

Mathematik

Abiturprüfung 2022

Prüfungsteil B (CAS)

Bei der Bearbeitung der Aufgaben dürfen als Hilfsmittel verwendet werden

- die vom Staatsministerium genehmigte Merkhilfe für das Fach Mathematik,
- eine der vom Staatsministerium zugelassenen stochastischen Tabellen,
- eine der vom Staatsministerium für Leistungserhebungen zugelassenen naturwissenschaftlichen Formelsammlungen,
- ein Taschenrechner, der hinsichtlich seiner Funktionalität den vom Staatsministerium getroffenen Regelungen entspricht,
- **ein Computeralgebrasystem, das den vom Staatsministerium getroffenen Regelungen entspricht.**

Zu den Themengebieten Analysis, Stochastik und Geometrie wählt der Fachausschuss jeweils eine Aufgabengruppe zur Bearbeitung aus. **Die zu einer Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil B dürfen nur in Verbindung mit den zur selben Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil A bearbeitet werden.**

<hr/> <p>Name des Prüflings</p>

Das Geheft mit den Aufgabenstellungen ist abzugeben.

Analysis
Aufgabengruppe 1

BE

1 Gegeben ist die Schar der in \mathbb{R} definierten Funktionen
 $f_a : x \mapsto -\frac{1}{250} \cdot (x^2 - 10x) \cdot (x^2 + a)$ mit $a \in \mathbb{R}^+$. Der Graph von f_a wird mit G_a bezeichnet.

3 a) Geben Sie die beiden Nullstellen von f_a an und begründen Sie, dass G_a im Bereich zwischen den Nullstellen oberhalb der x-Achse verläuft.

2 b) Für alle $a_1, a_2 \in \mathbb{R}^+$ gilt $f'_{a_1}(5) = f'_{a_2}(5)$. Deuten Sie diese Aussage geometrisch.

4 c) Für einen bestimmten Wert von a ist die Tangente an G_a im Punkt $(0 | f_a(0))$ eine Gerade mit Steigung 1. Bestimmen Sie diesen Wert von a und weisen Sie nach, dass diese Gerade noch in einem weiteren Punkt Tangente an den zu diesem Wert von a gehörenden Graphen G_a ist.

5 d) Geben Sie die Anzahl der Wendepunkte von G_a in Abhängigkeit von a an und begründen Sie Ihre Angabe.

2 e) Geben Sie die x-Koordinate und die Art des Extrempunkts von $G_{\frac{169}{3}}$ an.

2 Betrachtet wird die Funktion $h : x \mapsto \sqrt{f_{\frac{169}{3}}(x)}$ mit maximaler Definitionsmenge D_h , wobei $f_{\frac{169}{3}}$ die Funktion der Schar aus Aufgabe 1 mit $a = \frac{169}{3}$ ist.

1 a) Geben Sie D_h an.

4 b) Betrachtet wird folgende Aussage:

Sind u und v zwei in einem Intervall D definierte differenzierbare Funktionen, für die $u(x) > 0$ und $v(x) = \sqrt{u(x)}$ für alle $x \in D$ gilt, so besitzen u und v das gleiche Monotonieverhalten.

Zeigen Sie, dass die Aussage richtig ist, und geben Sie die Koordinaten des Hochpunkts des Graphen von h an.

3 c) Geben Sie $\lim_{x \rightarrow 0} h'(x)$ und $\lim_{x \rightarrow 10} h'(x)$ an und interpretieren Sie das Ergebnis geometrisch.

(Fortsetzung nächste Seite)

Zusätzlich wird die Funktion $h^* : x \mapsto -h(x)$ betrachtet, deren Definitionsmenge mit D_h übereinstimmt.

- 3 **d)** Skizzieren Sie die Graphen von h und h^* unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse in einem Koordinatensystem.

Die Graphen von h und h^* schließen ein Flächenstück ein. Rotiert dieses Flächenstück um die x -Achse, so entsteht ein Körper. Der Körper stellt modellhaft einen Asteroiden dar, das Flächenstück einen Längsschnitt durch den Asteroiden. Dabei entspricht eine Längeneinheit zehn Metern in der Realität.

Für eine Forschungsmission wird die Landung einer Raumsonde auf dem Asteroiden geplant. Der Landeanflug soll entlang einer Gerade erfolgen, die im Modell durch den Graphen der in \mathbb{R} definierten Funktion $s : x \mapsto \frac{1}{15} \sqrt{1830} \cdot (11 - 2x)$ repräsentiert wird. Der Punkt $L(x_L | y_L)$ mit $y_L > 0$ stellt den Landepunkt dar.

- 4 **e)** Bestimmen Sie x_L und deuten Sie die Gleichung $s'(x_L) \cdot h'(x_L) = -1$ im Sachzusammenhang.

(zur Kontrolle: $x_L = 5$)

Die Bremsdüsen der Raumsonde werden an der Position aktiviert, die 40 Meter vom Landepunkt entfernt ist. Diese Position wird im Modell durch den Punkt P dargestellt.

- 4 **f)** Bestimmen Sie rechnerisch die Koordinaten von P auf zwei Dezimalen genau.

(zur Kontrolle: x -Koordinate von P : etwa 4,31)

- 5 **g)** Rotiert ein Flächenstück, das vom Graphen einer in $[c; d]$ definierten Funktion g mit Nullstellen c und d und der x -Achse eingeschlossen wird, um die x -Achse, so entsteht ein rotationssymmetrischer Körper, dessen Schwerpunkt auf der x -Achse liegt. Für die x -Koordinate x_S des Schwerpunkts gilt dabei:

$$x_S = \frac{\int_c^d x \cdot (g(x))^2 dx}{\int_c^d (g(x))^2 dx}$$

Bestimmen Sie die x -Koordinate des Schwerpunkts S des Rotationskörpers, der den Asteroiden beschreibt, auf zwei Dezimalen genau.

Berechnen Sie die Größe des Winkels, um die sich die Flugbahn ändert, wenn der letzte Teil des Landeanflugs – anders als ursprünglich geplant – entlang einer Gerade erfolgt, die im Modell durch die Gerade PS dargestellt wird.

Analysis

Aufgabengruppe 2

BE

Gegeben ist die Schar der in \mathbb{R} definierten Funktionen $f_a : x \mapsto x \cdot e^{-\frac{1}{2}a \cdot x^2 + \frac{1}{2}}$ mit $a \in \mathbb{R}$. Die zugehörigen Graphen sind symmetrisch bezüglich des Koordinatenursprungs.

1 Zunächst werden einzelne Funktionen der Schar betrachtet.

- 3 a) Geben Sie die Koordinaten des Hochpunkts des Graphen von f_1 an. Weisen Sie nach, dass f_1 genau eine Nullstelle hat, und geben Sie den Grenzwert von f_1 für $x \rightarrow +\infty$ an.
- 2 b) Die Abbildung 1 zeigt den Graphen von f_1 ohne das zugrunde liegende Koordinatensystem. Ergänzen Sie die Koordinatenachsen und skalieren Sie diese passend.

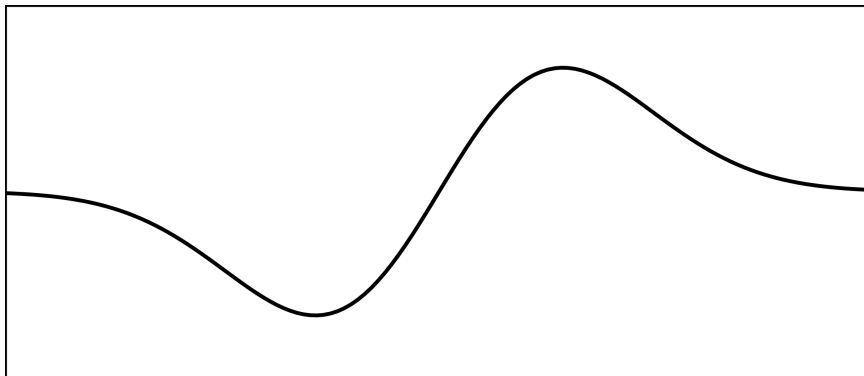


Abb. 1

- 3 c) Interpretieren Sie den folgenden Sachverhalt geometrisch:
Für jede Stammfunktion F_1 von f_1 und für jede reelle Zahl $u > 2022$ gilt

$$F_1(u) - F_1(0) \approx \int_0^{2022} f_1(x) dx.$$

- 2 d) Der Graph von f_0 ist eine Gerade. Geben Sie die Steigung dieser Gerade und die Koordinaten ihres Schnittpunkts mit der y-Achse an.
- 4 e) Für einen Wert von a liegt der Punkt $P(1|e)$ auf dem Graphen von f_a . Berechnen Sie für diesen Wert von a die Größe des Winkels, den der Graph von f_a mit der Parallele zur x-Achse durch den Punkt P einschließt.

- 2 f) Begründen Sie unter Verwendung der Abbildung 2, dass

$$\int_{-0,5}^1 f_{-1}(x) dx = \int_{0,5}^1 f_{-1}(x) dx \text{ gilt.}$$

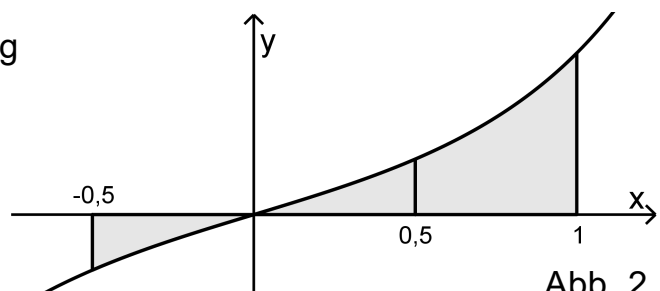


Abb. 2

(Fortsetzung nächste Seite)

2 Nun werden alle Funktionen der gegebenen Schar betrachtet.

3 a) Die folgenden Aussagen gelten für alle reellen Zahlen a , a_1 und a_2 :

- $f_a(0) = 0$
- $f'_a(0) = f'_0(0)$
- $f_{a_1}(x) = f_{a_2}(x) \Leftrightarrow a_1 = a_2$ oder $x = 0$

Geben Sie an, was sich aus diesen Aussagen hinsichtlich des Verlaufs der Graphen der Schar folgern lässt.

3 b) Zeigen Sie, dass die folgende Aussage für jeden Wert von a richtig ist:

Wird der Graph von f_a mit dem gleichen Faktor $k > 0$ sowohl in x -Richtung als auch in y -Richtung gestreckt, so stellt der dadurch entstehende Graph ebenfalls eine Funktion der Schar dar.

5 c) Für $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ stimmen die Wendestellen von f_a mit den Lösungen der Gleichung $(a \cdot x^2 - 3) \cdot x = 0$ überein. Geben Sie für alle Werte von $a \in \mathbb{R}$ die Anzahl der Wendestellen von f_a an und begründen Sie Ihre Angabe.

5 d) Beschreiben Sie die Lage der Punkte $(x | y)$ mit $x \cdot y < 0$ im Koordinatensystem und begründen Sie, dass keiner dieser Punkte auf einem Graphen der Schar liegt. Zeigen Sie, dass jeder Punkt, der sowohl eine positive x -Koordinate als auch eine positive y -Koordinate hat, auf genau einem Graphen der Schar liegt.

3 e) Alle Extrempunkte der Graphen der Schar liegen auf einer Gerade. Begründen Sie, dass es sich dabei um die Gerade mit der Gleichung $y = x$ handelt.

5 f) Für jeden positiven Wert von a bilden der Hochpunkt $(v | f_a(v))$ des Graphen von f_a , der Punkt $(0 | 2)$, der Koordinatenursprung und der Punkt $(v | 0)$ die Eckpunkte eines Vierecks. Bestimmen Sie ausgehend von einer geeigneten Skizze denjenigen Wert von a , für den das Viereck den Flächeninhalt 144 hat.

Stochastik
Aufgabengruppe 1

BE

Um die Wirksamkeit eines Pflanzenschutzmittels gegen Pilzbefall nachzuweisen, wurden zahlreiche Versuche durchgeführt, bei denen landwirtschaftliche Nutzpflanzen zunächst mit dem Pflanzenschutzmittel behandelt und anschließend mit Pilzsporen besprüht wurden. Im Mittel sind dabei 5 % der Pflanzen von Pilzen befallen worden.

1 Bei einem weiteren solchen Versuch mit n Pflanzen beschreibt die Zufallsgröße X_n die Anzahl der Pflanzen, die von Pilzen befallen werden. Im Folgenden soll davon ausgegangen werden, dass X_n binomialverteilt ist mit den Parametern n und $p = 0,05$.

6 **a)** Es werden 15 Pflanzen mit dem Pflanzenschutzmittel behandelt und anschließend mit Pilzsporen besprüht. Bestimmen Sie jeweils die Wahrscheinlichkeit folgender Ereignisse:

E_1 : „Keine der Pflanzen wird von Pilzen befallen.“

E_2 : „Höchstens zwei Pflanzen werden von Pilzen befallen.“

E_3 : „Mindestens die Hälfte, aber höchstens drei Viertel der Pflanzen bleiben ohne Pilzbefall.“

4 **b)** Bestimmen Sie den kleinsten Wert von n , für den die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens eine Pflanze von Pilzen befallen wird, mindestens 99 % beträgt. Entscheiden Sie, ob sich dieser kleinste Wert von n vergrößert oder verkleinert, wenn sich p deutlich vergrößert.

4 **c)** Ermitteln Sie unter der Voraussetzung, dass bei einem Versuch mit 400 Pflanzen der Wert der Zufallsgröße X_{400} um höchstens eine Standardabweichung vom Erwartungswert abweicht, die kleinst- und die größtmögliche relative Häufigkeit der Pflanzen, die von Pilzen befallen werden.

3 **d)** Allgemein gilt für eine Zufallsgröße X mit Erwartungswert μ und Standardabweichung σ folgende Ungleichung für $k > 0$:

$$P(\mu - k \cdot \sigma < X < \mu + k \cdot \sigma) \geq 1 - \frac{1}{k^2}$$

Erläutern Sie die Aussage dieser Ungleichung für $k = 2$.

(Fortsetzung nächste Seite)

2 Um die Wirksamkeit des Pflanzenschutzmittels gegen einen nur in den Tropen auftretenden Pilz zu untersuchen, wurde ein Experiment mit 150 Pflanzen durchgeführt. Dabei wurden 70 % der Pflanzen mit dem Pflanzenschutzmittel behandelt und anschließend alle 150 Pflanzen mit den Sporen des tropischen Pilzes besprüht.

Am Ende des Experiments war die Anzahl der unbehandelten Pflanzen ohne Pilzbefall dreimal so groß wie die Anzahl x der behandelten Pflanzen mit Pilzbefall. Insgesamt wurden 19 Pflanzen vom tropischen Pilz befallen.

Aus den 150 Pflanzen wird eine Pflanze zufällig ausgewählt. Betrachtet werden folgende Ereignisse:

S: „Die Pflanze wurde mit dem Pflanzenschutzmittel behandelt.“

T: „Die Pflanze wurde vom tropischen Pilz befallen.“

4 **a)** Bestimmen Sie x unter Zuhilfenahme einer Vierfeldertafel.

(zur Kontrolle: $x = 13$)

4 **b)** Berechnen Sie $P_S(T)$ und $P_{\bar{S}}(T)$ und begründen Sie, dass aus den Ergebnissen des Experiments nicht auf die Wirksamkeit des Pflanzenschutzmittels gegen den tropischen Pilz geschlossen werden kann.

Stochastik

Aufgabengruppe 2

BE

Die SMV eines Gymnasiums initiierte im vergangenen Schuljahr die Aktionen „Baumpatenschaft“ und „Umweltwoche“.

1 Mit einer Umfrage auf dem Schulfest wird der Bekanntheitsgrad der beiden Aktionen ermittelt. Von den Befragten kennt jeder Fünfte die Aktion „Baumpatenschaft“. 24 % der Befragten kennen keine der beiden Aktionen; die Aktion „Umweltwoche“ kennen 30 % der Befragten nicht.

Aus den Befragten wird eine Person zufällig ausgewählt. Betrachtet werden folgende Ereignisse:

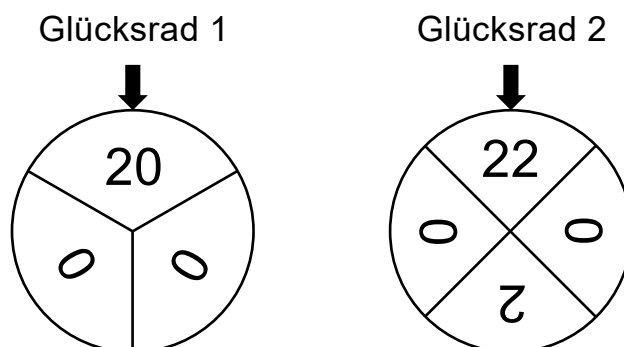
B: „Die Person kennt die Aktion ‚Baumpatenschaft‘.“

U: „Die Person kennt die Aktion ‚Umweltwoche‘.“

4 a) Weisen Sie nach, dass die Ereignisse B und U stochastisch unabhängig sind.

1 b) Geben Sie für den Fall, dass die ausgewählte Person die Aktion „Baumpatenschaft“ kennt, die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass sie die Aktion „Umweltwoche“ nicht kennt.

2 Um Geld für die beiden Aktionen einzunehmen, bietet die SMV auf dem Schulfest das Spiel „2022“ an. Bei dem Spiel werden zwei Glücksräder mit drei bzw. vier gleich großen Sektoren verwendet, die wie in Abbildung 1 beschriftet sind. Für einen Einsatz von 3 € darf man jedes der beiden Glücksräder einmal drehen. Für jede Ziffer 2, die auf den erzielten Sektoren steht, werden 2 € ausbezahlt. Die Zufallsgröße Z beschreibt, wie oft die Ziffer 2 auf den erzielten Sektoren insgesamt vorkommt.



(Fortsetzung nächste Seite)

- 3 a) Die Tabelle zeigt die Wahrscheinlichkeitsverteilung von Z. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten p_1 und p_2 .

k	0	1	2	3
$P(Z = k)$	$\frac{1}{3}$	p_1	p_2	$\frac{1}{12}$

(zur Kontrolle: $p_2 = \frac{1}{4}$)

- 4 b) Ermitteln Sie, wie viele Spiele durchgeführt werden müssen, damit der Erwartungswert der Einnahme für die beiden Aktionen 300€ beträgt.

Acht Personen spielen nacheinander jeweils einmal das Spiel „2022“.

- 4 c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die SMV mehr als zweimal mindestens 4€ ausbezahlen muss.

- 4 d) Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass an die ersten drei Personen insgesamt 12€ ausbezahlt werden.

- 3 Die binomialverteilte Zufallsgröße X mit den Parametern $n = 8$ und p_X besitzt die Standardabweichung $\frac{4}{3}$. In Abbildung 2 ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X dargestellt.

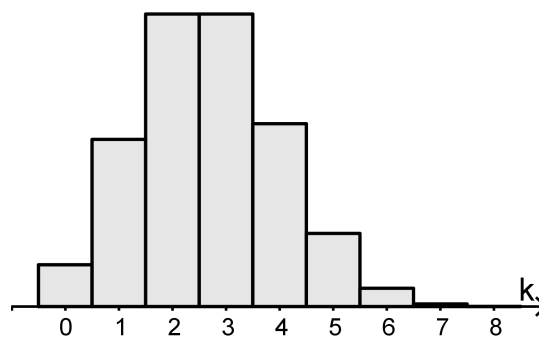


Abb. 2

- 3 a) Ermitteln Sie mithilfe einer Rechnung den Wert des Parameters p_X .

- 2 b) Die binomialverteilte Zufallsgröße Y hat die Parameter $n = 8$ und $p_Y = 1 - p_X$. Kennzeichnen Sie in Abbildung 2 eine Fläche, die die Wahrscheinlichkeit $P(Y \geq 6)$ darstellt.

Geometrie

Aufgabengruppe 1

BE

Gegeben sind die Punkte $P(4|5|-19)$, $Q(5|9|-18)$ und $R(3|7|-17)$, die in der Ebene E liegen, sowie die Gerade $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} -12 \\ 11 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

- 3 a) Bestimmen Sie die Länge der Strecke $[PQ]$. Zeigen Sie, dass das Dreieck PQR bei R rechtwinklig ist, und begründen Sie damit, dass die Strecke $[PQ]$ Durchmesser des Umkreises des Dreiecks PQR ist.

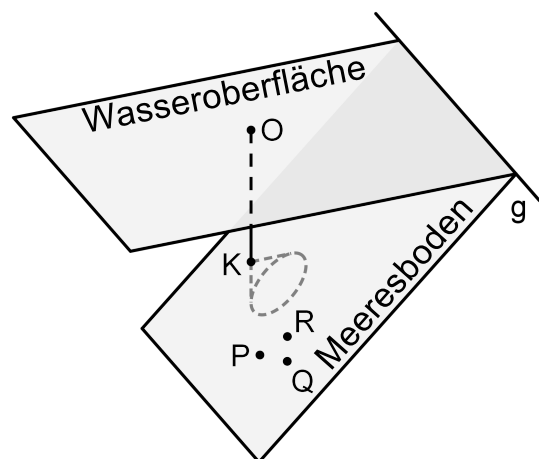
(zur Kontrolle: $\overline{PQ} = 3\sqrt{2}$)

- 4 b) Bestimmen Sie eine Gleichung von E in Koordinatenform und zeigen Sie, dass die Gerade g in E liegt.

(zur Kontrolle: $E: 2x_1 - x_2 + 2x_3 + 35 = 0$)

- 2 c) Begründen Sie ohne Rechnung, dass g in der x_1x_2 -Ebene liegt, und geben Sie die Koordinaten des Schnittpunkts von g mit der x_1x_3 -Ebene an.

In einem Modell für einen Küstenabschnitt am Meer beschreibt die x_1x_2 -Ebene die horizontale Wasseroberfläche und die Gerade g die Uferlinie. Die Ebene E stellt im betrachteten Abschnitt den Meeresboden dar. Eine Boje schwimmt auf der Wasseroberfläche an der Stelle, die dem Koordinatenursprung O entspricht (vgl. Abbildung). Eine Längeneinheit entspricht einem Meter in der Realität.



- 5 d) Bestimmen Sie die Größe des Winkels, unter dem der Meeresboden gegenüber der Wasseroberfläche abfällt, und berechnen Sie damit die Wassertiefe an einer Stelle der Wasseroberfläche, die 20 m von der Uferlinie entfernt ist.

Ein Fotograf soll für ein Reisemagazin Unterwasserfotos aufnehmen.

- 4 e) Der Fotograf schwimmt entlang der kürzestmöglichen Strecke von der Uferlinie aus zur Boje. Ermitteln Sie die Länge dieser Strecke.

(Fortsetzung nächste Seite)

Von der Boje aus taucht der Fotograf senkrecht bezüglich der Wasseroberfläche nach unten bis zu einer Stelle, deren Abstand zum Meeresboden genau drei Meter beträgt und im Modell durch den Punkt K dargestellt wird.

4 **f)** Bestimmen Sie rechnerisch, welche Tiefe unter der Wasseroberfläche der Fotograf bei diesem Tauchvorgang erreicht.

3 **g)** Drei kleine farbenfrohe Seesterne befinden sich am Meeresboden und werden im Modell durch die Punkte P, Q und R dargestellt. Der Fotograf bewegt sich für seine Aufnahmen von der Stelle aus, die im Modell durch den Punkt K beschrieben wird, parallel zum Meeresboden. Das Kameraobjektiv zeigt dabei senkrecht zum Meeresboden und hat ein kegelförmiges Sichtfeld mit einem Öffnungswinkel von 90° (vgl. Abbildung).

Beurteilen Sie, ob der Fotograf auf diese Weise eine Stelle erreichen kann, an der er alle drei Seesterne gleichzeitig im Sichtfeld der Kamera sehen kann.

Geometrie

Aufgabengruppe 2

BE

Die Abbildung 1 zeigt das sogenannte Saarpolygon, ein im Inneren begehbares Denkmal zur Erinnerung an den stillgelegten Kohlebergbau im Saarland. Das Saarpolygon kann in einem Koordinatensystem modellhaft durch den Streckenzug dargestellt werden, der aus den drei Strecken $[AB]$, $[BC]$ und $[CD]$ mit $A(11|11|0)$, $B(-11|11|28)$, $C(11|-11|28)$ und $D(-11|-11|0)$ besteht (vgl. Abbildung 2). A, B, C und D sind Eckpunkte eines Quaders. Eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht einem Meter in der Wirklichkeit.



Abb. 1

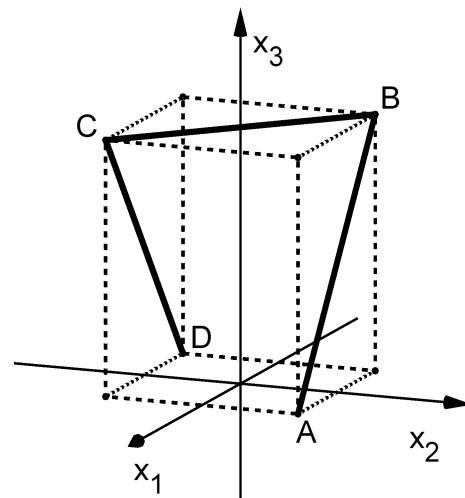


Abb. 2

- 2 a) Begründen Sie, dass die Punkte B und C symmetrisch bezüglich der x_3 -Achse liegen.
- 3 b) Berechnen Sie die Länge des Streckenzugs in der Wirklichkeit.

Die Ebene E enthält die Punkte A, B und C, die Ebene F die Punkte B, C und D.

- 3 c) Bestimmen Sie eine Gleichung von E in Koordinatenform.

$$(zur\ Kontrolle: 14x_1 + 14x_2 + 11x_3 = 308)$$

- 5 d) Berechnen Sie die Größe φ des Winkels, unter dem E die x_1x_2 -Ebene schneidet. Geben Sie einen Term an, mit dem aus φ die Größe des Winkels zwischen den Ebenen E und F berechnet werden kann.
- 4 e) Die Ebene E teilt den Quader in zwei Teilkörper. Bestimmen Sie das Verhältnis der Volumina der beiden Teilkörper, ohne die Volumina zu berechnen.

(Fortsetzung nächste Seite)

- 4 f) Das Saarpolygon wird mit verschiedenen Blickrichtungen betrachtet. Die Abbildungen 3 und 4 stellen das Saarpolygon für zwei Blickrichtungen schematisch dar.

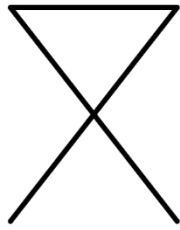


Abb. 3

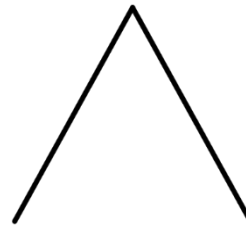


Abb. 4

Geben Sie zu jeder der beiden Abbildungen 3 und 4 einen möglichen Vektor an, der die zugehörige Blickrichtung beschreibt. Stellen Sie das Saarpolygon schematisch für eine Betrachtung von oben dar.

- 4 g) Der Punkt $P(0 | 0 | h)$ liegt innerhalb des Quaders und hat von den drei Strecken $[AB]$, $[BC]$ und $[CD]$ den gleichen Abstand. Das folgende Gleichungssystem liefert den Wert von h :

$$\text{I } \vec{Q} = \begin{pmatrix} 11 \\ 11 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -22 \\ 0 \\ 28 \end{pmatrix}, \quad t \in [0;1]$$

$$\text{II } \overline{PQ} \circ \overline{AB} = 0$$

$$\text{III } \overline{PQ} = 28 - h$$

Erläutern Sie die Überlegungen, die diesem Vorgehen zur Bestimmung des Werts von h zugrunde liegen.