

Mathematik

Abiturprüfung 2025

Prüfungsteil B

Bei der Bearbeitung der Aufgaben dürfen als Hilfsmittel verwendet werden

- die vom Staatsministerium genehmigte Merkhilfe für das Fach Mathematik,
- eine der vom Staatsministerium zugelassenen stochastischen Tabellen,
- eine der vom Staatsministerium für Leistungserhebungen zugelassenen naturwissenschaftlichen Formelsammlungen,
- ein Taschenrechner, der den vom Staatsministerium getroffenen Regelungen entspricht,
- ein Rechtschreibwörterbuch Deutsch, das nach Erklärung des Verlags die aktuellen amtlichen Regeln vollständig umsetzt.

Zu den Themengebieten Analysis, Stochastik und Geometrie wählt der Fachausschuss jeweils eine Aufgabengruppe zur Bearbeitung aus. **Die zu einer Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil B dürfen nur in Verbindung mit den zur selben Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil A bearbeitet werden.**

Name des Prüflings

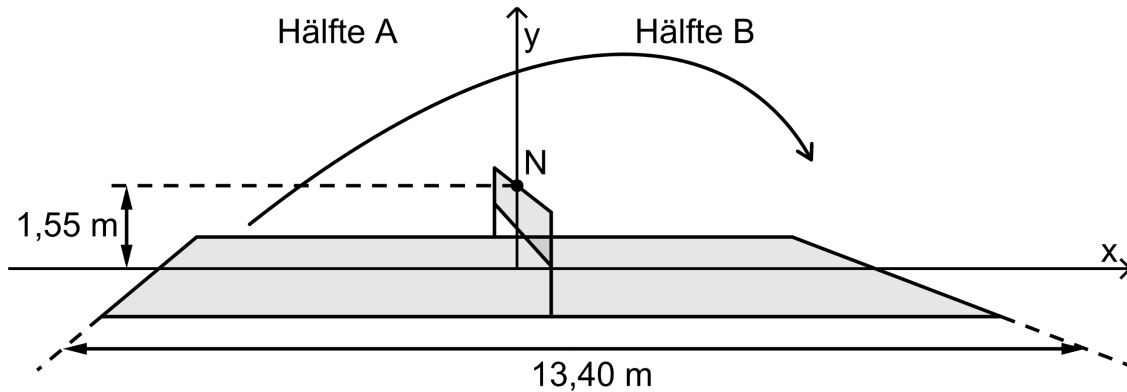
Das Geheft mit den Aufgabenstellungen ist abzugeben.

Analysis

Aufgabengruppe 1

BE

Badminton wird auf einem rechteckigen Spielfeld gespielt, das 13,40 m lang ist. Dabei wird ein Federball über ein 1,55 m hohes Netz geschlagen (vgl. Abbildung).



Im Folgenden werden Flugbahnen von Federbällen, die von Hälfte A in Hälfte B des Spielfelds geschlagen werden, modellhaft mithilfe von Funktionen beschrieben. Vereinfachend werden nur Flugbahnen betrachtet, die innerhalb einer Ebene verlaufen, die senkrecht zum horizontalen Boden und parallel zur Seitenlinie des Spielfelds ist. Das im Modell verwendete Koordinatensystem liegt in dieser Ebene, wobei die x-Achse den Boden und der Punkt $N(0 \mid 1,55)$ die horizontal verlaufende Oberkante des Netzes beschreibt. Eine Längeneinheit entspricht einem Meter in der Wirklichkeit.

- 1 Die in $]-\infty; 6]$ definierte Funktion $f: x \mapsto 0,25 \cdot (x + 6) \cdot \sqrt{6 - x}$ beschreibt für $-5 \leq x \leq 6$ die Flugbahn bei einem bestimmten Schlag.
- 2 a) Geben Sie die Koordinaten des Schnittpunkts des Graphen von f mit der y-Achse an und interpretieren Sie das Ergebnis im Sachzusammenhang.
- 4 b) Begründen Sie, dass der Federball bei diesem Schlag innerhalb von Hälfte B auf dem Boden auftritt, wenn die Flugbahn nicht unterbrochen wird. Ein Spieler steht 3 m hinter dem Netz in Hälfte B unterhalb der Flugbahn des Federballs. Berechnen Sie die Höhe des Federballs über dem Boden an dieser Stelle.
- 6 c) Weisen Sie nach, dass $\frac{6-3x}{8 \cdot \sqrt{6-x}}$ ein Term der ersten Ableitungsfunktion f' von f ist. Ermitteln Sie $\lim_{x \rightarrow 6} f'(x)$ und deuten Sie das Ergebnis im Sachzusammenhang.
- 2 d) Im Verlauf des Flugs erreicht der Federball eine maximale Höhe. Berechnen Sie diese.

(Fortsetzung nächste Seite)

- 2** Bei einem anderen Schlag wird die Flugbahn des Federballs für $-0,25 \leq x \leq 1$ mithilfe der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion $g: x \mapsto -2x + 2$ beschrieben.
- 5** **a)** Zeigen Sie unter Verwendung einer geeigneten Skizze, dass die Entfernung eines beliebigen Punkts $Q(x | g(x))$ auf dem Graphen von g zum Punkt $N(0 | 1,55)$ durch den Term $d(x) = \sqrt{5x^2 - 1,8x + 0,2025}$ beschrieben werden kann.
- 3** **b)** Auf dieser Flugbahn gibt es einen Punkt mit minimalem Abstand zur oberen Netzkante. Berechnen Sie diesen minimalen Abstand.
- 3** Im Folgenden werden Schläge betrachtet, bei denen die Flugbahn des Federballs jeweils mithilfe einer Funktion $h: x \mapsto a \cdot \sqrt{b-x} + c$ mit maximalem Definitionsbereich und $a, b, c \in \mathbb{R}$ beschrieben wird.
- 4** **a)** Ermitteln Sie für $a = 2$, $b = 5$ und $c = -2$, in welcher Entfernung zur Netzebene und unter welchem Winkel der Federball auf dem Boden auftrifft.
- 4** **b)** Ein Federball wird von einem Spieler in Hälfte A im Abstand von 1 m zur Netzebene in einer Höhe von 2,60 m geschlagen und trifft im Abstand von 3 m zur Netzebene in Hälfte B senkrecht zum Boden auf diesem auf. Ermitteln Sie die zugehörigen Werte von a , b und c .

Analysis

Aufgabengruppe 2

BE

- 1 Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $f: x \mapsto 5x \cdot e^{-x}$.
Abbildung 1 zeigt den Graphen G von f .

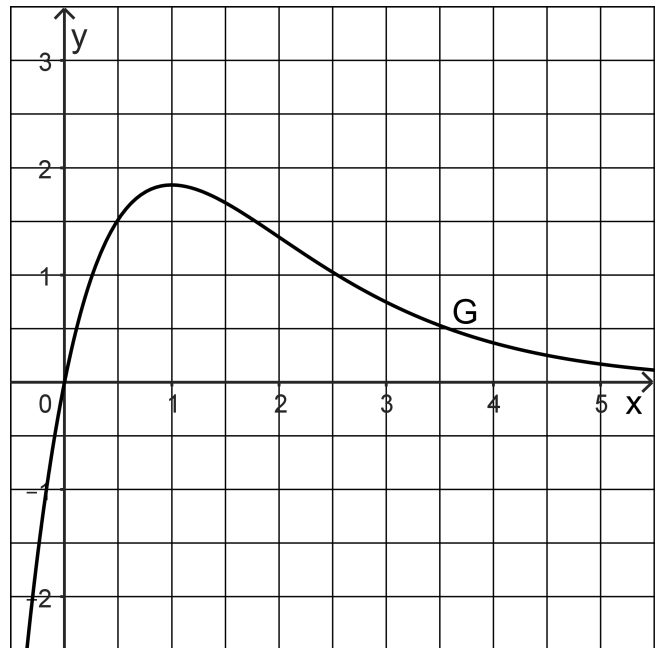


Abb. 1

- a) G hat genau einen Extrempunkt. Berechnen Sie die Koordinaten des Extrempunkts von G .

(zur Kontrolle: $(1 | \frac{5}{e})$)

- b) Die Tangente t an G in dessen Wendepunkt hat die Gleichung $y = -\frac{5}{e^2}x + \frac{20}{e^2}$. Ermitteln Sie eine Gleichung der Gerade, die den Extrempunkt von G enthält und senkrecht zu t verläuft.

Betrachtet wird die in $[1; +\infty[$ definierte Funktion h mit $h(x) = f(x)$.

- c) Begründen Sie, dass die Funktion f nicht umkehrbar, die Funktion h jedoch umkehrbar ist. Geben Sie den Definitions- und den Wertebereich der Umkehrfunktion von h an.

Abbildung 2 zeigt eine Figur, die modellhaft das Wappen eines Sportvereins beschreibt. Die Begrenzungslinien der Figur werden durch einen Teil der Gerade mit der Gleichung $y = 5$ sowie durch die Kurvenstücke H_1 und H_2 beschrieben:

- H_1 entsteht, indem G für $x \in [\ln 5; 5]$ an der Gerade mit der Gleichung $y = x$ gespiegelt wird.
- H_2 entsteht durch Spiegeln von H_1 an der Gerade mit der Gleichung $x = \ln 5$.

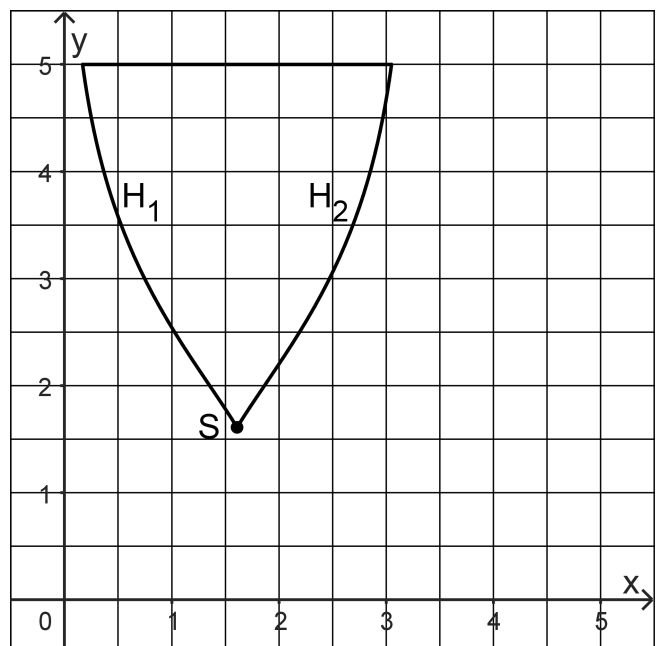


Abb. 2

Der Punkt $S(\ln 5 | \ln 5)$ ist gemeinsamer Punkt von H_1 und H_2 .

(Fortsetzung nächste Seite)

5 d) Begründen Sie, dass mit dem Term $2 \cdot \left((5 - \ln 5) \cdot \ln 5 - \int_{\ln 5}^5 f(x) dx \right)$ der Flächeninhalt der Figur berechnet werden kann.

3 e) Die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $F: x \mapsto -5(x+1) \cdot e^{-x}$ ist eine Stammfunktion von f . Berechnen Sie mit dem Term aus Aufgabe 1d den Flächeninhalt der Figur auf eine Nachkommastelle genau.

2 Betrachtet wird die Schar der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen $g_k: x \mapsto -5x \cdot e^{-kx}$ mit $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Abbildung 3 zeigt vier Graphen der Schar, die zu den Werten $k = -1$, $k = -0,5$, $k = 0,5$ und $k = 1$ gehören.

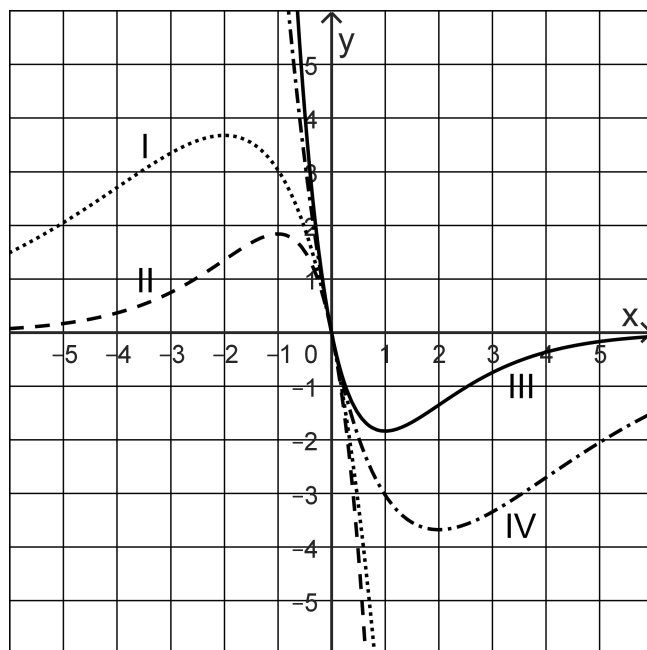


Abb. 3

5 a) Der Graph III kann durch Spiegeln von G (vgl. Abbildung 1) an der x-Achse erzeugt werden. Geben Sie den zugehörigen Wert von k sowie die Koordinaten des Tiefpunkts von Graph III an. Ordnen Sie den drei übrigen Werten von k den jeweils passenden Graphen zu.

4 b) Zeigen Sie, dass $g_k(-x) = -g_{-k}(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt, und interpretieren Sie diese Gleichung mit Blick auf die Graphen der Funktionen g_k und g_{-k} .

Stochastik
Aufgabengruppe 1

BE

Eine traditionsreiche Kleinkunsthöhne bietet verschiedene Veranstaltungen an.

1 An einem Kabarettabend sind 200 Gäste anwesend.

- 3** **a)** In der Pause bestellen erfahrungsgemäß 65 % der Gäste einen Brotzeit-
teller. Es soll angenommen werden, dass die Anzahl der bestellten
Brotzeitteller durch eine binomialverteilte Zufallsgröße X beschrieben
werden kann. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden
Ereignisse:

A: „Es werden genau 130 Brotzeitteller bestellt.“

B: „Es werden mehr als 140 Brotzeitteller bestellt.“

40 der 200 Gäste sind Inhaber eines Abonnements. Unter allen Gästen
werden fünf signierte Bücher des auftretenden Kabarettisten verlost, wobei
jeder Gast höchstens ein Buch gewinnen kann.

- 3** **b)** Betrachtet wird das Ereignis E: „Genau zwei Inhaber eines Abonnements
gewinnen ein signiertes Buch.“.

$$\text{Es gilt } P(E) = \frac{\binom{40}{2} \cdot \binom{160}{3}}{\binom{200}{5}}.$$

Geben Sie $P(E)$ in Prozent an. Übertragen Sie das beschriebene Zufalls-
experiment der Verlosung und das Ereignis E in ein passendes Urnen-
modell.

- 3** **c)** Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens zwei Inhaber
eines Abonnements unter den Gewinnern sind.

- 2** **d)** Die fünf Bücher werden nacheinander verlost. Beschreiben Sie im Sach-
zusammenhang ein Ereignis, dessen Wahrscheinlichkeit mit dem Term
 $\frac{40}{200} \cdot \frac{160}{199} \cdot \frac{39}{198} \cdot \frac{159}{197} \cdot \frac{158}{196}$ berechnet werden kann.

(Fortsetzung nächste Seite)

- 2 Die Karten für die Veranstaltungen der Kleinkunsthöhne können entweder im Verkaufsbüro oder im Internet erworben werden. 90 % der Kartenkäufe im Internet und 35 % der Kartenkäufe im Verkaufsbüro werden von Personen getätigt, die jünger als 60 Jahre sind. Insgesamt werden 54 % der Kartenkäufe von Personen getätigt, die mindestens 60 Jahre alt sind.

Ein Kartenauf wird zufällig ausgewählt. Betrachtet werden folgende Ereignisse:

J: „Der Kauf wurde von einer Person getätigt, die jünger als 60 Jahre ist.“

V: „Der Kauf wurde im Verkaufsbüro getätigt.“

- 1 **a)** Beschreiben Sie im Sachzusammenhang das Ereignis $\bar{J} \cap \bar{V}$.
- 5 **b)** Ermitteln Sie, z. B. mithilfe eines Baumdiagramms, die Wahrscheinlichkeit p dafür, dass der Kauf im Internet getätigt wurde.
- (zur Kontrolle: $p = 0,2$)
- 3 **c)** Berechnen Sie für den Fall, dass der Kauf von einer Person getätigt wurde, die jünger als 60 Jahre ist, die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Kauf im Verkaufsbüro getätigt wurde.

Stochastik
Aufgabengruppe 2

BE

Unter den Touristen eines Naturparks nutzen erfahrungsgemäß 15 % das Fahrrad für Ausflüge vor Ort. Im Folgenden werden diese Touristen als Radausflügler bezeichnet. Es soll davon ausgegangen werden, dass in einer zufälligen Auswahl von Touristen des Naturparks die Anzahl der Radausflügler binomialverteilt ist.

1 Für eine Stichprobe werden 50 Touristen des Naturparks zufällig ausgewählt.

1 **a)** Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich in der Stichprobe genau fünf Radausflügler befinden.

3 **b)** Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Anzahl der Radausflügler in der Stichprobe um mindestens 10 % größer ist als der Erwartungswert für diese Anzahl.

2 Um den Naturpark als Reiseziel attraktiver zu machen, setzt der dortige Tourismusverband Shuttlebusse ein. Die Fahrkarten für diese Busse können ausschließlich online gebucht werden und sind jeweils für einen bestimmten Tag gültig. Erfahrungsgemäß werden 80 % aller gebuchten Fahrkarten spätestens am Vortag der Fahrt gebucht. Von diesen spätestens am Vortag gebuchten Fahrkarten werden 90 % auch tatsächlich genutzt. Bei den restlichen, erst am Tag der Fahrt gebuchten Fahrkarten liegt dieser Anteil mit 95 % etwas höher.

3 **a)** Stellen Sie den Sachverhalt in einem beschrifteten Baumdiagramm dar.

3 **b)** Betrachtet wird eine zufällig ausgewählte, nicht genutzte Fahrkarte. Beurteilen Sie die folgende Aussage:

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass diese Fahrkarte spätestens am Vortag gebucht wurde, ist achtmal so groß wie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sie erst am Tag der Fahrt gebucht wurde.

(Fortsetzung nächste Seite)

Der Tourismusverband vermutet, dass sich der bisherige Anteil der Rad-
ausflügler unter den Touristen von 15 % durch den Einsatz der Shuttlebusse
erhöht hat. Die Verantwortlichen planen die Durchführung eines Signifikanz-
tests mit einem Signifikanzniveau von 8 % und der Nullhypothese „Der Anteil
der Radausflügler unter allen Touristen liegt bei höchstens 15 %.“. Vor der
Durchführung des Tests wird festgelegt, die Shuttlebusse nur dann
weiterzubetreiben, wenn die Nullhypothese aufgrund des Testergebnisses
abgelehnt wird.

5 c) Es ist geplant, den Test auf der Grundlage einer Stichprobe von 200
Touristen durchzuführen. Bestimmen Sie die zugehörige Entscheidungs-
regel.

5 d) Angenommen, der beschriebene Test wird auf der Grundlage einer
Stichprobe von nur 100 Touristen durchgeführt. In diesem Fall wird die
Nullhypothese abgelehnt, wenn sich unter diesen mehr als 20 Rad-
ausflügler befinden. Damit die Wahrscheinlichkeit für den Fehler zweiter
Art höchstens 30 % beträgt, muss der tatsächliche Anteil der Rad-
ausflügler unter allen Touristen mindestens einen bestimmten Wert
haben. Ermitteln Sie diesen Wert auf ganze Prozent genau und
beschreiben Sie die Bedeutung des Fehlers zweiter Art im Sach-
zusammenhang.

Hinweis: Die unten abgebildete Tabelle ergänzt das zugelassene
Tafelwerk.

20

Binomialverteilung kumulativ; $k \mapsto \sum_{i=0}^k B(n;p;i)$

n	k	p = 0,22	p = 0,23	p = 0,24	p = 0,25	p = 0,26	p = 0,27	p = 0,28
100	...	...	...	...	...	...	...	...
	15	0,05379	0,03292	0,01944	0,01108	0,00611	0,00325	0,00168
	16	0,08876	0,05701	0,03531	0,02111	0,01219	0,00680	0,00367
	17	0,13750	0,09257	0,06008	0,03763	0,02275	0,01329	0,00750
	18	0,20089	0,14155	0,09616	0,06301	0,03985	0,02434	0,01437
	19	0,27805	0,20468	0,14532	0,09953	0,06579	0,04199	0,02589
	20	0,36619	0,28106	0,20819	0,14883	0,10270	0,06843	0,04404
	21	0,46089	0,36797	0,28382	0,21144	0,15211	0,10569	0,07093
	22	0,55681	0,46119	0,36959	0,28637	0,21444	0,15516	0,10849
	23	0,64856	0,55562	0,46145	0,37108	0,28871	0,21723	0,15801
	24	0,73158	0,64612	0,55451	0,46167	0,37244	0,29087	0,21980
	25	0,80277	0,72830	0,64385	0,55347	0,46186	0,37368	0,29286
	...	...	...	...	...	...	...	...

Geometrie

Aufgabengruppe 1

BE

Gegeben sind die Punkte $A(30|-5|-12)$, $B(30|13|0)$, $C(-30|13|0)$ und $D(-30|-5|-12)$, die in der Ebene E liegen.

- 3 a) Begründen Sie, dass das Viereck $ABCD$ ein Rechteck ist.
- 4 b) Bestimmen Sie eine Gleichung von E in Koordinatenform und geben Sie die besondere Lage von E im Koordinatensystem an.
- 3 c) Bestimmen Sie die Größe φ des Winkels, den E mit der x_1x_2 -Ebene einschließt.

(zur Kontrolle: $E : 2x_2 - 3x_3 - 26 = 0$)

(zur Kontrolle: $\varphi \approx 33,7^\circ$)

Im Folgenden wird ein Sperrwerk an einem Fluss betrachtet, das dem Schutz vor Überflutungen bei Sturmfluten dient. Ein Teil dieses Sperrwerks besteht aus zwei kreisförmigen Metallscheiben, an denen ein Sperrtor befestigt ist. Durch Drehung der Metallscheiben wird das Sperrtor in verschiedene Stellungen gebracht.

In einem Koordinatensystem werden die beiden Metallscheiben durch die Grund- und Deckfläche eines geraden Zylinders dargestellt. Die x_1 -Achse verläuft durch die Mittelpunkte dieser beiden Kreisflächen und entspricht der Drehachse der Metallscheiben.

Die Ebene E schneidet den Zylinder im Rechteck $ABCD$ und zerlegt diesen in zwei Teilkörper. Der kleinere Teilkörper entspricht dem Sperrtor in einer speziellen Stellung (vgl. Abbildung 1). Eine Längeneinheit entspricht einem Meter in der Realität.

Es wird vereinfachend ausschließlich ein Wasserstand betrachtet, bei dem die Wasseroberfläche im Modell in der x_1x_2 -Ebene liegt.

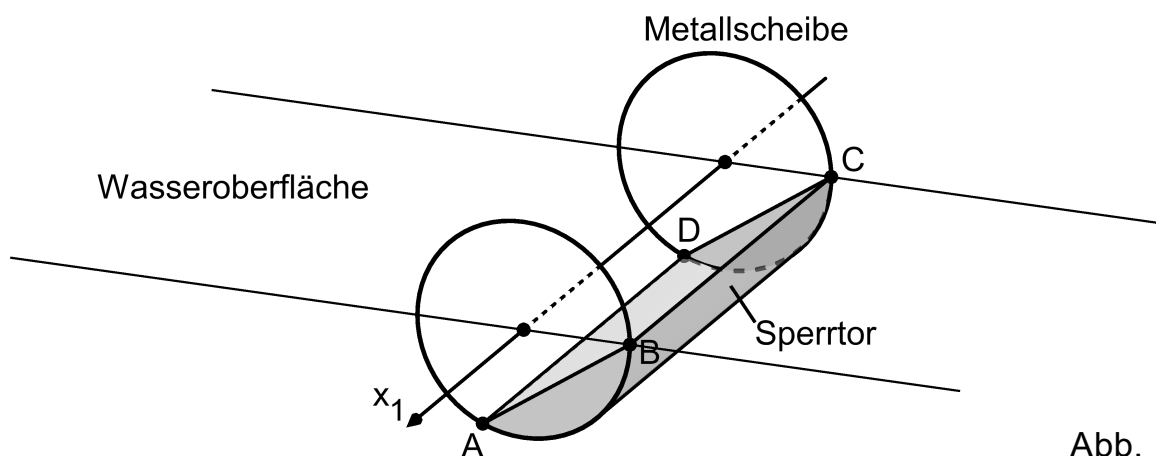


Abb. 1

(Fortsetzung nächste Seite)

- 2 **d)** Geben Sie den Durchmesser einer Metallscheibe und den Abstand der beiden Metallscheiben jeweils in Metern an.

Ist das Sperrtor geöffnet, so liegt dessen rechteckige Seitenfläche unterhalb der Wasseroberfläche und ist parallel zu ihr (vgl. Abbildung 2a). Ist das Sperrtor geschlossen, so steht die Seitenfläche senkrecht zur Wasseroberfläche (vgl. Abbildung 2b).

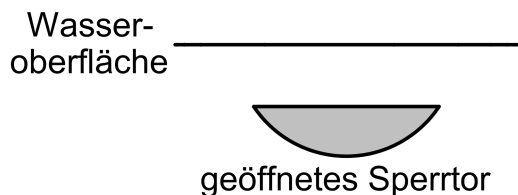


Abb. 2a

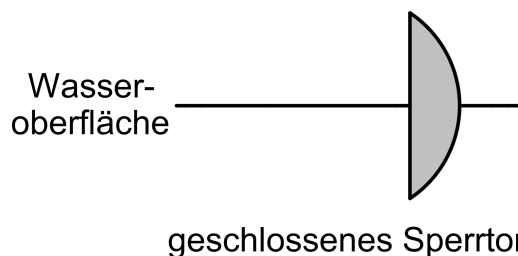


Abb. 2b

Bei einem Schließvorgang wird das geöffnete Sperrtor durch eine Vierteldrehung der Metallscheiben mit konstanter Geschwindigkeit innerhalb von 15 Minuten geschlossen.

- 3 **e)** Zu einem bestimmten Zeitpunkt während des Schließvorgangs befinden sich erstmals Teile des Sperrtors an der Wasseroberfläche. Bestimmen Sie mithilfe des Ergebnisses von Aufgabe c die Zeit, die ab diesem Zeitpunkt bis zum Ende des Schließvorgangs vergeht.

- 5 **f)** Die tiefste Stelle eines Schiffs bewegt sich im Modell auf der Gerade

$$g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ -17 \\ -8 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}. \text{ Beurteilen Sie anhand einer Rechnung, ob}$$

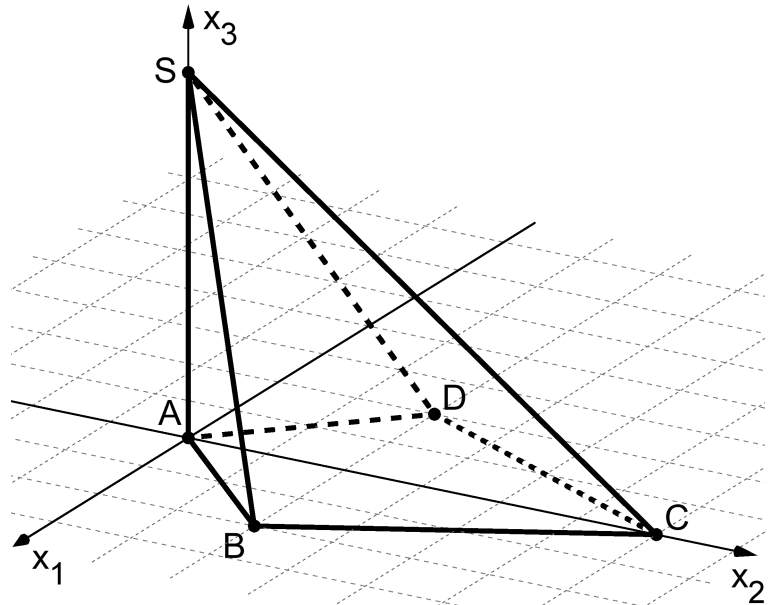
das Schiff das Sperrwerk passieren kann, wenn das Sperrtor geöffnet ist.

Geometrie

Aufgabengruppe 2

BE

Die Abbildung zeigt die Pyramide ABCDS. Ihre Grundfläche ABCD ist ein Drachenviereck mit den Eckpunkten $A(0|0|0)$, $B(2|2|0)$, $C(0|6|0)$ und $D(-2|2|0)$. Der Punkt $S(0|0|6)$ ist die Spitze der Pyramide.



- 4 a) Berechnen Sie die kleinste Kantenlänge sowie das Volumen der Pyramide ABCDS.

Die Seitenfläche BCS der Pyramide liegt in der Ebene E.

- 3 b) Betrachtet werden die Vektoren $\vec{n}$, deren Koordinaten nicht alle gleich null sind. Begründen Sie, dass folgende Aussage richtig ist:

Gilt für einen solchen Vektor $\vec{n} \circ \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$ und $\vec{n} \circ \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = 0$, so ist er ein

Normalenvektor von E.

- 3 c) Die Ebene E hat die Gleichung $2x_1 + x_2 + x_3 = 6$. Bestimmen Sie die Größe des Winkels, den E mit der x_1x_2 -Ebene einschließt.

Gegeben ist die Schar der Ebenen $F_k: k \cdot x_2 + (k-2) \cdot x_3 = 2k$ mit $k \in]0;3[$. Jede Ebene F_k der Schar schneidet die Pyramide ABCDS in einem Dreieck BDQ_k , wobei der Punkt Q_k auf der Strecke $[SC]$ liegt.

- 4 d) Geben Sie eine Gleichung der Ebene F_2 an und zeichnen Sie in die Abbildung die Schnittfigur von F_2 mit der Pyramide ABCDS ein.
- 6 e) Es gibt einen Wert von k, für den der Flächeninhalt des Dreiecks BDQ_k minimal ist. Ermitteln Sie diesen Wert.