Fachlehrplan

Kollegs, Jahrgangsstufe I – Mathematik

(sechsstündig, ca. 162 Stunden)

gültig ab Schuljahr 2023/2024

Hinweis: In der Wissenschaftswoche erarbeiten die Schülerinnen und Schüler im zeitlichen Umfang einer Woche fachspezifische Zugänge zu einem fächerübergreifenden Rahmenthema, insbesondere in Vorbereitung auf das Wissenschaftspropädeutische Seminar.

1 Ganze und rationale Zahlen (ca. 6 Std.)

Kompetenzerwartungen und Inhalte

Die Schülerinnen und Schüler ...

- nutzen die Zahlenmengen der natürlichen, ganzen und rationalen Zahlen und ihre formalen Schreibweisen.
- führen die Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division von Termen mit ganzen Zahlen unter Berücksichtigung der Rechengesetze und Klammerregeln durch.
- rechnen mit rationalen Zahlen und führen Umwandlungen von Brüchen in Dezimalbrüche durch.

2 Terme mit Variablen (ca. 8 Std.)

Kompetenzerwartungen und Inhalte

Die Schülerinnen und Schüler ...

- analysieren die Struktur von Termen mit Variablen, beschreiben diese Struktur mithilfe von Fachbegriffen und berechnen Termwerte.
- stellen Terme mit Variablen auf, um mathematische Zusammenhänge zu beschreiben.
- formen Terme unter Berücksichtigung der Rechengesetze um. Beim Ausklammern eines gemeinsamen Faktors ist ihnen bewusst, dass aus einer Summe ein Produkt entsteht.
- führen einfache Umformungen von Potenzen mit ganzzahligen Exponenten durch.
- begründen die Gültigkeit der binomischen Formeln und wenden diese bei Termumformungen an.
- faktorisieren Terme und vereinfachen Bruchterme. Sie bringen dabei Bruchterme auf gemeinsame Nenner, um diese zu addieren und zu subtrahieren, und multiplizieren und dividieren Bruchterme angemessener Komplexität.

3 Lineare Gleichungen und Bruchgleichungen (ca. 7 Std.)

Kompetenzerwartungen und Inhalte

Die Schülerinnen und Schüler ...

- lösen lineare Gleichungen, stellen dabei die Lösungsschritte formal korrekt dar und überprüfen ihre Lösung, z. B. durch Einsetzen.
- nutzen die erworbenen Kenntnisse über das Lösen linearer Gleichungen, um Prozentaufgaben zu lösen.
- bestimmen unter Berücksichtigung des Definitionsbereichs die Lösungsmenge von Bruchgleichungen, die zu linearen Gleichungen führen.

4 Lineare Funktionen (ca. 8 Std.)

Kompetenzerwartungen und Inhalte

Die Schülerinnen und Schüler ...

- erfassen und beschreiben funktionale Zusammenhänge mit Tabellen, Diagrammen und – wenn möglich – mit Termen.
- grenzen zum Funktionsbegriff gehörende Fachbegriffe (z. B. Funktionsterm, Graph, Definitionsmenge, Wertemenge) voneinander ab.
- interpretieren Funktionsgleichungen der Form $y = mx + t$ als Gleichung von Geraden und erläutern die Bedeutung der Parameter m und t, auch unter Verwendung einer dynamischen Mathematiksoftware. Sie zeichnen die Graphen linearer Funktionen und ermitteln umgekehrt anhand der Graphen solcher Funktionen die zugehörigen Werte der Parameter.
- bestimmen Nullstellen linearer Funktionen und Schnittpunkte von Geraden mit den Koordinatenachsen.
- lösen einfache lineare Ungleichungen graphisch und rechnerisch (auch mithilfe eines Zahlenstrahls) und stellen die Lösungsmenge in Intervallschreibweise dar.

5 Lineare Gleichungssysteme (ca. 4 Std.)

Kompetenzerwartungen und Inhalte

Die Schülerinnen und Schüler ...

- beschreiben Sachzusammenhänge mithilfe eines Systems linearer Gleichungen und erläutern ihre Vorgehensweise.
- lösen lineare Gleichungssysteme mit zwei Unbekannten grafisch und z. B. mithilfe des Einsetzungsverfahrens rechnerisch.
- formulieren und veranschaulichen Aussagen zur Lösbarkeit und zur Lösungsvielfalt linearer Gleichungssysteme mit zwei Unbekannten.

6 Quadratwurzeln (ca. 6 Std.)

Kompetenzerwartungen und Inhalte

Die Schülerinnen und Schüler ...

- erläutern die Definition der Quadratwurzel anhand von Beispielen und bestimmen in einfachen Fällen auch im Kopf die Werte von Quadratwurzeln. Dabei ist ihnen bewusst, dass eine Erweiterung der Zahlenmenge der rationalen Zahlen um die irrationalen Zahlen zur Zahlenmenge der reellen Zahlen nötig ist.
- fassen in dem Bewusstsein, dass die bekannten Rechengesetze auch in der erweiterten Zahlenmenge gelten, in fortlaufender, klar strukturierter Rechnung Produkte, Quotienten, Summen, Differenzen und Potenzen von Termen mit Quadratwurzeln zusammen.
- formen Wurzelterme ohne Variablen so um, dass Nenner rational sind, und radizieren teilweise. Wurzelterme mit Variablen vereinfachen sie durch teilweises Radizieren und stellen das Ergebnis, falls nötig, mithilfe von Beträgen dar.

7 Quadratische Funktionen (ca. 11 Std.)

Kompetenzerwartungen und Inhalte

Die Schülerinnen und Schüler ...

- beschreiben für quadratische Funktionen mit Termen der Form $a \cdot (x+d)^2 + e$, wie sich Änderungen der Werte der Parameter a, d und e auf die zugehörige Parabel auswirken; sie bestimmen für Beispiele derart angegebener Funktionen jeweils die Anzahl der Nullstellen und die Lösungen der zugehörigen Gleichung. Zur Untersuchung und Veranschaulichung dieser Zusammenhänge nutzen sie auch eine dynamische Mathematiksoftware.
- ermitteln durch flexible Nutzung der binomischen Formeln die Koordinaten des Parabelscheitels aus dem zugehörigen Funktionsterm, auch wenn dieser in der Form $ax^2 + bx + c$ vorliegt, und zeichnen die zugehörigen Graphen.
- geben mithilfe des zugehörigen Graphen wesentliche Eigenschaften einer quadratischen Funktion an (Wertemenge, Nullstellen, Intervalle mit positiven und negativen Funktionswerten, Monotonieverhalten, größter bzw. kleinster Funktionswert, Koordinaten des Schnittpunkts mit der y-Achse).
- erkennen bei der rechnerischen Lösung von quadratischen Gleichungen, wann der Einsatz der Lösungsformel erforderlich ist und wann eine andere Methode (z. B. Ausklammern der Variable) vorteilhaft ist. Sie lösen damit quadratische Gleichungen reflektiert und schätzen die Richtigkeit der Lösungen durch eine geeignete Skizze ab. Anhand konkreter Beispiele formulieren und veranschaulichen sie auch Aussagen zur Lösbarkeit quadratischer Gleichungen.

- nutzen die jeweiligen Vorteile der drei Darstellungsformen des Terms einer quadratischen Funktion (allgemeine Form, Scheitelpunktform und Nullstellenform) situationsgerecht.
- stellen lineare Gleichungssysteme mit drei Unbekannten auf (z. B. aus den Koordinaten dreier Parabelpunkte) und lösen diese situationsgerecht.
- lösen Bruchgleichungen, die sich unmittelbar auf quadratische Gleichungen zurückführen lassen.
- beschreiben und lösen innermathematische sowie realitätsnahe Problemstellungen mithilfe quadratischer Funktionen (u. a. Modellierung von Extremwertproblemen); sie erläutern und reflektieren ihre dabei verwendeten Strategien, validieren ihre Ergebnisse im Sachzusammenhang und dokumentieren ihre Lösungswege nachvollziehbar und formal korrekt.

8 Potenzfunktionen mit natürlichen Exponenten (ca. 8 Std.)

Kompetenzerwartungen und Inhalte

Die Schülerinnen und Schüler ...

- beschreiben für Funktionen mit Termen der Form $a \cdot x^n$ in Abhängigkeit von a und n den Verlauf des zugehörigen Graphen sowie seine Symmetrie.
- lösen unter Verwendung der Definition der allgemeinen Wurzel Gleichungen, die sich auf die Form $x^n = c$ zurückführen lassen.
- erläutern, dass Potenzen mit rationalen Exponenten eine alternative Schreibweise für Wurzeln sind, und wandeln davon ausgehend Potenz- und Wurzelschreibweise ineinander um.
- fassen unter Anwendung der Rechengesetze für Potenzen mit rationalen Exponenten Produkte und Quotienten zusammen, die Potenzen und Wurzeln enthalten.

9 Elementare gebrochen-rationale Funktionen (ca. 6 Std.)

Kompetenzerwartungen und Inhalte

Die Schülerinnen und Schüler ...

- geben für gebrochen-rationale Funktionen der Form $x \mapsto \frac{a}{x+b} + c$ die maximale Definitionsmenge an, bestimmen die Schnittpunkte des zugehörigen Graphen mit den Koordinatenachsen und beschreiben den Einfluss einer Änderung der Werte der Parameter b und c auf den Verlauf des Graphen. Zur Untersuchung und Veranschaulichung nutzen sie auch eine dynamische Mathematiksoftware.
- zeichnen den Graphen einer gebrochen-rationalen Funktion der Form $x \mapsto \frac{a}{x+b} + c$ einschließlich seiner Asymptoten und ermitteln umgekehrt anhand des Graphen einer solchen Funktion die zugehörigen Werte der Parameter.

10 Figurengeometrie (ca. 6 Std.)

Kompetenzerwartungen und Inhalte

Die Schülerinnen und Schüler ...

- zeichnen besondere Geraden im Dreieck, u. a. Mittelsenkrechte, Winkelhalbierende, Höhen.
- beschreiben grundlegende Eigenschaften besonderer Dreiecke (rechtwinkliges, gleichschenkliges, gleichseitiges Dreieck) und Vierecke (Parallelogramm, Trapez, Rechteck, Quadrat).
- berechnen den Flächeninhalt und den Umfang von Drei- und Vierecken sowie von Kreisen.
- wenden den Satz des Thales im Zusammenhang mit rechtwinkligen Dreiecken an.

11 Satz des Pythagoras (ca. 4 Std.)

Kompetenzerwartungen und Inhalte

Die Schülerinnen und Schüler ...

- vollziehen einen Beweis für den Satz des Pythagoras nach.
- führen an rechtwinkligen Dreiecken unter flexibler Anwendung des Satzes des Pythagoras Berechnungen durch.

12 Trigonometrie (ca. 6 Std.)

Kompetenzerwartungen und Inhalte

Die Schülerinnen und Schüler ...

- identifizieren die Seitenverhältnisse im rechtwinkligen Dreieck als Sinus, Kosinus und Tangens der Größe des jeweils zugehörigen spitzen Innenwinkels und führen durch flexible Verwendung dieser Beziehungen Berechnungen an rechtwinkligen Dreiecken durch.

13 Sinus- und Kosinusfunktion (ca. 10 Std.)

Kompetenzerwartungen und Inhalte

Die Schülerinnen und Schüler ...

- nutzen das Bogenmaß als alternative Möglichkeit, Winkelgrößen zu beschreiben, und wechseln zwischen Bogen- und Gradmaß. Sie veranschaulichen das Bogenmaß am Einheitskreis.

- veranschaulichen Sinus- und Kosinuswerte von Winkelgrößen zwischen 0 und 2π am Einheitskreis und ermitteln das zugehörige Vorzeichen sicher. Sie bestimmen Größen von Winkeln, die einen vorgegebenen Sinus- oder Kosinuswert besitzen.
- erläutern, wie sich die Werte von Sinus und Kosinus für Winkelgrößen größer als 2π sowie für negative Winkelgrößen mithilfe des Einheitskreises auf Werte zwischen 0 und 2π zurückführen lassen.
- begründen mithilfe des Einheitskreises den Verlauf der Graphen der Sinus- und der Kosinusfunktion, deren Periodizität sowie den Zusammenhang zwischen beiden Funktionen.
- beschreiben für Funktionen mit Termen der Form $a \cdot \sin\left(b \cdot (x + c)\right) + d$, wie sich Änderungen der Parameter a, b, c und d auf den Funktionsgraphen auswirken. Dabei nutzen sie auch eine dynamische Mathematiksoftware.
- zeichnen für einen gegebenen Funktionsterm der Form $a \cdot \sin\left(b \cdot (x + c)\right) + d$ unter Verwendung geeigneter Merkmale (insbesondere Amplitude und Periode) den zugehörigen Funktionsgraphen und ermitteln umgekehrt aus dem Graphen den zugehörigen Funktionsterm.
- lösen realitätsbezogene Problemstellungen zu periodischen Vorgängen graphisch und rechnerisch, indem sie geeignete Modellierungen mithilfe der Sinus- und Kosinusfunktion vornehmen und bei Bedarf variieren.

14 Exponentielles Wachstum und Logarithmus (ca. 9 Std.)

Kompetenzerwartungen und Inhalte

Die Schülerinnen und Schüler ...

- beschreiben und veranschaulichen Charakteristika von exponentieller Zunahme und exponentieller Abnahme. Sie grenzen exponentielles Wachstum von linearem Wachstum ab.
- beschreiben für Funktionen mit Termen der Form $b \cdot a^x$ in Abhängigkeit von a und b den Verlauf des zugehörigen Graphen und dessen typische Merkmale (Schnittpunkt mit der y-Achse, asymptotisches Verhalten, Monotonieverhalten) und argumentieren damit, auch unter Verwendung einer dynamischen Mathematiksoftware.
- erläutern die Definition des Logarithmus und ermitteln Werte von Logarithmen in einfachen Fällen mithilfe der Definition, andernfalls mit dem Taschenrechner.
- lösen einfache Exponentialgleichungen und wenden dabei die Regel $\log_b\left(u^z\right) = z \cdot \log_b(u)$ an.
- lösen realitätsnahe Aufgabenstellungen im Zusammenhang mit Wachstums- und Abklingvorgängen (z. B. Bevölkerungsentwicklung, radioaktiver Zerfall) graphisch und rechnerisch. Dabei erstellen sie ein für die Realsituation geeignetes Modell, hinterfragen ihre Ergebnisse kritisch, variieren bei Bedarf die Modellierung und benennen Grenzen des jeweiligen Modells.

15 Ganzrationale Funktionen (ca. 9 Std.)

Kompetenzerwartungen und Inhalte

Die Schülerinnen und Schüler ...

- bestimmen in Fällen angemessener Komplexität Nullstellen ganzrationaler Funktionen und deren Vielfachheit und erstellen mit deren Hilfe eine Skizze des Funktionsgraphen, die sie, z. B. durch reflektierte Verwendung einer geeigneten Software (Funktionsplotter), kontrollieren.
- ziehen aus dem Graphen einer ganzrationalen Funktion, soweit möglich, Rückschlüsse auf den Grad der Funktion oder auch auf den zugehörigen Funktionsterm.
- überprüfen rechnerisch sowie durch Analyse und Struktur des Funktionsterms, ob der Graph einer ganzrationalen Funktion Achsensymmetrie bezüglich der y-Achse bzw. Punktsymmetrie bezüglich des Koordinatenursprungs aufweist.
- erläutern anhand des Graphen sowie anhand des Funktionsterms das Grenzverhalten von ganzrationalen Funktionen für $x \to +\infty$ und für $x \to -\infty$. Zur Angabe des Grenzverhaltens verwenden Sie die Grenzwertschreibweise.

16 Gebrochen-rationale Funktionen – Grenzwerte und Asymptoten (ca. 13 Std.)

Kompetenzerwartungen und Inhalte

Die Schülerinnen und Schüler ...

- ermitteln die maximal mögliche Definitionsmenge sowie ggf. die Nullstellen einer einfachen gebrochen-rationalen Funktion (d. h. einer Funktion, bei der sowohl Zähler- als auch Nennerpolynom höchstens den Grad 2 aufweisen und deren Funktionsterm in vollständig gekürzter Form vorliegt). Sie geben ggf. das Zähler- bzw. Nennerpolynom als Produkt von Linearfaktoren an und verwenden situationsgerecht unterschiedliche Darstellungen des Funktionsterms.
- ermitteln anhand des Funktionsterms – auch mithilfe zielgerichteter Termumformungen – das Grenzverhalten einer einfachen gebrochen-rationalen Funktion für $x \to +\infty$ und für $x \to -\infty$ und geben ggf. die Gleichung der waagrechten Asymptote an. Besitzt der Graph eine schräge Asymptote, geben sie deren Gleichung an, sofern diese unmittelbar aus dem zugehörigen Funktionsterm ersichtlich ist.
- ermitteln mithilfe des Funktionsterms das links- und rechtsseitige Grenzverhalten einer einfachen gebrochen-rationalen Funktion für $x \to x_0$, um den Verlauf des Graphen in der Umgebung einer Polstelle x_0 zu beschreiben. Zur Angabe des Grenzverhaltens verwenden sie die Grenzwertschreibweise und geben die Gleichung der zugehörigen senkrechten Asymptote des Graphen an.

- analysieren einfache gebrochen-rationale Funktionen hinsichtlich ihrer wesentlichen Eigenschaften, schließen damit auf den Verlauf des jeweiligen Graphen und zeichnen diesen. Umgekehrt schließen sie aus gegebenen Eigenschaften auf einen dazu passenden Funktionsterm. Zur Kontrolle benutzen sie eine geeignete Mathematiksoftware.
- ermitteln die Koordinaten von Schnittpunkten der Graphen zweier einfacher gebrochen-rationaler Funktionen bzw. des Graphen einer einfachen gebrochen-rationalen Funktion mit dem Graphen einer linearen Funktion rechnerisch, sofern sich das Lösen der dabei auftretenden Bruchgleichung auf das Lösen einer linearen oder quadratischen Gleichung zurückführen lässt.

17 Grundlagen der Differentialrechnung (ca. 23 Std.)

Kompetenzerwartungen und Inhalte

Die Schülerinnen und Schüler ...

- berechnen Werte von Differenzenquotienten und deuten diese geometrisch als Sekantensteigungen. Sie interpretieren den Wert des Differenzenquotienten als mittlere Änderungsrate und nutzen diese Interpretation im Sachkontext (z. B. durchschnittliche Steigung einer Straße, Durchschnittsgeschwindigkeit).
- deuten den Wert des Differentialquotienten geometrisch als Tangentensteigung und interpretieren diese Steigung als Steigung des Graphen im zugehörigen Punkt.
- erläutern an Graphen von Funktionen die Bedeutung des Begriffs der lokalen Differenzierbarkeit; dabei skizzieren sie Graphen von Funktionen (z. B. der Betragsfunktion), die an einzelnen Stellen nicht differenzierbar sind.
- erläutern die Definition der Ableitungsfunktion, schließen aus dem Graphen einer Funktion auf den Verlauf des Graphen der zugehörigen Ableitungsfunktion und begründen ihre Vorgehensweise.
- leiten ganzrationale Funktionen ab und nutzen dabei auch die Faktor- und die Summenregel.
- interpretieren Werte von Ableitungsfunktionen als lokale Änderungsraten und nutzen diese Interpretation im Sachkontext (z. B. lokale Steigung einer Straße, Momentangeschwindigkeit).
- nutzen die Ableitung, um die Gleichung einer Tangente an einen Graphen aufzustellen und die Größe des Steigungswinkels der Tangente zu berechnen.
- veranschaulichen die formale Definition der strengen Monotonie anhand geeigneter Skizzen. Sie erläutern, wie man aus der ersten Ableitung einer Funktion Rückschlüsse auf deren Monotonieverhalten sowie auf deren Extremstellen ziehen kann, und nutzen diese Zusammenhänge bei der Untersuchung ganzrationaler Funktionen.
- interpretieren das Krümmungsverhalten des Funktionsgraphen als Monotonieverhalten der ersten Ableitung einer Funktion; sie erläutern, dass an einer Wendestelle die Steigung des Funktionsgraphen bzw. die lokale Änderungsrate der Funktion extremal ist, und interpretieren dies im Sachkontext (z. B. Zeitpunkt größten

Wachstums). Sie untersuchen das Krümmungsverhalten ganzrationaler Funktionen mithilfe der zweiten Ableitung und ermitteln rechnerisch Wendestellen dieser Funktionen.

- unterscheiden bei Extremstellen und Wendestellen zwischen notwendigen und hinreichenden Bedingungen.
- analysieren ganzrationale Funktionen hinsichtlich ihrer Eigenschaften durch flexible und reflektierte Nutzung der Methoden der Differentialrechnung. Zur Kontrolle ihrer Ergebnisse verwenden sie eine geeignete Mathematiksoftware.

18 Einführung in die Stochastik (ca. 9 Std.)

Kompetenzerwartungen und Inhalte

Die Schülerinnen und Schüler ...

- beschreiben Zufallsexperimente unter Verwendung von Fachbegriffen wie Ergebnis, Ergebnismenge und Ereignis. Sie berechnen Laplace-Wahrscheinlichkeiten und nutzen dabei auch das Zählprinzip.
- stellen zwei miteinander verknüpfte Ereignisse mithilfe von Schnitt- und Vereinigungsmengen dar.
- interpretieren, ausgehend von Vierfeldertafeln mit absoluten Häufigkeiten, die zugehörigen relativen Häufigkeiten als Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen eines Zufallsexperiments. Sie übersetzen dabei verbale Beschreibungen in formale und umgekehrt.
- veranschaulichen mehrstufige Zufallsexperimente anhand eines Baumdiagramms und berechnen Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen mithilfe der Pfadregeln. Sie unterscheiden dabei die beiden Urnenmodelle.

19 Bedingte Wahrscheinlichkeit und stochastische Unabhängigkeit (ca. 9 Std.)

Kompetenzerwartungen und Inhalte

Die Schülerinnen und Schüler ...

- bestimmen bedingte Wahrscheinlichkeiten auch unter flexibler Verwendung von Baumdiagrammen und Vierfeldertafeln.
- erläutern die stochastische Unabhängigkeit zweier Ereignisse an konkreten Beispielen. Sie erkennen die stochastische Unabhängigkeit bzw. Abhängigkeit von Ereignissen an Baumdiagrammen und Vierfeldertafeln und prüfen rechnerisch, ob zwei Ereignisse stochastisch unabhängig sind.
- berücksichtigen verschiedene Aspekte, um aus Daten abgeleitete Aussagen kritisch zu hinterfragen (z. B. Umfang und Zusammensetzung der Stichprobe, Änderung bedingter Wahrscheinlichkeiten je nach betrachteter Teilmenge der Daten, Art der

Datenerhebung und der zugrunde liegenden Fragestellung) und unterscheiden dabei auch die Begriffe Korrelation und Kausalität.

Hinweise

Im Hinblick auf die Abiturprüfung ist auf die folgenden Inhalte in den Jahrgangsstufen II und III gegebenenfalls zusätzlicher Fokus zu legen, da sie in diesem Fachlehrplan nicht enthalten sind oder zu wenig vertieft werden können:

- Untersuchung von Funktionsgraphen auf Symmetrie bezüglich der y-Achse bzw. des Koordinatenursprungs
- allgemeine Betrachtung von Veränderungen an einem Funktionsterm, die ein Verschieben, Strecken bzw. Spiegeln des Funktionsgraphen bewirken
- Nutzung der Formeln zur Bestimmung des Oberflächeninhalts und des Volumens von Pyramide, Kegel und Kugel