Mathematik

Beispiel-Abiturprüfung

Prüfungsteil B

Arbeitszeit: 180 Minuten

Bei der Bearbeitung der Aufgaben dürfen als Hilfsmittel verwendet werden

- die vom Staatsministerium genehmigte Merkhilfe für das Fach Mathematik,
- eine der vom Staatsministerium zugelassenen stochastischen Tabellen,
- eine der vom Staatsministerium für Leistungserhebungen zugelassenen naturwissenschaftlichen Formelsammlungen,
- ein Taschenrechner, der hinsichtlich seiner Funktionalität den vom Staatsministerium getroffenen Regelungen entspricht.

Zu den Themengebieten Analysis, Stochastik und Geometrie wählt der Fachausschuss jeweils eine Aufgabengruppe zur Bearbeitung aus. **Die zu einer Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil B dürfen nur in Verbindung mit den zur selben Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil A bearbeitet werden.**

____

Name des Prüflings

Das Geheft mit den Aufgabenstellungen ist abzugeben.

Analysis

Aufgabengruppe 1

BE

1 Gegeben ist die Funktion $h: x \mapsto -\frac{1}{2}x^2 + 2$ mit Definitionsbereich $\mathbb{R}$. Der Graph von h wird mit G_h bezeichnet.

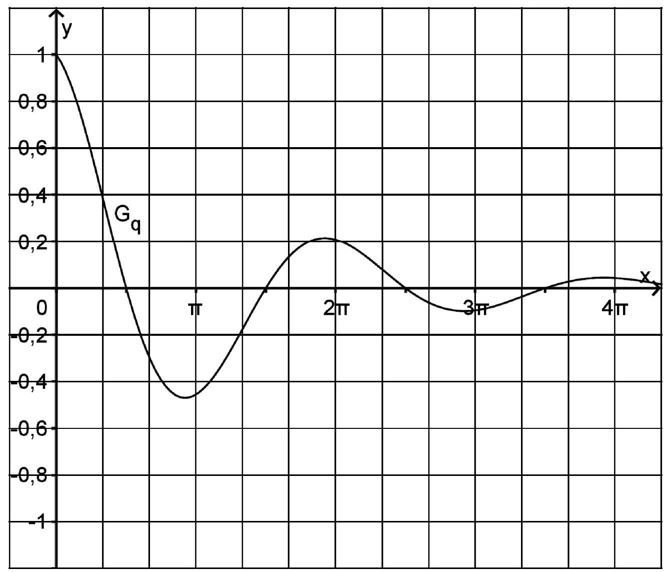
3 **a)** Geben Sie die Nullstellen von h an und zeichnen Sie G_h in ein Koordinatensystem ein.

6 **b)** Dem Flächenstück, das G_h mit der x-Achse vollständig einschließt, werden Rechtecke so einbeschrieben, dass jeweils eine Seite des Rechtecks auf der x-Achse liegt. Berechnen Sie den größtmöglichen Flächeninhalt A eines solchen Rechtecks.

(Ergebnis: $A = \frac{16}{9}\sqrt{3}$)

4 **c)** Berechnen Sie den Anteil (in Prozent), den das Rechteck mit dem Flächeninhalt A am Inhalt des Flächenstücks einnimmt, das G_h mit der x-Achse vollständig einschließt.

2 Gegeben sind die in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen $p: x \mapsto e^{-\frac{1}{4}x}$ und $q: x \mapsto e^{-\frac{1}{4}x} \cdot \cos x$. Die Abbildung zeigt den Graphen G_q von q für $x \geq 0$.



4 **a)** Untersuchen Sie das Monotonieverhalten des Graphen von p und geben Sie das Verhalten von p für $x \to +\infty$ und $x \to -\infty$ an.

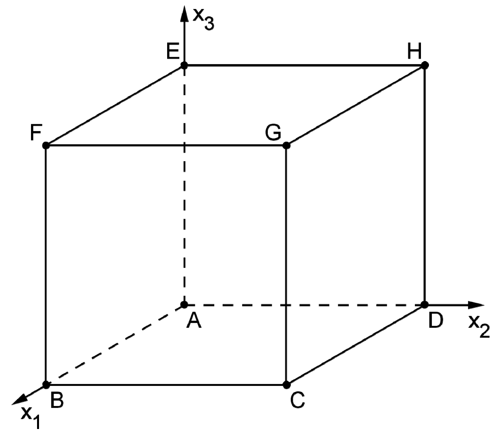
(Fortsetzung nächste Seite)

Geometrie

Aufgabengruppe 2

BE

Die Abbildung zeigt einen Würfel der Kantenlänge 6. Die Koordinaten der Eckpunkte $A(0|0|0)$, $D(0|6|0)$ und $G(6|6|6)$ sind gegeben.



5 **a)** Die Punkte B, E und G liegen in einer Ebene L. Bestimmen Sie eine Gleichung von L in Normalenform. Zeichnen Sie die Figur, in der die Ebene L den Würfel schneidet, in die Abbildung ein.

(mögliches Ergebnis: $L: x_1 - x_2 + x_3 = 6$)

4 **b)** Der Würfel wird entlang der Ebene L geteilt. Berechnen Sie das Volumen der entstehenden Pyramide. Geben Sie an, wie viel Prozent des Würfelvolumens die Pyramide einnimmt.

Die Ebene $M: x_1 - x_2 + x_3 = 3$ schneidet den Würfel in einem regulären Sechseck.

4 **c)** Begründen Sie, dass M parallel zu L ist. Geben Sie die Schnittpunkte von M mit der x_1-Achse sowie mit der x_3-Achse an und weisen Sie nach, dass M den Mittelpunkt der Strecke $[BC]$ enthält.

3 **d)** Zeichnen Sie die sechs Punkte, in denen M die Kanten des Würfels schneidet, sowie die sechseckige Schnittfigur in die Abbildung ein.

4 **e)** Jede Ebene, die parallel zu M verläuft, wird durch eine Gleichung der Form $x_1 - x_2 + x_3 = p$ mit $p \in \mathbb{R}$ beschrieben. Nennen Sie die Arten der Figuren, in denen eine solche Ebene den Würfel schneiden kann, und geben Sie die Menge aller Werte von p an, für die die Schnittfigur ein Sechseck ist.

20

Geometrie

Aufgabengruppe 1

BE

Eine flache Landschaft, in der sich ein Flughafen befindet, lässt sich modellhaft durch die x_1x_2-Ebene eines kartesischen Koordinatensystems beschreiben. Die x_1-Achse zeigt in Richtung Osten, die x_2-Achse in Richtung Norden; eine Längeneinheit im Modell entspricht 1 km in der Landschaft.

Ein Flugzeug F_1 steigt unmittelbar nach dem Abheben von der Startbahn geradlinig auf – im Modell vom Punkt $P(-10\,|\,0\,|\,0)$ aus entlang der Geraden

$$g_1: \vec{X} = \vec{P} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix},\ \lambda \in \mathbb{R}.$$

Die Flugbahn eines Flugzeugs F_2 verläuft im Modell entlang der Geraden

$$g_2: \vec{X} = \begin{pmatrix} 40 \\ 50 \\ 10 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ -10 \\ 0 \end{pmatrix},\ \mu \in \mathbb{R}.$$

3 **a)** Geben Sie die Himmelsrichtung an, in der F_1 fliegt, und begründen Sie, dass F_2 eine konstante Flughöhe hält.

4 **b)** Berechnen Sie die Größe des Steigungswinkels der Flugbahn von F_1 gegen die Horizontale.

5 **c)** Bestätigen Sie rechnerisch, dass sich die Flugbahnen der beiden Flugzeuge senkrecht schneiden. Begründen Sie, dass die Flugzeuge dennoch – auch bei unveränderten Flugbahnen – nicht zwingend kollidieren.

2 **d)** Der Richtungsvektor von g_2 beschreibt im Modell die konstante Geschwindigkeit des Flugzeugs F_2 in $\frac{\text{km}}{\text{min}}$. Geben Sie die physikalische Bedeutung des Parameters μ an.

6 **e)** Eine Radarstation, deren Position im Modell durch den Punkt $R(20\,|\,30\,|\,0)$ veranschaulicht wird, erfasst alle Objekte im Luftraum bis zu einer Entfernung von 50 km. Berechnen Sie die Länge der Flugstrecke von F_2 in dem vom Radar erfassten Bereich.

20

4 **b)** Berechnen Sie die Funktionswerte $p(0)$, $p(\pi)$, $p(2\pi)$, $p(3\pi)$ und $p(4\pi)$. Zeichnen Sie für $x \geq 0$ den Graphen von p sowie den Graphen der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion $-p: x \mapsto -p(x)$ unter Berücksichtigung der bisherigen Ergebnisse in die Abbildung ein.

3 **c)** Der Funktionsterm von q entsteht aus dem Term der in $\mathbb{R}$ definierten Kosinusfunktion $x \mapsto \cos x$ durch Multiplikation mit $p(x)$. Beschreiben Sie, wie sich der Graph von q aufgrund dieser Multiplikation vom Graphen der Kosinusfunktion unterscheidet. Gehen Sie dabei auch auf die Nullstellen von q und die Funktionswerte $q(n\pi)$ mit $n \in \mathbb{Z}$ ein.

6 **d)** Berechnen Sie den Term $q'(x)$ der ersten Ableitung von q und weisen Sie für die Funktion q nach, dass für die Extremstellen $\tan x = -0{,}25$ gilt. Zeigen Sie damit, dass die Extremstellen von q nicht mit den Extremstellen der Kosinusfunktion übereinstimmen.

4 **e)** Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind; machen Sie jeweils Ihre Entscheidung plausibel.

α) $\lim\limits_{x \to -\infty} q(x) = +\infty$

β) $\lim\limits_{x \to +\infty} q(x) = 0$

3 **f)** Die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $Q: x \mapsto \frac{16}{17} e^{-\frac{1}{4}x} \cdot \left(\sin x - \frac{1}{4}\cos x\right)$ ist eine Stammfunktion von q.

Zeigen Sie rechnerisch, dass $\int_0^{2\pi} q(x)\,dx > 0$ gilt, und deuten Sie die Aussage dieser Ungleichung am Graphen von q.

3 **g)** Es gibt Werte $a \in \mathbb{R}^+$, für die $\int_0^{a} q(x)\,dx < 0$ gilt. Geben Sie einen solchen Wert an und begründen Sie Ihre Antwort ohne zu rechnen.

40

Analysis

Aufgabengruppe 2

BE

1 Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $f: x \mapsto 3 \cdot \left(1 - e^{-x}\right) - x$. Der Graph von f wird mit G_f bezeichnet.

2 **a)** Bestimmen Sie das Verhalten von f an den Grenzen der Definitionsmenge.

5 **b)** Zeigen Sie, dass G_f genau einen Hochpunkt besitzt, und geben Sie dessen Koordinaten an.

(zur Kontrolle: x-Koordinate des Hochpunkts: $\ln 3$)

3 **c)** Berechnen Sie $f(0)$ sowie $f(3)$ und skizzieren Sie G_f unter Berücksichtigung der bisherigen Ergebnisse in einem Koordinatensystem.

3 **d)** Im Intervall $[2;3]$ besitzt f genau eine Nullstelle a. Bestimmen Sie einen Näherungswert von a, indem Sie den ersten Schritt des Newton-Verfahrens mit dem Startwert 3 durchführen. Man erhält dadurch a auf zwei Dezimalen genau.

(Ergebnis: $a \approx 2{,}82$)

5 **e)** Berechnen Sie durch Integration mithilfe des Näherungswerts von a einen Näherungswert für den Inhalt des Flächenstücks, das G_f im ersten Quadranten mit der x-Achse einschließt.

Betrachtet wird nun die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $F: x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$.

4 **f)** Geben Sie an, welche besonderen Eigenschaften der Graph von F im Punkt $(a \mid F(a))$ hat; begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

1 **g)** Geben Sie den Zusammenhang zwischen der Funktion F und dem Ergebnis der Aufgabe 1e an.

2 Jeder Körper sendet elektromagnetische Strahlung unterschiedlicher Frequenzen aus; die Intensität der Strahlung hängt von der Frequenz der Strahlung ab. Im Idealfall lässt sich diese Intensität nach Max Planck durch die Schar der in $\mathbb{R}^+$ definierten Funktionen

$$I_T: x \mapsto \frac{x^3}{e^{\frac{x}{T}} - 1}$$

mit $T \in \mathbb{R}^+$ beschreiben. Dabei ist x – bis auf eine Konstante – die Frequenz der Strahlung und T die Temperatur des Körpers in Kelvin.

(Fortsetzung nächste Seite)

2 Ein Unternehmen lässt im Rahmen von Bewerbungsverfahren graphologische Gutachten zu den Personen erstellen, die sich um eine Stelle bewerben. Im Mittel werden 25 % der Bewerber aufgrund ihres graphologischen Gutachtens abgewiesen. Für eine Stelle bewerben sich 20 Personen.

3 **a)** Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Anzahl derjenigen Bewerber, die aufgrund ihres graphologischen Gutachtens abgelehnt werden, kleiner als die dafür im Mittel zu erwartende Anzahl ist.

4 **b)** Kann die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Zufallsvariable einen Wert annimmt, der kleiner als ihr Erwartungswert ist, größer als 50 % sein? Begründen Sie Ihre Antwort.

20

Stochastik

Aufgabengruppe 2

BE

Mithilfe der Graphologie werden aus der Handschrift einer Person Rückschlüsse auf deren Persönlichkeit gezogen.

1 An einer Fachschule für Graphologie ist eine Dozentenstelle neu zu besetzen. Den Bewerbern sollen im Rahmen eines Vortests Schriftproben vorgelegt werden. Jede Schriftprobe stammt entweder von einer entscheidungsfreudigen oder von einer zögerlichen Person; dies soll dem jeweiligen Bewerber mitgeteilt werden, der sich anschließend bei jeder Schriftprobe entscheiden muss, ob er sie einer entscheidungsfreudigen oder einer zögerlichen Person zuordnet. Ein Bewerber soll den Vortest bestehen, wenn er sich bei mehr als zwei Dritteln der vorgelegten Schriftproben richtig entscheidet.

5 **a)** Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Bewerber, der nur rät, den Vortest besteht, wenn man ihm zwölf Schriftproben vorlegen würde.

Die Schulleitung fordert, den Vortest so zu gestalten, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, den Vortest zu bestehen, für einen Bewerber, der nur rät, höchstens 3 % beträgt. Man entscheidet sich dafür, die Anzahl vorgelegter Schriftproben auf 30 festzulegen.

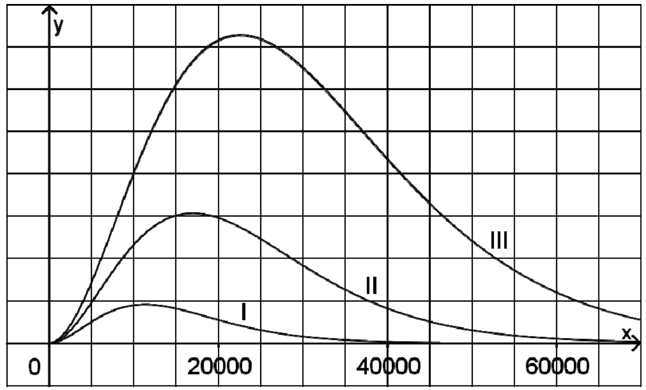
3 **b)** Zeigen Sie, dass mit dieser Festlegung die Forderung der Schulleitung erfüllt ist.

3 **c)** Ermitteln Sie auf fünf Prozent genau, wie groß die Wahrscheinlichkeit dafür, sich bei einer Schriftprobe richtig zu entscheiden, für einen Bewerber mindestens sein muss, damit die Wahrscheinlichkeit dafür, dass er den Vortest besteht, mindestens 90 % beträgt.

2 **d)** Der Vortest kann als einseitiger Hypothesentest mit einem Signifikanzniveau von 3 % gedeutet werden. Geben Sie dazu die Nullhypothese sowie den Ablehnungsbereich an.

(Fortsetzung nächste Seite)

Die Abbildung zeigt die zu drei Werten des Parameters T gehörenden Graphen von I_T.



Bei der Bearbeitung der folgenden Aufgaben soll auf die Verwendung von Einheiten verzichtet werden.

3 **a)** Weisen Sie anhand des Funktionsterms von I_T nach, dass der Wert der Intensität der Strahlung stets positiv ist.

6 **b)** Zeigen Sie, dass für die erste Ableitung der Funktion I_T gilt:

$$I'_T(x) = \frac{x^2 \cdot e^{\frac{x}{T}} \cdot \left[3 \cdot \left(1 - e^{-\frac{x}{T}}\right) - \frac{x}{T}\right]}{\left(e^{\frac{x}{T}} - 1\right)^2}$$

Vergleichen Sie diesen Term mit dem der Funktion f aus Aufgabe 1 und begründen Sie, dass die Funktion I_T bei $x = a \cdot T$ ihr einziges Maximum besitzt, wenn a die positive Nullstelle von f ist.

2 **c)** Das Maximum der Intensität der Strahlung unserer Sonne liegt bei $x_{max} = 17 \cdot 10^3$. Bestimmen Sie damit einen Näherungswert für die Oberflächentemperatur der Sonne.

3 **d)** Jeder der in der Abbildung dargestellten Graphen I, II und III gehört zu genau einer der Temperaturen 4000 K, 6000 K und 8000 K. Ordnen Sie die Temperaturen den Graphen zu und begründen Sie Ihre Zuordnung.

3 **e)** Wird die Temperatur T eines Körpers verdoppelt, so nimmt das Maximum der Intensität seiner Strahlung den achtfachen Wert an. Begründen Sie diese Tatsache.

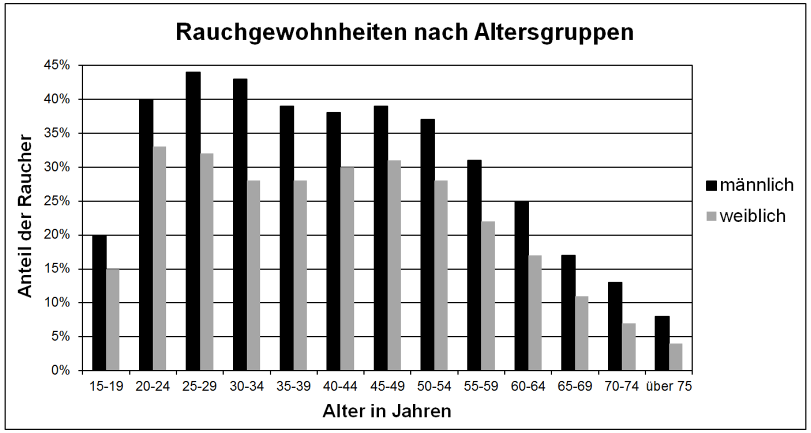
40

Stochastik

Aufgabengruppe 1

BE

Die Abbildung zeigt Daten zu den Rauchgewohnheiten der Bevölkerung Deutschlands, die das Statistische Bundesamt auf der Grundlage einer repräsentativen statistischen Erhebung veröffentlicht hat.



Der Abbildung lässt sich beispielsweise entnehmen, dass 17 % der 65- bis 69-jährigen Männer rauchen. Somit kann im Folgenden davon ausgegangen werden, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufällig ausgewählter Mann aus dieser Altersgruppe raucht, 17 % beträgt.

2 **1 a)** Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufällig ausgewählter 25- bis 29-jähriger Mann Nichtraucher ist.

2 **b)** Ermitteln Sie, wie viel Prozent der Bevölkerung in der Altersgruppe der 25- bis 29-Jährigen rauchen. Gehen Sie dabei davon aus, dass zu dieser Altersgruppe gleich viele Frauen und Männer gehören.

3 **c)** In einem Zeitungsartikel ist zu lesen, dass die Anzahl rauchender Männer im Alter von 40 bis 44 Jahren mit 1,1 Millionen größer ist als die entsprechende Anzahl unter den 25- bis 29-Jährigen mit 0,9 Millionen. Erläutern Sie, unter welcher Voraussetzung diese Zeitungsmeldung mit der Abbildung in Einklang stehen kann.

4 **2** Vier Frauen wurden zufällig ausgewählt. Zwei gehören zur Altersgruppe der 40- bis 44-Jährigen und jeweils eine zu den Altersgruppen der 55- bis 59-Jährigen und 65- bis 69-Jährigen. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass unter den ausgewählten Frauen mindestens eine Raucherin ist.

(Fortsetzung nächste Seite)

3 Zehn 40- bis 44-jährige Frauen wurden zufällig ausgewählt.

4 **a)** Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:

A: „Unter ihnen sind genau drei Raucherinnen.“

B: „Unter ihnen sind höchstens vier Raucherinnen.“

5 **b)** Ein Skeptiker nimmt an, dass der Anteil der Raucherinnen unter den 40- bis 44-jährigen Frauen größer als 30 % ist. Er testet die Nullhypothese H_0: $p \leq 0{,}3$; dabei gibt p die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass eine 40- bis 44-jährige Frau raucht. Im Rahmen des Tests stellt er jeder der zehn ausgewählten Frauen die Frage „Rauchen Sie?“ und erhält dabei folgende Antworten: Ja – Nein – Ja – Nein – Ja – Ja – Nein – Nein – Nein – Ja. Untersuchen Sie, ob das Ergebnis der Befragung die Annahme des Skeptikers auf einem Signifikanzniveau von 5 % stützt.

20