

Mathematik

Abiturprüfung 2021

Prüfungsteil A (CAS)

Arbeitszeit: 70 Minuten

Bei der Bearbeitung der Aufgaben dürfen **keine Hilfsmittel** verwendet werden.

Zu den Themengebieten Analysis, Stochastik und Geometrie wählt der Fachausschuss jeweils eine Aufgabengruppe zur Bearbeitung aus. **Die zu einer Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil A dürfen nur in Verbindung mit den zur selben Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil B bearbeitet werden.**

<hr/> <p>Name des Prüflings</p>

Das Geheft mit den Aufgabenstellungen ist abzugeben.

Analysis

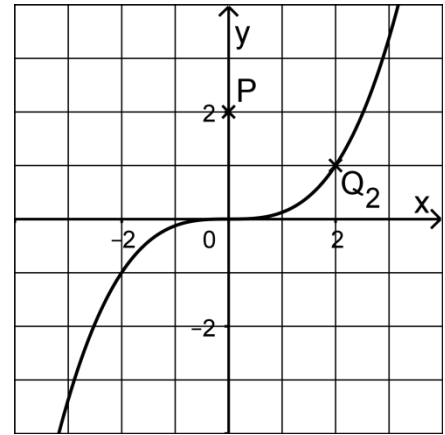
Aufabengruppe 1

Diese Aufgaben dürfen nur in Verbindung mit den zur selben Aufabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil B bearbeitet werden.

- BE
- 4 **1** Gegeben ist die in \mathbb{R} definierte Funktion f mit $f(x) = e^{2x+1}$. Zeigen Sie, dass f umkehrbar ist, und ermitteln Sie einen Term der Umkehrfunktion von f .
- 3 **2 a)** Gegeben ist die Funktion $g: x \mapsto (x^2 - 9x) \cdot \sqrt{2-x}$ mit maximaler Definitionsmenge D_g . Geben Sie D_g und alle Nullstellen von g an.
- 3 **b)** Gegeben ist die in \mathbb{R} definierte Funktion $h: x \mapsto \ln\left(\frac{1}{x^2+1}\right)$. Begründen Sie, dass die Wertemenge von h das Intervall $]-\infty; 0]$ ist.
- 3** Betrachtet wird die in \mathbb{R}^+ definierte Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^3}}$.
- 2 **a)** Zeigen Sie, dass die in \mathbb{R}^+ definierte Funktion F mit $F(x) = -\frac{2}{\sqrt{x}}$ eine Stammfunktion von f ist.
- 3 **b)** Der Graph von f schließt mit der x -Achse sowie den Geraden mit den Gleichungen $x = 1$ und $x = b$ mit $b > 1$ ein Flächenstück ein. Bestimmen Sie denjenigen Wert von b , für den dieses Flächenstück den Inhalt 1 hat.

(Fortsetzung nächste Seite)

- 4 Gegeben sind die in \mathbb{R} definierte Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{8}x^3$ sowie die Punkte $Q_a(a | f(a))$ für $a \in \mathbb{R}$. Die Abbildung zeigt den Graphen von f sowie die Punkte $P(0 | 2)$ und Q_2 .



- 2 a) Berechnen Sie für $a \neq 0$ die Steigung m_a der Gerade durch die Punkte P und Q_a in Abhängigkeit von a .

(zur Kontrolle: $m_a = \frac{a^3 - 16}{8a}$)

- 3 b) Die Tangente an den Graphen von f im Punkt Q_a wird mit t_a bezeichnet. Bestimmen Sie rechnerisch denjenigen Wert von $a \in \mathbb{R}$, für den t_a durch P verläuft.

Analysis

Aufgabengruppe 2

Diese Aufgaben dürfen nur in Verbindung mit den zur selben Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil B bearbeitet werden.

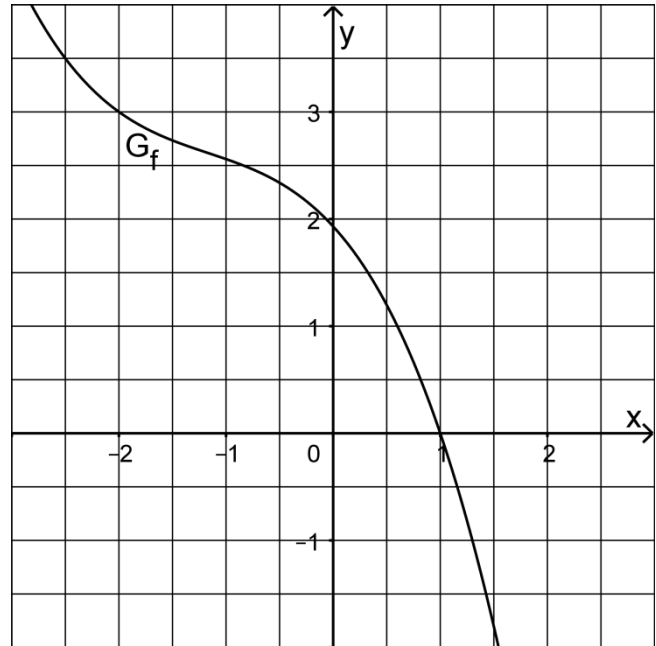
BE

- 1 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \sqrt{x-2} + 1$ und maximalem Definitionsbereich.
- 3 a) Zeichnen Sie den Graphen von f im Bereich $2 \leq x \leq 11$ in ein Koordinatensystem.
- 3 b) Berechnen Sie den Wert des Integrals $\int_2^3 f(x) dx$.
- 2 Geben Sie jeweils den Term einer in \mathbb{R} definierten Funktion an, die die angegebene Wertemenge W hat.
- 2 a) $W =]-\infty; 1]$
- 2 b) $W =]3; +\infty[$
- 2 3 a) Betrachtet werden eine in \mathbb{R} definierte ganzrationale Funktion p und der Punkt $Q(2 | p(2))$.
Beschreiben Sie, wie man rechnerisch die Gleichung der Tangente an den Graphen von p im Punkt Q ermitteln kann.
- 3 b) Gegeben ist eine in \mathbb{R} definierte Funktion $h: x \mapsto ax^2 + c$ mit $a, c \in \mathbb{R}$, deren Graph im Punkt $N(1 | 0)$ die Tangente mit der Gleichung $y = -x + 1$ besitzt. Bestimmen Sie a und c .

(Fortsetzung nächste Seite)

- 4 Die Abbildung zeigt den Graphen G_f einer in \mathbb{R} definierten Funktion f . G_f ist streng monoton fallend und schneidet die x -Achse im Punkt $(1|0)$.

Betrachtet wird ferner die Funktion g mit $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ und maximalem Definitionsbereich D_g .



- 2 a) Begründen Sie, dass $x = 1$ nicht in D_g enthalten ist, und geben Sie den Funktionswert $g(-2)$ an.
- 3 b) Ermitteln Sie mithilfe der Abbildung die x -Koordinaten der Schnittpunkte der Graphen von f und g .

Stochastik

Aufgabengruppe 1 und Aufgabengruppe 2

BE

Gegeben ist die Zufallsgröße X mit der Wertemenge $\{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$. Die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X ist symmetrisch, d. h. es gilt $P(X=0)=P(X=5)$, $P(X=1)=P(X=4)$ und $P(X=2)=P(X=3)$.

Die Tabelle zeigt die Wahrscheinlichkeitswerte $P(X \leq k)$ für $k \in \{0; 1; 2\}$.

k	0	1	2	3	4	5
$P(X \leq k)$	0,05	0,20	0,50			

2 a) Tragen Sie die fehlenden Werte in die Tabelle ein.

3 b) Begründen Sie, dass X nicht binomialverteilt ist.

5

Geometrie
Aufgabengruppe 1

Diese Aufgaben dürfen nur in Verbindung mit den zur selben Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil B bearbeitet werden.

BE

Gegeben ist die Gerade $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, sowie eine weitere Gerade

h , welche parallel zu g ist und durch den Punkt $A(2|0|0)$ verläuft. Der Punkt B liegt auf g so, dass die Geraden AB und h senkrecht zueinander sind.

4 **a)** Bestimmen Sie die Koordinaten von B .

(zur Kontrolle: $B(-2|3|2)$)

1 **b)** Berechnen Sie den Abstand von g und h .

5

Geometrie
Aufgabengruppe 2

Diese Aufgaben dürfen nur in Verbindung mit den zur selben Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil B bearbeitet werden.

BE

- 5 Mit einem Lasermessgerät soll ein Verkehrsschild angepeilt werden. Diese Situation wird modellhaft in einem Koordinatensystem dargestellt. Der Ausgangspunkt des Laserstrahls wird durch den Punkt $P(104 \mid -42 \mid 10)$ beschrieben, seine Richtung durch den Vektor $\begin{pmatrix} -13 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$. Das Verkehrsschild wird durch eine Kreisscheibe repräsentiert, die in der x_2x_3 -Ebene liegt und den Mittelpunkt $M(0 \mid 0 \mid 20)$ sowie den Radius 3 hat.
- Untersuchen Sie, ob der Laserstrahl auf das Verkehrsschild trifft.

5