, wie viele Minuten es dauert, wenn man bei einer durchschnittlichen Wandergeschwindigkeit von $4{,}5\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ auf direktem Pfad von C nach D wandert.

5 10. Aus einem kugelförmigen, mit Gas gefüllten Ballon wird so viel Gas abgelassen, dass sich das Volumen des Ballons um 20 % verkleinert. Dabei bleibt die Kugelform des Ballons erhalten.

Berechnen Sie, um wie viel Prozent der Radius des Ballons kleiner wird.

60