

Mathematik

Abiturprüfung 2025

Prüfungsteil B (CAS)

Bei der Bearbeitung der Aufgaben dürfen als Hilfsmittel verwendet werden

- die vom Staatsministerium genehmigte Merkhilfe für das Fach Mathematik,
- eine der vom Staatsministerium zugelassenen stochastischen Tabellen,
- eine der vom Staatsministerium für Leistungserhebungen zugelassenen naturwissenschaftlichen Formelsammlungen,
- ein Taschenrechner, der den vom Staatsministerium getroffenen Regelungen entspricht,
- **ein Computeralgebrasystem, das den vom Staatsministerium getroffenen Regelungen entspricht,**
- ein Rechtschreibwörterbuch Deutsch, das nach Erklärung des Verlags die aktuellen amtlichen Regeln vollständig umsetzt.

Zu den Themengebieten Analysis, Stochastik und Geometrie wählt der Fachausschuss jeweils eine Aufgabengruppe zur Bearbeitung aus. **Die zu einer Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil B dürfen nur in Verbindung mit den zur selben Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil A bearbeitet werden.**

Name des Prüflings

Das Geheft mit den Aufgabenstellungen ist abzugeben.

Analysis
Aufgabengruppe 1

BE

1 Gegeben ist die Schar der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen f_k mit $f_k(x) = \frac{1}{2k} \cdot x^2 \cdot (x - 2k)^2$ und $k \in \mathbb{R}^+$. Der Graph von f_k wird mit G_k bezeichnet.

3 a) Begründen Sie, dass f_k für jeden Wert von k genau zwei Nullstellen hat, und geben Sie diese an.

4 b) Der Hochpunkt von G_k hat zu den beiden Tiefpunkten von G_k denselben Abstand. Berechnen Sie diesen Abstand.

4 c) Betrachtet wird die Fläche, die G_k , die x -Achse und die beiden Geraden mit den Gleichungen $x = -1$ und $x = 1$ einschließen. Sie setzt sich aus mehreren Flächenstücken zusammen. Beurteilen Sie die folgende Aussage, ohne den Wert eines Integrals zu berechnen:

Für jeden Wert von k gibt der Term $\int_{-1}^1 f_k(x) dx$ den Inhalt der betrachteten Fläche an.

5 d) Für jeden Wert von k schließen G_k und der Graph der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion h_k mit $h_k(x) = \frac{k}{2} \cdot (x - 2k)^2$ eine Fläche ein, die sich aus zwei Flächenstücken zusammensetzt. Untersuchen Sie, ob die folgende Aussage richtig ist:

Für $k > 3$ ist der Inhalt der Fläche kleiner als k^5 .

(Fortsetzung nächste Seite)

2 Um Regenwasser zu speichern, wird es kontrolliert in ein unterirdisches Auffangbecken geleitet. Für ein bestimmtes Regenereignis wird die momentane Zuflussrate des Regenwassers in das Auffangbecken durch die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion r mit $r(x) = e^x \cdot f_{2,5}(x)$ für $0 \leq x \leq 5$ modellhaft beschrieben. Dabei ist x die Zeit in Stunden, die seit Beginn des Zuflusses in das Auffangbecken vergangen ist, und $r(x)$ die momentane Zuflussrate in $\frac{\text{m}^3}{\text{h}}$ (Kubikmeter pro Stunde). Die Funktion $f_{2,5}$ ist die Funktion der Schar aus Aufgabe 1 mit $k = 2,5$.

a) Berechnen Sie die größte und die kleinste momentane Zuflussrate im betrachteten Zeitraum.

b) Im Intervall $[0;5]$ besitzt r genau zwei Wendestellen x_0 und x_1 . Außerdem gilt $r'(x_0) \approx 100,5$ und $r'(x_1) \approx -240,2$ sowie $r'(0) = 0$ und $r'(5) = 0$. Beschreiben Sie die Bedeutung des Wertes $r'(x_0)$, die sich aus diesen Informationen ergibt, im Sachzusammenhang.

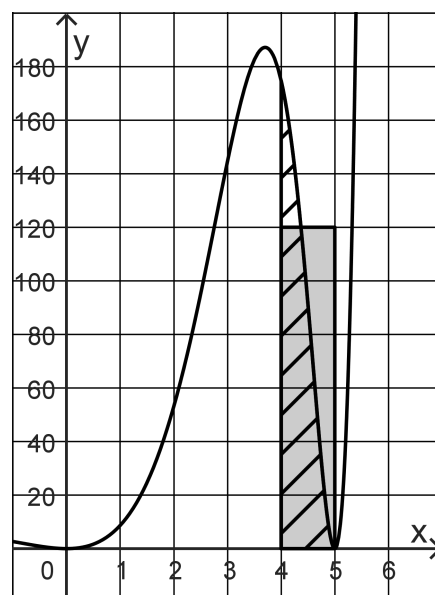
c) Die Abbildung zeigt den Graphen von r mit einigen Eintragungen.

Erläutern Sie, dass mit diesen Eintragungen die folgende Aussage begründet werden kann:

$$\int_4^5 r(x) dx < 120$$

Interpretieren Sie diese Aussage im Sachzusammenhang.

d) Zu Beginn des Zuflusses ist das Auffangbecken bereits mit 186 m^3 Regenwasser gefüllt. Nach dreieinhalb Stunden wird eine Pumpe eingeschaltet. Diese pumpt bis zum Ende des betrachteten Zeitraums Wasser aus dem Auffangbecken mit einer konstanten Rate ab. Die momentane Zuflussrate des Regenwassers in das Auffangbecken wird dabei weiterhin durch r beschrieben. Geben Sie einen Term an, der das Wasservolumen im Auffangbecken zu einem beliebigen Zeitpunkt nach dem Einschalten der Pumpe in Kubikmetern beschreibt.



Analysis

Aufgabengruppe 2

BE

1 Gegeben ist die Schar der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen

$$f_b : x \mapsto \frac{1}{16} x^2 \cdot e^{-b \cdot x + 4b} \quad \text{mit } b \in \mathbb{R}^+ . \text{ Der Graph von } f_b \text{ wird mit } G_b \text{ bezeichnet.}$$

a) Geben Sie das Verhalten von f_b für $x \rightarrow -\infty$ und für $x \rightarrow +\infty$ an.

Zeigen Sie, dass der Funktionswert von f_b an der Stelle 4 unabhängig von b ist.

b) Bestimmen Sie rechnerisch die Koordinaten und die Art der beiden Extrempunkte von G_b . Berechnen Sie einen Wert von b , für den die beiden Extrempunkte den Abstand 6 haben, und geben Sie diesen Wert auf zwei Nachkommastellen gerundet an.

c) Begründen Sie, ohne Terme von Stammfunktionen zu bestimmen, dass die folgende Aussage wahr ist:

Der Graph jeder Stammfunktion von f_b hat mit der positiven x -Achse höchstens einen gemeinsamen Punkt.

2 Betrachtet wird nun die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $r : x \mapsto \frac{1}{16} x^2 \cdot e^{-0,25x+1}$.

Somit ist r die Funktion $f_{0,25}$ der Schar aus Aufgabe 1. Ihr Graph wird mit G bezeichnet.

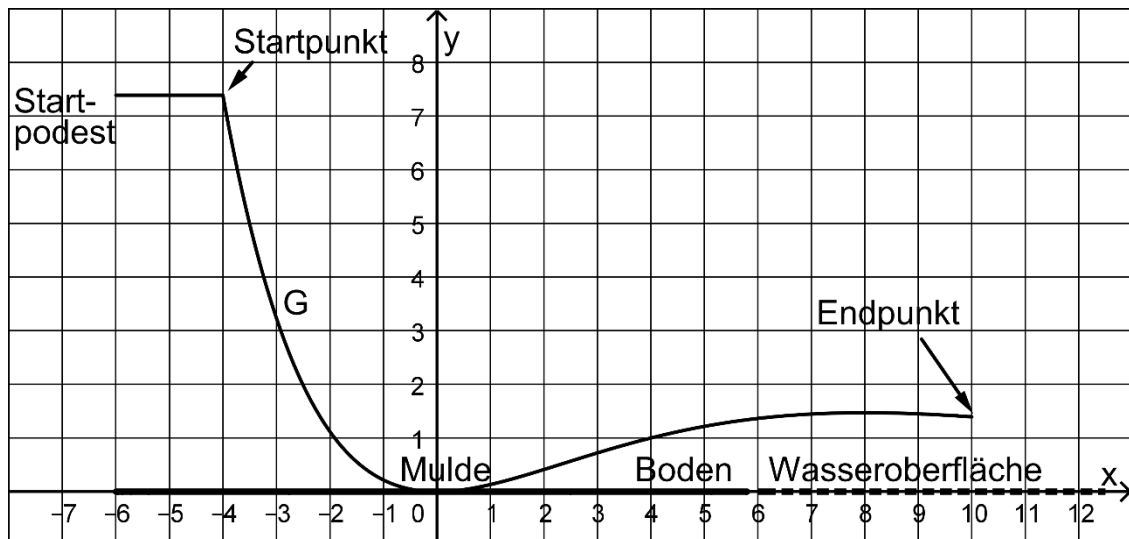


Abb. 1

Die Konstruktion einer Wasserrutsche, die aus einer Rutschbahn und einem horizontalen Startpodest besteht, wird geplant. Dabei beschreibt G für $-4 \leq x \leq 10$ die Profillinie der Rutschbahn und die x -Achse den horizontalen Boden sowie die Wasseroberfläche (vgl. Abbildung 1). Eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht dabei 1 m in der Realität.

(Fortsetzung nächste Seite)

- a) Berechnen Sie die Höhe des Startpodests über dem Boden und die Höhe des Endpunkts der Rutschbahn über der Wasseroberfläche.
- b) Betrachtet wird der Winkel β , der im Sachzusammenhang von Bedeutung ist. Mithilfe der folgenden beiden Gleichungen kann β ermittelt werden:

$$r'(-4) = \tan(\alpha), \quad \alpha \in]-90^\circ; 0^\circ[$$

$$\beta = 180^\circ - |\alpha|$$

Zeichnen Sie die Winkel α und β in Abbildung 1 geeignet ein und geben Sie die Bedeutung von β im Sachzusammenhang an.

- c) Da die 1,5 m breite Rutschbahn durch vertikale Wände begrenzt werden soll, kann sich Wasser in der Mulde sammeln. Berechnen Sie das Volumen des Wassers in der Mulde in Litern, wenn es dort an der tiefsten Stelle eine Höhe von 5 cm hat (vgl. Abbildung 2).

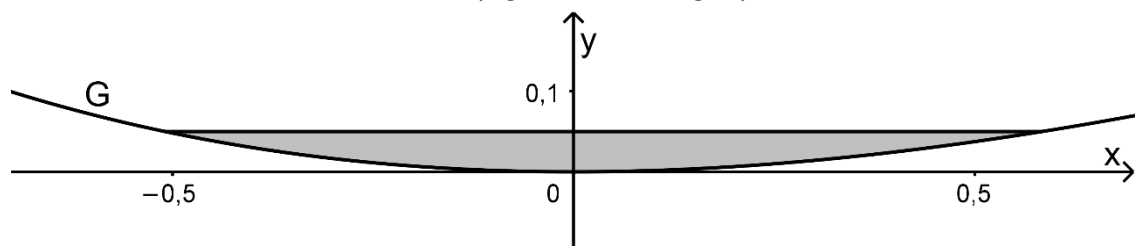


Abb. 2

- d) In der folgenden Untersuchung wird erneut nur die Profillinie der Rutschbahn betrachtet. Um die Sicherheit der Badegäste zu erhöhen, soll eine in alle Richtungen drehbare Überwachungskamera angebracht werden, deren Position im Modell durch den Punkt $(12 | 3)$ beschrieben wird. Die Sichtlinie der Kamera in Richtung eines Punkts der Rutschbahn, der durch $(a | r(a))$ mit $-4 \leq a \leq 10$ dargestellt wird, kann durch die

Gerade g_a mit der Gleichung $y = \frac{3-r(a)}{12-a} \cdot x + \left(3 - \frac{3-r(a)}{12-a} \cdot 12\right)$ beschrieben

werden.

Untersuchen Sie rechnerisch, ob der Teil der Rutschbahn, der durch den rechtsgekrümmten Teil von G dargestellt wird, von der Kamera vollständig einsehbar ist.

Stochastik
Aufgabengruppe 1

BE

Eine traditionsreiche Kleinkunsthöhne bietet verschiedene Veranstaltungen an.

1 An einem Kabarettabend sind 200 Gäste anwesend.

- 3** **a)** In der Pause bestellen erfahrungsgemäß 65 % der Gäste einen Brotzeitteller. Es soll angenommen werden, dass die Anzahl der bestellten Brotzeitteller durch eine binomialverteilte Zufallsgröße X beschrieben werden kann. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:

A: „Es werden genau 130 Brotzeitteller bestellt.“

B: „Mehr als 70 % der Gäste bestellen einen Brotzeitteller.“

40 der 200 Gäste sind Inhaber eines Abonnements. Unter allen Gästen werden fünf signierte Bücher des auftretenden Kabarettisten verlost, wobei jeder Gast höchstens ein Buch gewinnen kann.

- 3** **b)** Betrachtet wird das Ereignis E: „Genau zwei Inhaber eines Abonnements gewinnen ein signiertes Buch.“.

$$\text{Es gilt } P(E) = \frac{\binom{40}{2} \cdot \binom{160}{3}}{\binom{200}{5}}.$$

Geben Sie $P(E)$ in Prozent an. Übertragen Sie das beschriebene Zufallsexperiment der Verlosung und das Ereignis E in ein passendes Urnenmodell.

- 3** **c)** Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens zwei Inhaber eines Abonnements unter den Gewinnern sind.

- 2** **d)** Die fünf Bücher werden nacheinander verlost. Beschreiben Sie im Sachzusammenhang ein Ereignis, dessen Wahrscheinlichkeit mit dem Term $\frac{40}{200} \cdot \frac{160}{199} \cdot \frac{39}{198} \cdot \frac{159}{197} \cdot \frac{158}{196}$ berechnet werden kann.

(Fortsetzung nächste Seite)

- 2 Die Karten für die Veranstaltungen der Kleinkunsthöhne können entweder im Verkaufsbüro oder im Internet erworben werden. 90 % der Kartenkäufe im Internet und 35 % der Kartenkäufe im Verkaufsbüro werden von Personen getätigt, die jünger als 60 Jahre sind. Insgesamt werden 54 % der Kartenkäufe von Personen getätigt, die mindestens 60 Jahre alt sind.

Ein KartenkauF wird zufällig ausgewählt. Betrachtet werden folgende Ereignisse:

J: „Der Kauf wurde von einer Person getätigt, die jünger als 60 Jahre ist.“

V: „Der Kauf wurde im Verkaufsbüro getätigt.“

- 1 a) Beschreiben Sie im Sachzusammenhang das Ereignis $\bar{J} \cap \bar{V}$.
- 5 b) Ermitteln Sie, z. B. mithilfe eines Baumdiagramms, die Wahrscheinlichkeit p dafür, dass der Kauf im Internet getätigt wurde.
- (zur Kontrolle: $p = 0,2$)
- 3 c) Berechnen Sie für den Fall, dass der Kauf von einer Person getätigt wurde, die jünger als 60 Jahre ist, die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Kauf im Verkaufsbüro getätigt wurde.

Stochastik
Aufgabengruppe 2

BE

Unter den Touristen eines Naturparks nutzen erfahrungsgemäß 14 % das Fahrrad für Ausflüge vor Ort. Im Folgenden werden diese Touristen als Radausflügler bezeichnet. Es soll davon ausgegangen werden, dass in einer zufälligen Auswahl von Touristen des Naturparks die Anzahl der Radausflügler binomialverteilt ist.

1 Für eine Stichprobe werden 300 Touristen des Naturparks zufällig ausgewählt.

1 **a)** Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich in der Stichprobe genau 36 Radausflügler befinden.

3 **b)** Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Anzahl der Radausflügler in der Stichprobe um mindestens 10 % größer ist als der Erwartungswert für diese Anzahl.

2 Um den Naturpark als Reiseziel attraktiver zu machen, setzt der dortige Tourismusverband Shuttlebusse ein. Die Fahrkarten für diese Busse können ausschließlich online gebucht werden und sind jeweils für einen bestimmten Tag gültig. Erfahrungsgemäß werden 80 % aller gebuchten Fahrkarten spätestens am Vortag der Fahrt gebucht. Von diesen spätestens am Vortag gebuchten Fahrkarten werden 90 % auch tatsächlich genutzt. Bei den restlichen, erst am Tag der Fahrt gebuchten Fahrkarten liegt dieser Anteil mit 95 % etwas höher.

3 **a)** Stellen Sie den Sachverhalt in einem beschrifteten Baumdiagramm dar.

3 **b)** Betrachtet wird eine zufällig ausgewählte, nicht genutzte Fahrkarte. Beurteilen Sie die folgende Aussage:

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass diese Fahrkarte spätestens am Vortag gebucht wurde, ist achtmal so groß wie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sie erst am Tag der Fahrt gebucht wurde.

(Fortsetzung nächste Seite)

Der Tourismusverband vermutet, dass sich der bisherige Anteil der Radausflügler unter den Touristen von 14 % durch den Einsatz der Shuttlebusse erhöht hat. Die Verantwortlichen planen die Durchführung eines Signifikanztests mit einem Signifikanzniveau von 8 % und der Nullhypothese „Der Anteil der Radausflügler unter allen Touristen liegt bei höchstens 14 %.“. Vor der Durchführung des Tests wird festgelegt, die Shuttlebusse nur dann weiterzubetreiben, wenn die Nullhypothese aufgrund des Testergebnisses abgelehnt wird.

- 5 c) Es ist geplant, den Test auf der Grundlage einer Stichprobe von 500 Touristen durchzuführen. Bestimmen Sie die zugehörige Entscheidungsregel.
- 5 d) Angenommen, der beschriebene Test wird auf der Grundlage einer Stichprobe von nur 200 Touristen durchgeführt. In diesem Fall wird die Nullhypothese abgelehnt, wenn sich unter diesen mehr als 35 Radausflügler befinden. Damit die Wahrscheinlichkeit für den Fehler zweiter Art höchstens 15 % beträgt, muss der tatsächliche Anteil der Radausflügler unter allen Touristen mindestens einen bestimmten Wert haben. Ermitteln Sie diesen Wert auf ganze Prozent genau und beschreiben Sie die Bedeutung des Fehlers zweiter Art im Sachzusammenhang.

Geometrie

Aufgabengruppe 1

BE

Gegeben sind die Punkte $A(30|-5|-12)$, $B(30|13|0)$, $C(-30|13|0)$ und $D(-30|-5|-12)$, die in der Ebene E liegen.

- 3 a) Begründen Sie, dass das Viereck $ABCD$ ein Rechteck ist.
- 3 b) Bestimmen Sie eine Gleichung von E in Koordinatenform und geben Sie die besondere Lage von E im Koordinatensystem an.

(zur Kontrolle: $E: 2x_2 - 3x_3 - 26 = 0$)

- 3 c) Bestimmen Sie die Größe φ des Winkels, den E mit der x_1x_2 -Ebene einschließt.

(zur Kontrolle: $\varphi \approx 33,7^\circ$)

Im Folgenden wird ein Sperrwerk an einem Fluss betrachtet, das dem Schutz vor Überflutungen bei Sturmfluten dient. Ein Teil dieses Sperrwerks besteht aus zwei kreisförmigen Metallscheiben, an denen ein Sperrtor befestigt ist. Durch Drehung der Metallscheiben wird das Sperrtor in verschiedene Stellungen gebracht.

In einem Koordinatensystem werden die beiden Metallscheiben durch die Grund- und Deckfläche eines geraden Zylinders dargestellt. Die x_1 -Achse verläuft durch die Mittelpunkte dieser beiden Kreisflächen und entspricht der Drehachse der Metallscheiben.

Die Ebene E schneidet den Zylinder im Rechteck $ABCD$ und zerlegt diesen in zwei Teilkörper. Der kleinere Teilkörper entspricht dem Sperrtor in einer speziellen Stellung (vgl. Abbildung 1). Eine Längeneinheit entspricht einem Meter in der Realität.

Es wird vereinfachend ausschließlich ein Wasserstand betrachtet, bei dem die Wasseroberfläche im Modell in der x_1x_2 -Ebene liegt.

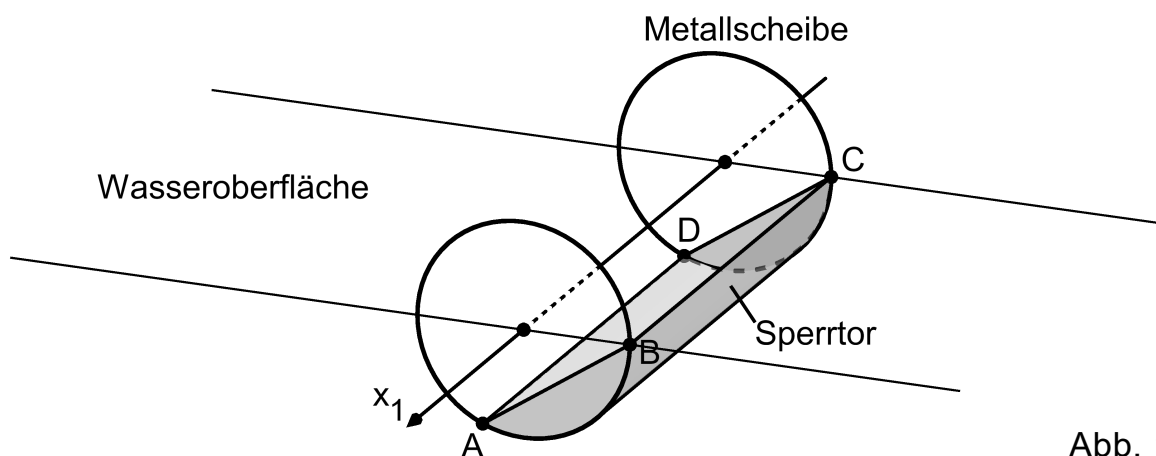


Abb. 1

(Fortsetzung nächste Seite)

- 2 **d)** Geben Sie den Durchmesser einer Metallscheibe und den Abstand der beiden Metallscheiben jeweils in Metern an.

Ist das Sperrtor geöffnet, so liegt dessen rechteckige Seitenfläche unterhalb der Wasseroberfläche und ist parallel zu ihr (vgl. Abbildung 2a). Ist das Sperrtor geschlossen, so steht die Seitenfläche senkrecht zur Wasseroberfläche (vgl. Abbildung 2b).

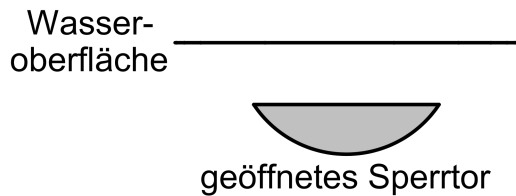


Abb. 2a

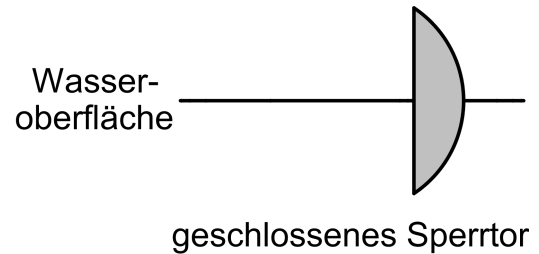


Abb. 2b

Bei einem Schließvorgang wird das geöffnete Sperrtor durch eine Vierteldrehung der Metallscheiben mit konstanter Geschwindigkeit innerhalb von 15 Minuten geschlossen.

- 4 **e)** Zu einem bestimmten Zeitpunkt während des Schließvorgangs befinden sich erstmals Teile des Sperrtors an der Wasseroberfläche. Bestimmen Sie mithilfe des Ergebnisses von Aufgabe c die Zeit, die ab diesem Zeitpunkt bis zum Ende des Schließvorgangs vergeht. Ermitteln Sie, wie weit das geschlossene Sperrtor über die Wasseroberfläche hinausragt.

- 5 **f)** Die tiefste Stelle eines Schiffs bewegt sich im Modell auf der Gerade

$$g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ -17 \\ -8 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}. \text{ Beurteilen Sie anhand einer Rechnung, ob}$$

das Schiff das Sperrwerk passieren kann, wenn das Sperrtor geöffnet ist.

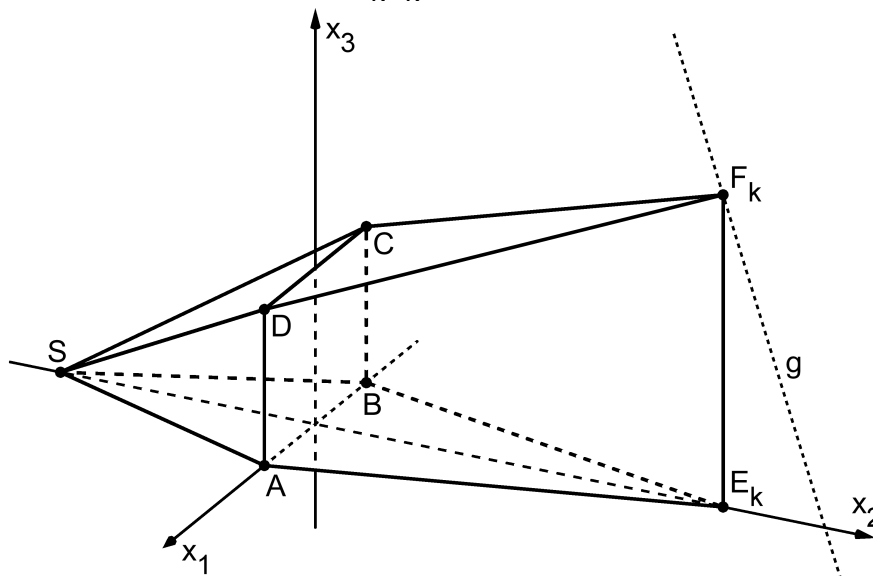
Geometrie

Aufgabengruppe 2

BE

Betrachtet werden die Punkte $A(2|0|0)$, $B(-2|0|0)$, $C(-2|0|3)$, $D(2|0|3)$, $S(0|-5|0)$, $E_k(0|k|0)$ und $F_k(0|k|30-3k)$ mit $0 < k \leq 10$.

Die Abbildung zeigt einen zusammengesetzten Körper, der aus der Pyramide ABCDS und einem Körper $ABCDE_kF_k$ besteht.



- 4 a) Das Viereck ABCD ist ein Rechteck. Untersuchen Sie, ob ABCD auch ein Quadrat ist. Berechnen Sie das Volumen der Pyramide ABCDS.

- 2 b) Jeder Punkt F_k liegt auf der Gerade g (vgl. Abbildung).

Geben Sie den Ortsvektor eines Punkts auf g an und zeigen Sie, dass $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ ein Richtungsvektor von g ist.

- 3 c) Begründen Sie, dass die x_1x_3 -Ebene für keinen Wert von k eine Symmetrieebene des zusammengesetzten Körpers ist.

- 5 d) Die Punkte C, D und S liegen in der Ebene L. Bestimmen Sie eine Gleichung von L in Koordinatenform. Ermitteln Sie den Wert von k , für den der Eckpunkt F_k ebenfalls in L liegt.

- 6 e) Im Dreieck DF_kC wird der Innenwinkel im Punkt F_k betrachtet. Ermitteln Sie denjenigen Wert von k , für den die Größe dieses Winkels maximal ist, und erläutern Sie Ihren Lösungsweg.