

Mathematik

Abiturprüfung 2023

Prüfungsteil B (CAS)

Bei der Bearbeitung der Aufgaben dürfen als Hilfsmittel verwendet werden

- die vom Staatsministerium genehmigte Merkhilfe für das Fach Mathematik,
- eine der vom Staatsministerium zugelassenen stochastischen Tabellen,
- eine der vom Staatsministerium für Leistungserhebungen zugelassenen naturwissenschaftlichen Formelsammlungen,
- ein Taschenrechner, der den vom Staatsministerium getroffenen Regelungen entspricht,
- **ein Computeralgebrasystem, das den vom Staatsministerium getroffenen Regelungen entspricht.**

Zu den Themengebieten Analysis, Stochastik und Geometrie wählt der Fachausschuss jeweils eine Aufgabengruppe zur Bearbeitung aus. **Die zu einer Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil B dürfen nur in Verbindung mit den zur selben Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil A bearbeitet werden.**

| |
|---------------------------------|
| <hr/> <p>Name des Prüflings</p> |
|---------------------------------|

Das Geheft mit den Aufgabenstellungen ist abzugeben.

Analysis

Aufgabengruppe 1

BE

1 Gegeben ist die Funktion $f : x \mapsto \sqrt{25 - x^2}$ mit maximalem Definitionsbereich D . Ihr Graph wird mit G_f bezeichnet.

2 a) Geben Sie D und die Nullstellen von f an.

2 b) Zeigen Sie rechnerisch, dass jeder Punkt auf G_f den gleichen Abstand zum Koordinatenursprung hat.

Der Graph G_f ist ein Halbkreis.

Für $k \in]0;5[$ wird die Tangente an G_f im Punkt $P_k(k | f(k))$ mit t_k bezeichnet und die Ursprungsgerade durch P_k mit u_k (vgl. Abbildung 1).

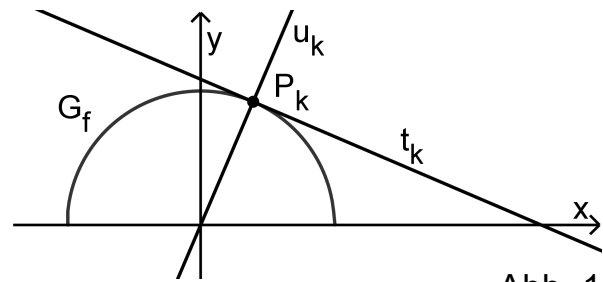


Abb. 1

2 c) Bestimmen Sie denjenigen Wert von k , für den die Tangente t_k mit der x -Achse einen Winkel mit einer Größe von 30° einschließt.

3 d) Weisen Sie rechnerisch nach, dass t_k und u_k zueinander senkrecht stehen.

Für jeden Wert $k \in]0;5[$ schließen t_k , u_k und die x -Achse ein Dreieck ein, dessen Flächeninhalt durch die in $]0;5[$ definierte Funktion $A : k \mapsto A(k)$ beschrieben wird.

3 e) Begründen Sie geometrisch, dass $\lim_{k \rightarrow 0} A(k) = +\infty$ und $\lim_{k \rightarrow 5} A(k) = 0$ gilt.

4 f) Weisen Sie nach, dass $A(k) = \frac{25}{2} \cdot \frac{\sqrt{25-k^2}}{k}$ ein Term von A ist.

4 g) Zeigen Sie, dass A in $]0;5[$ streng monoton abnimmt und genau eine Wendestelle besitzt. Geben Sie diese Wendestelle und ihre Bedeutung für den von k abhängigen Flächeninhalt des Dreiecks an.

(Fortsetzung nächste Seite)

2 Betrachtet wird die Funktion $g_b : x \mapsto \frac{b}{5} \cdot \sqrt{25 - x^2}$ mit maximalem Definitionsbereich und $b \in]0;5[$.

2 a) Beschreiben Sie, wie der Graph von g_b aus dem Graphen G_f aus Aufgabe 1 hervorgeht, und geben Sie die Wertemenge von g_b in Abhängigkeit von b an.

2 b) Der Graph von g_b schließt mit der x -Achse ein Flächenstück ein. Zeigen Sie, dass dieses Flächenstück den Inhalt $\frac{5}{2}b\pi$ hat.

Der Graph von g_b geht durch Spiegelung an der x -Achse in den Graphen der Funktion g_b^* über. Die Graphen von g_b und g_b^* bilden zusammen eine Ellipse, die beispielhaft für einen bestimmten Wert von b in Abbildung 2 als durchgezogene Linie dargestellt ist.

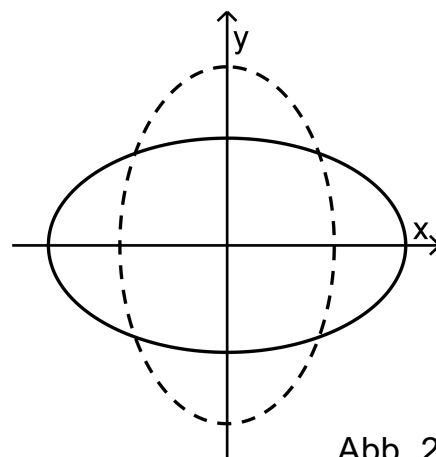


Abb. 2

1 c) Geben Sie einen Funktionsterm von g_b^* an.

3 d) Durch eine 90° -Drehung der Ellipse um den Koordinatenursprung entsteht eine weitere Ellipse, die in Abbildung 2 als gestrichelte Linie dargestellt ist. Ermitteln Sie einen Term einer Funktion, deren Graph im ersten Quadranten mit dieser weiteren Ellipse übereinstimmt.

In einem bestimmten Planetensystem bewegt sich ein Planet auf einer elliptischen Bahn um einen Stern. Der Graph G_h der in $[-2;8]$ definierten Funktion

$$h : x \mapsto \frac{4}{5} \cdot \sqrt{-x^2 + 6x + 16}$$

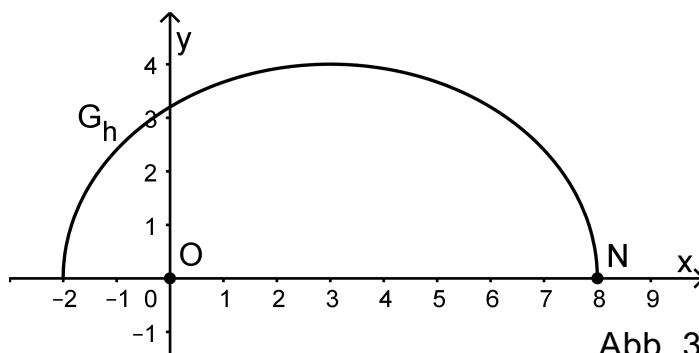


Abb. 3

beschreibt modellhaft einen

Teil dieser Bahn. In diesem Modell entspricht die Position des Sterns dem Koordinatenursprung O und die Position, an der der Planet den größten Abstand vom Stern besitzt, dem Punkt $N(8|0)$ (vgl. Abbildung 3).

1 e) Weisen Sie rechnerisch nach, dass G_h aus dem Graphen der Funktion g_4 durch Verschiebung um 3 in positive x -Richtung hervorgeht.

(Fortsetzung nächste Seite)

Die Punkte $B_a (a | h(a))$ mit $a \in [-2; 8]$ entsprechen den Positionen des Planeten auf dem modellierten Teil seiner Bahn.

Für die Bewegung des Planeten gilt im Modell: Die Strecke $[OB_a]$ überstreicht in gleichen Zeitabschnitten Flächenstücke gleich großen Inhalts.

Das bedeutet für $a_1, a_2, a_3, a_4 \in [-2; 8]$ mit $a_1 < a_2$ und $a_3 < a_4$: Wenn der Planet für den Bahnabschnitt, der im Modell durch die Punkte B_{a_1} und B_{a_2} begrenzt wird, die gleiche Zeit benötigt wie für den Bahnabschnitt, der durch die Punkte B_{a_3} und B_{a_4} begrenzt wird, so hat das Flächenstück, das von G_h , $[OB_{a_1}]$ und $[OB_{a_2}]$ eingeschlossen wird, den gleichen Inhalt wie das Flächenstück, das von G_h , $[OB_{a_3}]$ und $[OB_{a_4}]$ eingeschlossen wird (vgl. Abbildung 4).

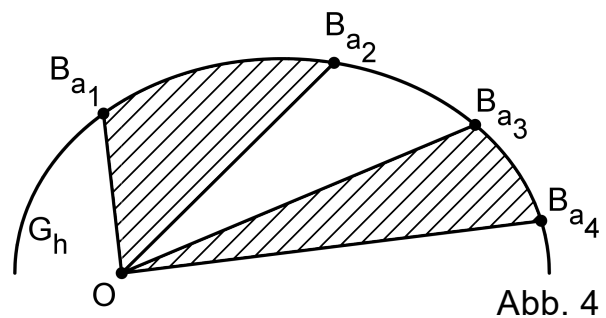


Abb. 4

- 4 **f)** Es gibt einen Wert $a^* > 0$, für den das von G_h , $[OB_{a^*}]$ und $[ON]$ eingeschlossene Flächenstück den gleichen Inhalt hat wie das Flächenstück, das G_h im zweiten Quadranten mit den Koordinatenachsen einschließt. Ermitteln Sie diesen Wert a^* .

(zur Kontrolle: $a^* \approx 7,8$)

- 4 **g)** Zeichnen Sie den Punkt B_{a^*} in Abbildung 3 ein. Begründen Sie anhand von Abbildung 3, dass die mittlere Bahngeschwindigkeit des Planeten in dem Bahnabschnitt, der im Modell im zweiten Quadranten durch die Schnittpunkte von G_h mit den Koordinatenachsen begrenzt wird, größer ist als die mittlere Bahngeschwindigkeit des Planeten auf dem im Modell durch N und B_{a^*} im ersten Quadranten begrenzten Bahnabschnitt.

- 3 **h)** Der Planet benötigt für den in Aufgabe 2g beschriebenen Bahnabschnitt, der im Modell im zweiten Quadranten liegt, drei Tage. Berechnen Sie die Zeit, die der Planet für einen vollständigen Umlauf um den Stern benötigt.

Analysis
Aufgabengruppe 2

BE

1 Auf einer Autobahn entsteht morgens an einer Baustelle häufig ein Stau. An einem bestimmten Tag entsteht der Stau um 06:00 Uhr und löst sich bis 10:00 Uhr vollständig auf. Für diesen Tag kann die momentane Änderungsrate der Staulänge mithilfe der in \mathbb{R} definierten Funktion f mit $f(x) = x \cdot (8 - 5x) \cdot \left(1 - \frac{x}{4}\right)^2$ beschrieben werden. Dabei gibt x die nach 06:00 Uhr vergangene Zeit in Stunden und $f(x)$ die momentane Änderungsrate der Staulänge in Kilometern pro Stunde an.

3 **a)** Nennen Sie die Zeitpunkte, zu denen die momentane Änderungsrate der Staulänge den Wert null hat, und begründen Sie anhand der Struktur des Funktionsterms von f , dass es keine weiteren solchen Zeitpunkte gibt.

1 **b)** Es gilt $f(2) < 0$. Geben Sie die Bedeutung dieser Tatsache im Sachzusammenhang an.

3 **c)** Bestimmen Sie den Zeitpunkt, zu dem die Staulänge am stärksten zunimmt. Zeigen Sie, dass der zugehörige Wert der momentanen Änderungsrate zwischen $2 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ und $3 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ liegt.

2 **d)** Geben Sie den Zeitpunkt an, zu dem der Stau am längsten ist. Begründen Sie Ihre Angabe.

Im Sachzusammenhang ist neben der Funktion f die in \mathbb{R} definierte Funktion s mit $s(x) = \left(\frac{x}{4}\right)^2 \cdot (4 - x)^3$ von Bedeutung.

4 **e)** Begründen Sie, dass die folgende Aussage richtig ist:

Die Staulänge kann für jeden Zeitpunkt von 06:00 Uhr bis 10:00 Uhr durch die Funktion s angegeben werden.

Bestätigen Sie rechnerisch, dass sich der Stau um 10:00 Uhr vollständig aufgelöst hat.

3 **f)** Berechnen Sie die Zunahme der Staulänge von 06:30 Uhr bis 08:00 Uhr und bestimmen Sie für diesen Zeitraum die mittlere Änderungsrate der Staulänge.

3 **g)** Bestimmen Sie denjenigen Zeitpunkt zwischen 06:00 Uhr und 10:00 Uhr, zu dem die Staulänge 0,5 km geringer ist als eine Stunde vorher.

(Fortsetzung nächste Seite)

3

h) Für einen anderen Tag wird die momentane Änderungsrate der Staulänge für den Zeitraum von 06:00 Uhr bis 10:00 Uhr durch den in der Abbildung 1 gezeigten Graphen dargestellt. Dabei ist x die nach 06:00 Uhr vergangene Zeit in Stunden und y die momentane Änderungsrate der Staulänge in Kilometern pro Stunde.

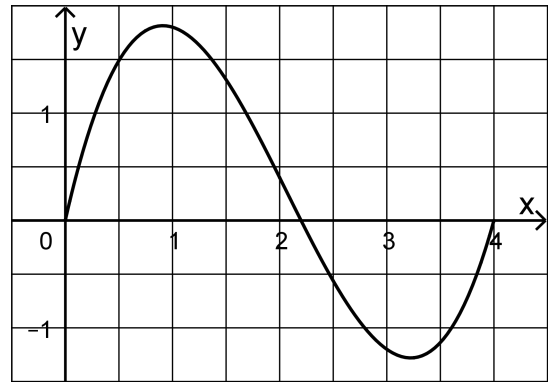


Abb. 1

Um 07:30 Uhr hat der Stau eine bestimmte Länge. Es gibt einen anderen Zeitpunkt, zu dem der Stau die gleiche Länge hat. Markieren Sie diesen Zeitpunkt in der Abbildung 1, begründen Sie Ihre Markierung und veranschaulichen Sie Ihre Begründung in der Abbildung 1.

2 Betrachtet wird die Schar der in \mathbb{R} definierten Funktionen h_k mit $h_k(x) = (x-3)^k + 1$ und $k \in \{1; 2; 3; \dots\}$.

3 **a)** Das Verhalten von h_k für $x \rightarrow -\infty$ ist abhängig von k . Geben Sie die dabei auftretenden Fälle des Verhaltens und für diese Fälle jeweils einen passenden Wert von k an. Begründen Sie jeweils die Angabe des Werts von k .

3 **b)** Ermitteln Sie die Koordinaten derjenigen Punkte, die alle Graphen der Schar gemeinsam haben.

5 **c)** Die erste Ableitungsfunktion von h_k wird mit h'_k bezeichnet. Beurteilen Sie die folgende Aussage:

Es gibt genau einen Wert von k , für den der Graph von h'_k Tangente an den Graphen von h_k ist.

7 **d)** Die Graphen von h_k und h'_k werden in der Abbildung 2 für $k = 4$ beispielhaft für gerade Werte von k gezeigt, in der Abbildung 3 für $k = 5$ beispielhaft für ungerade Werte von k .

Für $k \geq 4$ werden die Punkte $P(4 | h_k(4))$, $Q(4 | h'_k(4))$, $R(2 | h_k(2))$ und $S(2 | h'_k(2))$ betrachtet. Diese Punkte sind jeweils Eckpunkte eines Vierecks.

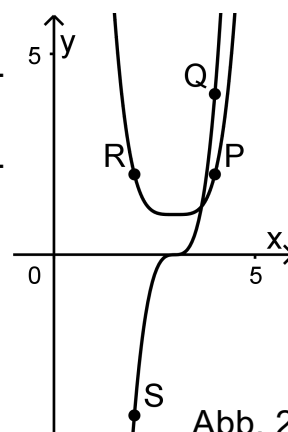


Abb. 2

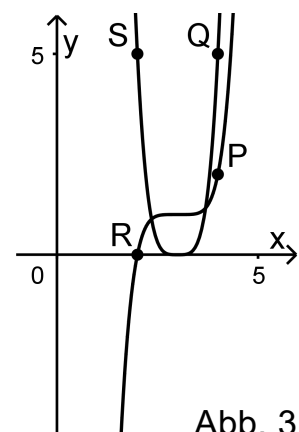


Abb. 3

Begründen Sie, dass jedes dieser Vierecke ein Trapez ist, und zeigen Sie, dass die folgende Aussage richtig ist:

Für jeden geraden Wert von k mit $k \geq 4$ stimmen der Flächeninhalt des Trapezes für k und der Flächeninhalt des Trapezes für $k + 1$ überein.

Stochastik

Aufgabengruppe 1

BE

- 1 Im Dezember 2021 wurden in Norwegen rund 14 000 Pkw neu zugelassen. In einer vereinfachten Übersicht sind die Anteile der verschiedenen Antriebsarten an diesen Neuzulassungen dargestellt:

| Pkw mit Elektromotor | | Pkw ohne Elektromotor (Verbrenner) | | |
|----------------------|----------------|------------------------------------|--------|----------|
| rein elektrisch | Plug-in-Hybrid | Benzin | Diesel | Sonstige |
| 65 % | 25 % | 3 % | 4 % | 3 % |

Für eine Untersuchung werden aus diesen Neuzulassungen 200 Fahrzeuge zufällig ausgewählt und deren Besitzer nach den Gründen für die Wahl der Antriebsart befragt. Da aus einer großen Anzahl von Fahrzeugen nur verhältnismäßig wenige ausgewählt werden, wird das Urnenmodell „Ziehen mit Zurücklegen“ verwendet.

- 4 a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:
 D: „Unter den ausgewählten Pkw befinden sich sieben oder acht Verbrenner mit Dieselmotor.“
 E: „Unter den ausgewählten Pkw befinden sich mehr als 135 mit rein elektrischem Antrieb.“
- 3 b) Geben Sie im Sachzusammenhang ein Ereignis an, dessen Wahrscheinlichkeit mit dem Term $\sum_{k=0}^{25} \binom{200}{k} \cdot 0,1^k \cdot (1-0,1)^{200-k}$ berechnet werden kann.
- 2 c) Die Zufallsgröße X beschreibt die Anzahl der Pkw mit Elektromotor unter den ausgewählten Fahrzeugen. Berechnen Sie den Erwartungswert und die Standardabweichung von X.
- 3 d) Für einen bestimmten Wert $n \in \{1;2;3;\dots\}$ werden für $p \in]0;1[$ die binomialverteilten Zufallsgrößen Z_p mit den Parametern n und p betrachtet. Weisen Sie nach, dass unter diesen Zufallsgrößen diejenige mit $p = 0,5$ die größte Varianz hat.
- 3 e) Aus den neu zugelassenen Pkw mit Elektromotor werden 40 Fahrzeuge zufällig ausgewählt. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich darunter genau zehn Plug-in-Hybride befinden.

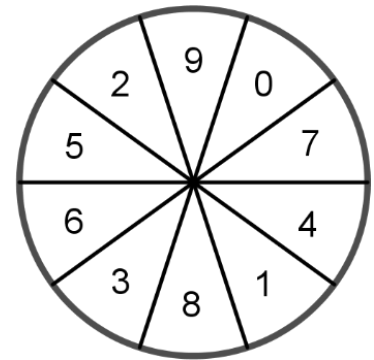
(Fortsetzung nächste Seite)

- 5 **2** In Deutschland waren zu Beginn des Jahres 2021 etwa 320 000 Pkw mit rein elektrischem Antrieb und 280 000 Plug-in-Hybride zugelassen, also insgesamt etwa 600 000 Pkw mit Elektromotor. Der Anteil der Pkw mit Elektromotor am Gesamtbestand aller in Deutschland zugelassenen Pkw betrug rund 1,2 %. Bestimmen Sie die Anzahl der Pkw, die aus diesem Gesamtbestand mindestens zufällig ausgewählt werden müssen, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 97 % mindestens ein Pkw mit rein elektrischem Antrieb darunter ist.
- 3 Ein Autozulieferer hat zwei Betriebsstandorte A und B. Die Zahl der Beschäftigten am Standort A ist viermal so groß wie am Standort B. 60 % aller Beschäftigten des Autozulieferers haben sich für den Kauf eines Jobtickets entschieden, mit dem die Firma die Nutzung des öffentlichen Personennahverkehrs für den Weg zur Arbeit fördert.
- 2 **a)** Bestimmen Sie unter der Annahme, dass der Anteil der Beschäftigten mit einem Jobticket an beiden Standorten gleich ist, die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufällig ausgewählter Beschäftigter des Autozulieferers am Standort B arbeitet und kein Jobticket besitzt.
- 3 **b)** Tatsächlich ist der Anteil der Beschäftigten mit einem Jobticket an beiden Standorten unterschiedlich; am Standort B besitzt nur die Hälfte der Beschäftigten ein Jobticket. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufällig ausgewählter Beschäftigter des Autozulieferers, der ein Jobticket besitzt, am Standort A arbeitet.

Stochastik
Aufgabengruppe 2

BE

Die Sektoren des abgebildeten Glücksrads sind gleich groß und mit den Zahlen von 0 bis 9 durchnummeriert.



- 3 **1** Das Glücksrad wird zwanzigmal gedreht. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse A und B.
A: „Es wird genau siebenmal eine ungerade Zahl erzielt.“
B: „Es wird mehr als siebenmal und höchstens zwölfmal eine ungerade Zahl erzielt.“
- 5 **2** Das Glücksrad wird zweimal gedreht. Untersuchen Sie, ob die Ereignisse C und D stochastisch unabhängig sind.
C: „Die Summe der erzielten Zahlen ist kleiner als 4.“
D: „Das Produkt der erzielten Zahlen ist 2 oder 3.“
- 3** Mit dem Glücksrad wird ein Spiel durchgeführt. Jeder Spieler darf das Glücksrad beliebig oft drehen. Beendet er das Spiel selbst, bevor er eine „0“ erzielt, so wird ihm die Summe der erzielten Zahlen in Euro ausgezahlt. Erzielt er eine „0“, so ist das Spiel dadurch beendet und es erfolgt keine Auszahlung.
- 2 **a)** Ein erster Spieler entscheidet sich vor dem Spiel dafür, das Glücksrad, sofern er keine „0“ erzielt, viermal zu drehen und danach das Spiel zu beenden. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass er eine Auszahlung erhält.
- 4 **b)** Bei einem zweiten Spieler beträgt nach mehrmaligem Drehen des Glücksrads die Summe der erzielten Zahlen 60. Er möchte nun das Spiel entweder sofort beenden oder das Glücksrad genau ein weiteres Mal drehen. Berechnen Sie für den Fall, dass sich der Spieler für die weitere Drehung entscheiden sollte, den Erwartungswert für die Auszahlung. Geben Sie eine Empfehlung ab, ob sich der Spieler für das Beenden des Spiels oder für die weitere Drehung entscheiden sollte, und begründen Sie Ihre Empfehlung.

(Fortsetzung nächste Seite)

- 4 c) Wenn sich ein Spieler vor dem Spiel dafür entscheidet, das Glücksrad, sofern er keine „0“ erzielt, n -mal zu drehen, dann kann der Erwartungswert für die Auszahlung mit dem Term $5n \cdot 0,9^n$ berechnet werden. Beurteilen Sie die folgende Aussage:

Es gibt zwei, aber nicht drei aufeinanderfolgende Werte von n , für die die Erwartungswerte für die Auszahlung übereinstimmen.

- 4 Im Folgenden wird ein Glücksrad mit n gleich großen Sektoren, die mit den Zahlen von 0 bis $n - 1$ durchnummeriert sind, betrachtet.

- 3 a) Bestimmen Sie für $n = 5$ die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei dreimaligem Drehen des Glücksrads genau zwei gleiche Zahlen erzielt werden.

- 4 b) Das Glücksrad wird n -mal gedreht. Ermitteln Sie den kleinstmöglichen Wert von n , für den die Wahrscheinlichkeit dafür, dass alle Zahlen verschieden sind, kleiner als 1% ist.

Geometrie

Aufgabengruppe 1

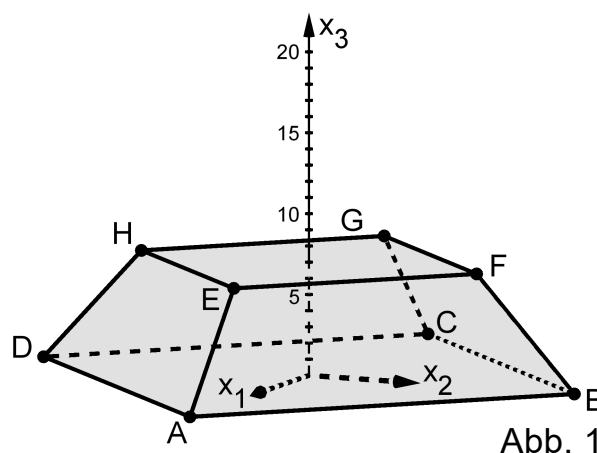
BE

Gegeben sind die Punkte $A(19|0|0)$, $B(0|19|0)$, $E(12|0|7)$ und $F(0|12|7)$ (vgl. Abbildung 1). Das Viereck ABFE liegt in der Ebene L.

- 3 a) Weisen Sie nach, dass das Viereck ABFE ein Trapez mit zwei gleich langen Seiten ist.
- 4 b) Bestimmen Sie eine Gleichung von L in Koordinatenform sowie die Größe φ des Winkels, den L mit der x_1x_2 -Ebene einschließt.

(zur Kontrolle: $x_1 + x_2 + x_3 - 19 = 0$; $\varphi \approx 55^\circ$)

Abbildung 1 zeigt den Körper ABCDEFGH, bei dem die quadratische Grundfläche ABCD parallel zur quadratischen Deckfläche EFGH liegt. Der Körper ist symmetrisch sowohl bezüglich der x_1x_3 -Ebene als auch bezüglich der x_2x_3 -Ebene. Außerdem werden die Punkte $S_k(0|0|k)$ mit $k \in]7; +\infty[$ betrachtet, die Spitzen von Pyramiden EFGH S_k sind.



- 4 c) Bestimmen Sie rechnerisch denjenigen Wert von k , für den die Pyramide EFGH S_k den Körper ABCDEFGH zu einer großen Pyramide ABCD S_k ergänzt. Ermitteln Sie das Volumen des Körpers ABCDEFGH.

(zur Kontrolle: $k = 19$)

- 4 d) Zeichnen Sie die Pyramide EFGH S_{15} in Abbildung 1 ein. Die Seitenfläche EFS $_{15}$ und die Grundfläche EFGH dieser Pyramide schließen einen Winkel ein. Begründen Sie ohne weitere Rechnung, dass die Größe dieses Winkels kleiner als 45° ist; verwenden Sie dazu folgende Information:

Für den Mittelpunkt M des Quadrats EFGH und den Punkt N mit $\vec{N} = \frac{1}{2} \cdot (\vec{E} + \vec{F})$ gilt $\overline{MS_{15}} < \overline{MN}$.

Der Körper ABCDEFGH S_{15} stellt modellhaft die Knickpyramide des Pharaos Snofru dar, die ca. 2650 v. Chr. in Ägypten erbaut wurde (vgl. Abbildung 2). Dabei beschreibt die x_1x_2 -Ebene den horizontalen Boden; eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht 7 m in der Realität.



Abb. 2

(Fortsetzung nächste Seite)

Ursprünglich wurde mit dem Bau einer Pyramide begonnen, die im Modell der Pyramide $ABCD S_{19}$ entspricht. Aufgrund von Stabilitätsproblemen im Bauprozess musste die Neigung der Seitenflächen gegenüber dem Boden beim Erreichen einer bestimmten Höhe verändert werden. Der entstandene Knick ist namensgebend für die Pyramide.

- 3 e) Bestimmen Sie die Höhenänderung des Bauwerks, die durch die Bauplanänderung hervorgerufen wurde, in Metern. Begründen Sie, dass im unteren Teil des Bauwerks der Neigungswinkel der Seitenflächen gegenüber dem Boden um mehr als 9° größer ist als im oberen Teil des Bauwerks.

Zu einem bestimmten Zeitpunkt fallen auf die Knickpyramide Sonnenstrahlen, die im Modell durch parallele Geraden mit dem Richtungsvektor $\vec{S}_{15}E$ dargestellt werden. Der Schatten der Spitze der Knickpyramide auf dem horizontalen Boden wird durch den Punkt T beschrieben. Die Lote durch die Punkte E, F, G, H und S_{15} auf die x_1x_2 -Ebene schneiden diese in den Punkten E' , F' , G' , H' bzw. S' . Diese sind zusammen mit der Grundfläche der Pyramide und dem Punkt T in Abbildung 3 dargestellt.

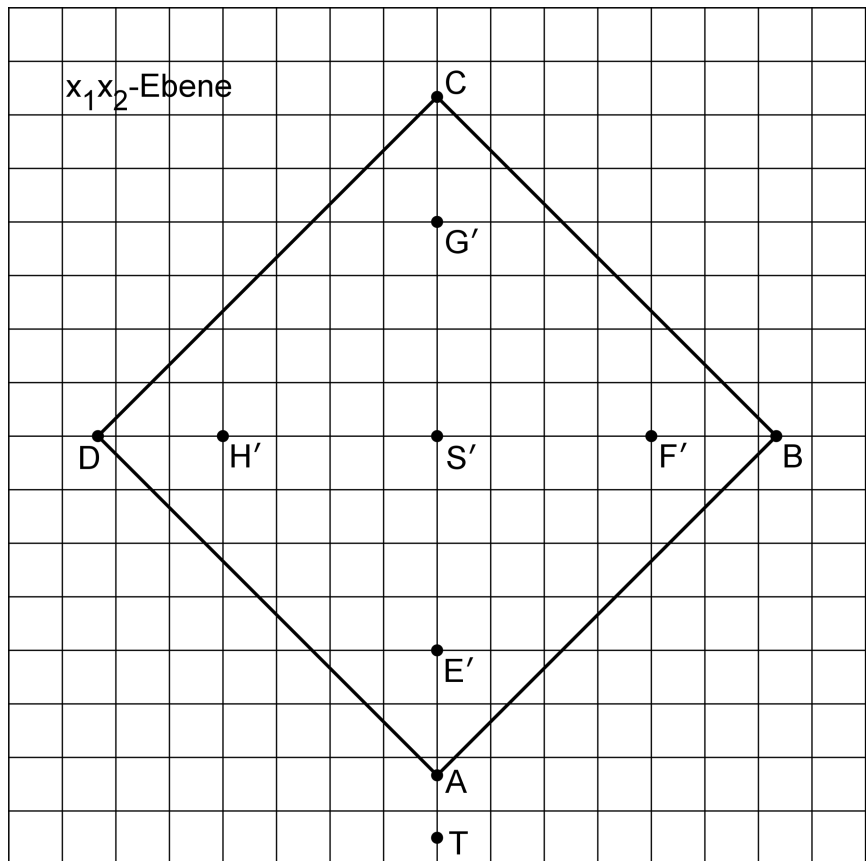


Abb. 3

- 3 f) Berechnen Sie die Koordinaten von T.
- 4 g) Der Schattenbereich der gesamten Pyramide auf dem Boden besteht im Modell aus zwei kongruenten Vierecken. Zeichnen Sie diesen Schattenbereich in Abbildung 3 ein und geben Sie die besondere Form der genannten Vierecke an.

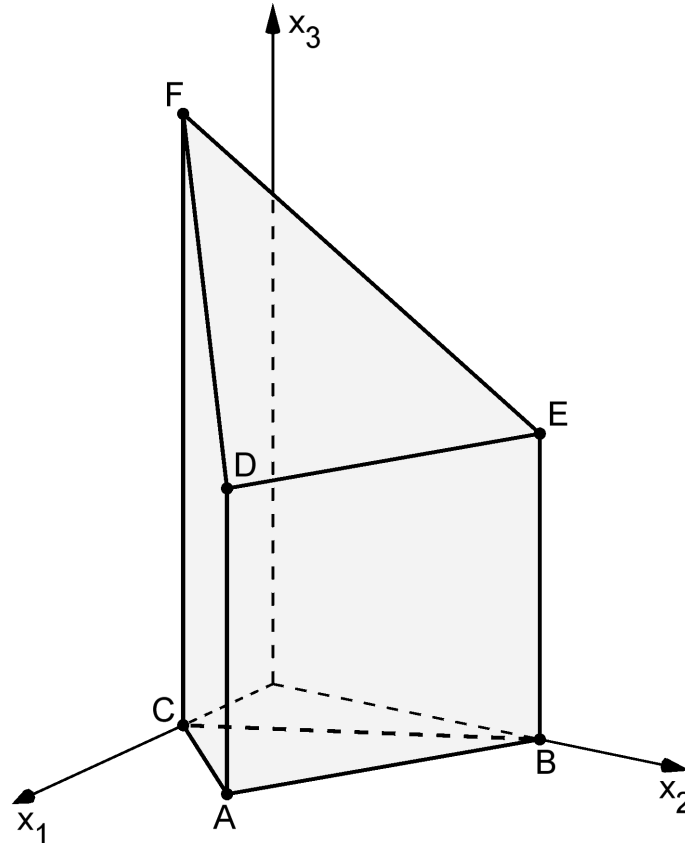
Geometrie

Aufgabengruppe 2

BE

Die Abbildung zeigt den Körper ABCDEF mit $A(6|3|0)$, $B(0|6|0)$, $C(3|0|0)$, $D(6|3|6)$, $E(0|6|6)$ und $F(3|0|12)$.

Die Punkte D, E und F liegen in der Ebene L.



- 3 a) Ermitteln Sie eine Gleichung von L in Koordinatenform.
(zur Kontrolle: $2x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 42 = 0$)
- 3 b) Bestimmen Sie die Größe des Winkels, den L mit der x_1x_2 -Ebene einschließt.
- 3 c) Der Flächeninhalt des Dreiecks ABC kann mit dem Term $6 \cdot 6 - \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 6$ berechnet werden. Veranschaulichen Sie diese Tatsache durch geeignete Eintragungen in der Abbildung.
- 3 d) Berechnen Sie das Volumen des Körpers ABCDEF.

(Fortsetzung nächste Seite)

- 4 e) Die Ebene N_k enthält die x_3 -Achse und den Punkt $P_k(1-k | k | 0)$ mit $k \in]0;1[$. Welche Kanten des Körpers von N_k geschnitten werden, ist abhängig von k . Durchläuft k alle Werte zwischen 0 und 1, so gibt es Bereiche $]a;b[$, für die jeweils gilt, dass N_k für alle Werte von $k \in]a;b[$ die gleichen Kanten des Körpers schneidet. Bestimmen Sie den größten dieser Bereiche und geben Sie die zugehörigen Kanten an.
- 6 f) Der Punkt $R(0 | 6 | 2)$ liegt auf der Kante $[BE]$. Weisen Sie nach, dass es genau einen Punkt Q auf der Kante $[AD]$ gibt, sodass das Dreieck FQR rechtwinklig ist, und bestimmen Sie die x_3 -Koordinate von Q .
- 3 g) Der Körper wird so um die Gerade AB gedreht, dass der mit D bezeichnete Eckpunkt nach der Drehung in der x_1x_2 -Ebene liegt und dabei eine positive x_2 -Koordinate hat. Die folgenden Rechnungen liefern die Lösung einer Aufgabe im Zusammenhang mit der beschriebenen Drehung:

$$\begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0,8, \text{ d. h. } S(4,8 | 3,6 | 0)$$

$$\bar{T} = \bar{S} + |\overline{CS}| \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Formulieren Sie eine passende Aufgabenstellung und geben Sie die Bedeutung von S an.