Besondere Prüfung 2006 – Mathematik

Donnerstag, 07.09.2006

Arbeitszeit: 120 Minuten Seite 1

Die Prüfung umfasst insgesamt 6 Aufgaben.

1.1 Vereinfachen Sie so weit wie möglich $(x > 0 ;\ y > 0 ;\ n \in \mathbb{N})$:

$$(-0{,}1)^3 \cdot \left(x\,y^{-3n+3}\right)^2 \cdot \left(\frac{y^{-2n}}{10\ x^2}\right)^{-3}$$ 4 BE

1.2 Geben Sie an, für welche $a \in \mathbb{R}$ der folgende Term definiert ist. Fassen Sie zusammen und vereinfachen Sie so weit wie möglich:

$$\left(\frac{2}{2-\sqrt{a}} + \frac{2}{2+\sqrt{a}}\right) \cdot \sqrt{(4-a)^3}$$ 5 BE

2.1 Geben Sie die Definitionsmenge der folgenden Gleichung an. Berechnen Sie die Lösungsmenge:

$$\log_2(2x) - \log_2(x-1) = -1$$ 5 BE

2.2 Berechnen Sie mit Hilfe einer geeigneten Substitution die Lösungsmenge:

$$3^{2x} = 4 - \frac{3}{3^{2x}}$$ 5 BE

3. Im Forschungslabor einer Brauerei wird der Zerfall von Bierschaum untersucht. Man stellt fest, dass bei einer anfänglichen Schaumhöhe von y_0 cm die nach x Minuten noch verbleibende Schaumhöhe y cm durch eine Gleichung der Form $y = y_0 \cdot a^x$ $(x \in \mathbb{R}_0^+;\ a \in \mathbb{R}^+)$ beschrieben werden kann.

Beim Einschenken der Biersorte A ergibt sich die Schaumhöhe $y_0 = 4{,}0$ (in cm).

a) Nach 1,8 Minuten ist der Schaum nur noch halb so hoch. Bestimmen Sie den zugehörigen Wert von a auf 2 Stellen nach dem Komma gerundet.
[Ergebnis: a = 0,68] 3 BE

b) Berechnen Sie, nach welcher Zeit die Schaumhöhe bei der Biersorte A nur noch 1,0 cm beträgt. Geben Sie das Ergebnis in Minuten und Sekunden an. 5 BE

Bei der Biersorte B nimmt die Schaumhöhe in jeder Minute um 20 % ab.

c) Nach 2,5 Minuten beträgt sie 2,0 cm. Berechnen Sie die anfängliche Schaumhöhe y_0 auf mm genau. 3 BE

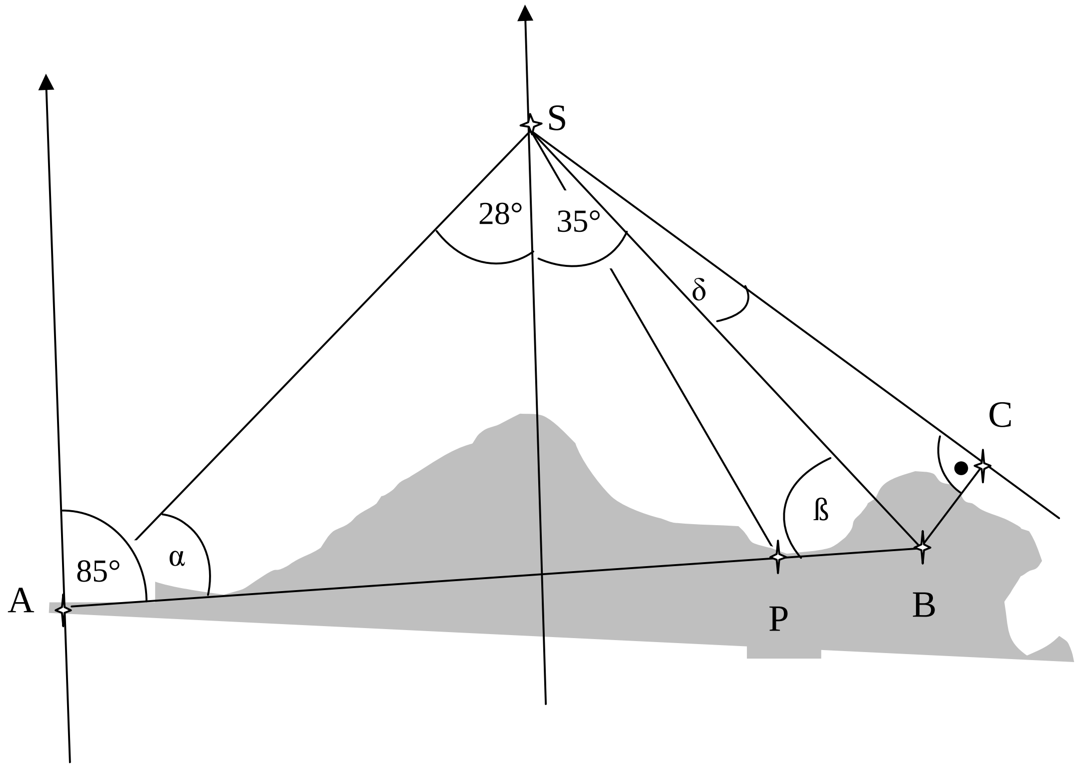
Weiter auf Seite 2!

4. Um den Standort S seines Schiffes auf dem Meer zu bestimmen, peilt der Kapitän die Leuchttürme A und B an.

Die Winkel sind dabei gegen die Nord-Süd-Richtung (Pfeil $\uparrow$) gemessen.

Aus der Karte entnimmt er die Entfernung der beiden Leuchttürme $\overline{AB}$ = 15 km und den Neigungswinkel 85° gegen die Nord-Süd-Richtung (Pfeil $\uparrow$) .

<u>Skizze (nicht maßstabsgetreu):</u>



a) Zeigen Sie, dass der Winkel a = 57° beträgt. 1 BE

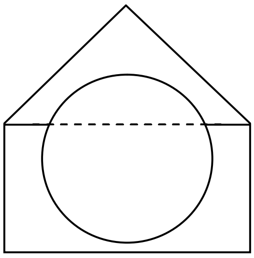
b) Berechnen Sie, wie groß die Entfernung des Schiffes vom Leuchtturm B ist.
$\left[\text{Ergebnis: } \overline{BS} = 14\ km\right]$ 3 BE

c) Eine Person beobachtet vom Punkt P aus, der 3,0 km vom Leuchtturm B entfernt auf [AB] liegt, das Schiff. Berechnen Sie, wie weit das Schiff von P entfernt ist. 3 BE

d) Berechnen Sie, unter welchem Winkel d zur Geraden BS (siehe Skizze) das Schiff weiterfahren muss, damit es im Abstand $\overline{BC}$ = 2,0 km am Leuchtturm B vorbeikommt. 2 BE

Weiter auf Seite 3!

5.

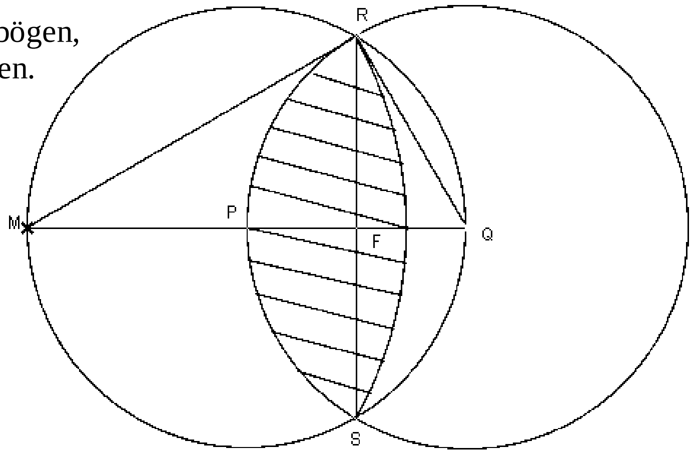


Ein Spielzeughäuschen ist bis auf einen kugelförmigen Hohlraum (Durchmesser 3,0 cm) aus Plastik. Es hat den nebenstehend dargestellten Längsschnitt.
Der Unterbau ist zylinderförmig, das Dach kegelförmig.
Der Zylinderdurchmesser beträgt 4,0 cm.
Zylinder- und Kegelhöhe betragen jeweils 2,0 cm.

a) Berechnen Sie den Rauminhalt des Plastikmaterials, aus dem das Häuschen besteht. 3 BE

b) Das Dach des Häuschens wird mit einer Folie beklebt. Die ganz genau zugeschnittene Folie hat die Form eines Kreissektors. Berechnen Sie den Mittelpunktswinkel und den Flächeninhalt dieses Sektors. Geben Sie die Ergebnisse in sinnvoller Genauigkeit an. 5 BE

6. In der folgenden Figur haben die beiden Kreise um P und Q den gleichen Radius r und verlaufen jeweils durch den Mittelpunkt des anderen Kreises.
Die Kreise schneiden sich in den Punkten R und S.
F ist der Fußpunkt des Lotes von R auf die Strecke $[PQ]$.
PQ schneidet den linken Kreis in M.
M ist der Mittelpunkt eines der Kreisbögen, welche die schraffierte Figur begrenzen.



a) Begründen Sie, dass das Dreieck MQR bei R einen rechten Winkel hat.
Begründen Sie, dass $\overline{FQ} = \frac{r}{2}$ gilt. 2 BE

b) Zeigen Sie, dass das Dreieck PQR gleichseitig ist und dass $\overline{MR} = r\sqrt{3}$ gilt. 3 BE

c) Berechnen Sie den Umfang der schraffierten Figur in Abhängigkeit von r. 3 BE

d) Berechnen Sie den Flächeninhalt der schraffierten Figur in Abhängigkeit von r und fassen Sie zusammen. 5 BE