Mündliche Abiturprüfung in Mathematik

Beispiele für Kolloquiumsprüfungen

Die folgenden vier Beispiele enthalten vollständig ausgearbeitete Kolloquiumsprüfungen. Diese enthalten jeweils:

- Aufgaben für einen zusammenhängenden Vortrag
- Zusatzfragen für das anschließende Gespräch zum Prüfungsschwerpunkt
- Aufgaben zum weiteren, nicht ausgeschlossenen Sachgebiet

Auch die mündlich zu stellenden Aufgaben (Zusatzfragen und Aufgaben zum weiteren Sachgebiet) in diesem Dokument sind hinsichtlich der Formulierung an schriftliche Abiturprüfungsaufgaben angelehnt. Im Prüfungsgespräch ist es selbstverständlich möglich, die Aufgabenstellungen sprachlich in abgewandelter Form zu formulieren. Die prüfende Lehrkraft muss im Sinne des Gesprächscharakters und in Abhängigkeit vom Verlauf der Prüfung flexibel auf die Antworten des Prüflings reagieren. Insbesondere kommen beispielsweise auch Zwischenfragen und Hilfestellungen in Betracht. Bei zu ausführlicher Behandlung oder unzureichendem Kenntnisstand kann der Abbruch einer Teilaufgabe oder ein Wiederaufgreifen zu einem späteren Zeitpunkt sinnvoll sein.

Der Umfang der mündlich zu stellenden Aufgaben (Zusatzfragen und Aufgaben zum weiteren Sachgebiet) ist verhältnismäßig groß gewählt, um im Rahmen der vorgelegten Beispielkolloquien eine gewisse Bandbreite möglicher Fragestellungen aufzuzeigen; in einer realen Prüfung muss bei vergleichbarem Umfang je nach Verlauf in der Regel eine Auswahl getroffen werden.

Die Erwartungshorizonte zu den Beispielkolloquien, die in diesem Dokument grau hinterlegt sind, stellen weder ausformulierte Vorträge noch typische Antworten dar. Vielmehr sind die Erwartungshorizonte in diesem Dokument aus Gründen der Praktikabilität in der Regel ähnlich wie der Erwartungshorizont einer schriftlichen Prüfung formuliert.

Als digitales Hilfsmittel ist zur Bearbeitung der Aufgaben für den zusammenhängenden Vortrag jeweils ein wissenschaftlicher Taschenrechner vorgesehen; für eine Prüfung mit einem modularen Mathematiksystem (MMS, ehemals: CAS) müssten die Aufgaben insbesondere in der Analysis geeignet angepasst werden.

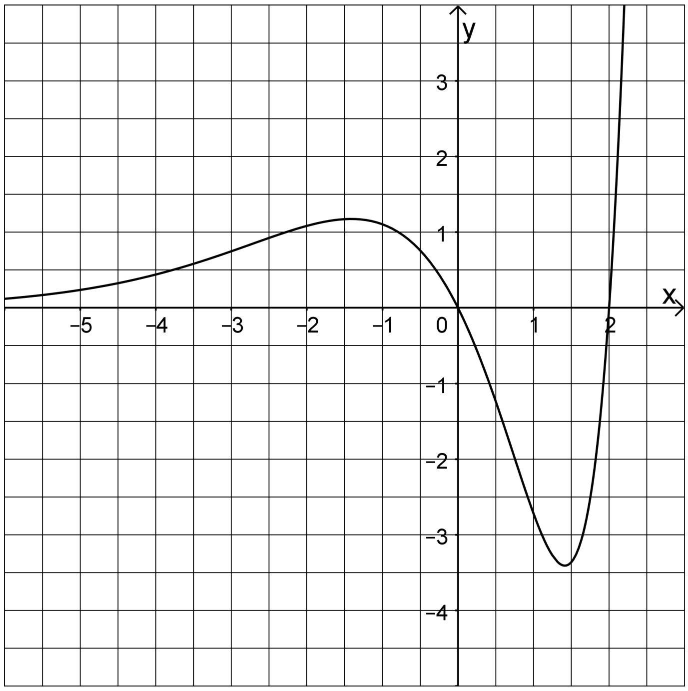
Inhaltsverzeichnis

1 Beispiel 1

1.1 Prüfungsteil 1 (Analysis)

1.1.1 Aufgaben für einen zusammenhängenden Vortrag

Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $f: x \mapsto x \cdot (x-2) \cdot e^x$. Die Abbildung zeigt den Graphen G_f von f.



a Erklären Sie, wie man anhand des Funktionsterms die Nullstellen von f ermitteln kann, und untersuchen Sie das Verhalten von f für $x \to -\infty$ und $x \to +\infty$.

b Bestimmen Sie rechnerisch die Extremstellen von f.

c Für jeden Wert von $a \in \mathbb{R}$ wird die Tangente t_a an G_f im Punkt $(a \mid f(a))$ betrachtet. Die Tangente t_a besitzt die Steigung $(a^2-2) \cdot e^a$ und den y-Achsenabschnitt $a^2 \cdot (1-a) \cdot e^a$.
Untersuchen Sie rechnerisch, für welche Werte von a
(1) die Steigung von t_a negativ ist,
(2) t_a durch den vierten, aber nicht durch den dritten Quadranten verläuft.

d Die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion F mit $F(x) = (x^2 - 4x + 4) \cdot e^x$ ist eine Stammfunktion von f.
Berechnen Sie den Wert des Integrals $\int_{-\infty}^{2} f(x)\,dx$ und interpretieren Sie das Ergebnis geometrisch.

e Der Graph G_f und die x-Achse begrenzen im Bereich $-4 \le x \le 2$ eine Fläche.
Beurteilen Sie folgende Aussagen:

I *Der Inhalt der Fläche ist durch den Term* $\int_{-4}^{2} f(x)\,dx$ *gegeben.*

II *Das Volumen des Körpers, der durch Rotation dieser Fläche um die x-Achse entsteht, ist durch den Term* $\int_{-4}^{2} \pi \cdot (f(x))^2\,dx$ *gegeben.*

Interpretieren Sie den Term $\pi \cdot (f(x))^2$ geometrisch.

f Geben Sie eine Gleichung an, mit der man die Koordinaten derjenigen Punkte auf G_f ermitteln kann, die vom Koordinatenursprung den Abstand 2 haben. Begründen Sie geometrisch, dass diese Gleichung mehr als drei Lösungen hat.

Erwartungshorizont:

a	Nullstellen: Der Funktionsterm $x\cdot(x-2)\cdot e^x$ ist genau dann gleich null, wenn einer seiner Faktoren gleich null ist. Wegen $e^x>0$ ist dies nur für die ersten beiden Faktoren möglich. • $\lim\limits_{x\to-\infty} x\cdot(x-2)\cdot e^x=0$ wegen $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(-x)\cdot(-x-2)}{e^x}=0$ (vgl. Formeldokument) • $\lim\limits_{x\to+\infty}\underbrace{x}_{\to+\infty}\cdot\underbrace{(x-2)}_{\to+\infty}\cdot\underbrace{e^x}_{\to+\infty}=+\infty$
b	$f(x)=\left(x^2-2x\right)\cdot e^x;\ f'(x)=(2x-2)\cdot e^x+\left(x^2-2x\right)\cdot e^x=\left(x^2-2\right)\cdot e^x$ $f'(x)=0\Leftrightarrow x=-\sqrt{2}\vee x=\sqrt{2}$
c	(1) $f'(a)<0\Leftrightarrow a\in\left]-\sqrt{2};\sqrt{2}\right[$ (2) Eine Gerade mit der Gleichung $y=mx+t$ verläuft genau dann durch den vierten und nicht durch den dritten Quadranten, wenn $m<0$ und $t>0$ gilt. $a^2\cdot(1-a)\cdot e^a>0\Leftrightarrow a<1$ In Verbindung mit (1) ergibt sich $a\in\left]-\sqrt{2};1\right[$.
d	$\int_{-\infty}^{2} f(x)dx=F(2)-\lim\limits_{u\to-\infty}F(u)=0$ Das Flächenstück zwischen G_f und der x-Achse im Bereich $-\infty<x\leq 0$ hat den gleichen Inhalt wie das Flächenstück zwischen G_f und der x-Achse im Bereich $0\leq x\leq 2$.
e	Aussage I ist falsch, da die Funktion f im Bereich $-4\leq x\leq 2$ auch negative Funktionswerte hat. Aussage II ist richtig, da die Voraussetzungen der entsprechenden Formel im Formeldokument erfüllt sind. $\pi\cdot(f(x))^2$ gibt den Flächeninhalt einer Kreisscheibe mit Radius $f(x)$ an.
f	$x^2+(f(x))^2=2^2$ Der Kreis mit Mittelpunkt $(0\|0)$ und Radius 2 schneidet G_f offensichtlich zweimal für $x<1$ sowie im Punkt $(2\|0)$. Da G_f die x-Achse in $(2\|0)$ nicht senkrecht schneidet, gibt es für $1<x<2$ mindestens einen weiteren Schnittpunkt.

1.1.2 Gespräch zu den Inhalten des Prüfungsschwerpunkts

zu Aufgabe b:

- *Material:*

$x \cdot (x-2) \cdot e^x = c,\ c \in \mathbb{R}$

  Betrachtet wird die Gleichung $x \cdot (x-2) \cdot e^x = c$ mit $c \in \mathbb{R}$. Untersuchen Sie mithilfe der Abbildung, für welche Werte von c diese Gleichung genau zwei Lösungen besitzt.

  Die Anzahl der Lösungen der betrachteten Gleichung entspricht der Anzahl der Schnittpunkte von G_f und der Gerade mit der Gleichung $y = c$.

  Die y-Koordinaten der Extrempunkte von G_f sind $y_1 = f\left(-\sqrt{2}\right) = \left(2+2\sqrt{2}\right) \cdot e^{-\sqrt{2}}$ und $y_2 = f\left(\sqrt{2}\right) = \left(2-2\sqrt{2}\right) \cdot e^{\sqrt{2}}$. Damit ergeben sich $c \in \left]y_1;0\right]$ und $c = y_2$ als die gesuchten Werte von c.

- Begründen Sie, dass die Funktion f nicht umkehrbar ist.

  Es gibt Werte von c, für die die Gleichung $x \cdot (x-2) \cdot e^x = c$ mehr als eine Lösung hat.

- Es gibt Intervalle I, sodass die in I definierte Funktion $\tilde{f}$ mit $\tilde{f}(x) = f(x)$ umkehrbar ist. Geben Sie größtmögliche solche Intervalle an.

  $\left]-\infty;-\sqrt{2}\right]$, $\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$, $\left[\sqrt{2};+\infty\right[$

zu Aufgabe a:

Material:

$h: x \mapsto x \cdot (x-2)^2 \cdot e^x,\ x \in \mathbb{R}$

Betrachtet wird die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $h: x \mapsto x \cdot (x-2)^2 \cdot e^x$.

- Untersuchen Sie die Funktionen h und f auf Gemeinsamkeiten und Unterschiede, die ohne weitere Rechnung erkennbar sind.

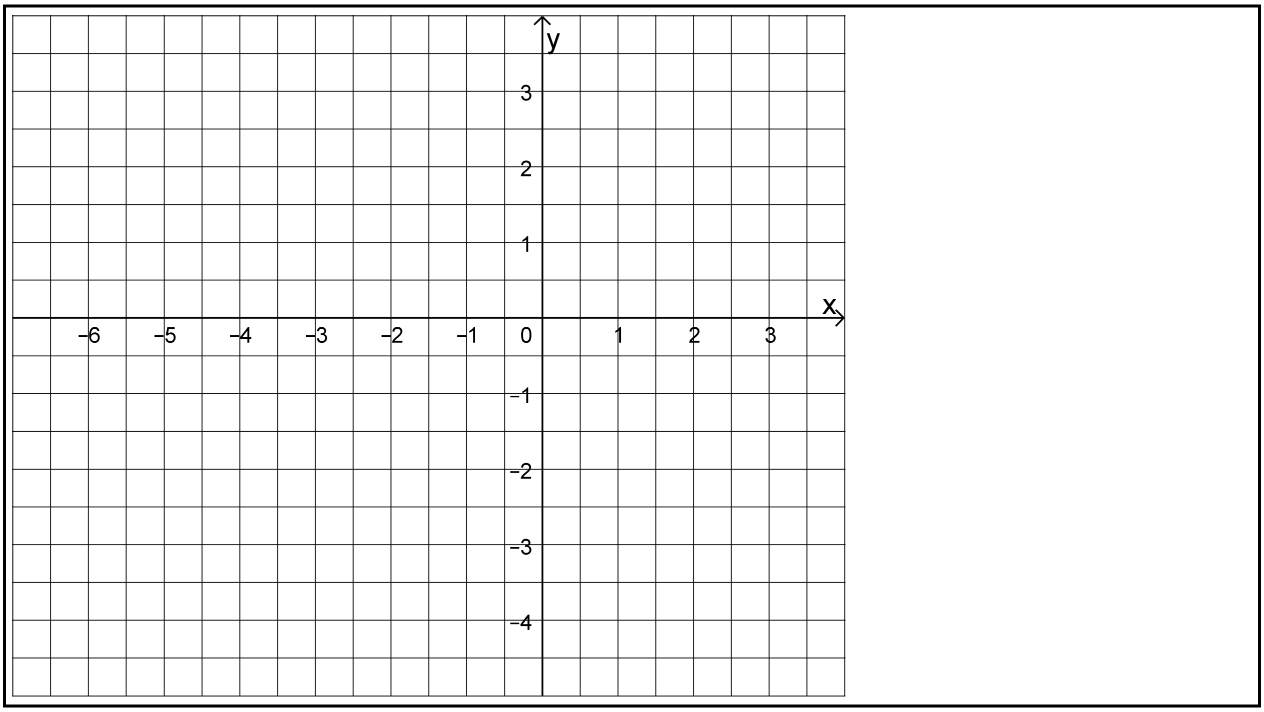
  Gemeinsamkeiten:

  - Beide Funktionen haben die Nullstellen 0 und 2.
  - Für $x > 2$ verlaufen die Graphen beider Funktionen oberhalb der x-Achse.
  - Es gilt $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} h(x)$ und $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} h(x)$.

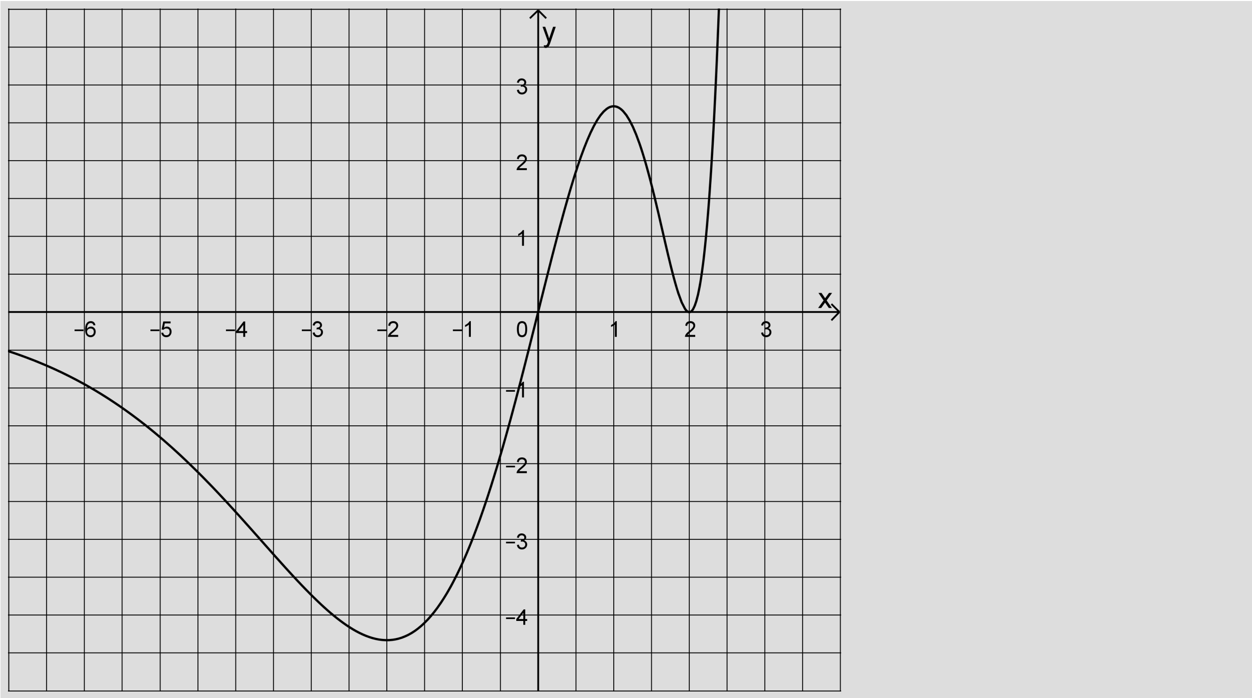
  Unterschiede:

  - 2 ist eine einfache Nullstelle von f, aber eine doppelte Nullstelle von h.
  - Der Graph von f verläuft für $x < 0$ oberhalb und für $0 < x < 2$ unterhalb der x-Achse; der Graph von h verläuft für $x < 0$ unterhalb und für $0 < x < 2$ oberhalb der x-Achse.

• *Material:*



Skizzieren Sie den Graphen von h.



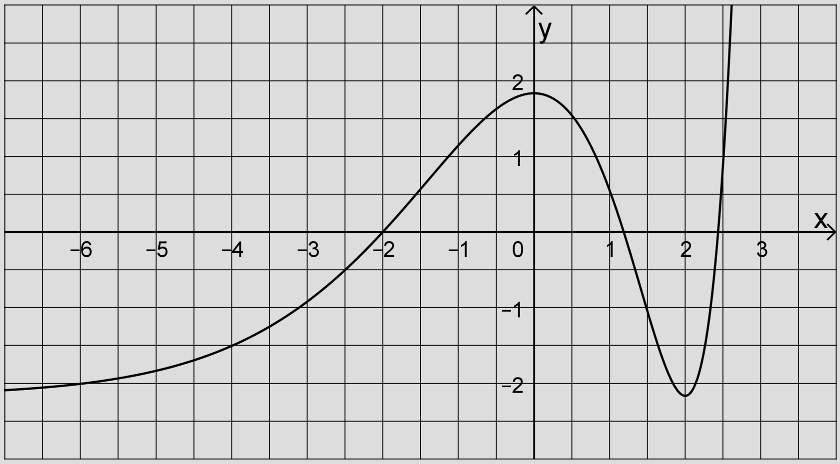
zu Aufgabe d:

Material:

$F: x \mapsto \int_{-2}^{x} f(t)\,dt,\ x \in \mathbb{R}$

Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Integralfunktion $F: x \mapsto \int_{-2}^{x} f(t)\,dt$.

- Skizzieren Sie den Graphen von F.



- Geben Sie an, welche Bedeutung die Koordinaten der Extrempunkte des Graphen von F für die Funktion f haben.

Da F eine Stammfunktion von f ist, stimmen die Extremstellen von F mit den Nullstellen von f überein. Der Graph von F hat somit die Extrempunkte $(0|F(0))$ und $(2|F(2))$. $F(0)$ ist der Inhalt des Flächenstücks, das G_f mit der x-Achse im Bereich $-2 \le x \le 0$ einschließt. $F(2)$ ist die Differenz aus $F(0)$ und dem Flächenstück, das G_f mit der x-Achse im Bereich $0 \le x \le 2$ einschließt.

ohne direkten Bezug:

- Betrachtet wird eine in $\mathbb{R}$ definierte ganzrationale Funktion g. Beurteilen Sie, ob folgende Aussage richtig ist:

  Hat die erste Ableitungsfunktion von g genau n verschiedene Nullstellen, so hat der Graph von g genau n Extrempunkte.

Die Aussage ist falsch. Die erste Ableitungsfunktion der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion $x \mapsto x^3$ hat beispielsweise die einzige Nullstelle 0; da es sich jedoch um eine doppelte Nullstelle (also eine Nullstelle ohne Vorzeichenwechsel) handelt, hat der Graph von $x \mapsto x^3$ keinen Extrempunkt.

1.2 Prüfungsteil 2 (Stochastik)

1 *Material:*

Anzahl der Computerarbeitsplätze: 30
Anzahl der Schülerinnen: 5

Im Computerraum eines Gymnasiums stehen 30 Computerarbeitsplätze zur Verfügung. Für fünf Schülerinnen wird jeweils ein Arbeitsplatz zufällig ausgewählt.

a Geben Sie einen Term an, mit dem die Anzahl der Möglichkeiten berechnet werden kann, fünf Arbeitsplätze auszuwählen, und erläutern Sie den Term.

$$\binom{30}{5} = \frac{30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27 \cdot 26}{5!}$$

Es werden fünf Elemente aus einer Menge von 30 Elementen ausgewählt, wobei die Reihenfolge der Auswahl keine Rolle spielt. Daher kann man diese Anzahl mithilfe des Binomialkoeffizienten berechnen. Der Zähler des Bruchterms gibt die Anzahl der Möglichkeiten an, fünf von 30 Arbeitsplätzen unter Beachtung der Reihenfolge auszuwählen, der Nenner die Anzahl der Permutationen der fünf ausgewählten Arbeitsplätze.

b *Material:*

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Der Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$ gibt die Anzahl der Möglichkeiten an, aus n Elementen k Elemente auszuwählen. Begründen Sie damit, dass $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ gilt.

Wählt man k Elemente aus einer Menge mit n Elementen aus, so bleiben $n-k$ Elemente übrig. Die Anzahl der Möglichkeiten, aus einer Menge mit n Elementen k Elemente auszuwählen, ist demzufolge genauso groß wie die Anzahl der Möglichkeiten, $n-k$ Elemente auszuwählen.

c Zehn der Computer besitzen einen Bildschirm mit Blaulichtfilter. Betrachtet wird das Ereignis E: „Mehr als die Hälfte der Schülerinnen sitzen vor einen Bildschirm mit Blaulichtfilter.“.
Erläutern Sie, wie Sie $P(E)$ bestimmen, und geben Sie einen Term für $P(E)$ an.

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass drei, vier oder fünf Schülerinnen vor einem Bildschirm mit Blaulichtfilter sitzen, kann wie folgt berechnet werden:

$$P(E) = \frac{\binom{10}{3} \cdot \binom{20}{2}}{\binom{30}{5}} + \frac{\binom{10}{4} \cdot \binom{20}{1}}{\binom{30}{5}} + \frac{\binom{10}{5} \cdot \binom{20}{0}}{\binom{30}{5}}$$

2 *Material:*

Sektor	A	B	I
Wahrscheinlichkeit	30 %		

Ein Glücksrad besteht aus drei Sektoren, die mit den Buchstaben A, B und I beschriftet sind. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei einmaligem Drehen „A“ erzielt wird, beträgt 30 %.

a Geben Sie einen Term an, mit dem man die Wahrscheinlichkeit dafür berechnen kann, dass bei achtmaligem Drehen zwei- oder dreimal „A“ erzielt wird. Erläutern Sie, welche Überlegungen Ihrer Angabe zugrunde liegen.

$$\binom{8}{2}\cdot 0{,}3^2\cdot 0{,}7^6+\binom{8}{3}\cdot 0{,}3^3\cdot 0{,}7^5$$

Es werden nur die Ergebnisse „A“ und „nicht A“ betrachtet. Die Wahrscheinlichkeit dafür, „A“ zu erzielen, ändert sich nicht, wenn das Glücksrad mehrmals gedreht wird. Daher handelt es sich bei dem Zufallsexperiment um eine Bernoulli-Kette.

b *Material:*

$$\sum_{i=3}^{7}\binom{10}{i}\cdot 0{,}3^i\cdot 0{,}7^{10-i}$$

Betrachtet wird der Term $\sum_{i=3}^{7}\binom{10}{i}\cdot 0{,}3^i\cdot 0{,}7^{10-i}$.

Beschreiben Sie im Sachzusammenhang ein Zufallsexperiment, bei dem die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses mit diesem Term berechnet werden kann, und geben Sie dieses Ereignis an.

Zufallsexperiment: Das Glücksrad wird zehnmal gedreht.

Ereignis: „A“ wird mindestens dreimal und höchstens siebenmal erzielt.

Material:

	A	B	C	D
1	**ABI-Glücksrad**			
2				
3	Sektor	A	B	I
4	Auszahlung	2,00 €	4,00 €	0,00 €
5	Wahrscheinlichkeit	0,3	0,1	
6				
7	=(B4-1)*B5+(C4-1)*C5+(D4-1)*D5			

Bei einem Gewinnspiel darf das Glücksrad für einen Einsatz von 1 € einmal gedreht werden. Je nachdem, welcher Sektor erzielt wird, erhält man eine Auszahlung in Euro. Die Tabelle zeigt die Auszahlungen mit den zugehörigen Wahrscheinlichkeiten.

c In Zelle D5 fehlt ein Wert. Geben Sie diesen Wert an.

0,6

d Der in Zelle A7 berechnete Wert ist 0. Interpretieren Sie diese Tatsache im Sachzusammenhang.

Mit der Formel in Zelle A7 wird der Erwartungswert des Gewinns bestimmt. Da dieser 0 € beträgt, handelt es sich um ein faires Spiel, d. h. Gewinn und Verlust gleichen sich auf lange Sicht aus.

Aufgrund der Größe des Sektors, der mit „B“ beschriftet ist, geht man davon aus, dass die zugehörige Wahrscheinlichkeit 10 % beträgt. Das Glücksrad wird 200-mal gedreht. „B“ wird dabei genau 30-mal erzielt.

e Beurteilen Sie, ob man daraus schließen kann, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass „B“ erzielt wird, in Wirklichkeit größer als 10 % ist.

Auch wenn der Erwartungswert dafür, wie oft bei 200 Drehungen „B“ erzielt wurde, den Wert 20 hat, kann man aus dem erzielten Ergebnis nicht folgern, dass die Trefferwahrscheinlichkeit für „B“ größer als 10 % ist, da Abweichungen vom Erwartungswert möglich sind.

f Erläutern Sie ausgehend von diesem Sachzusammenhang die Vorgehensweise bei einem einseitigen Signifikanztest. Nennen Sie dabei die Überlegungen, die bei der Wahl Ihrer Nullhypothese im Vordergrund stehen.

Um einen Anhaltspunkt dafür zu gewinnen, ob p größer als 10 % ist, kann man einen Signifikanztest durchführen. Dabei geht man wie folgt vor:

- Festlegung des Stichprobenumfangs: n
- Festlegungen der Testgröße: Die Zufallsgröße X beschreibt, wie oft „B“ erzielt wird.
- Festlegung der Nullhypothese H_0, z. B. „p ist größer als 10 %.“
- Überlegung, die zur Wahl der Nullhypothese geführt hat: Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Nullhypothese irrtümlich abgelehnt wird (Fehler erster Art), soll möglichst klein sein. Damit minimiert man das Risiko, dass man bei der Festlegung der Auszahlung für „B“ irrtümlich nicht von $p > 10\,\%$ ausgeht und öfter, als zu erwarten ist, eine höhere Auszahlung leisten muss.
- Festlegung des Signifikanzniveaus α, z. B. $\alpha = 5\,\%$
- Ermitteln der Entscheidungsregel mithilfe des Ansatzes $P_{0,1}^{n}(X \leq k) \leq 0{,}05$, d. h.

  Konstruktion eines möglichst großen Ablehnungsbereichs, sodass der Wert der Zufallsgröße X mit einer Wahrscheinlichkeit von höchstens 5 % in diesem Bereich liegt
- In diesem Beispiel findet man mithilfe der Entscheidungsregel eine obere Grenze k dafür, wie oft „B“ erzielt wird.
- Durchführen des Tests
- Die Nullhypothese wird abgelehnt, wenn höchstens k-mal „B“ erzielt wird.

g Beurteilen Sie folgende Aussage:

Liegt das Ergebnis der Stichprobe im Ablehnungsbereich, so ist die Nullhypothese falsch.

Mithilfe des Signifikanztests kann man statistisch gestützte Entscheidungen treffen, aber nicht entscheiden, ob eine Hypothese wahr oder falsch ist. Somit ist die Aussage falsch.

2 Beispiel 2

2.1 Prüfungsteil 1 (Analysis)

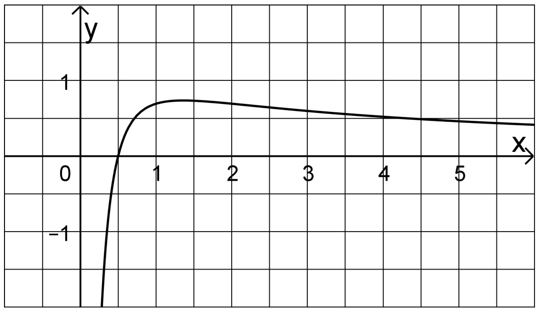
2.1.1 Aufgaben für einen zusammenhängenden Vortrag

1 Betrachtet wird folgende Definition:

Eine Funktion f mit Definitionsbereich D heißt streng monoton zunehmend, wenn für alle $x_1, x_2 \in D$ *mit* $x_1 < x_2$ *die Ungleichung* $f(x_1) < f(x_2)$ *gilt.*

Erläutern Sie diese Definition anhand einer Skizze.

2 Gegeben ist die Funktion $g: x \mapsto \frac{\ln(2x)}{x}$ mit Definitionsbereich $D = \mathbb{R}^+$. Die Abbildung zeigt den Graphen von g.



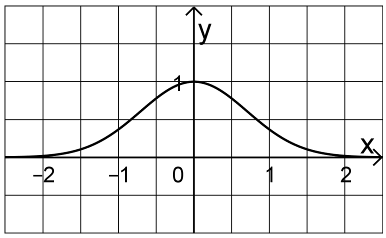
a Bestimmen Sie rechnerisch das Verhalten von g für $x \to 0$ und $x \to +\infty$ sowie die Nullstelle von g.

b Für die erste Ableitungsfunktion von g gilt $g'(x) = \frac{1 - \ln(2x)}{x^2}$. Untersuchen Sie mithilfe von g' das Monotonieverhalten von g und geben Sie die Koordinaten und die Art des Extrempunkts des Graphen von g an.

3 a Erklären Sie, was man unter einer umkehrbaren Funktion versteht, und unterstützen Sie Ihre Erklärung durch Einbeziehung geeigneter Beispiele für umkehrbare und nicht umkehrbare Funktionen.

b Begründen Sie, dass die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $f: x \mapsto 2x + \cos x$ streng monoton zunehmend ist, und erklären Sie, warum allgemein aus der strengen Monotonie einer Funktion f ihre Umkehrbarkeit folgt.

4 Der Graph der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion $f: x \mapsto e^{-x^2}$ (vgl. Abbildung) hat den Hochpunkt $(0 \mid 1)$ als einzigen Extrempunkt.

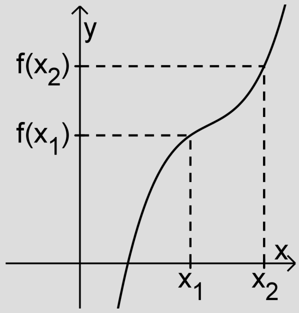


Hinweis: Ein Term einer Stammfunktion von f kann nicht berechnet werden.

a Begründen Sie, dass jede Stammfunktion von f streng monoton zunehmend ist.

b Untersuchen Sie, unter welchen Bedingungen für $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ jede Stammfunktion der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion $g: x \mapsto a \cdot f(x) + b$ streng monoton abnehmend ist.

Erwartungshorizont:

1	Ist f streng monoton zunehmend, so führt eine Vergrößerung des x-Werts stets zu einer Vergrößerung des zugehörigen Funktionswerts (vgl. Abbildung). 
2 a	$\lim\limits_{x\to 0} g(x) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\overbrace{\ln(2x)}^{\to -\infty}}{\underbrace{x}_{\substack{\to 0\\ >0}}} = -\infty$ $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\overbrace{\ln(2x)}^{\to +\infty}}{\underbrace{x}_{+\infty}} = 0$, da für $x \to +\infty$ $\ln(2x)$ langsamer wächst als x. $g(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(2x) = 0 \Leftrightarrow 2x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$
b	$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(2x) = 1 \Leftrightarrow 2x = e \Leftrightarrow x = \frac{e}{2}$ g ist in $\left]0;\frac{e}{2}\right]$ streng monoton zunehmend und in $\left[\frac{e}{2};+\infty\right[$ streng monoton abnehmend. Hochpunkt: $\left(\frac{e}{2} \mid \frac{2}{e}\right)$
3 a	Eine Funktion heißt umkehrbar, wenn zwei verschiedenen x-Werten stets zwei verschiedene Funktionswerte zugeordnet werden. Beispiele für umkehrbare Funktionen: $x \mapsto \frac{1}{2}x + 2$ $(x \in \mathbb{R})$, $x \mapsto e^x$ $(x \in \mathbb{R})$ Beispiele für nicht umkehrbare Funktionen: $x \mapsto x^2$ $(x \in \mathbb{R})$, $x \mapsto \sin x$ $(x \in \mathbb{R})$
b	$f'(x) = 2 - \underbrace{\sin x}_{\in[-1;1]} > 0$, d. h. f ist streng monoton zunehmend. Für zwei verschiedene x-Werte x_1, x_2 gilt entweder $x_1 < x_2$ oder $x_1 > x_2$. Gemäß der Definition aus Aufgabe 1 folgt $f(x_1) \neq f(x_2)$ und damit die Umkehrbarkeit von f.
4 a	Für jede Stammfunktion F von f gilt $F'(x) = f(x) = e^{-x^2} > 0$, somit ist F streng monoton zunehmend.
b	Der Graph von g, der aus dem Graphen von f durch Streckung mit Faktor a in y-Richtung und anschließender Verschiebung um b in positive y-Richtung hervorgeht, hat die Gerade $y = b$ als Asymptote und den Extrempunkt $(0 \mid a + b)$. Also verläuft der Graph von g genau für $b < 0$ und $a + b \leq 0$ nicht oberhalb der x-Achse.

2.1.2 Gespräch zu den Inhalten des Prüfungsschwerpunkts

zu Aufgabe 1:

- Grenzen Sie den Begriff „streng monoton zunehmend“ vom Begriff „monoton zunehmend“ ab.

  Eine Definition des Begriffs „monoton zunehmend“ erhält man, indem man „$f(x_1) < f(x_2)$“ durch „$f(x_1) \leq f(x_2)$“ ersetzt; der Graph einer monoton zunehmenden Funktion kann als auch waagrecht verlaufende Abschnitte enthalten.

zu Aufgabe 2:

- Unter allen Tangenten an den Graphen von g gibt es genau eine mit minimaler Steigung. Beschreiben Sie, wie man eine Gleichung dieser Tangente bestimmen könnte.

  Von den Nullstellen von g'' ist diejenige mit einem Vorzeichenwechsel von − nach + die Stelle x_0 mit minimaler Steigung.

  Die Gleichung der gesuchten Tangente hat die Form $y = mx + t$. Dabei gilt $m = g'(x_0)$; t ist die Lösung der Gleichung $g(x_0) = m \cdot x_0 + t$.

zu Aufgabe 3:

- Beurteilen Sie, ob es eine Funktion gibt, die in ihrem Definitionsbereich nicht streng monoton verläuft, aber trotzdem umkehrbar ist.

  Die Funktion $x \mapsto \frac{1}{x}$ mit Definitionsbereich $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist umkehrbar, aber in D nicht streng monoton.

zu Aufgabe 4:

Material:

$h: x \mapsto x \cdot e^{-x^2}$, $x \in \mathbb{R}$

Betrachtet wird die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $h: x \mapsto x \cdot e^{-x^2}$.

- Ein Term einer Stammfunktion der Funktion f aus Aufgabe 4 kann nicht berechnet werden. Erklären Sie, warum sich hingegen ein Term einer Stammfunktion von h bestimmen lässt, und bestimmen Sie einen solchen Term.

  Der gegebene Funktionsterm von h ist von der Form $a \cdot f'(x) \cdot e^{f(x)}$ mit $a = -\frac{1}{2}$ und $f(x) = -x^2$.

  Somit ist $-\frac{1}{2} \cdot e^{-x^2}$ ein Term einer Stammfunktion von h.

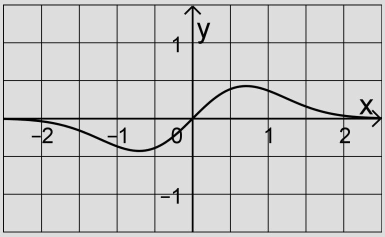
- Untersuchen Sie den Graphen von h auf Symmetrie und geben Sie die Nullstelle von h an.

  Wegen $h(-x) = -x \cdot e^{-(-x)^2} = -h(x)$ ist der Graph von h symmetrisch zum Koordinatenursprung.
  Nullstelle: 0

- Es gilt $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = 0$. Geben Sie die Bedeutung dieser Tatsache für den Graphen von h an.

  Der Graph von h hat die x-Achse als Asymptote.

- Der Graph von h hat genau einen Hochpunkt. Skizzieren Sie den Graphen von h.



- Untersuchen Sie, ob das sich ins Unendliche erstreckende Flächenstück, das im ersten Quadranten zwischen dem Graphen von h und der x-Achse liegt, einen endlichen Inhalt hat.

$$\int_0^{+\infty} x\cdot e^{-x^2}\,dx = \lim_{k\to+\infty}\left[-\frac{1}{2}\cdot e^{-x^2}\right]_0^k = \lim_{k\to+\infty}\left(-\frac{1}{2}\cdot e^{-k^2}+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$$

Das betrachtete Flächenstück besitzt einen endlichen Inhalt.

<u>ohne direkten Bezug</u>:

- *Material:*

$g: x \mapsto \ln\left(x^2+1\right)$

Gegeben ist die Funktion $g: x \mapsto \ln\left(x^2+1\right)$ mit maximalem Definitionsbereich D_g. Begründen Sie, dass $D_g = \mathbb{R}$ gilt und dass g den Wertebereich $\mathbb{R}_0^+$ hat.

Wegen $x^2+1>0$ gilt $D_g=\mathbb{R}$.

Für $x\in\mathbb{R}$ nimmt x^2 alle Werte in $[0;+\infty[$, x^2+1 alle Werte in $[1;+\infty[$ und somit $\ln\left(x^2+1\right)$ alle Werte in $[0;+\infty[$ an, d. h. der Wertebereich von g ist $\mathbb{R}_0^+$.

- *Material:*

$h: x \mapsto \ln(f(x)),\ D_h =]-2;+\infty[$

Betrachtet werden eine in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f und die Funktion $h: x \mapsto \ln(f(x))$ mit maximalem Definitionsbereich D_h. Es gilt $D_h =]-2;+\infty[$. Erklären Sie, welche Eigenschaft von f daraus folgt, und geben Sie einen möglichen Funktionsterm von f an.

Die Funktionswerte $f(x)$ sind genau für $x>-2$ positiv.

$f(x)=x+2$

2.2 Prüfungsteil 2 (Geometrie)

1 Betrachtet werden zwei Ebenen E und F.

a Nennen Sie die möglichen gegenseitigen Lagebeziehungen von E und F.

- E und F sind parallel, jedoch nicht identisch.
- E und F sind identisch.
- E und F schneiden sich in einer Gerade.

b Angenommen, E und F sind parallel, jedoch nicht identisch. Beschreiben Sie, wie man dies nachweisen kann.

Man weist nach, dass die Normalenvektoren $\vec{n}_E$ und $\vec{n}_F$ der beiden Ebenen linear abhängig sind und dass ein beliebiger Punkt der einen Ebene nicht in der anderen liegt.

Material:

$E: x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 8 = 0$
$F: 2x_1 + 4x_2 - 6x_3 = 0$

Es wird nun der konkrete Fall betrachtet, dass die beiden Ebenen durch $E: x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 8 = 0$ und $F: 2x_1 + 4x_2 - 6x_3 = 0$ gegeben sind.

c Untersuchen Sie die gegenseitige Lage von E und F.

$2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}$; $(0|0|0) \in F$, $(0|0|0) \notin E$

E und F sind parallel, jedoch nicht identisch.

d Die Ebenen E und F sind zueinander symmetrisch bezüglich einer Ebene H. Beschreiben Sie, wie man rechnerisch eine Gleichung von H bestimmen kann.

Man wählt einen Punkt Q in E und einen Punkt R in F. Ist M der Mittelpunkt der Strecke $\overline{QR}$, dann hat H die Gleichung $\vec{n}_E \circ \left(\vec{x} - \overrightarrow{OM}\right) = 0$.

Nun wird der Fall betrachtet, dass sich die Ebenen E und F in einer Gerade g schneiden.

e Beschreiben Sie, wie man die Größe des Winkels berechnen kann, unter dem sich die Ebenen E und F schneiden.

Die gesuchte Winkelgröße α kann über den Zusammenhang $\cos\alpha = \frac{\vec{n}_E \circ \vec{n}_F}{|\vec{n}_E| \cdot |\vec{n}_F|}$ ermittelt werden.

f Beschreiben Sie, wie man eine Gleichung einer Ebene W ermitteln kann, bezüglich der E und F zueinander symmetrisch sind.

Man wählt Normalenvektoren von E und F, die die gleiche Länge haben. Addiert man diese beiden Vektoren, erhält man einen Normalenvektor $\vec{n}_W$ einer solchen Ebene W. Somit ist $\vec{n}_W \circ \left(\vec{x} - \overrightarrow{OA}\right) = 0$ eine Gleichung von W, wobei A ein beliebiger Punkt auf g ist.

2 *Material:*

$E_a: 2x_2 + x_3 + 2 - a = 0$, $a \in \mathbb{R}$
$E_0: 2x_2 + x_3 + 2 = 0$
K: Kugel mit Mittelpunkt $M(0|4|3)$ und Radius $r = 2$

Gegeben ist die Schar der Ebenen $E_a: 2x_2 + x_3 + 2 - a = 0$ mit $a \in \mathbb{R}$.

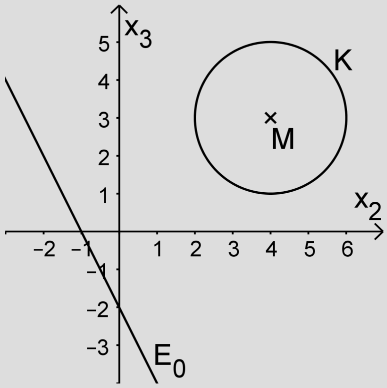
a Beschreiben Sie die besondere Lage der Ebene $E_0: 2x_2 + x_3 + 2 = 0$ im Koordinatensystem und geben Sie die Koordinaten der Schnittpunkte von E_0 mit den Koordinatenachsen an.

E_0 ist parallel zur x_1-Achse.

Schnittpunkte von E_0 mit den Koordinatenachsen: $(0|-1|0)$, $(0|0|-2)$

Nun wird zusätzlich die Kugel K mit Mittelpunkt $M(0|4|3)$ und Radius $r = 2$ betrachtet.

b Zeichnen Sie die Schnitte der Ebene E_0 und der Kugel K mit der x_2x_3-Ebene in ein Koordinatensystem ein und beurteilen Sie, ob sich E_0 und K schneiden.



Da E_0 parallel zur x_1-Achse ist, schneiden sich E_0 und K nicht.

Es gibt Werte von a, für die sich die Ebene E_a und die Kugel K berühren.

c Beschreiben Sie, wie man diese Werte berechnen kann.

Die gesuchten Werte sind die Lösungen der Gleichung $\left|\frac{2 \cdot 4 + 3 + 2 - a}{\sqrt{5}}\right| = 2$, die sich aus der Hesse'schen Normalform von E_a ergibt.

d Geben Sie die Anzahl dieser Werte an und begründen Sie Ihre Angabe.

Anzahl der Werte: 2
Alle Ebenen der Schar sind parallel zueinander. Die Ebene E_a schneidet die x_3-Achse bei $x_3 = a - 2$, somit ist jede Ebene, die zu einer Ebene der Schar parallel ist, ebenfalls eine Ebene der Schar.

3 Beispiel 3

3.1 Prüfungsteil 1 (Stochastik)

3.1.1 Aufgaben für einen zusammenhängenden Vortrag

1 Betrachtet wird ein Glücksrad mit verschiedenfarbigen Sektoren. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei einmaligem Drehen des Glücksrads der rote Sektor erzielt wird, beträgt 30 %. Das Glücksrad wird n-mal gedreht. Die Zufallsgröße X gibt an, wie oft der rote Sektor erzielt wird.

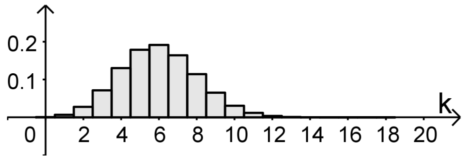
a Zunächst wird der Fall $n = 20$ betrachtet. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse:

A: „Der rote Sektor wird höchstens achtmal erzielt."

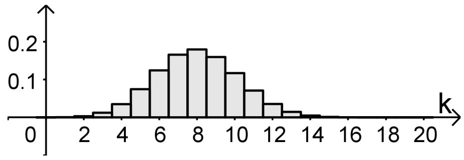
B: „Der rote Sektor wird mindestens achtmal erzielt."

b Eines der folgenden beiden Histogramme stellt die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X für $n = 20$ dar. Beurteilen Sie, welches Histogramm dies ist.

I



II



c Im Zusammenhang mit dem Glücksrad wird folgende Rechnung durchgeführt:

$$P_{0,3}^{100}(X \leq k) \leq 0{,}1$$

$P_{0,3}^{100}(X \leq 23) \approx 0{,}076$; $P_{0,3}^{100}(X \leq 24) \approx 0{,}114$; *somit:* $k \leq 23$

Erläutern Sie die Rechnung im Sachzusammenhang. Beschreiben Sie eine Fragestellung im Zusammenhang mit einem Signifikanztest, die dabei untersucht werden könnte.

d Beschreiben Sie unter Einbeziehung des zugehörigen Histogramms, wie sich die Wahrscheinlichkeitsverteilung, insbesondere der Erwartungswert und die Standardabweichung der Zufallsgröße X verändern, wenn n größer wird und p gleich bleibt.

2 Die Betreiber einer Ölmühle füllen Rapsöl in Glasflaschen ab. Das Volumen des in einer Flasche abgefüllten Rapsöls in Millilitern kann durch eine normalverteilte Zufallsgröße beschrieben werden. Ein Term der zugehörigen Dichtefunktion ist durch

$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{450\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-750)^2}{450}}$ gegeben.

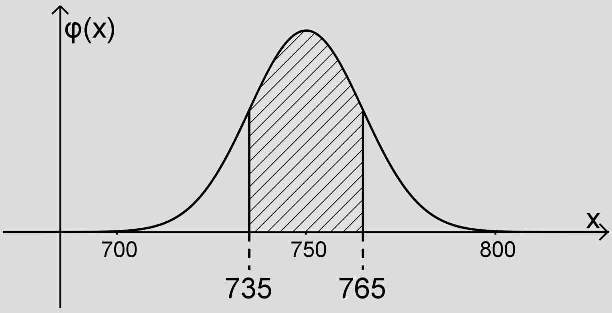
a Erklären Sie, wie man aus dem gegebenen Term der Dichtefunktion den Erwartungswert und die Standardabweichung für das abgefüllte Volumen an Rapsöl in Millilitern entnehmen kann, und geben Sie die beiden Werte an.

b Skizzieren Sie den Graphen der Dichtefunktion und erläutern Sie den Zusammenhang zwischen dem Graphen der Dichtefunktion und der Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Volumen des abgefüllten Rapsöls um weniger als eine Standardabweichung vom Erwartungswert abweicht.

c Betrachtet wird die Ungleichung $\int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{450\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-750)^2}{450}}\,dx < 0{,}1$.

Lösen Sie die Ungleichung auf Ganze genau. Formulieren Sie eine Garantie, die die Betreiber der Ölmühle hinsichtlich des Volumens des abgefüllten Rapsöls aussprechen können.

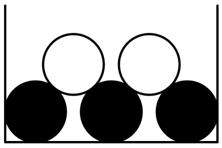
Erwartungshorizont:

1 a	$P(A) = P_{0,3}^{20}(X \le 8) \approx 88{,}7\,\%$ $P(B) = P_{0,3}^{20}(X \ge 8) = 1 - P_{0,3}^{20}(X \le 7) \approx 22{,}8\,\%$
b	Wegen $E(X) = 0{,}3 \cdot 20 = 6$ ist $P(X = k)$ für $k = 6$ maximal. Somit: Histogramm I
c	Das Glücksrad wird 100-mal gedreht. Es wird untersucht, für welche Anzahlen k die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der rote Sektor höchstens k-mal erzielt wird, höchstens 10 % beträgt. Durch systematisches Probieren findet man für die obere Grenze von k den Wert 23. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der rote Sektor höchstens k-mal erzielt wird, ist genau dann höchstens 10 %, wenn $k \le 23$ gilt. Es wird anhand einer Stichprobe von 100 Drehungen die Nullhypothese „Der rote Sektor wird mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 30 % erzielt." auf einem Signifikanzniveau von 10 % getestet.
d	Der Erwartungswert und die Standardabweichung von X werden größer, da $\mu = n \cdot 0{,}3$ und $\sigma = \sqrt{0{,}3 \cdot 0{,}7 \cdot n}$ gilt. Die einzelnen Rechtecke im Diagramm besitzen im Mittel bei gleicher Breite eine geringere Höhe.
2 a	Der Erwartungswert lässt sich direkt ablesen: $\mu = 750$; für die Standardabweichung σ gilt $2 \cdot \sigma^2 = 450$, also $\sigma = 15$.
b	 Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Volumen des abgefüllten Rapsöls um weniger als eine Standardabweichung vom Erwartungswert abweicht, entspricht dem Inhalt des Flächenstücks, das der Graph der Dichtefunktion und die x-Achse im Bereich $735 \le x \le 765$ einschließen.
c	Mit $\int_{-\infty}^{730} \frac{1}{\sqrt{450\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-750)^2}{450}}\,dx \approx 0{,}091$ und $\int_{-\infty}^{731} \frac{1}{\sqrt{450\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-750)^2}{450}}\,dx \approx 0{,}103$ ergibt sich $z \le 730$. Die Betreiber der Ölmühle können garantieren, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Flasche 730 ml Rapsöl oder weniger enthält, kleiner als 10 % ist.

3.1.2 Gespräch zu den Inhalten des Prüfungsschwerpunkts

ohne direkten Bezug:

Material:



Eine Urne enthält drei schwarze und zwei weiße Kugeln. Es wird zweimal eine Kugel zufällig

(1) mit Zurücklegen
(2) ohne Zurücklegen

gezogen. Die Zufallsgröße X beschreibt die Anzahl der gezogenen weißen Kugeln.

- Erläutern Sie für beide Vorgehensweisen, wie die Wahrscheinlichkeitsverteilung für X bestimmt werden kann.

  Die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X kann beispielsweise mithilfe eines Baumdiagramms unter Verwendung der Pfadregeln bestimmt werden.
  (1) Ziehen mit Zurücklegen: Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine weiße Kugel gezogen wird, ist sowohl beim ersten als auch beim zweiten Zug 0,4.
  (2) Ziehen ohne Zurücklegen: Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine weiße Kugel gezogen wird, ändert sich beim zweiten Zug.

- Bestimmen Sie für beide Vorgehensweisen die Wahrscheinlichkeit dafür, dass zuerst eine schwarze und dann eine weiße Kugel gezogen wird.

  (1) Ziehen mit Zurücklegen: $0{,}6 \cdot 0{,}4 = 0{,}24$
  (2) Ziehen ohne Zurücklegen: $\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{3}{10}$

- Bestimmen Sie für das Ziehen ohne Zurücklegen die Wahrscheinlichkeit dafür, dass im ersten Zug eine weiße Kugel gezogen wurde, wenn im zweiten Zug auch eine weiße Kugel gezogen wird.
  Stellen Sie einen Zusammenhang zum Begriff „stochastische Unabhängigkeit“ her.

  A: „Im ersten Zug wird eine weiße Kugel gezogen.“
  B: „Im zweiten Zug wird eine weiße Kugel gezogen.“

  $P(A) = \frac{2}{5}$; $P(B) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} + \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{2}{5}$; $P(A \cap B) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{10}$

  $$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{10}}{\frac{2}{5}} = \frac{1}{4}$$

  Wegen $P_B(A) \neq P(A)$ sind A und B stochastisch abhängig.

zu Aufgabe 1a:

- Formulieren Sie zu jedem der beiden Ereignisse das Gegenereignis.

  $\overline{A}$: „Der rote Sektor wird mindestens neunmal erzielt.“
  $\overline{B}$: „Der rote Sektor wird höchstens siebenmal erzielt.“

zu Aufgabe 1c:

- Das Glücksrad wird 100-mal gedreht, dabei wird 20-mal der rote Sektor erzielt. Gemäß der in Aufgabe 2c aufgestellten Entscheidungsregel wird die Nullhypothese abgelehnt. Beurteilen Sie die folgende Aussage:

  Mit dem Test wurde der Nachweis erbracht, dass der rote Sektor tatsächlich mit einer Wahrscheinlichkeit von weniger als 30 % getroffen wird.

  Die Aussage ist falsch, da der Signifikanztest keine Aussage darüber zulässt, ob die Nullhypothese richtig oder falsch ist.

zu Aufgabe 2:

- *Material:*

  $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}, \; x \in \mathbb{R}$

  Beschreiben Sie, wie der Graph von φ aus dem Graphen der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$ hervorgeht.

  Der Graph von φ geht aus dem Graphen von $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$ hervor durch:

  - Streckung mit dem Faktor $\frac{1}{15}$ in y-Richtung
  - Streckung mit dem Faktor 15 in x-Richtung und anschließende Verschiebung um 750 in positive x-Richtung

- Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Volumen des abgefüllten Rapsöls um höchstens k ml von 750 ml abweicht, soll ungefähr 95 % sein. Beschreiben Sie eine Vorgehensweise zur Bestimmung von k, bei der keine digitalen Hilfsmittel benötigt werden.

  Mithilfe der Sigma-Regeln lässt sich ein Faktor r bestimmen, sodass gilt: Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Wert einer Zufallsgröße höchstens um das r-Fache der Standardabweichung vom Erwartungswert abweicht, beträgt 95 %.

3.2 Prüfungsteil 2 (Analysis)

1 a *Material:*

$f: x \mapsto 3e^{2x}, \; x \in \mathbb{R}$

Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $f: x \mapsto 3e^{2x}$.

Bestimmen Sie einen Term einer Stammfunktion F von f und beurteilen Sie, ob jede Stammfunktion von f auch eine Integralfunktion von f ist.

$F(x) = \frac{1}{2} \cdot 3e^{2x} = 1{,}5e^{2x}$

Nicht jede Stammfunktion von f ist zugleich Integralfunktion von f, da z. B. die Funktion F keine Nullstelle besitzt und somit keine Integralfunktion ist.

b Beurteilen Sie, ob es eine in $\mathbb{R}$ definierte Funktion g gibt, für die gilt: Jede Stammfunktion von g ist auch eine Integralfunktion von g.

Ja, jede Stammfunktion der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion g mit $g(x)=x^2$ ist Integralfunktion von g, da sie einen Term der Form $\frac{1}{3}x^3+C$ mit $C\in\mathbb{R}$ und somit eine Nullstelle hat.

Material:

$f: t \mapsto ae^{bt}$, $t\in\mathbb{R}$
t: seit Beginn der Beobachtung vergangene Zeit in Jahren
$f(t)$: Anzahl der noch nicht zerfallenen Atome

Mithilfe der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion $f: t \mapsto ae^{bt}$ mit $a,b\in\mathbb{R}$ soll für $t\geq 0$ der radioaktive Zerfall eines Stoffs modelliert werden. Dabei beschreibt t die seit Beginn der Beobachtung vergangene Zeit in Jahren und $f(t)$ die Anzahl der noch nicht zerfallenen Atome.

c Geben Sie an, welches Vorzeichen a und b jeweils haben, und begründen Sie Ihre Antwort.

$a>0$; $f(0)=a$ beschreibt die Anzahl der noch nicht zerfallenen Atome zu Beobachtungsbeginn.
$b<0$; die Anzahl der noch nicht zerfallenen Atome nimmt mit der Zeit ab.

d Die Halbwertszeit des Stoffs beträgt fünf Jahre. Erklären Sie, wie man den Wert von b berechnen kann.

Man löst die Gleichung $a\cdot e^{b\cdot 5}=0{,}5a$ nach b auf.

2 *Material:*

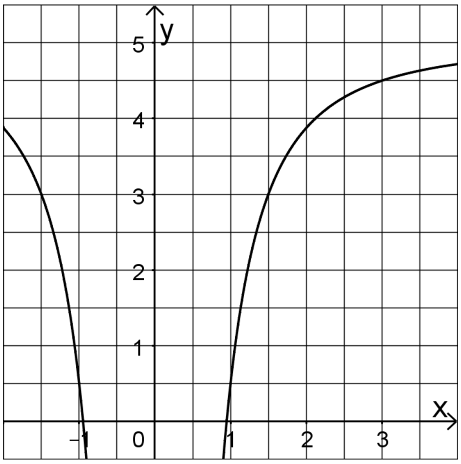
$f: x \mapsto 5-\frac{9}{2x^2}$

Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto 5-\frac{9}{2x^2}$ mit maximaler Definitionsmenge D. Ihr Graph wird mit G_f bezeichnet.

a Geben Sie D und Gleichungen der Asymptoten von G_f an.

$D=\mathbb{R}\setminus\{0\}$; Gleichungen der Asymptoten: $x=0$, $y=5$

Material:



Die Abbildung zeigt G_f .

b Ermitteln Sie mithilfe der Abbildung die mittlere Änderungsrate von f im Intervall $[1;3]$.

$\frac{4{,}5-0{,}5}{3-1}=2$

c Berechnen Sie die lokale Änderungsrate von f an der Stelle $x=1$.

$f'(x)=\frac{9}{x^3}$; $f'(1)=9$

Material:

$u: x \mapsto 2^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$

	A	B	C	D	E
1	Stelle x_0	1			
2					
3	Schritt	a	b	m	
4	0	1	3	=(2^(-C4)-2^(-B4))/(C4-B4)	
5	1	1	1,2		
6	2	1	1,02		
7	3	1	1,002		
8	4	1	1,0002		
9	5	1	1,00002		
10	6	1	1,000002		
11	7	1	1,0000002		
12	8	1	1,00000002		

Betrachtet wird die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $u: x \mapsto 2^{-x}$. Mithilfe eines Tabellenkalkulationsprogramms soll ein Näherungswert für $u'(1)$ ermittelt werden. Die Abbildung zeigt ein entsprechendes Tabellenblatt mit vorgegebenen Intervallgrenzen in den Spalten B und C.

d Erklären Sie das grundsätzliche Vorgehen im Tabellenblatt und insbesondere die Bedeutung der Formel in Zelle D4.

Die gesuchte lokale Änderungsrate wird angenähert durch die mittlere Änderungsrate in immer kleiner werdenden Intervallen. In Zelle D4 wird der Wert des Differenzenquotienten im Intervall $[1;3]$ berechnet; Bezug genommen wird dabei auf die in B4 und C4 eingetragenen Intervallgrenzen.

e Beurteilen Sie, ob der bei Durchführung des Verfahrens in Zelle D12 erhaltene Näherungswert größer oder kleiner als $u'(1)$ ist.

Der Graph von u ist linksgekrümmt, daher ist für $h > 0$ die Steigung der Sekante durch die Punkte $\left(1|u(1)\right)$ und $\left(1+h\,|\,u(1+h)\right)$ größer als die der Tangente an den Graphen von u im Punkt $\left(1|u(1)\right)$, d. h. der ermittelte Näherungswert ist größer als $u'(1)$.

4 Beispiel 4

4.1 Prüfungsteil 1 (Geometrie)

4.1.1 Aufgaben für einen zusammenhängenden Vortrag

1 Im dreidimensionalen Raum werden eine Ebene E, die den Normalenvektor $\vec{n}$ hat, sowie die Gerade $g: \vec{x} = \overrightarrow{OA} + \lambda \cdot \vec{u}$ (mit $\lambda \in \mathbb{R}$) betrachtet.

a Beschreiben Sie die möglichen gegenseitigen Lagebeziehungen der Ebene E und der Gerade g. Formulieren Sie für jede dieser Lagebeziehungen unter Verwendung der Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{n}$ sowie ggf. des Punkts A eine passende Bedingung.

b Erläutern Sie anhand einer Skizze, wie man mithilfe einer Lotgerade den Abstand eines Punkts P zur Ebene E bestimmen kann.

2 Gegeben ist das Viereck ABCD mit $A(2|1|-1)$, $B(0|3|-1)$, $C(-2|1|-1)$ und $D(0|-1|-1)$.

a Weisen Sie nach, dass das Viereck ABCD ein Quadrat ist, welches parallel zur x_1x_2-Ebene liegt.

Das Quadrat ABCD ist die Grundfläche der Pyramide $ABCDS_k$, die den Punkt $S_k\left(k\,|\,k\,|\,7-2k^2\right)$ mit $k \in \mathbb{R} \setminus \{-2;2\}$ als Spitze hat.
Zunächst wird die Pyramide $ABCDS_1$ mit $S_1(1|1|5)$ betrachtet. Der Inhalt ihrer Grundfläche wird mit G bezeichnet, ihre Höhe mit h.

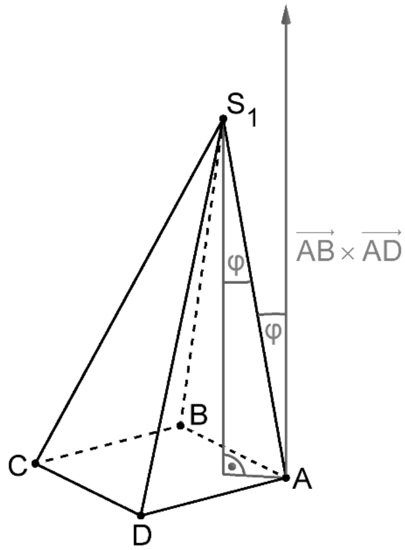
b Das Volumen V der Pyramide $ABCDS_1$ kann unter Verwendung der folgenden Formel berechnet werden:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \left(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}\right) \circ \overrightarrow{AS_1}$$

Diese Formel kann folgendermaßen hergeleitet werden:

$$\begin{aligned} V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h &= \frac{1}{3} \cdot \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}\right| \cdot h = \\ &= \frac{1}{3} \cdot \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AS_1}\right| \cdot \cos\varphi = \\ &= \frac{1}{3} \cdot \left(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}\right) \circ \overrightarrow{AS_1} \end{aligned}$$

Erläutern Sie die einzelnen Schritte dieser Herleitung unter Zuhilfenahme der Abbildung.



c Das Volumen V der Pyramide $ABCDS_1$ kann auch ohne Nutzung des Skalar- und Vektorprodukts direkt mithilfe der Formel $V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$ bestimmt werden.
Begründen Sie, dass $h = 6$ gilt, und berechnen Sie V mit dieser Formel.

Nun wird allgemein die Pyramide $ABCDS_k$ betrachtet.

d Erläutern Sie, warum es sinnvoll ist, die Werte $k = -2$ und $k = 2$ auszuschließen.

e Beurteilen Sie, ob es einen Wert von k gibt, für den das Volumen der Pyramide $ABCDS_k$ größer als 2025 ist.

Erwartungshorizont:

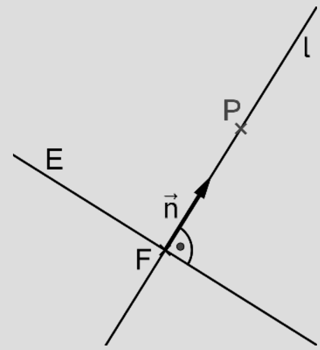
1 a

Lagebeziehung	**Bedingung**
g verläuft echt parallel zu E.	$\vec{u}$ und $\vec{n}$ stehen senkrecht zueinander und A liegt nicht in E.
g liegt in E.	$\vec{u}$ und $\vec{n}$ stehen senkrecht zueinander und A liegt in E.
g schneidet E in einem Punkt.	$\vec{u}$ und $\vec{n}$ stehen nicht senkrecht zueinander.

b Die Lotgerade l verläuft durch P und steht senkrecht zu E, sie hat somit die Gleichung $\vec{x} = \overrightarrow{OP} + \mu \cdot \vec{n}$ $(\mu \in \mathbb{R})$.

Der Punkt F ist der Schnittpunkt von E und l. Ist E beispielsweise durch eine Gleichung in Koordinatenform gegeben, so kann man die Koordinaten von F berechnen, indem man die Koordinaten des Vektors $\overrightarrow{OP} + \mu \cdot \vec{n}$ in E einsetzt.

Der Abstand von P zu E ist der Betrag des Vektors $\overrightarrow{FP}$.



2 a Nachweis, dass ABCD ein Quadrat ist:

- $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \overrightarrow{DC}$, also ist ABCD ein Parallelogramm.
- $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{AD} = 2 \cdot (-2) + (-2) \cdot (-2) = 0$, also gilt $\overline{AB} \perp \overline{AD}$.
- $\left|\overline{AB}\right| = \left|\overline{AD}\right|$

Da die x_3-Koordinaten der Punkte A, B, C und D alle den gleichen Wert haben, liegt ABCD parallel zur x_1x_2-Ebene.

b Da das Viereck ABCD ein Parallelogramm ist, kann sein Flächeninhalt durch den Term $\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}\right|$ angegeben werden.

Wendet man die Definition des Kosinus als Seitenverhältnis von Gegenkathete und Hypotenuse auf das in der Abbildung dargestellte rechtwinklige Dreieck an, so erhält man $\cos\varphi = \frac{h}{\left|\overrightarrow{AS_1}\right|}$ und somit $h = \left|\overrightarrow{AS_1}\right| \cdot \cos\varphi$.

Der Vektor $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}$ steht senkrecht zu E, somit hat der Winkel zwischen den Vektoren $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}$ und $\overrightarrow{AS_1}$ ebenfalls die Größe φ. Mit der (geometrischen) Definition des Skalarprodukts ergibt sich $\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AS_1}\right| \cdot \cos\varphi = \left(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}\right) \circ \overrightarrow{AS_1}$.

c Das Viereck ABCD liegt parallel zur x_1x_2-Ebene, somit ist h die Differenz der x_3-Koordinaten von S_1 und eines beliebigen Eckpunkts, d. h. $h = 5 - (-1) = 6$.

$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \left(2\sqrt{2}\right)^2 \cdot 6 = 16$

d	Wegen $7-2\cdot(-2)^2=-1$ bzw. $7-2\cdot 2^2=-1$ haben die Punkte S_{-2} und S_2 jeweils die gleiche x_3-Koordinate wie die Eckpunkte der Grundfläche ABCD, somit sind $ABCDS_{-2}$ und $ABCDS_2$ keine räumlichen Körper.
e	Es gibt solche Werte. Begründung: Es gilt $\lim\limits_{k\to+\infty}\left(7-k^2\right)=-\infty$, d. h. für $k\to+\infty$ strebt die x_3-Koordinate von S_k gegen $-\infty$. Folglich können die Höhe h und das Volumen der Pyramide $ABCDS_k$ beliebig groß werden.

4.1.2 Gespräch zu den Inhalten des Prüfungsschwerpunkts

zu Aufgabe 1:

- Mithilfe einer Lotgerade kann der Abstand eines Punkts P zu einer Ebene E bestimmt werden (vgl. Aufgabe 1b). Beschreiben Sie ein weiteres mögliches Vorgehen, diesen Abstand zu bestimmen.

  Mithilfe des Einheitsvektors $\frac{1}{|\vec{n}|}\cdot\vec{n}$ des Normalenvektors $\vec{n}$ der Ebene E sowie eines beliebigen Punkts B auf E kann der Abstand von P zu E mit dem Term $\left|\left(\frac{1}{|\vec{n}|}\cdot\vec{n}\right)\circ\left(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OB}\right)\right|$ berechnet werden.

zu Aufgabe 3:

- Beurteilen Sie, ob die die Formel $V=\frac{1}{3}\cdot\left(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}\right)\circ\overrightarrow{AS}$ für jede Pyramide mit viereckiger Grundfläche ABCD zur Berechnung des Volumens verwendet werden kann.

  Nein, wenn der Inhalt des Vierecks ABCD nicht doppelt so groß wie der Inhalt des Dreiecks ABD ist, dann gilt die Formel nicht.

- Beschreiben Sie ein Vorgehen zur Berechnung des Volumens einer Pyramide mit einer fünfseitigen Grundfläche, wenn die Koordinaten der Spitze sowie aller Eckpunkte der Grundfläche bekannt sind.

  Mithilfe einer Zerlegung der fünfeckigen Grundfläche in drei Dreiecke ergibt sich das Volumen der betrachteten Pyramide als Summe der Volumina dreier Teilpyramiden, die jeweils eine dreieckige Grundfläche und die Spitze der fünfseitigen Pyramide als Spitze haben.

- Beschreiben Sie ein Vorgehen zur Berechnung des Oberflächeninhalts der Pyramide $ABCDS_1$.

  Der Oberflächeninhalt von $ABCDS_1$ ergibt sich als Summe des Inhalts der Grundfläche und der Inhalte der vier dreieckigen Seitenflächen.
  Inhalt der Grundfläche: $\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}\right|$; Inhalt der Seitenfläche ABS_1: $\frac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AS_1}\right|$ usw.

- Es gibt genau einen Wert k, für den die Pyramide $ABCDS_k$ symmetrisch bezüglich der x_2x_3-Ebene ist. Ermitteln Sie diesen Wert.

  Die Pyramide $ABCDS_k$ ist genau dann symmetrisch bezüglich der x_2x_3-Ebene, wenn die Spitze $S_k\left(k\,|\,k\,|\,7-2k^2\right)$ in der x_2x_3-Ebene liegt. Dies ist genau für $k=0$ der Fall.

- Beurteilen Sie, ob die Pyramide $ABCDS_1$ eine Symmetrieebene besitzt, und geben Sie gegebenenfalls eine Gleichung dieser Symmetrieebene an.

Die Eckpunkte A und C sowie die Spitze S_1 haben jeweils die x_2-Koordinate 1, somit liegen diese drei Punkte in der Ebene mit der Gleichung $x_2 = 1$. Die Eckpunkte $B(0|3|-1)$ und $D(0|-1|-1)$ liegen in der x_2x_3-Ebene und sind aufgrund ihrer x_2-Koordinaten 3 bzw. -1 bezüglich $E: x_2 = 1$ symmetrisch zueinander. Insgesamt folgt, dass die Pyramide $ABCDS_1$ die Symmetrieebene $E: x_2 = 1$ besitzt.

4.2 Prüfungsteil 2 (Analysis)

1 a Gegeben ist eine umkehrbare Funktion f mit Definitionsmenge D_f und Wertemenge W_f. Erklären Sie, was man unter der Umkehrfunktion von f versteht.

Die Umkehrfunktion g von f hat die Definitionsmenge W_f und es gilt $g(f(x)) = x$ für alle $x \in D_f$.

b Geben Sie einen Term einer in $\mathbb{R}$ definierten umkehrbaren Funktion f sowie einen Term der zugehörigen Umkehrfunktion f^{-1} an.

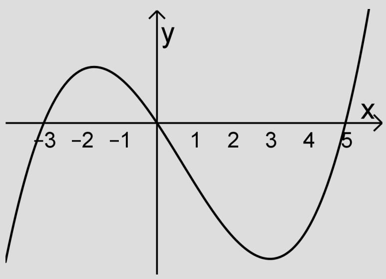
$f(x) = e^x$; $f^{-1}(x) = \ln x$

Material:

$h: x \mapsto (x-5) \cdot x \cdot (x+3),\ x \in \mathbb{R}$

Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $h: x \mapsto (x-5) \cdot x \cdot (x+3)$.

c Skizzieren Sie den Graphen von h und begründen Sie, dass h nicht umkehrbar ist.



Die Funktion h hat mehr als eine Nullstelle.

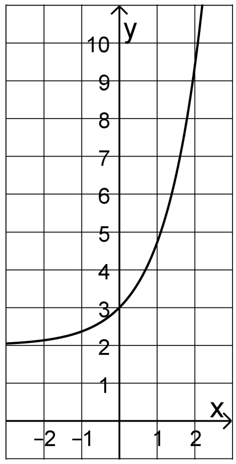
d Durch Einschränkung des Definitionsbereichs von h auf ein geeignetes Intervall entsteht jedoch eine umkehrbare Funktion. Erläutern Sie eine Vorgehensweise, wie man möglichst große solche Intervalle finden kann.

Die erste Ableitungsfunktion h' von h ist eine quadratische Funktion und hat zwei Nullstellen mit Vorzeichenwechsel. Man bestimmt diese Nullstellen x_1 und x_2; die gesuchten Intervalle sind die Monotonieintervalle $]-\infty; x_1]$, $[x_1; x_2]$ und $[x_2; +\infty[$ von f.

e *Material:*

$f: x \mapsto 2 + e^x,\ x \in \mathbb{R}$

$y = f(2)$



Die Abbildung zeigt den Graphen der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion $f: x \mapsto 2 + e^x$. Der Graph von f, die y-Achse sowie die Gerade mit der Gleichung $y = f(2)$ begrenzen ein Flächenstück. Durch Rotation dieses Flächenstücks um die y-Achse entsteht ein Körper. Ermitteln Sie einen Term, mit dem das Volumen dieses Körpers berechnet werden kann.

$x = 2 + e^y \Leftrightarrow x - 2 = e^y \Leftrightarrow \ln(x-2) = y$

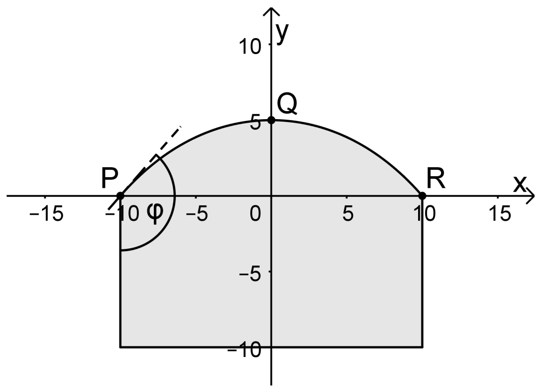
gesuchter Term: $\pi \cdot \int\limits_3^{2+e^2} \left(\ln(x-2)\right)^2 dx$

2 *Material:*

Länge der Halle: 40 m

Höhe der Seitenwand: 10 m

$P(-10\,|\,0)$, $Q(0\,|\,5)$, $R(10\,|\,0)$



Eine 40 Meter lange Halle hat auf ihrer gesamten Länge den gleichen Querschnitt. Dieser ist in der Abbildung schematisch dargestellt. Das Dach der Halle schließt an die zehn Meter hohe Seitenwand an. Die Profillinie des Dachs soll modellhaft durch eine Funktion beschrieben werden, deren Graph durch die Punkte $P(-10\,|\,0)$, $Q(0\,|\,5)$ und $R(10\,|\,0)$ verläuft. Eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht einem Meter in der Realität.

Zunächst wird für das Modell eine in $\mathbb{R}$ definierte quadratische Funktion p verwendet.

a Ermitteln Sie einen Term von p.

$p(x) = a \cdot (x+10) \cdot (x-10)$; $p(0) = 5 \Leftrightarrow -100a = 5 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{20}$, also:

$p(x) = -\frac{1}{20} \cdot (x+10) \cdot (x-10) = -\frac{1}{20}x^2 + 5$

b Berechnen Sie die Größe φ des Winkels, den die Dachfläche mit der Seitenwand einschließt.

$p'(x) = -\frac{1}{10}x$; $p'(-10) = 1 \Rightarrow \varphi = 45° + 90° = 135°$

Material:

$f: x \mapsto e^x + e^{-x},\ x \in \mathbb{R}$ $(0 \mid 2)$

Nun soll für das eingangs beschriebene Modell eine neue Funktion q verwendet werden. Um diese zu definieren, wird zunächst die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $f: x \mapsto e^x + e^{-x}$ betrachtet.

c Begründen Sie, dass der Graph von f den Punkt $(0 \mid 2)$ als Tiefpunkt hat.

$f'(x) = e^x - e^{-x}$; $f''(x) = e^x + e^{-x}$; $f(0) = 2$, $f'(0) = 0$, $f''(0) = 2 > 0$

d Der Graph von q wird aus dem Graphen von f durch Verschiebung, Spiegelung und Streckung in geeigneter Reihenfolge erzeugt. Beschreiben Sie, wie man einen Term von q ermitteln kann.

Der Graph einer Funktion g wird aus dem Graphen von f durch Spiegelung an der x-Achse und anschließende Verschiebung um 7 in positive y-Richtung erzeugt.
Somit gilt $g(x) = -f(x) + 7$.

Bezeichnet man die positive Nullstelle von g mit x_2, so geht der Graph von q aus dem Graphen von g durch Streckung mit dem Faktor $\frac{10}{x_2}$ in x-Richtung hervor.

Es gilt somit $q(x) = g\left(\frac{x_2}{10} \cdot x\right) = -f\left(\frac{x_2}{10} \cdot x\right) + 7$.

e *Material:*

$40 \cdot \left(20 \cdot 10 + \int_{-10}^{10} q(x)\,dx\right)$

Interpretieren Sie den Term $40 \cdot \left(20 \cdot 10 + \int_{-10}^{10} q(x)\,dx\right)$ im Sachzusammenhang.

Der Term beschreibt das Volumen der Halle in Kubikmetern.