Mathematik

Abiturprüfung 2023

Prüfungsteil A (CAS)

Bei der Bearbeitung der Aufgaben dürfen **keine Hilfsmittel** verwendet werden.

Zu den Themengebieten Analysis, Stochastik und Geometrie wählt der Fachausschuss jeweils eine Aufgabengruppe zur Bearbeitung aus. **Die zu einer Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil A dürfen nur in Verbindung mit den zur selben Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil B bearbeitet werden.**

Name des Prüflings

Das Geheft mit den Aufgabenstellungen ist abzugeben.

Analysis

Aufgabengruppe 1

Diese Aufgaben dürfen nur in Verbindung mit den zur selben Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil B bearbeitet werden.

BE

1 Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto \ln(x-3)$ mit maximaler Definitionsmenge D und Ableitungsfunktion f'.

2 **a)** Geben Sie D sowie die Nullstelle von f an.

3 **b)** Ermitteln Sie diejenige Stelle $x \in D$, für die $f'(x) = 2$ gilt.

2 Gegeben ist die in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ definierte Funktion $g: x \mapsto \frac{1}{x^2} - 1$.

2 **a)** Geben Sie eine Gleichung der waagrechten Asymptote des Graphen von g sowie die Wertemenge von g an.

3 **b)** Berechnen Sie den Wert des Integrals $\int_{\frac{1}{2}}^{2} g(x)\,dx$.

3 Eine in $\mathbb{R}$ definierte ganzrationale, nicht lineare Funktion f mit erster Ableitungsfunktion f' und zweiter Ableitungsfunktion f'' hat folgende Eigenschaften:

- f hat bei x_1 eine Nullstelle.
- Es gilt $f'(x_2) = 0$ und $f''(x_2) \neq 0$.
- f' hat ein lokales Minimum an der Stelle x_3.

Abbildung 1 zeigt die Positionen von x_1, x_2 und x_3.

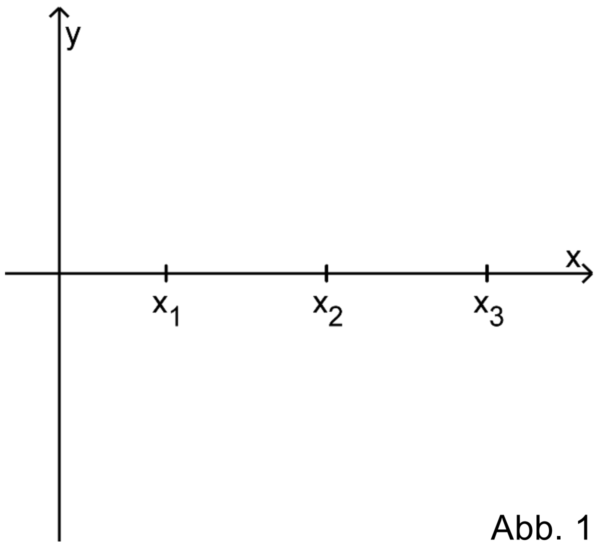

Abb. 1

2 **a)** Begründen Sie, dass der Grad von f mindestens 3 ist.

3 **b)** Skizzieren Sie in Abbildung 1 einen möglichen Graphen von f.

(Fortsetzung nächste Seite)

4 Abbildung 2 zeigt den Graphen der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion g, dessen einzige Extrempunkte $(-1|1)$ und $(0|0)$ sind, sowie den Punkt P.

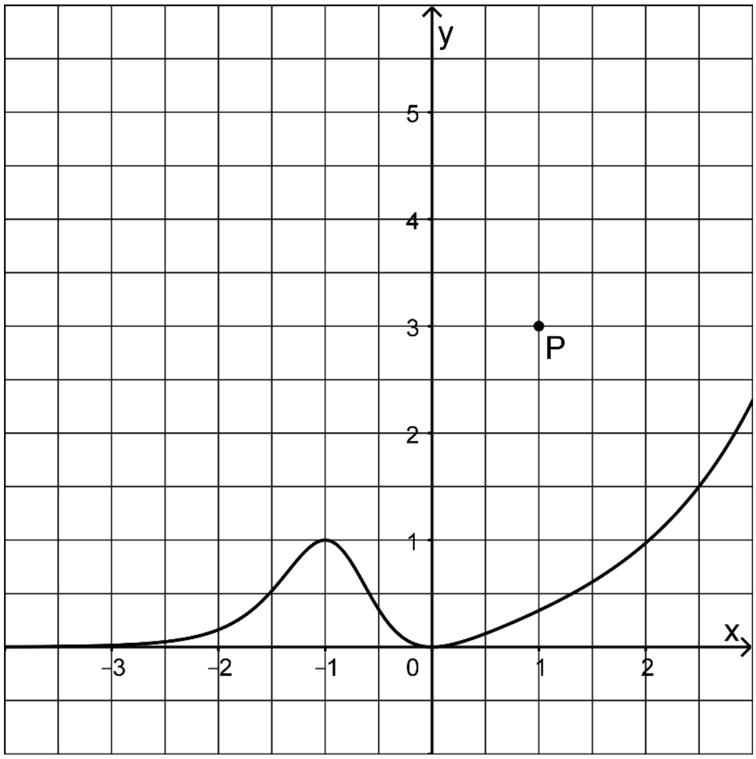

Abb. 2

2 **a)** Geben Sie die Koordinaten des Tiefpunkts des Graphen der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion h mit $h(x) = -g(x-3)$ an.

3 **b)** Der Graph einer Stammfunktion von g verläuft durch P. Skizzieren Sie diesen Graphen in Abbildung 2.

20

Analysis

Aufgabengruppe 2

Diese Aufgaben dürfen nur in Verbindung mit den zur selben Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil B bearbeitet werden.

BE

1 Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto \frac{e^x}{e^x - 2}$ mit maximalem Definitionsbereich D.

3 **a)** Bestimmen Sie D und geben Sie die Koordinaten des Schnittpunkts des Graphen von f mit der y-Achse an.

2 **b)** Geben Sie einen Term der ersten Ableitungsfunktion von f an.

2 Gegeben ist die in $\mathbb{R}_0^+$ definierte Funktion $g: x \mapsto \sqrt{x} + 1$.

3 **a)** Bestimmen Sie eine Gleichung der Tangente an den Graphen von g im Punkt $(1 | g(1))$.

2 **b)** Die Funktion g ist umkehrbar. Die Umkehrfunktion g^{-1} von g ist in $[1; +\infty[$ definiert. Bestimmen Sie einen Term von g^{-1}.

3 Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $f: x \mapsto -x^2 + 2ax$ mit $a \in]1; +\infty[$. Die Nullstellen von f sind 0 und 2a.

2 **a)** Zeigen Sie, dass das Flächenstück, das der Graph von f mit der x-Achse einschließt, den Inhalt $\frac{4}{3}a^3$ hat.

3 **b)** Der Hochpunkt des Graphen von f liegt auf einer Seite eines Quadrats; zwei Seiten dieses Quadrats liegen auf den Koordinatenachsen (vgl. Abbildung 1). Der Flächeninhalt des Quadrats stimmt mit dem Inhalt des Flächenstücks, das der Graph von f mit der x-Achse einschließt, überein. Bestimmen Sie den Wert von a.

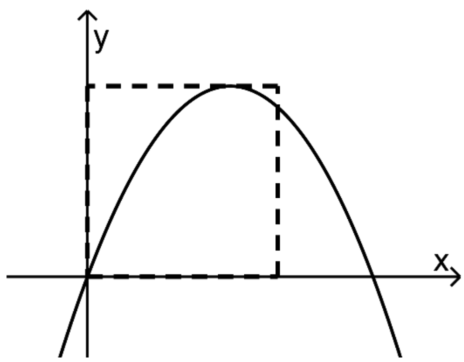

Abb. 1

(Fortsetzung nächste Seite)

4 Abbildung 2 zeigt den Graphen der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion g, dessen einzige Extrempunkte $(-1|1)$ und $(0|0)$ sind, sowie den Punkt P.

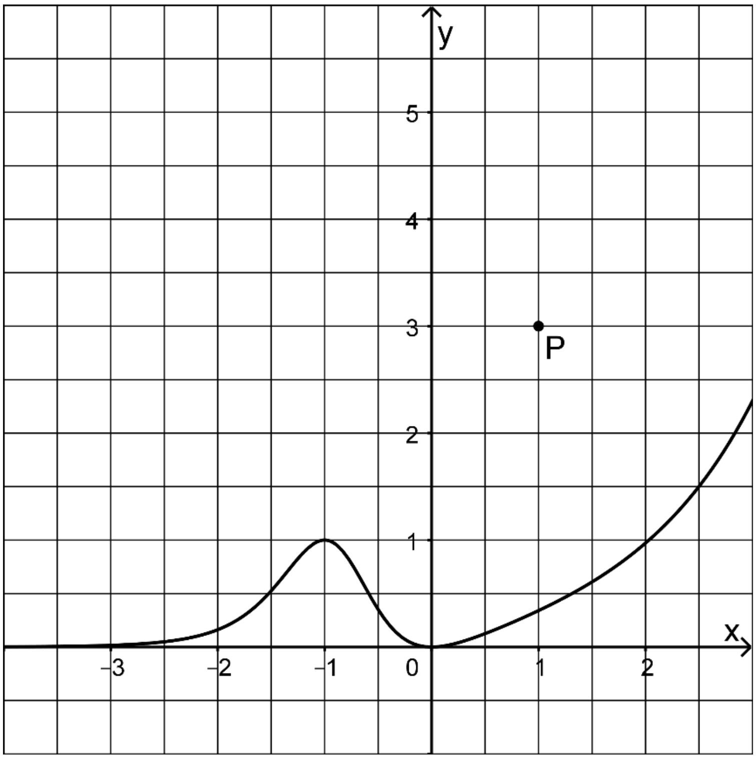

Abb. 2

2 **a)** Geben Sie die Koordinaten des Tiefpunkts des Graphen der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion h mit $h(x) = -g(x-3)$ an.

3 **b)** Der Graph einer Stammfunktion von g verläuft durch P. Skizzieren Sie diesen Graphen in Abbildung 2.

20

Stochastik

Aufgabengruppe 1

Diese Aufgaben dürfen nur in Verbindung mit den zur selben Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil B bearbeitet werden.

BE

Die vier Seiten eines regelmäßigen Tetraeders sind mit den Zahlen 1, 2, 3 und 4 durchnummeriert. Das Tetraeder wird fünfmal geworfen.

2 **a)** Geben Sie im Sachzusammenhang ein Ereignis an, dessen Wahrscheinlichkeit mit dem Term $\left(\frac{3}{4}\right)^5$ berechnet werden kann, und begründen Sie Ihre Angabe.

3 **b)** Geben Sie einen Term an, mit dem die Wahrscheinlichkeit dafür berechnet werden kann, dass jede Zahl mindestens einmal erzielt wird.

5

Stochastik

Aufgabengruppe 2

Diese Aufgaben dürfen nur in Verbindung mit den zur selben Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil B bearbeitet werden.

BE

In einen leeren Behälter werden drei Kugeln gelegt. Dabei wird die Farbe jeder Kugel durch Werfen eines Würfels festgelegt, dessen Seiten mit den Zahlen 1 bis 6 durchnummeriert sind: Wird die „1“ oder die „2“ erzielt, wird eine gelbe Kugel gewählt, sonst eine schwarze.

2 **a)** Weisen Sie rechnerisch nach, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich nun mindestens zwei schwarze Kugeln im Behälter befinden, $\frac{20}{27}$ beträgt.

3 **b)** Aus dem Behälter werden zwei der drei Kugeln zufällig entnommen. Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass beide entnommenen Kugeln schwarz sind.

5

Geometrie

Aufgabengruppe 1

Diese Aufgaben dürfen nur in Verbindung mit den zur selben Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil B bearbeitet werden.

BE

Gegeben ist die Gerade $g: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$.

2 **a)** Zeigen Sie, dass g in der Ebene mit der Gleichung $x_1 + x_2 + x_3 = 2$ liegt.

3 **b)** Gegeben ist außerdem die Schar der Geraden $h_a: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $\mu \in \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}$. Weisen Sie nach, dass g und h_a für jeden Wert von a windschief sind.

5

Geometrie

Aufgabengruppe 2

Diese Aufgaben dürfen nur in Verbindung mit den zur selben Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil B bearbeitet werden.

BE

Gegeben sind die Punkte $A(3|5|5)$ und $B(1|1|1)$ sowie die Geraden g und h, die sich in B schneiden. Die Gerade g hat den Richtungsvektor $\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$, die Gerade h den Richtungsvektor $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$.

1 **a)** Weisen Sie nach, dass A auf g liegt.

4 **b)** Bestimmen Sie die Koordinaten zweier Punkte C und D so, dass C auf h liegt und das Viereck ABCD eine Raute ist.

5