Mathematik

Abiturprüfung 2022

Prüfungsteil A (CAS)

Arbeitszeit: 70 Minuten

Bei der Bearbeitung der Aufgaben dürfen **keine Hilfsmittel** verwendet werden.

Zu den Themengebieten Analysis, Stochastik und Geometrie wählt der Fachausschuss jeweils eine Aufgabengruppe zur Bearbeitung aus. **Die zu einer Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil A dürfen nur in Verbindung mit den zur selben Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil B bearbeitet werden.**

Name des Prüflings

Das Geheft mit den Aufgabenstellungen ist abzugeben.

Analysis

Aufgabengruppe 1

Diese Aufgaben dürfen nur in Verbindung mit den zur selben Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil B bearbeitet werden.

BE

2 **1 a)** Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto \frac{x^2+2x}{x+1}$ mit maximaler Definitionsmenge D_f. Geben Sie D_f und die Nullstellen von f an.

3 **b)** Geben Sie einen Term einer gebrochen-rationalen Funktion h an, die die folgenden Eigenschaften hat: Die Funktion h ist in $\mathbb{R}$ definiert; ihr Graph besitzt die Gerade mit der Gleichung $y = 3$ als waagrechte Asymptote und schneidet die y-Achse im Punkt $(0\,|\,4)$.

2 Gegeben ist die in $\mathbb{R}^+$ definierte Funktion $g: x \mapsto \frac{4}{x}$. Abbildung 1 zeigt den Graphen von g.

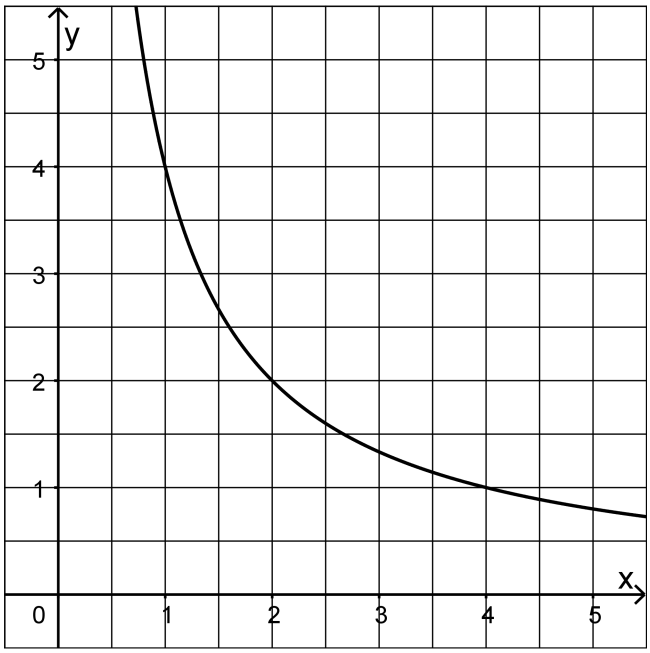


Abb. 1

2 **a)** Berechnen Sie den Wert des Integrals $\int_1^e g(x)\,dx$.

3 **b)** Ermitteln Sie grafisch diejenige Stelle $x_0 \in \mathbb{R}^+$, für die gilt: Die lokale Änderungsrate von g an der Stelle x_0 stimmt mit der mittleren Änderungsrate von g im Intervall $[1;4]$ überein.

(Fortsetzung nächste Seite)

3 Der Graph G_f der in $\mathbb{R}$ definierten ganzrationalen Funktion f besitzt nur an der Stelle $x = 3$ eine waagrechte Tangente (vgl. Abbildung 2).

Betrachtet wird die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion g mit $g(x) = f(f(x))$.

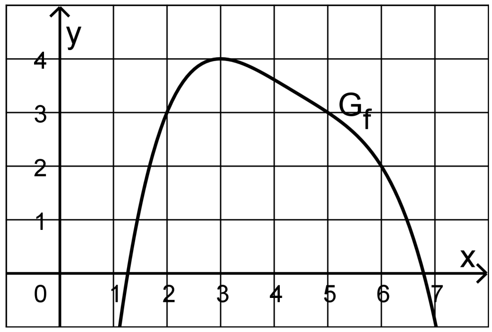


Abb. 2

2 **a)** Geben Sie mithilfe von Abbildung 2 die Funktionswerte $f(6)$ und $g(6)$ an.

3 **b)** Gemäß der Kettenregel gilt $g'(x) = f'(f(x)) \cdot f'(x)$. Ermitteln Sie damit und mithilfe von Abbildung 2 alle Stellen, an denen der Graph von g eine waagrechte Tangente besitzt.

4 Gegeben sind die in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen f_a mit $f_a(x) = a \cdot e^{-x} + 3$ und $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

1 **a)** Zeigen Sie, dass $f_a'(0) = -a$ gilt.

4 **b)** Betrachtet wird die Tangente an den Graphen von f_a im Punkt $(0 \mid f_a(0))$. Bestimmen Sie diejenigen Werte von a, für die diese Tangente eine positive Steigung hat und zudem die x-Achse in einem Punkt schneidet, dessen x-Koordinate größer als $\frac{1}{2}$ ist.

20

Analysis

Aufgabengruppe 2

Diese Aufgaben dürfen nur in Verbindung mit den zur selben Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil B bearbeitet werden.

BE

1 Gegeben ist die Funktion $g: x \mapsto \dfrac{2x^2}{x^2-9}$ mit maximaler Definitionsmenge D_g.

2 **a)** Geben Sie D_g sowie eine Gleichung der waagrechten Asymptote des Graphen von g an.

3 **b)** Zeigen Sie, dass der Graph von g in genau einem Punkt eine waagrechte Tangente besitzt.

2 Betrachtet werden die in IR definierten Funktionen f und F, wobei F eine Stammfunktion von f ist. Abbildung 1 zeigt den Graphen G_F von F.

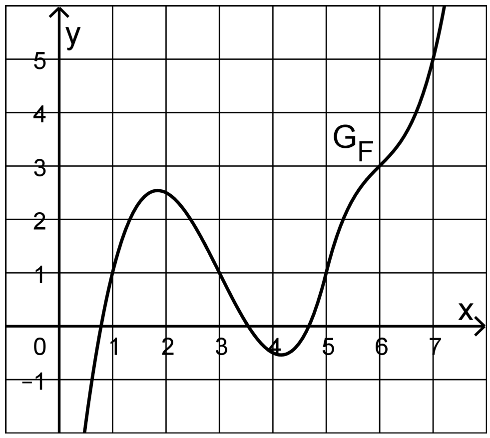


Abb. 1

2 **a)** Bestimmen Sie den Wert des Integrals $\int_1^7 f(x)\,dx$.

3 **b)** Bestimmen Sie den Funktionswert von f an der Stelle 1; veranschaulichen Sie Ihr Vorgehen in Abbildung 1.

(Fortsetzung nächste Seite)

2 **3 a)** Gegeben ist die Funktion $h: x \mapsto \ln(2x-3)$ mit Definitionsmenge $D_h = \left]\frac{3}{2};+\infty\right[$. Geben Sie die Nullstelle von h sowie einen Term der ersten Ableitungsfunktion von h an.

3 **b)** Die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f besitzt die Nullstelle $x = 2$, außerdem gilt $f'(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Abbildung 2 zeigt den Graphen G_f von f.

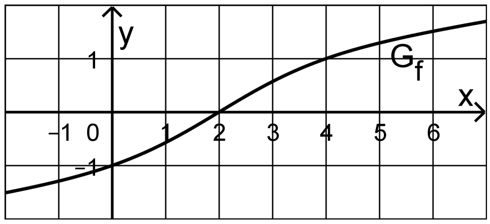


Abb. 2

Betrachtet wird die Funktion $g: x \mapsto \ln(f(x))$ mit maximaler Definitionsmenge D_g. Geben Sie D_g an und ermitteln Sie mithilfe von Abbildung 2 diejenige Stelle x, für die $g'(x) = f'(x)$ gilt.

4 Gegeben sind die in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen f_a mit $f_a(x) = a \cdot e^{-x} + 3$ und $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

1 **a)** Zeigen Sie, dass $f_a'(0) = -a$ gilt.

4 **b)** Betrachtet wird die Tangente an den Graphen von f_a im Punkt $(0 \mid f_a(0))$. Bestimmen Sie diejenigen Werte von a, für die diese Tangente eine positive Steigung hat und zudem die x-Achse in einem Punkt schneidet, dessen x-Koordinate größer als $\frac{1}{2}$ ist.

20

Stochastik

Aufgabengruppe 1

Diese Aufgaben dürfen nur in Verbindung mit den zur selben Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil B bearbeitet werden.

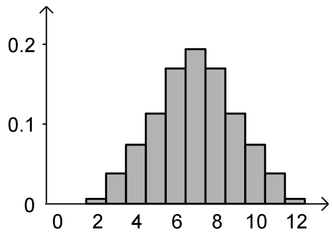
BE

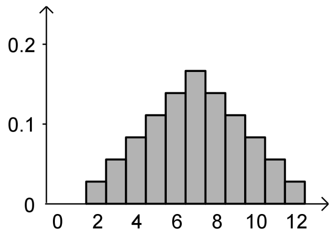
Gegeben sind die im Folgenden beschriebenen Zufallsgrößen X und Y:

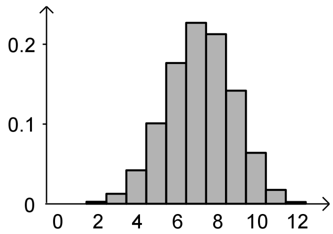
- Ein Würfel, dessen Seiten mit den Zahlen von 1 bis 6 durchnummeriert sind, wird zweimal geworfen. X gibt die dabei erzielte Augensumme an.
- Aus einem Behälter mit 60 schwarzen und 40 weißen Kugeln wird zwölfmal nacheinander jeweils eine Kugel zufällig entnommen und wieder zurückgelegt. Y gibt die Anzahl der entnommenen schwarzen Kugeln an.

2 **a)** Begründen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit $P(X=4)$ mit der Wahrscheinlichkeit $P(X=10)$ übereinstimmt.

3 **b)** Die Wahrscheinlichkeitsverteilungen von X und Y werden jeweils durch eines der folgenden Diagramme I, II und III dargestellt. Ordnen Sie X und Y jeweils dem passenden Diagramm zu und begründen Sie Ihre Zuordnung.

I


II


III


5

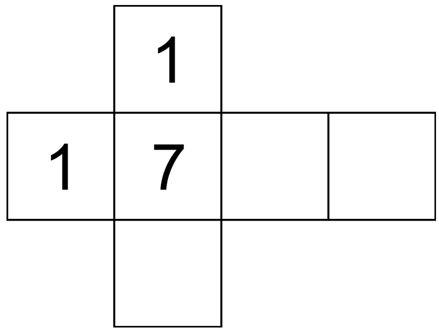
Stochastik

Aufgabengruppe 2

Diese Aufgaben dürfen nur in Verbindung mit den zur selben Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil B bearbeitet werden.

BE

Die Abbildung zeigt das Netz eines Würfels, von dem nur drei Seiten beschriftet sind.



2 **a)** Der Würfel wird so lange geworfen, bis die Zahl 1 zum ersten Mal erzielt wird. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass genau viermal gewürfelt wird.

3 **b)** Die drei leeren Seiten des Würfels sollen jeweils mit einer positiven geraden Zahl beschriftet werden. Ermitteln Sie eine Möglichkeit für die Beschriftung dieser drei Seiten, sodass bei einmaligem Werfen des Würfels der Erwartungswert für die erzielte Zahl $\frac{31}{6}$ beträgt.

5

Geometrie

Aufgabengruppe 1

Diese Aufgaben dürfen nur in Verbindung mit den zur selben Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil B bearbeitet werden.

BE	
	Gegeben ist die Kugel K mit Mittelpunkt $M(3\,|\,-6\,|\,5)$ und Radius $2\sqrt{6}$.
3	**a)** Geben Sie eine Gleichung von K in Koordinatenform an und zeigen Sie, dass der Punkt $P(5\,|\,-4\,|\,1)$ auf K liegt.
2	**b)** Untersuchen Sie, ob K die x_1x_2-Ebene schneidet.
5	

Geometrie

Aufgabengruppe 2

Diese Aufgaben dürfen nur in Verbindung mit den zur selben Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil B bearbeitet werden.

BE

Wird der Punkt $P(1|2|3)$ an der Ebene E gespiegelt, so ergibt sich der Punkt $Q(7|2|11)$.

3 **a)** Bestimmen Sie eine Gleichung von E in Koordinatenform.

2 **b)** Auf der Gerade durch P und Q liegen die Punkte R und S symmetrisch bezüglich E; dabei liegt R bezüglich E auf der gleichen Seite wie P. Der Abstand von R und S ist doppelt so groß wie der Abstand von P und Q. Bestimmen Sie die Koordinaten von R.

5