Mathematik

Beispiel-Abiturprüfung

Prüfungsteil B (CAS)

Arbeitszeit: 180 Minuten

Bei der Bearbeitung der Aufgaben dürfen als Hilfsmittel verwendet werden

- die vom Staatsministerium genehmigte Merkhilfe für das Fach Mathematik,
- eine der vom Staatsministerium zugelassenen stochastischen Tabellen,
- eine der vom Staatsministerium für Leistungserhebungen zugelassenen naturwissenschaftlichen Formelsammlungen,
- ein Taschenrechner, der hinsichtlich seiner Funktionalität den vom Staatsministerium getroffenen Regelungen entspricht,
- **ein Computeralgebrasystem, das den vom Staatsministerium getroffenen Regelungen entspricht.**

Zu den Themengebieten Analysis, Stochastik und Geometrie wählt der Fachausschuss jeweils eine Aufgabengruppe zur Bearbeitung aus. **Die zu einer Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil B dürfen nur in Verbindung mit den zur selben Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil A bearbeitet werden.**

____

Name des Prüflings

Das Geheft mit den Aufgabenstellungen ist abzugeben.

Analysis

Aufgabengruppe 1

BE

1 Gegeben ist die Schar der Funktionen $h_k : x \mapsto k \cdot (4 - x^2)$ mit $k \in \mathbb{R}^+$ und Definitionsbereich $\mathbb{R}$. Der Graph von h_k wird mit G_k bezeichnet.

2 **a)** Beschreiben Sie die Gemeinsamkeiten aller Graphen der Schar.

5 **b)** Dem Flächenstück, das G_k mit der x-Achse vollständig einschließt, werden Rechtecke so einbeschrieben, dass jeweils eine Seite des Rechtecks auf der x-Achse liegt. Bestimmen Sie einen Term für den größtmöglichen Flächeninhalt A_k eines solchen Rechtecks in Abhängigkeit von k.

(Ergebnis: $A_k = \frac{32k}{9}\sqrt{3}$)

3 **c)** Weisen Sie nach, dass das Rechteck mit dem Flächeninhalt A_k einen von k unabhängigen Anteil am Inhalt des Flächenstücks einnimmt, das G_k mit der x-Achse vollständig einschließt. Geben Sie dieses Verhältnis in Prozent an.

Jeweils zwei Graphen der Schar schließen oberhalb der x-Achse ein sichelförmiges Flächenstück ein.

1 **d)** Bestimmen Sie den Inhalt dieses Flächenstücks für $G_{\frac{1}{2}}$ und G_1.

3 **e)** Ermitteln Sie zwei Werte des Parameters k so, dass die zugehörigen Graphen der Schar ein Flächenstück mit dem Inhalt 32 einschließen.

2 **f)** Zeigen Sie, dass der Inhalt des von zwei Graphen der Schar eingeschlossenen Flächenstücks jede positive reelle Zahl annehmen kann.

4 **g)** Ist ein Kurvenstück Graph einer in $[a;b]$ mit $a,b \in \mathbb{R}$ definierten Funktion f, so gilt für die Länge s dieses Kurvenstücks:

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\,dx$$

Berechnen Sie den Umfang des sichelförmigen Flächenstücks, das von $G_{\frac{1}{2}}$ und G_1 eingeschlossen wird.

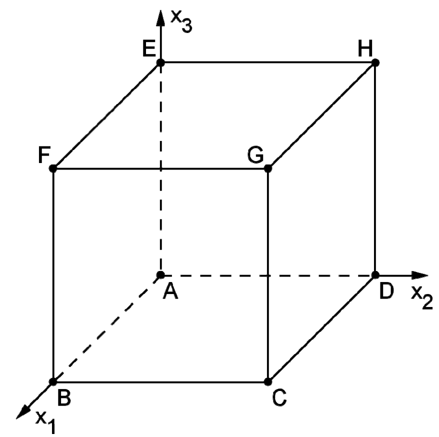
(Fortsetzung nächste Seite)

Geometrie

Aufgabengruppe 2

BE

Die Abbildung zeigt einen Würfel der Kantenlänge 6. Die Koordinaten der Eckpunkte $A(0|0|0)$, $D(0|6|0)$ und $G(6|6|6)$ sind gegeben.



5 **a)** Die Punkte B, E und G liegen in einer Ebene L. Bestimmen Sie eine Gleichung von L in Normalenform. Zeichnen Sie die Figur, in der die Ebene L den Würfel schneidet, in die Abbildung ein.

(mögliches Ergebnis: $L : x_1 - x_2 + x_3 = 6$)

4 **b)** Der Würfel wird entlang der Ebene L geteilt. Berechnen Sie das Volumen der entstehenden Pyramide. Geben Sie an, wie viel Prozent des Würfelvolumens die Pyramide einnimmt.

Die Ebene $M : x_1 - x_2 + x_3 = 3$ schneidet den Würfel in einem regulären Sechseck.

4 **c)** Begründen Sie, dass M parallel zu L ist. Geben Sie die Schnittpunkte von M mit der x_1-Achse sowie mit der x_3-Achse an und weisen Sie nach, dass M den Mittelpunkt der Strecke $[BC]$ enthält.

3 **d)** Zeichnen Sie die sechs Punkte, in denen M die Kanten des Würfels schneidet, sowie die sechseckige Schnittfigur in die Abbildung ein.

4 **e)** Jede Ebene, die parallel zu M verläuft, wird durch eine Gleichung der Form $x_1 - x_2 + x_3 = p$ mit $p \in \mathbb{R}$ beschrieben. Nennen Sie die Arten der Figuren, in denen eine solche Ebene den Würfel schneiden kann, und geben Sie die Menge aller Werte von p an, für die die Schnittfigur ein Sechseck ist.

20

Geometrie

Aufgabengruppe 1

BE

Eine flache Landschaft, in der sich ein Flughafen befindet, lässt sich modellhaft durch die x_1x_2-Ebene eines kartesischen Koordinatensystems beschreiben. Die x_1-Achse zeigt in Richtung Osten, die x_2-Achse in Richtung Norden; eine Längeneinheit im Modell entspricht 1 km in der Landschaft.

Ein Flugzeug F_1 steigt unmittelbar nach dem Abheben von der Startbahn geradlinig auf – im Modell vom Punkt $P(-10\,|\,0\,|\,0)$ aus entlang der Geraden

$$g_1: \vec{X} = \vec{P} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix},\ \lambda \in \mathbb{R}.$$

Die Flugbahn eines Flugzeugs F_2 verläuft im Modell entlang der Geraden

$$g_2: \vec{X} = \begin{pmatrix} 40 \\ 50 \\ 10 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ -10 \\ 0 \end{pmatrix},\ \mu \in \mathbb{R}.$$

3 **a)** Geben Sie die Himmelsrichtung an, in der F_1 fliegt, und begründen Sie, dass F_2 eine konstante Flughöhe hält.

4 **b)** Berechnen Sie die Größe des Steigungswinkels der Flugbahn von F_1 gegen die Horizontale.

4 **c)** Bestätigen Sie rechnerisch, dass sich die Flugbahnen der beiden Flugzeuge senkrecht schneiden. Begründen Sie, dass die Flugzeuge dennoch – auch bei unveränderten Flugbahnen – nicht zwingend kollidieren.

5 **d)** Die Richtungsvektoren von g_1 und g_2 beschreiben im Modell die konstanten Geschwindigkeiten der Flugzeuge F_1 bzw. F_2 in $\frac{\text{km}}{\text{min}}$. Zum Zeitpunkt des Abhebens von F_1 befindet sich F_2 im Punkt $Q(60\,|\,30\,|\,10)$. Geben Sie einen Term $d(t)$ an, der den Abstand der Flugzeuge in Abhängigkeit von der seit dem Abheben von F_1 vergangenen Zeit t in Minuten beschreibt. Begründen Sie, dass es – für als punktförmig angenommene Flugzeuge – tatsächlich nicht zu einer Kollision kommt.

4 **e)** Eine Radarstation, deren Position im Modell durch den Punkt $R(20\,|\,30\,|\,0)$ veranschaulicht wird, erfasst alle Objekte im Luftraum bis zu einer Entfernung von 50 km. Berechnen Sie die Länge der Flugstrecke von F_2 in dem vom Radar erfassten Bereich.

20

2 Gegeben sind die in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen $p: x \mapsto e^{-\frac{1}{4}x}$ und $q: x \mapsto e^{-\frac{1}{4}x} \cdot \cos x$.

3 **a)** Der Funktionsterm von q entsteht aus dem Term der in $\mathbb{R}$ definierten Kosinusfunktion $x \mapsto \cos x$ durch Multiplikation mit $p(x)$. Beschreiben Sie, wie sich der Graph von q aufgrund dieser Multiplikation vom Graphen der Kosinusfunktion unterscheidet. Gehen Sie dabei auch auf die Nullstellen von q ein.

5 **b)** Geben Sie den Term $q'(x)$ der ersten Ableitung von q an und weisen Sie für die Funktion q nach, dass für die Extremstellen $\tan x = -0{,}25$ gilt. Zeigen Sie damit, dass die Extremstellen von q nicht mit den Extremstellen der Kosinusfunktion übereinstimmen.

4 **c)** Bestimmen Sie einen möglichst kleinen Wert $x_0 \in \mathbb{R}$ so, dass für alle $x > x_0$ die Ungleichung $0 < p(x) < 0{,}01$ gilt. Begründen Sie, dass für alle $x > x_0$ auch $|q(x)| < 0{,}01$ gilt.

2 **d)** Geben Sie die Koordinaten aller gemeinsamen Punkte der Graphen von p und q an.

3 **e)** Sei d die kleinste positive Nullstelle von q. Der Graph von q und die Koordinatenachsen schließen für $0 \le x \le d$ eine Fläche ein. Diese Fläche soll durch die Gerade mit der Gleichung $x = c$ mit $c \in \mathbb{R}$ in zwei inhaltsgleiche Teilflächen zerlegt werden. Bestimmen Sie den passenden Wert von c auf zwei Dezimalen genau.

3 **f)** Geben Sie diejenigen x-Werte u und v mit $0 \le u \le v \le 2\pi$ an, für die das Integral $\int_u^v q(x)\,dx$ den kleinsten Wert annimmt. Begründen Sie Ihre Antwort.

40

Analysis

Aufgabengruppe 2

BE

1 Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $f: x \mapsto 3 \cdot \left(1 - e^{-x}\right) - x$. Der Graph von f wird mit G_f bezeichnet.

3 **a)** Zeigen Sie, dass G_f genau einen Hochpunkt besitzt, und geben Sie dessen Koordinaten an.

3 **b)** Begründen Sie, dass f genau zwei Nullstellen besitzt, und geben Sie die positive Nullstelle a von f auf drei Dezimalen genau an.

2 **c)** Es gilt $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(f(x) - (3 - x)\right) = 0$. Beschreiben Sie die Bedeutung dieses Grenzwerts für G_f.

2 **d)** Skizzieren Sie G_f unter Berücksichtigung der bisherigen Ergebnisse in einem Koordinatensystem.

Betrachtet wird nun die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $F_b: x \mapsto \int_b^x f(t)\,dt$ mit $b \in \mathbb{R}$.

4 **e)** Begründen Sie, dass es genau zwei Werte von b gibt, für die F_b bei $x = a$ eine Nullstelle besitzt, und geben Sie diese beiden Werte von b auf drei Dezimalen genau an.

2 **f)** Geben Sie an, welche besondere Eigenschaft der Graph von F_b – unabhängig von b – im Punkt $\left(a \mid F_b(a)\right)$ hat; begründen Sie Ihre Antwort.

2 Jeder Körper sendet elektromagnetische Strahlung unterschiedlicher Frequenzen aus; die Intensität der Strahlung hängt von der Frequenz der Strahlung ab. Im Idealfall lässt sich diese Intensität nach Max Planck durch die Schar der in $\mathbb{R}^+$ definierten Funktionen

$$I_T: x \mapsto \frac{x^3}{e^{\frac{x}{T}} - 1}$$

mit $T \in \mathbb{R}^+$ beschreiben. Dabei ist x – bis auf eine Konstante – die Frequenz der Strahlung und T die Temperatur des Körpers in Kelvin.

Bei der Bearbeitung der folgenden Aufgaben soll auf die Verwendung von Einheiten verzichtet werden.

(Fortsetzung nächste Seite)

2 Ein Unternehmen lässt im Rahmen von Bewerbungsverfahren graphologische Gutachten zu den Personen erstellen, die sich um eine Stelle bewerben. Im Mittel werden 25 % der Bewerber aufgrund ihres graphologischen Gutachtens abgewiesen. Für eine Stelle bewerben sich 20 Personen.

3 **a)** Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Anzahl derjenigen Bewerber, die aufgrund ihres graphologischen Gutachtens abgelehnt werden, kleiner als die dafür im Mittel zu erwartende Anzahl ist.

4 **b)** Kann die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Zufallsvariable einen Wert annimmt, der kleiner als ihr Erwartungswert ist, größer als 50 % sein? Begründen Sie Ihre Antwort.

20

Stochastik

Aufgabengruppe 2

BE

Mithilfe der Graphologie werden aus der Handschrift einer Person Rückschlüsse auf deren Persönlichkeit gezogen.

1 An einer Fachschule für Graphologie ist eine Dozentenstelle neu zu besetzen. Den Bewerbern sollen im Rahmen eines Vortests Schriftproben vorgelegt werden. Jede Schriftprobe stammt entweder von einer entscheidungsfreudigen oder von einer zögerlichen Person; dies soll dem jeweiligen Bewerber mitgeteilt werden, der sich anschließend bei jeder Schriftprobe entscheiden muss, ob er sie einer entscheidungsfreudigen oder einer zögerlichen Person zuordnet. Ein Bewerber soll den Vortest bestehen, wenn er sich bei mehr als zwei Dritteln der vorgelegten Schriftproben richtig entscheidet.

3 **a)** Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Bewerber, der nur rät, den Vortest besteht, wenn man ihm zwölf Schriftproben vorlegen würde.

Die Schulleitung fordert, den Vortest so zu gestalten, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, den Vortest zu bestehen, für einen Bewerber, der nur rät, höchstens 3 % beträgt. Dazu soll die Anzahl vorgelegter Schriftproben geeignet festgelegt werden; die Anzahl soll durch 3 teilbar sein.

4 **b)** Ermitteln Sie, wie viele Schriftproben einem Bewerber mindestens vorgelegt werden müssen, damit die Forderung der Schulleitung erfüllt ist.

Die Anzahl vorgelegter Schriftproben wird auf 30 festgelegt.

4 **c)** Ermitteln Sie auf ein Prozent genau, wie groß die Wahrscheinlichkeit dafür, sich bei einer Schriftprobe richtig zu entscheiden, für einen Bewerber mindestens sein muss, damit die Wahrscheinlichkeit dafür, dass er den Vortest besteht, mindestens 90 % beträgt.

2 **d)** Der Vortest kann als einseitiger Hypothesentest mit einem Signifikanzniveau von 3 % gedeutet werden. Geben Sie dazu die Nullhypothese sowie den Ablehnungsbereich an.

(Fortsetzung nächste Seite)

4 **a)** Weisen Sie anhand des Funktionsterms von I_T nach, dass der Wert der Intensität der Strahlung stets positiv ist, und geben Sie das Verhalten von I_T an den Grenzen der Definitionsmenge an.

3 **b)** Für die erste Ableitung der Funktion I_T gilt:

$$I_T'(x) = \frac{x^2 \cdot e^{\frac{x}{T}}}{\left(e^{\frac{x}{T}} - 1\right)^2} \cdot f\left(\tfrac{x}{T}\right)$$

Dabei ist f die Funktion aus Aufgabe 1. Begründen Sie, dass die Funktion I_T bei $x = a \cdot T$ ihr einziges Maximum besitzt, wenn a die positive Nullstelle von f ist.

4 **c)** Das Maximum der Intensität der Strahlung unserer Sonne liegt bei $x = 17 \cdot 10^3$. Bestimmen Sie damit einen Näherungswert für die Oberflächentemperatur der Sonne. Skizzieren Sie den zu dieser Temperatur gehörenden Graphen von I_T unter Berücksichtigung der bisherigen Ergebnisse in einem Koordinatensystem.

(Teilergebnis: Näherungswert: $6{,}0 \cdot 10^3$ K)

4 **d)** Der Wert des Integrals $\int_c^d I_T(x)\,dx$ ist ein Maß für die von einem Stern der Temperatur T im Frequenzbereich $[c;d]$ pro Flächeneinheit abgestrahlte Leistung. Ermitteln Sie, wie viel Prozent der gesamten Strahlungsleistung unserer Sonne im Bereich des sichtbaren Lichts abgestrahlt werden, der näherungsweise durch $c = 19 \cdot 10^3$ und $d = 36 \cdot 10^3$ begrenzt wird.

3 **e)** Wird die Temperatur T eines Körpers verdoppelt, so nimmt das Maximum der Intensität seiner Strahlung den achtfachen Wert an. Begründen Sie diese Tatsache.

3 **f)** Beschreiben Sie qualitativ, wie sich die Lage des Hochpunkts des Graphen von I_T für zunehmende Werte von T ändert, und begründen Sie Ihre Antwort.

3 **g)** Sowohl bei einem Stern mit einer Oberflächentemperatur von $4{,}0 \cdot 10^3$ K als auch bei einem Stern mit einer Oberflächentemperatur von $8{,}0 \cdot 10^3$ K ist der Anteil der im Bereich des sichtbaren Lichts abgestrahlten Leistung deutlich kleiner als bei unserer Sonne. Erläutern Sie, wie sich diese Tatsache an den drei zugehörigen Graphen von I_T bemerkbar macht.

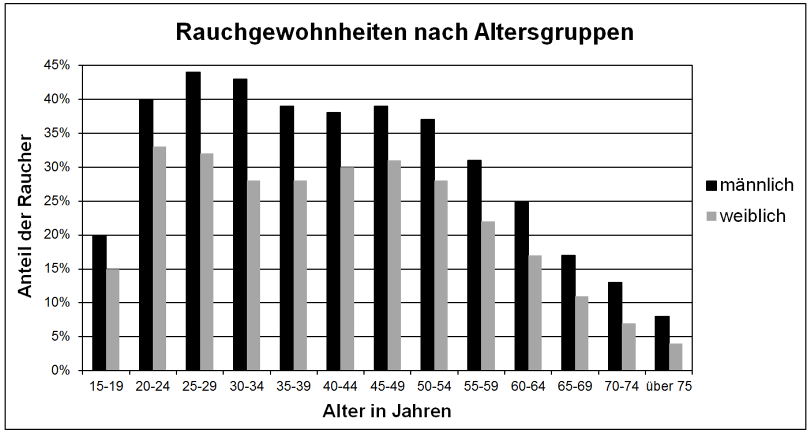
40

Stochastik

Aufgabengruppe 1

BE

Die Abbildung zeigt Daten zu den Rauchgewohnheiten der Bevölkerung Deutschlands, die das Statistische Bundesamt auf der Grundlage einer repräsentativen statistischen Erhebung veröffentlicht hat.



Der Abbildung lässt sich beispielsweise entnehmen, dass 17 % der 65- bis 69-jährigen Männer rauchen. Somit kann im Folgenden davon ausgegangen werden, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufällig ausgewählter Mann aus dieser Altersgruppe raucht, 17 % beträgt.

2 **1 a)** Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufällig ausgewählter 25- bis 29-jähriger Mann Nichtraucher ist.

2 **b)** Ermitteln Sie, wie viel Prozent der Bevölkerung in der Altersgruppe der 25- bis 29-Jährigen rauchen. Gehen Sie dabei davon aus, dass zu dieser Altersgruppe gleich viele Frauen und Männer gehören.

3 **c)** In einem Zeitungsartikel ist zu lesen, dass die Anzahl rauchender Männer im Alter von 40 bis 44 Jahren mit 1,1 Millionen größer ist als die entsprechende Anzahl unter den 25- bis 29-Jährigen mit 0,9 Millionen. Erläutern Sie, unter welcher Voraussetzung diese Zeitungsmeldung mit der Abbildung in Einklang stehen kann.

4 **2** Vier Frauen wurden zufällig ausgewählt. Zwei gehören zur Altersgruppe der 40- bis 44-Jährigen und jeweils eine zu den Altersgruppen der 55- bis 59-Jährigen und 65- bis 69-Jährigen. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass unter den ausgewählten Frauen mindestens eine Raucherin ist.

(Fortsetzung nächste Seite)

3 Zehn 40- bis 44-jährige Frauen wurden zufällig ausgewählt.

2 **a)** Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass unter ihnen genau drei Raucherinnen sind.

2 **b)** Beschreiben Sie im Sachzusammenhang ein Ereignis, dessen Wahrscheinlichkeit durch den Term $\sum_{i=0}^{4}\binom{10}{i}\cdot 0{,}3^i\cdot 0{,}7^{10-i}$ angegeben wird.

5 **c)** Ein Skeptiker nimmt an, dass der Anteil der Raucherinnen unter den 40- bis 44-jährigen Frauen größer als 30 % ist. Er testet die Nullhypothese $H_0\colon p \leq 0{,}3$; dabei gibt p die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass eine 40- bis 44-jährige Frau raucht. Im Rahmen des Tests stellt er jeder der zehn ausgewählten Frauen die Frage „Rauchen Sie?“ und erhält dabei folgende Antworten: Ja – Nein – Ja – Nein – Ja – Ja – Nein – Nein – Nein – Ja. Untersuchen Sie, ob das Ergebnis der Befragung die Annahme des Skeptikers auf einem Signifikanzniveau von 5 % stützt.

20