Mathematik

Beispiel-Abiturprüfung

Prüfungsteile A und B

Bewertungsschlüssel und Lösungshinweise

(nicht für den Prüfling bestimmt)

Die Bewertung der erbrachten Prüfungsleistungen hat sich für jede Aufgabe nach der jeweils am linken Rand der Aufgabenstellung vermerkten, maximal erreichbaren Anzahl von Bewertungseinheiten (BE) zu richten.

Die Lösungshinweise enthalten keine vollständigen Lösungen der Aufgaben. Nicht genannte, aber gleichwertige Lösungswege sind entsprechend zu bewerten.

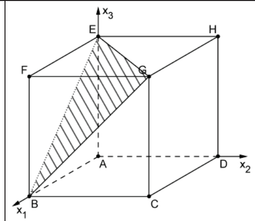
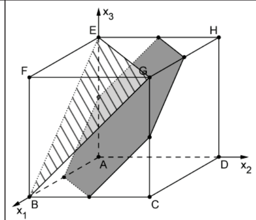
Geometrie

Aufgabengruppe 2

Prüfungsteil A

Aufgabe	BE	Lösungshinweise
1 a	4	$Q'(5\,\vert\,4\,\vert\,-2)$
b	2	z. B.: $j: \vec{X} = \vec{Q} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \lambda \in \mathbb{R}$
2	4	$u = 1$
	10	

Prüfungsteil B

Aufgabe	BE	Lösungshinweise
a	5	
b	4	Volumen der Pyramide: $\frac{1}{6} \cdot 6^3 = 36$ Die Pyramide nimmt etwa 17 % des Würfelvolumens ein.
c	4	Schnittpunkte: $(3\,\vert\,0\,\vert\,0)$, $(0\,\vert\,0\,\vert\,3)$
d	3	
e	4	Eine parallel zu M verlaufende Ebene kann den Würfel in einem Punkt, in einem Dreieck oder in einem Sechseck schneiden. Für $p \in]0;6[$ ist die Schnittfigur ein Sechseck.
	20	

Geometrie

Aufgabengruppe 1

Prüfungsteil A

Aufgabe	BE	Lösungshinweise
1 a	3	z. B.: $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \lambda \in \mathbb{R}$
b	3	Abstand: 3
2	4	z. B.: Man bestimmt zunächst die Koordinaten des Fußpunkts F des Lots durch B auf AC. Die Koordinaten des Punkts D ergeben sich aus $\vec{D} = \vec{B} + 2 \cdot \overrightarrow{BF}$.
	10	

Prüfungsteil B

Aufgabe	BE	Lösungshinweise
1 a	3	F_1 fliegt in Richtung Nordosten. Die Flughöhe von F_2 wird durch die x_3-Koordinate der Geraden g_2 beschrieben, die einen konstanten Wert besitzt.
b	4	Die Größe des Steigungswinkels beträgt etwa 8,0°.
c	5	Die Flugzeuge kollidieren nicht zwingend, da nicht feststeht, dass sie den Schnittpunkt ihrer Flugbahnen gleichzeitig erreichen.
d	2	Der Parameter μ beschreibt im Modell die während des Fluges vergehende Zeit.
e	6	Länge der Flugstrecke: 80 km
	20	

Die von einem Prüfling in den Prüfungsteilen A und B insgesamt erreichten Bewertungseinheiten werden gemäß folgender Tabelle in Notenpunkte umgesetzt:

Intervall	Bewertungseinheiten	Notenpunkte	Notenstufe
15 %	120 - 115 114 - 109 108 - 103	15 14 13	+ 1 1 1 –
15 %	102 - 97 96 - 91 90 - 85	12 11 10	+ 2 2 2 –
15 %	84 - 79 78 - 73 72 - 67	9 8 7	+ 3 3 3 –
15 %	66 - 61 60 - 55 54 - 49	6 5 4	+ 4 4 4 –
20 %	48 - 41 40 - 33 32 - 25	3 2 1	+ 5 5 5 –
20 %	24 - 0	0	6

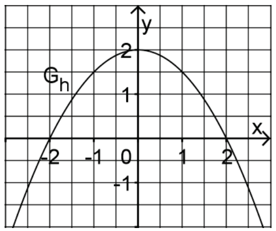
Analysis

Aufgabengruppe 1

Prüfungsteil A

Aufgabe	BE	Lösungshinweise
1	3	$x=\ln 2,\ x=0,\ x=-\sqrt{2},\ x=\sqrt{2}$
2	6	$D=\mathbb{R}^+\setminus\{2\};\ y=-x+1$
3	3	z. B.: $c(x)=\frac{(x-1)^2}{x-3}$
4	3	Term der Stammfunktion: $2\sqrt{x}-5$
5	5	I: $f(x)$, II: $e(x)$ mit $r=1$, III: $g(x)$ mit $s=1$
	20	

Prüfungsteil B

Aufgabe	BE	Lösungshinweise
1 a	3	Nullstellen: $x=-2,\ x=2$ 
b	6	Die Flächeninhalte der Rechtecke lassen sich durch die Funktion $a: x \mapsto -x^3+4x$ mit Definitionsbereich $[0;2]$ beschreiben. $a'(x)=-3x^2+4=0 \Leftrightarrow x=\frac{2}{3}\sqrt{3}$ Da außerdem $a'(x)>0$ für $x<\frac{2}{3}\sqrt{3}$ und $a'(x)<0$ für $x>\frac{2}{3}\sqrt{3}$ gilt, ist $A=a\left(\frac{2}{3}\sqrt{3}\right)=\frac{16}{9}\sqrt{3}$.
c	4	$\int_{-2}^{2} h(x)\,dx=\left[-\frac{1}{6}x^3+2x\right]_{-2}^{2}=\frac{16}{3}$ Das Rechteck nimmt etwa 57,7 % des Flächenstücks ein.
2 a	4	$p'(x)=-\frac{1}{4}e^{-\frac{1}{4}x}<0$ für alle $x\in\mathbb{R}$, d. h. der Graph von p ist in $\mathbb{R}$ streng monoton fallend. $\lim\limits_{x\to-\infty} p(x)=+\infty,\ \lim\limits_{x\to+\infty} p(x)=0$

Stochastik

Aufgabengruppe 2

Prüfungsteil A

Aufgabe	BE	Lösungshinweise
a	2	Ein zufällig ausgewählter Angestellter gilt nicht als aufgeschlossen oder hat keine nach rechts geneigte Handschrift.
b	4	z. B.: $\begin{array}{c\|c\|c\|c} & R & \overline{R} & \\ \hline A & 0{,}42 & 0{,}28 & 0{,}7 \\ \overline{A} & 0{,}12 & 0{,}18 & 0{,}3 \\ \hline & 0{,}54 & 0{,}46 & 1 \end{array}$
c	2	$P(A)\cdot P(R)=0{,}7\cdot 0{,}54\neq 0{,}42=P(A\cap R)$
d	2	geänderter Wert: 60 %
	10	

Prüfungsteil B

Aufgabe	BE	Lösungshinweise
1 a	5	$\binom{12}{9}\cdot 0{,}5^{12}+\binom{12}{10}\cdot 0{,}5^{12}+\binom{12}{11}\cdot 0{,}5^{12}+\binom{12}{12}\cdot 0{,}5^{12}\approx 7{,}3\,\%$
b	3	$P_{0,5}^{30}(X>20)\approx 2{,}1\%\leq 3\,\%$
c	3	$P_{p}^{30}(X>20)\geq 0{,}9$ Die Wahrscheinlichkeit dafür, sich bei einer Schriftprobe richtig zu entscheiden, muss für den Bewerber mindestens 80 % betragen.
d	2	Nullhypothese: „Die Wahrscheinlichkeit dafür, sich bei einer Schriftprobe richtig zu entscheiden, beträgt für einen Bewerber höchstens 50 %.“ Ablehnungsbereich: $\{21;...;30\}$
2 a	3	$P_{0,25}^{20}(X<5)\approx 41{,}5\,\%$
b	4	Die Aussage ist falsch. Begründung z. B. durch Angabe eines Gegenbeispiels
	20	

Stochastik

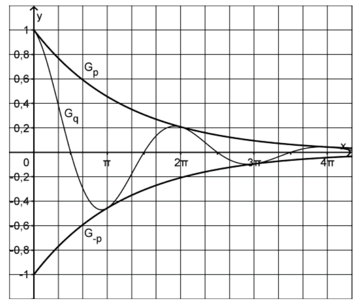
Aufgabengruppe 1

Prüfungsteil A

Aufgabe	BE	Lösungshinweise
1	2	Die Terme I und V beschreiben die Wahrscheinlichkeit dafür, dass genau fünf der ausgewählten Personen Linkshänder sind.
2 a	3	—
b	2	$\frac{\frac{3}{9}\cdot\frac{2}{8}}{\frac{5}{18}}=\frac{3}{10}$
3	3	$\frac{9}{\binom{10}{2}}=20\,\%$
	10	

Prüfungsteil B

Aufgabe	BE	Lösungshinweise
1 a	2	$1-44\,\%=56\,\%$
b	2	$\frac{1}{2}\cdot(44\,\%+32\,\%)=38\,\%$
c	3	z. B.: Die Zeitungsmeldung kann mit der Abbildung unter der Voraussetzung in Einklang stehen, dass in der Bevölkerung die Anzahl der 40- bis 44-jährigen Männer größer ist als die der 25- bis 29-jährigen.
2	4	$1-0{,}7^2\cdot 0{,}78\cdot 0{,}89\approx 66{,}0\,\%$
3 a	4	$P(A)\approx 26{,}7\,\%$, $P(B)\approx 85{,}0\,\%$
b	5	$P_{0,3}^{10}(X\geq k)\leq 0{,}05$; Ablehnungsbereich: $\{6;\ldots;10\}$ oder: $P_{0,3}^{10}(X\geq 5)\approx 15{,}0\,\%$ Damit wird die Annahme des Skeptikers auf einem Signifikanzniveau von 5 % durch das Ergebnis der Befragung nicht gestützt.
	20	

b	4	$p(0)=1$ $p(\pi)\approx 0{,}46$ $p(2\pi)\approx 0{,}21$ $p(3\pi)\approx 0{,}09$ $p(4\pi)\approx 0{,}04$ 
c	3	Der Faktor $e^{-\frac{1}{4}x}$ verändert die Amplitude der Kosinusfunktion so, dass der Graph von q zwischen den Graphen der Funktionen p und $-p$ verläuft. Die Nullstellen von q stimmen mit denen der Kosinusfunktion überein, die Punkte $(n\pi\,\vert\,q(n\pi))$ liegen jeweils auf einem der Graphen von p und $-p$.
d	6	$q'(x)=-e^{-\frac{1}{4}x}\cdot\left(\frac{1}{4}\cos x+\sin x\right)=0 \Leftrightarrow \tan x=-0{,}25$ Für die Extremstellen der Kosinusfunktion gilt $x=n\pi$ mit $n\in\mathbb{Z}$ und damit $\tan x=0$.
e	4	**α)** Die Aussage ist falsch, da $\lim\limits_{x\to-\infty}p(x)=+\infty$ gilt und die Kosinusfunktion zwischen -1 und 1 oszilliert. **β)** Die Aussage ist richtig, da $\lim\limits_{x\to+\infty}p(x)=0$ und $\vert\cos x\vert\leq 1$ für alle $x\in\mathbb{R}$ gilt.
f	3	$\int_0^{2\pi}q(x)\,dx=Q(2\pi)-Q(0)\approx 0{,}19>0$ Der Graph von q schließt für $x\in[0;2\pi]$ mit den Koordinatenachsen und der Geraden $x=2\pi$ Flächenstücke ein. Der Gesamtinhalt der beiden Flächenstücke, die oberhalb der x-Achse liegen, ist größer als der Inhalt des Flächenstücks, das unterhalb der x-Achse liegt.
g	3	z. B.: $a=\frac{3}{2}\pi$ Begründung: Der Graph von q schließt für jeweils zwei benachbarte positive Nullstellen von q mit dem zwischen den Nullstellen liegenden Teil der x-Achse ein Flächenstück ein. Der Inhalt dieser Flächenstücke nimmt in positiver x-Richtung ab. Da die Aufgabenstellung die Existenz geeigneter Werte von a vorgibt, muss der angegebene Wert von a die Ungleichung erfüllen.
	40	

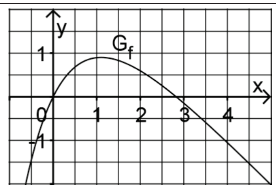
Analysis

Aufgabengruppe 2

Prüfungsteil A

Aufgabe	BE	Lösungshinweise
1	5	p: $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, keine Nullstelle q: $[1; +\infty[$, Nullstelle $x = 1$ r: $]1; +\infty[$, Nullstelle $x = 2$
2	5	$y = -x - 0{,}25$
3 a	3	Der Graph von t schließt mit der x-Achse und den Geraden $x = -a$ und $x = a$ Flächenstücke ein. Je zwei dieser Flächenstücke sind wegen der Punktsymmetrie inhaltsgleich, gehen jedoch in die Berechnung des Integrals mit unterschiedlichen Vorzeichen ein.
b	4	z. B.: $t(x) = x$, $\int_{-a}^{a} x\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_{-a}^{a} = \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}\cdot(-a)^2 = 0$
4	3	Term III nähert den Term von u für große Werte von x am besten. Die Antwort kann z. B. anhand der Differenzterme plausibel gemacht werden.
	20	

Prüfungsteil B

Aufgabe	BE	Lösungshinweise
1 a	2	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$
b	5	z. B.: $f'(x) = 3e^{-x} - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \ln 3$ Da außerdem $f'(x) > 0$ für $x < \ln 3$ und $f'(x) < 0$ für $x > \ln 3$ gilt, besitzt G_f ausschließlich den Hochpunkt $(\ln 3 \mid 2 - \ln 3)$.
c	3	$f(0) = 0$ $f(3) \approx -0{,}15$ 
d	3	—
e	5	$\int_0^a f(t)\,dt = \left[3t + 3e^{-t} - \frac{1}{2}t^2\right]_0^a \approx 1{,}7$
f	4	Der Graph von F besitzt im Punkt $(a \mid F(a))$ einen Hochpunkt (Begründung z. B. mithilfe einer Betrachtung von G_f) und berührt dort die x-Achse (Hochpunkt und Übereinstimmung der Integrationsgrenzen).
g	1	Das Ergebnis der Aufgabe 1e stimmt bis auf das Vorzeichen mit dem Funktionswert von F an der Stelle $x = 0$ überein.
2 a	3	—
b	6	z. B.: $I_T'(x) = 0 \Leftrightarrow f\left(\frac{x}{T}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{T} = a$ Da außerdem $I_T'(x) > 0$ für $x < a \cdot T$ und $I_T'(x) < 0$ für $x > a \cdot T$ gilt, besitzt die Funktion I_T bei $x = a \cdot T$ ihr einziges Maximum.
c	2	Näherungswert: $6{,}0 \cdot 10^3\,K$
d	3	I: 4000 K, II: 6000 K, III: 8000 K Begründung: Der Hochpunkt des Graphen von I_T verschiebt sich für zunehmende Werte von T in positive x-Richtung, da die x-Koordinate des Hochpunkts direkt proportional zu T ist.
e	3	z. B.: $I_T(a \cdot T) = \frac{a^3 \cdot T^3}{e^a - 1}$; $I_T(a \cdot T)$ ist also direkt proportional zu T^3
	40	