Mathematik

Beispiel-Abiturprüfung

Prüfungsteile A und B (CAS)

Bewertungsschlüssel und Lösungshinweise

(nicht für den Prüfling bestimmt)

Die Bewertung der erbrachten Prüfungsleistungen hat sich für jede Aufgabe nach der jeweils am linken Rand der Aufgabenstellung vermerkten, maximal erreichbaren Anzahl von Bewertungseinheiten (BE) zu richten.

Die Lösungshinweise enthalten keine vollständigen Lösungen der Aufgaben. Nicht genannte, aber gleichwertige Lösungswege sind entsprechend zu bewerten.

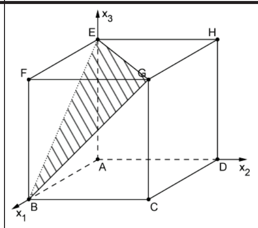
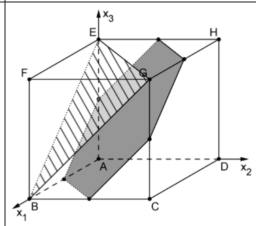
Geometrie

Aufgabengruppe 2

Prüfungsteil A

Aufgabe	BE	Lösungshinweise
1 a	4	$Q'(5\|4\|-2)$
b	2	z. B.: $j: \vec{X} = \vec{Q} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \lambda \in \mathbb{R}$
2	4	$u = 1$
	10	

Prüfungsteil B

Aufgabe	BE	Lösungshinweise
a	5	
b	4	Volumen der Pyramide: $\frac{1}{6} \cdot 6^3 = 36$ Die Pyramide nimmt etwa 17 % des Würfelvolumens ein.
c	4	Schnittpunkte: $(3\|0\|0)$, $(0\|0\|3)$
d	3	
e	4	Eine parallel zu M verlaufende Ebene kann den Würfel in einem Punkt, in einem Dreieck oder in einem Sechseck schneiden. Für $p \in \,]0;6[$ ist die Schnittfigur ein Sechseck.
	20	

Geometrie

Aufgabengruppe 1

Prüfungsteil A

Aufgabe	BE	Lösungshinweise
1 a	3	z. B.: $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \lambda \in \mathbb{R}$
b	3	Abstand: 3
2	4	z. B.: Man bestimmt zunächst die Koordinaten des Fußpunkts F des Lots durch B auf AC. Die Koordinaten des Punkts D ergeben sich aus $\vec{D} = \vec{B} + 2 \cdot \overrightarrow{BF}$.
	10	

Prüfungsteil B

Aufgabe	BE	Lösungshinweise
1 a	3	F_1 fliegt in Richtung Nordosten. Die Flughöhe von F_2 wird durch die x_3-Koordinate der Geraden g_2 beschrieben, die einen konstanten Wert besitzt.
b	4	Die Größe des Steigungswinkels beträgt etwa 8,0°.
c	4	Die Flugzeuge kollidieren nicht zwingend, da nicht feststeht, dass sie den Schnittpunkt ihrer Flugbahnen gleichzeitig erreichen.
d	5	$d(t) = \sqrt{251t^2 - 220t + 5900}$ Da $d(t) > 0$ für alle $t \in \mathbb{R}_0^+$, kommt es nicht zu einer Kollision.
e	4	Länge der Flugstrecke: 80 km
	20	

Die von einem Prüfling in den Prüfungsteilen A und B insgesamt erreichten Bewertungseinheiten werden gemäß folgender Tabelle in Notenpunkte umgesetzt:

Intervall	Bewertungseinheiten	Notenpunkte	Notenstufe
15 %	120 - 115	15	+ 1
	114 - 109	14	1
	108 - 103	13	1 –
15 %	102 - 97	12	+ 2
	96 - 91	11	2
	90 - 85	10	2 –
15 %	84 - 79	9	+ 3
	78 - 73	8	3
	72 - 67	7	3 –
15 %	66 - 61	6	+ 4
	60 - 55	5	4
	54 - 49	4	4 –
20 %	48 - 41	3	+ 5
	40 - 33	2	5
	32 - 25	1	5 –
20 %	24 - 0	0	6

Analysis

Aufgabengruppe 1

Prüfungsteil A

Aufgabe	BE	Lösungshinweise
1	3	$x=\ln 2,\ x=0,\ x=-\sqrt{2},\ x=\sqrt{2}$
2	6	$D=\mathbb{R}^+\setminus\{2\};\ y=-x+1$
3	3	z. B.: $c(x)=\frac{(x-1)^2}{x-3}$
4	3	Term der Stammfunktion: $2\sqrt{x}-5$
5	5	I: $f(x)$, II: $e(x)$ mit $r=1$, III: $g(x)$ mit $s=1$
	20	

Prüfungsteil B

Aufgabe	BE	Lösungshinweise
1 a	2	Alle Graphen der Schar • sind nach unten geöffnete Parabeln, deren Scheitel jeweils auf der y-Achse liegt; • schneiden die x-Achse bei $x=-2$ und $x=2$.
b	5	Die Flächeninhalte der Rechtecke lassen sich durch die Funktion $a_k: x\mapsto -2kx^3+8kx$ mit Definitionsbereich $[0;2]$ beschreiben. $a_k'(x)=-6kx^2+8k=0 \Leftrightarrow x=\frac{2}{3}\sqrt{3}$ Da außerdem $a_k'(x)>0$ für $x<\frac{2}{3}\sqrt{3}$ und $a_k'(x)<0$ für $x>\frac{2}{3}\sqrt{3}$ gilt, ist $A_k=a_k\left(\frac{2}{3}\sqrt{3}\right)=\frac{32k}{9}\sqrt{3}$.
c	3	$\int_{-2}^{2} h_k(x)\,dx=\frac{32k}{3}$ Anteil des Rechtecks: $\frac{1}{3}\sqrt{3}\approx 57{,}7\,\%$
d	1	Inhalt des Flächenstücks: $\frac{16}{3}$
e	3	Für $k_1,k_2\in\mathbb{R}^+$ gilt: $\int_{-2}^{2}\left(h_{k_2}(x)-h_{k_1}(x)\right)dx=32 \Leftrightarrow k_2=k_1+3$ Damit z. B.: $k_1=1$ und $k_2=4$

Stochastik

Aufgabengruppe 2

Prüfungsteil A

Aufgabe	BE	Lösungshinweise
a	2	Ein zufällig ausgewählter Angestellter gilt nicht als aufgeschlossen oder hat keine nach rechts geneigte Handschrift.
b	4	z. B.: $\begin{array}{c\|cc\|c} & R & \overline{R} & \\ \hline A & 0{,}42 & 0{,}28 & 0{,}7 \\ \overline{A} & 0{,}12 & 0{,}18 & 0{,}3 \\ \hline & 0{,}54 & 0{,}46 & 1 \end{array}$
c	2	$P(A)\cdot P(R)=0{,}7\cdot 0{,}54\neq 0{,}42=P(A\cap R)$
d	2	geänderter Wert: 60 %
	10	

Prüfungsteil B

Aufgabe	BE	Lösungshinweise
1 a	3	$P_{0,5}^{12}(X>8)\approx 7{,}3\,\%$
b	4	$P_{0,5}^{n}\left(X>\frac{2}{3}n\right)\leq 0{,}03$ Einem Bewerber müssen mindestens 27 Schriftproben vorgelegt werden.
c	4	$P_p^{30}(X>20)\geq 0{,}9$ Die Wahrscheinlichkeit dafür, sich bei einer Schriftprobe richtig zu entscheiden, muss für den Bewerber mindestens 79 % betragen.
d	2	Nullhypothese: „Die Wahrscheinlichkeit dafür, sich bei einer Schriftprobe richtig zu entscheiden, beträgt für einen Bewerber höchstens 50 %.“ Ablehnungsbereich: $\{21;\ldots;30\}$
2 a	3	$P_{0,25}^{20}(X<5)\approx 41{,}5\,\%$
b	4	Die Aussage ist falsch. Begründung z. B. durch Angabe eines Gegenbeispiels
	20	

Stochastik

Aufgabengruppe 1

Prüfungsteil A

Aufgabe	BE	Lösungshinweise
1	2	Die Terme I und V beschreiben die Wahrscheinlichkeit dafür, dass genau fünf der ausgewählten Personen Linkshänder sind.
2 a	3	—
b	2	$\frac{\frac{3}{9}\cdot\frac{2}{8}}{\frac{5}{18}}=\frac{3}{10}$
3	3	$\frac{9}{\binom{10}{2}}=20\,\%$
	10	

Prüfungsteil B

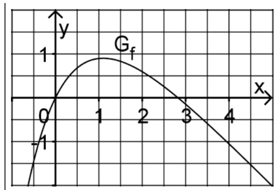
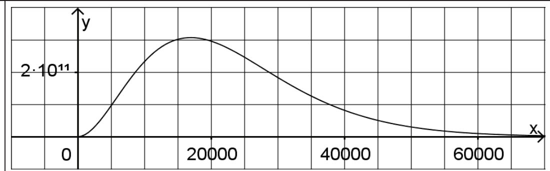
Aufgabe	BE	Lösungshinweise
1 a	2	$1-44\,\%=56\,\%$
b	2	$\frac{1}{2}\cdot(44\,\%+32\,\%)=38\,\%$
c	3	z. B.: Die Zeitungsmeldung kann mit der Abbildung unter der Voraussetzung in Einklang stehen, dass in der Bevölkerung die Anzahl der 40- bis 44-jährigen Männer größer ist als die der 25- bis 29-jährigen.
2	4	$1-0{,}7^2\cdot 0{,}78\cdot 0{,}89\approx 66{,}0\,\%$
3 a	2	$P_{0,3}^{10}(X=3)\approx 26{,}7\,\%$
b	2	z. B.: Unter den ausgewählten Frauen sind höchstens vier Raucherinnen.
c	5	$P_{0,3}^{10}(X\geq k)\leq 0{,}05$; Ablehnungsbereich: $\{6;\ldots;10\}$ oder: $P_{0,3}^{10}(X\geq 5)\approx 15{,}0\,\%$ Damit wird die Annahme des Skeptikers auf einem Signifikanzniveau von 5 % durch das Ergebnis der Befragung nicht gestützt.
	20	

f	2	Für $k_1,k_2\in\mathbb{R}^+$ gilt: $\int_{-2}^{2}\left(h_{k_2}(x)-h_{k_1}(x)\right)dx=\frac{32}{3}\cdot(k_2-k_1)$ Der Wert des Terms k_2-k_1 und damit auch der Wert des Terms $\frac{32}{3}\cdot(k_2-k_1)$ kann jede positive reelle Zahl annehmen.
g	4	Der Umfang des Flächenstücks beträgt etwa 15,2.
2 a	3	Der Faktor $e^{-\frac{1}{4}x}$ verändert die Amplitude der Kosinusfunktion so, dass der Graph von q zwischen dem Graphen von p und dem an der x-Achse gespiegelten Graphen von p verläuft. Die Nullstellen von q stimmen mit denen der Kosinusfunktion überein.
b	5	$q'(x)=-e^{-\frac{1}{4}x}\cdot\left(\frac{1}{4}\cos x+\sin x\right)=0\Leftrightarrow\tan x=-0{,}25$ Für die Extremstellen der Kosinusfunktion gilt $x=n\pi$ mit $n\in\mathbb{Z}$ und damit $\tan x=0$.
c	4	$x_0=8\cdot\ln 10$ Es gilt $\lvert\cos x\rvert\leq 1$ für alle $x\in\mathbb{R}$ und damit $\lvert q(x)\rvert\leq\lvert p(x)\rvert<0{,}01$ für alle $x>x_0$.
d	2	$x=2n\pi$, $y=e^{-\frac{1}{2}n\pi}$ mit $n\in\mathbb{Z}$
e	3	$c\approx 0{,}48$
f	3	$u=\frac{\pi}{2}$ und $v=\frac{3\pi}{2}$ Begründung: Für $x\in[0;2\pi]$ hat q nur die Nullstellen $x=\frac{\pi}{2}$ sowie $x=\frac{3\pi}{2}$ und nur zwischen diesen Nullstellen negative Funktionswerte.
	40	

Analysis
Aufgabengruppe 2
Prüfungsteil A

Aufgabe	BE	Lösungshinweise
1	5	p: $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, keine Nullstelle q: $[1;+\infty[$, Nullstelle $x=1$ r: $]1;+\infty[$, Nullstelle $x=2$
2	5	$y=-x-0{,}25$
3 a	3	Der Graph von t schließt mit der x-Achse und den Geraden $x=-a$ und $x=a$ Flächenstücke ein. Je zwei dieser Flächenstücke sind wegen der Punktsymmetrie inhaltsgleich, gehen jedoch in die Berechnung des Integrals mit unterschiedlichen Vorzeichen ein.
b	4	z. B.: $t(x)=x$, $\int_{-a}^{a} x\,dx=\left[\frac{1}{2}x^2\right]_{-a}^{a}=\frac{1}{2}a^2-\frac{1}{2}\cdot(-a)^2=0$
4	3	Term III nähert den Term von u für große Werte von x am besten. Die Antwort kann z. B. anhand der Differenzterme plausibel gemacht werden.
	20	

Prüfungsteil B

Aufgabe	BE	Lösungshinweise
1 a	3	z. B.: $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=\ln 3$ Da außerdem $f''(\ln 3)<0$ gilt, besitzt G_f ausschließlich den Hochpunkt $(\ln 3 \mid 2-\ln 3)$.
b	3	Begründung z. B. mithilfe der Lage des Hochpunkts und des Krümmungsverhaltens $a \approx 2{,}821$
c	2	Die Gerade mit der Gleichung $y=3-x$ ist für $x \to +\infty$ schräge Asymptote von G_f.
d	2	
e	4	$b=a\approx 2{,}821$ (Übereinstimmung der Integrationsgrenzen) $b\approx -1{,}002$ (Flächenbilanz) keine weiteren Werte wegen z. B. Monotonie
f	2	Der Graph von F_b besitzt im Punkt $(a \mid F_b(a))$ einen Hochpunkt. Begründung z. B. mithilfe einer Betrachtung von G_f
2 a	4	$\lim\limits_{x\to 0} I_T(x)=0$, $\lim\limits_{x\to +\infty} I_T(x)=0$
b	3	z. B.: $I'_T(x)=0 \Leftrightarrow f\left(\frac{x}{T}\right)=0 \Leftrightarrow x=a\cdot T$ Da außerdem $I'_T(x)>0$ für $x<a\cdot T$ und $I'_T(x)<0$ für $x>a\cdot T$ gilt, besitzt die Funktion I_T bei $x=a\cdot T$ ihr einziges Maximum.
c	4	
d	4	Unsere Sonne strahlt etwa 43 % ihrer gesamten Strahlungsleistung im Bereich des sichtbaren Lichts ab.
e	3	z. B.: $I_T(a\cdot T)=\frac{a^3\cdot T^3}{e^a-1}$; $I_T(a\cdot T)$ ist also direkt proportional zu T^3
f	3	Der Hochpunkt verschiebt sich in positive x-Richtung (x-Koordinate ist direkt proportional zu T) und in positive y-Richtung (y-Koordinate ist direkt proportional zu T^3).
g	3	Der Graph von I_T schließt für $19\cdot 10^3 \le x \le 36\cdot 10^3$ mit der x-Achse ein Flächenstück ein. Der Anteil dieses Flächenstücks an dem gesamten Flächenstück, das der Graph von I_T mit der x-Achse einschließt, ist für $T=6{,}0\cdot 10^3$ deutlich größer als für $T=4{,}0\cdot 10^3$ und für $T=8{,}0\cdot 10^3$.
	40	