

Mathematik

# Abiturprüfung 2021

## Prüfungsteil A

Arbeitszeit: 70 Minuten

Bei der Bearbeitung der Aufgaben dürfen **keine Hilfsmittel** verwendet werden.

Zu den Themengebieten Analysis, Stochastik und Geometrie wählt der Fachausschuss jeweils eine Aufgabengruppe zur Bearbeitung aus. **Die zu einer Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil A dürfen nur in Verbindung mit den zur selben Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil B bearbeitet werden.**

<hr/> <p>Name des Prüflings</p>
---------------------------------

**Das Geheft mit den Aufgabenstellungen ist abzugeben.**

# Analysis

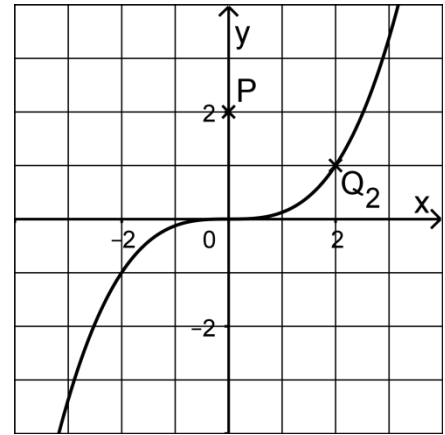
## Aufabengruppe 1

Diese Aufgaben dürfen nur in Verbindung mit den zur selben Aufabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil B bearbeitet werden.

- BE
- 4 **1** Gegeben ist die in  $\mathbb{R}$  definierte Funktion  $f$  mit  $f(x) = e^{2x+1}$ . Zeigen Sie, dass  $f$  umkehrbar ist, und ermitteln Sie einen Term der Umkehrfunktion von  $f$ .
- 3 **2 a)** Gegeben ist die Funktion  $g: x \mapsto (x^2 - 9x) \cdot \sqrt{2-x}$  mit maximaler Definitionsmenge  $D_g$ . Geben Sie  $D_g$  und alle Nullstellen von  $g$  an.
- 3 **b)** Gegeben ist die in  $\mathbb{R}$  definierte Funktion  $h: x \mapsto \ln\left(\frac{1}{x^2+1}\right)$ . Begründen Sie, dass die Wertemenge von  $h$  das Intervall  $]-\infty; 0]$  ist.
- 3** Betrachtet wird die in  $\mathbb{R}^+$  definierte Funktion  $f$  mit  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^3}}$ .
- 2 **a)** Zeigen Sie, dass die in  $\mathbb{R}^+$  definierte Funktion  $F$  mit  $F(x) = -\frac{2}{\sqrt{x}}$  eine Stammfunktion von  $f$  ist.
- 3 **b)** Der Graph von  $f$  schließt mit der  $x$ -Achse sowie den Geraden mit den Gleichungen  $x = 1$  und  $x = b$  mit  $b > 1$  ein Flächenstück ein. Bestimmen Sie denjenigen Wert von  $b$ , für den dieses Flächenstück den Inhalt 1 hat.

*(Fortsetzung nächste Seite)*

- 4 Gegeben sind die in  $\mathbb{R}$  definierte Funktion  $f$  mit  $f(x) = \frac{1}{8}x^3$  sowie die Punkte  $Q_a(a | f(a))$  für  $a \in \mathbb{R}$ . Die Abbildung zeigt den Graphen von  $f$  sowie die Punkte  $P(0 | 2)$  und  $Q_2$ .



- 2 a) Berechnen Sie für  $a \neq 0$  die Steigung  $m_a$  der Gerade durch die Punkte  $P$  und  $Q_a$  in Abhängigkeit von  $a$ .

(zur Kontrolle:  $m_a = \frac{a^3 - 16}{8a}$ )

- 3 b) Die Tangente an den Graphen von  $f$  im Punkt  $Q_a$  wird mit  $t_a$  bezeichnet. Bestimmen Sie rechnerisch denjenigen Wert von  $a \in \mathbb{R}$ , für den  $t_a$  durch  $P$  verläuft.

## Analysis

### Aufgabengruppe 2

Diese Aufgaben dürfen nur in Verbindung mit den zur selben Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil B bearbeitet werden.

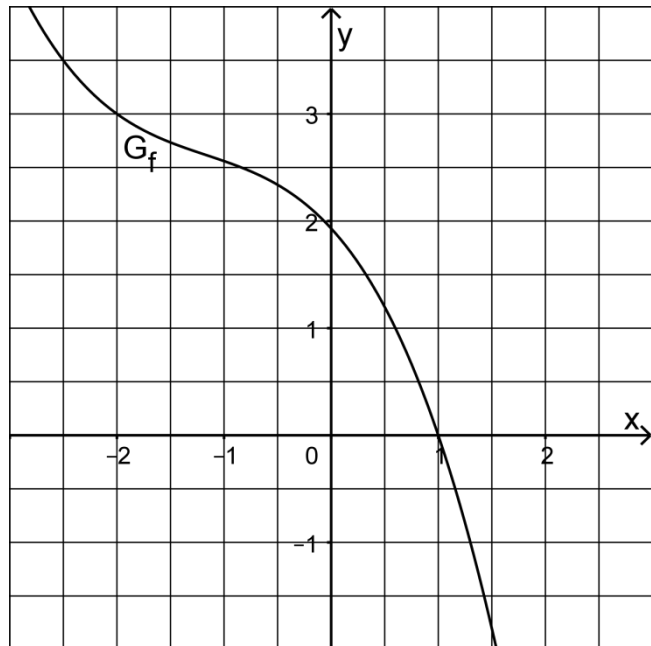
BE

- 1** Gegeben ist die Funktion  $f$  mit  $f(x) = \sqrt{x-2} + 1$  und maximalem Definitionsbereich.
- 3**     **a)** Zeichnen Sie den Graphen von  $f$  im Bereich  $2 \leq x \leq 11$  in ein Koordinatensystem.
- 3**     **b)** Berechnen Sie den Wert des Integrals  $\int_2^3 f(x) dx$ .
- 2** Geben Sie jeweils den Term einer in  $\mathbb{R}$  definierten Funktion an, die die angegebene Wertemenge  $W$  hat.
- 2**     **a)**  $W = ]-\infty; 1]$
- 2**     **b)**  $W = ]3; +\infty[$
- 2**     **3 a)** Betrachtet werden eine in  $\mathbb{R}$  definierte ganzrationale Funktion  $p$  und der Punkt  $Q(2 | p(2))$ .  
Beschreiben Sie, wie man rechnerisch die Gleichung der Tangente an den Graphen von  $p$  im Punkt  $Q$  ermitteln kann.
- 3**     **b)** Gegeben ist eine in  $\mathbb{R}$  definierte Funktion  $h: x \mapsto ax^2 + c$  mit  $a, c \in \mathbb{R}$ , deren Graph im Punkt  $N(1 | 0)$  die Tangente mit der Gleichung  $y = -x + 1$  besitzt. Bestimmen Sie  $a$  und  $c$ .

*(Fortsetzung nächste Seite)*

- 4 Die Abbildung zeigt den Graphen  $G_f$  einer in  $\mathbb{R}$  definierten Funktion  $f$ .  $G_f$  ist streng monoton fallend und schneidet die  $x$ -Achse im Punkt  $(1|0)$ .

Betrachtet wird ferner die Funktion  $g$  mit  $g(x) = \frac{1}{f(x)}$  und maximalem Definitionsbereich  $D_g$ .



- 2 a) Begründen Sie, dass  $x = 1$  nicht in  $D_g$  enthalten ist, und geben Sie den Funktionswert  $g(-2)$  an.
- 3 b) Ermitteln Sie mithilfe der Abbildung die  $x$ -Koordinaten der Schnittpunkte der Graphen von  $f$  und  $g$ .

# Stochastik

## Aufgabengruppe 1 und Aufgabengruppe 2

BE

Gegeben ist die Zufallsgröße  $X$  mit der Wertemenge  $\{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$ . Die Wahrscheinlichkeitsverteilung von  $X$  ist symmetrisch, d. h. es gilt  $P(X=0)=P(X=5)$ ,  $P(X=1)=P(X=4)$  und  $P(X=2)=P(X=3)$ .

Die Tabelle zeigt die Wahrscheinlichkeitswerte  $P(X \leq k)$  für  $k \in \{0; 1; 2\}$ .

k	0	1	2	3	4	5
$P(X \leq k)$	0,05	0,20	0,50			

2 a) Tragen Sie die fehlenden Werte in die Tabelle ein.

3 b) Begründen Sie, dass  $X$  nicht binomialverteilt ist.

5

**Geometrie**  
**Aufgabengruppe 1**

Diese Aufgaben dürfen nur in Verbindung mit den zur selben Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil B bearbeitet werden.

BE

Gegeben ist die Gerade  $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ , sowie eine weitere Gerade  $h$ , welche parallel zu  $g$  ist und durch den Punkt  $A(2|0|0)$  verläuft. Der Punkt  $B$  liegt auf  $g$  so, dass die Geraden  $AB$  und  $h$  senkrecht zueinander sind.

4 **a)** Bestimmen Sie die Koordinaten von  $B$ .

*(zur Kontrolle:  $B(-2|3|2)$ )*

1 **b)** Berechnen Sie den Abstand von  $g$  und  $h$ .

5

**Geometrie**  
**Aufgabengruppe 2**

Diese Aufgaben dürfen nur in Verbindung mit den zur selben Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil B bearbeitet werden.

*BE*

- 5 Mit einem Lasermessgerät soll ein Verkehrsschild angepeilt werden. Diese Situation wird modellhaft in einem Koordinatensystem dargestellt. Der Ausgangspunkt des Laserstrahls wird durch den Punkt  $P(104 \mid -42 \mid 10)$  beschrieben, seine Richtung durch den Vektor  $\begin{pmatrix} -13 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Das Verkehrsschild wird durch eine Kreisscheibe repräsentiert, die in der  $x_2x_3$ -Ebene liegt und den Mittelpunkt  $M(0 \mid 0 \mid 20)$  sowie den Radius 3 hat.
- Untersuchen Sie, ob der Laserstrahl auf das Verkehrsschild trifft.

5