ILLUSTRIERENDE PRÜFUNGSAUFGABEN FÜR DIE SCHRIFTLICHE ABITURPRÜFUNG

Teil 2: Erläuterungen und Lösungsvorschläge

Die Illustrierenden Prüfungsaufgaben (Teil 1: Beispielaufgaben, Teil 2: Erläuterungen und Lösungsvorschläge) dienen der einmaligen exemplarischen Veranschaulichung von Struktur, Anspruch und Niveau der Abiturprüfung im neunjährigen Gymnasium in Bayern.

Mathematik

erhöhtes Anforderungsniveau

Prüfungsteile A und B

Die Bewertung der erbrachten Prüfungsleistungen hat sich für jede Teilaufgabe nach der jeweils am rechten Rand der Aufgabenstellung vermerkten, maximal erreichbaren Anzahl von Bewertungseinheiten (BE) zu richten.

Der Erwartungshorizont stellt für jede Teilaufgabe eine mögliche Lösung dar. Nicht dargestellte korrekte Lösungen sind als gleichwertig zu akzeptieren.

Für jede Teilaufgabe sind die allgemeinen mathematischen Kompetenzen und die Anforderungsbereiche ausgewiesen, die für die Bearbeitung eine wesentliche Rolle spielen.

Die von einem Prüfling in den Prüfungsteilen A und B insgesamt erreichten Bewertungseinheiten werden gemäß folgender Tabelle in Notenpunkte umgesetzt:

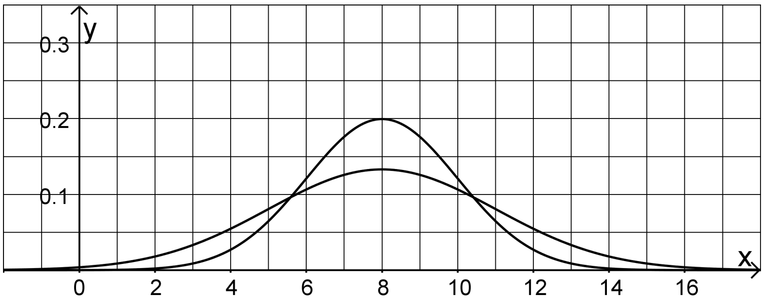
Intervall	Anzahl der mindestens zu erreichenden Bewertungseinheiten	Notenpunkte	Notenstufe
15 %	95	15	+ 1
	90	14	1
	85	13	1 −
15 %	80	12	+ 2
	75	11	2
	70	10	2 −
15 %	65	9	+ 3
	60	8	3
	55	7	3 −
15 %	50	6	+ 4
	45	5	4
	40	4	4 −
20 %	33	3	+ 5
	27	2	5
	20	1	5 −
20 %	0	0	6

Prüfungsteil A

Aufgabengruppe 1 (Pflichtteil)

	Aufgabe A1 (Analysis)	**BE**	
a	Der Punkt P ist ein Wendepunkt des Graphen von f.	1	K1: I K6: I
b	$f'(x) = 2 \cdot \ln x \cdot \frac{1}{x}$; $f'(e) = \frac{2}{e}$; $1 = \frac{2}{e} \cdot e + t \Leftrightarrow t = -1$ Damit: $y = \frac{2}{e} \cdot x - 1$	4	K2: I K5: II
		5	

	Aufgabe A2 (Analysis)	**BE**	
a	$f'(x) = 4x^3 - 2kx = 2x \cdot \left(2x^2 - k\right)$	1	K5: I
b	Für $x \neq 0$ ergibt sich: $2x^2 - k = 0 \Leftrightarrow x = -\sqrt{\frac{k}{2}} \vee x = \sqrt{\frac{k}{2}}$ Für $k > 0$ gilt: $f\left(\sqrt{\frac{k}{2}}\right) = \frac{k^2}{4} - k \cdot \frac{k}{2} = -\frac{k^2}{4}$; $-\frac{k^2}{4} = -1 \Leftrightarrow k = 2$	4	K2: II K4: I K5: II
		5	

	Aufgabe A3 (Stochastik)	**BE**	
a	$\frac{100\,\% - 68\,\%}{2} = 16\,\%$	2	K2: II K5: I
b		3	K4: II K6: II
		5	

	Aufgabe A4 (Geometrie)	**BE**	
	Alle Punkte der rechten Seitenwand haben im Modell die y-Koordinate 7. $\overrightarrow{OL} + \frac{7}{6} \cdot \overrightarrow{LS} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + \frac{7}{6} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 7 \\ 1{,}5 \end{pmatrix}$ Da $0 < 0{,}5 < 4$ und $0 < 1{,}5 < 3$ gilt, liegt der Schatten auf der rechten Seitenwand.	5	K1: I K2: II K3: I K4: I K5: II K6: II
		5	

Aufgabengruppe 2 (Wahlteil)

	Aufgabe A5 (Analysis)	**BE**	
a	Der Graph von f hat den Hochpunkt $\left(-2\mid 1\right)$, der Graph von g den Tiefpunkt $\left(-2\mid -1\right)$.	2	K1: II K2: I K6: I
b	$h(-x)=f(-x)\cdot\left(g(-x)\right)^3=f(x)\cdot\left(-g(x)\right)^3=-f(x)\cdot\left(g(x)\right)^3=-h(x)$ Damit ist der Graph von h symmetrisch bezüglich des Koordinatenursprungs.	3	K1: III K4: II K5: III
		5	

	Aufgabe A6 (Analysis)	**BE**	
	Für $x \geq 0$ gilt: $x=\frac{1}{4}y^2 \Leftrightarrow 4x=y^2 \Leftrightarrow \sqrt{4x}=y$ gesuchtes Volumen: $\pi\cdot\int\limits_0^1\left(\sqrt{4x}\right)^2\,dx=\pi\cdot\int\limits_0^1 4x\,dx=\pi\cdot\left[2x^2\right]_0^1=2\pi$	5	K1: II K2: III K5: III
		5	

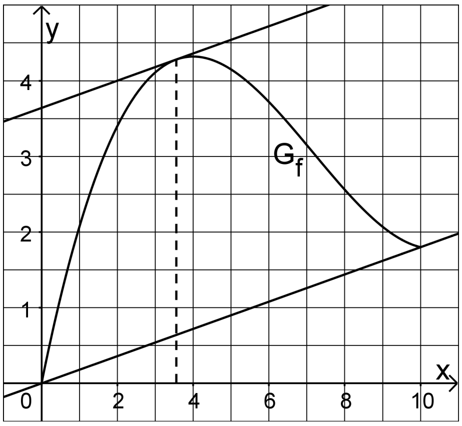
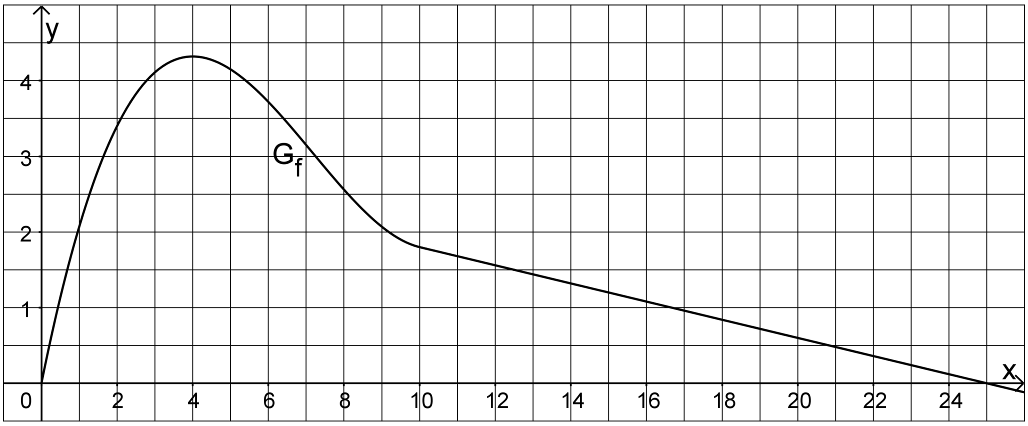
	Aufgabe A7 (Stochastik)	**BE**	
	Der Spieler wird noch einmal würfeln, wenn der andere Spieler beim nächsten Wurf die Augensumme 16 oder die Augensumme 17 erzielt. Für den Wurf des anderen Spielers kommen also folgende Fälle infrage: • für die Augensumme 16: einmal 4 und zweimal 6; zweimal 5 und einmal 6 • für die Augensumme 17: einmal 5 und zweimal 6 Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Spieler noch einmal würfelt, beträgt demnach $2\cdot 3\cdot\frac{1}{6^3}+3\cdot\frac{1}{6^3}=\frac{9}{216}=\frac{1}{24}$.	5	K2: III K3: III K5: II
		5	

	Aufgabe A8 (Stochastik)	**BE**	
a	Der erste Faktor gibt die Anzahl der Möglichkeiten an, zwei der drei Farben auszuwählen, der zweite die Anzahl der Möglichkeiten für die Anzahl der Tulpen einer der beiden Farben.	2	K3: II K4: I K6: I
b	Es gibt eine Möglichkeit, den Strauß aus jeweils fünf Tulpen der drei Farben, und $3\cdot 2$ Möglichkeiten, den Strauß aus vier Tulpen einer ersten Farbe, fünf Tulpen einer zweiten Farbe und sechs Tulpen der dritten Farbe zusammenzustellen – insgesamt also sieben Möglichkeiten.	3	K2: III K3: II
		5	

	Aufgabe A9 (Geometrie)	**BE**	
a	$\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}3\\4\\1\end{pmatrix}=\overrightarrow{DC}$	1	K1: I K5: I
b	T hat den Ortsvektor $\lambda\cdot\overrightarrow{AC}$. $\overrightarrow{AB}\circ\overrightarrow{TB}=\begin{pmatrix}3\\4\\1\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}3-\lambda\\4-7\lambda\\1-3\lambda\end{pmatrix}=9-3\lambda+16-28\lambda+1-3\lambda=26-34\lambda$ $26-34\lambda=0\Leftrightarrow\lambda=\frac{13}{17}$ Damit beträgt das gesuchte Verhältnis $13:4$.	4	K2: III K5: II K6: II
		5	

	Aufgabe A10 (Geometrie)	**BE**	
	$P(0\mid 0\mid p_3)$; $P\in E\Leftrightarrow p_3=2$ Der Vektor $\vec{v}=\begin{pmatrix}5\\-4\\3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\3\\4\end{pmatrix}$ ist orthogonal zum Normalenvektor von E, verläuft also parallel zu E. $\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OP}+\frac{10}{\lvert\vec{v}\rvert}\cdot\vec{v}=\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}+\frac{10}{5}\cdot\begin{pmatrix}0\\3\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\6\\10\end{pmatrix}$ Somit: $P(0\mid 0\mid 2)$ und $Q(0\mid 6\mid 10)$	5	K2: III K5: II
		5	

Prüfungsteil B

	Aufgabe B1 (Analysis)	**BE**	
1 a	Der Graph der ganzrationalen Funktion f ist nicht symmetrisch bezüglich des Koordinatenursprungs, da der Term von f nicht nur Potenzen von x mit ungeradem Exponenten enthält. $f'(x)=\frac{1}{100}\cdot\left(6x^2-86x+248\right)$; $f''(x)=\frac{1}{100}\cdot\left(12x-86\right)$ Für $x<7\frac{1}{6}$ ist $f''(x)<0$.	4	K1: I K5: I
b	 $x_0\approx 3,6$	3	K2: II K4: II
c	$f'(10)=-0,12$; $f(10)=1,8$ $1,8=-0,12\cdot 10+n\Leftrightarrow n=3$ $y=-0,12x+3$ 	4	K4: I K5: I
2 a	$g_k'(x)=3\cdot e^{kx}+3x\cdot k\cdot e^{kx}=3e^{kx}\cdot(1+kx)$ $g_k'(x)=0\Leftrightarrow x=-\frac{1}{k}$ Mit $E_1\left(-1\mid -3e^{-1}\right)$ und $E_3\left(-\frac{1}{3}\mid -e^{-1}\right)$ erhält man als Steigung der Gerade: $\frac{-e^{-1}-\left(-3e^{-1}\right)}{-\frac{1}{3}-(-1)}=\frac{2e^{-1}}{\frac{2}{3}}=3e^{-1}$	5	K2: III K5: II
b	$12\cdot e^{4k}=\frac{12}{e}\Leftrightarrow e^{4k}=\frac{1}{e}\Leftrightarrow k=-0,25$	2	K1: II K5: I
c	$a=\frac{12}{e}$ oder $a\in\left]-\infty;0\right]$	2	K1: II K2: II K4: II
3 a	Vier Monate nach der Geburt nimmt die Masse eines Hundes der betrachteten Rasse am stärksten zu.	1	K4: I K6: II

b	$-0{,}12x+3=0 \Leftrightarrow x=25$	2	K2: I K3: II K5: I
c	Der Graph G_f für $0 \le x \le 10$ und die Tangente t für $10 \le x \le 25$ beschreiben die lokale Änderungsrate der Zunahme der Körpermasse. Die Zunahme der Körpermasse in den ersten 25 Lebensmonaten ist die zu dieser lokalen Änderungsrate gehörige Gesamtänderung. Sie lässt sich folglich mithilfe der Summe aus dem Inhalt des Flächenstücks, das im Bereich $0 \le x \le 10$ von G_f und der x-Achse begrenzt wird, und dem Flächeninhalt des Dreiecks, das im Bereich $10 \le x \le 25$ von der Tangente t und der x-Achse begrenzt wird, ermitteln.	3	K1: II K3: II K4: I K6: II
d	$\frac{1}{2}\cdot\left(f(x)+g_{-0,25}(x)\right)$; $\frac{1}{4}\cdot f(x)+\frac{3}{4}\cdot g_{-0,25}(x)$	4	K2: III K5: II K6: II
		30	

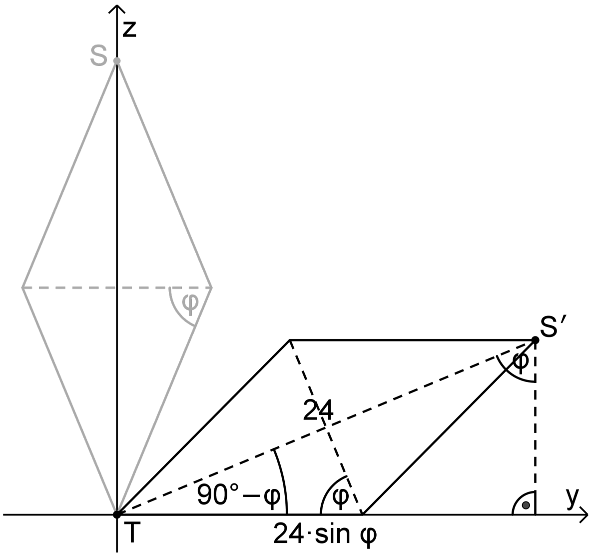
	Aufgabe B2 (Analysis)	**BE**	
1a	$f\left(\frac{9}{4}\right)=0 \Leftrightarrow -\frac{8}{27}\cdot\left(\frac{9}{4}\right)^3+a\cdot\left(\frac{9}{4}\right)^2=0 \Leftrightarrow -\frac{8}{27}\cdot\frac{9}{4}+a=0 \Leftrightarrow a=\frac{2}{3}$	2	K2: I K5: II
b	$\int_0^{\frac{9}{4}} f(x)\,dx=\left[-\frac{2}{27}x^4+\frac{2}{9}x^3\right]_0^{\frac{9}{4}}=-\frac{2}{27}\cdot\left(\frac{9}{4}\right)^4+\frac{2}{9}\cdot\left(\frac{9}{4}\right)^3=\frac{81}{128}$	3	K5: I
c	$f'(x)=-\frac{8}{9}x^2+\frac{4}{3}x$; $f'\left(\frac{9}{4}\right)=-\frac{3}{2}$; $-\frac{3}{2}\cdot\frac{9}{4}+\frac{27}{8}=0$ Der angegebene Term gibt den Flächeninhalt des Dreiecks an, das die Koordinatenachsen mit der Tangente einschließen. Für $0<x<\frac{9}{4}$ verläuft G_f innerhalb dieses Dreiecks.	5	K1: II K2: II K5: II K6: I
d	$g(x)=-\frac{3}{2}x+\frac{27}{8}+\left(x-\frac{9}{4}\right)^2$	3	K1: III K2: III K5: II
2a	$317\cdot p^{25}=346$ liefert $\sqrt[25]{\frac{346}{317}}\approx 1{,}0035$, d. h. die jährliche Wachstumsrate beträgt etwa 0,35 %.	3	K2: II K3: II K5: I
b	$346\cdot 1{,}0035^{25}\approx 378<390$ Der Durchschnittswert der CO_2-Konzentration für das Jahr 2010 ist größer als der, der sich bei einer unveränderten Fortsetzung des exponentiellen Wachstums ergeben hätte.	3	K3: I K5: I K6: I
c	Der Graph von k geht aus dem Graphen von s hervor durch 1. Streckung in x-Richtung mit dem Faktor $\frac{6}{\pi}$ 2. Streckung in y-Richtung mit dem Faktor 3,3 3. Verschiebung um 406 in positive y-Richtung Die Reihenfolge der Schritte ist von Bedeutung. Würde man die Verschiebung in y-Richtung vor der Streckung in y-Richtung durchführen, so hätten die Punkte des entstehenden Graphen deutlich größere y-Koordinaten als die des Graphen von k.	5	K1: II K4: II K6: II
d	$\frac{1}{8}\cdot\int_0^8 k(x)\,dx=\frac{1}{8}\cdot\left[-\frac{3{,}3\cdot 6}{\pi}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{6}x\right)+406x\right]_0^8\approx 407{,}2$ $\frac{k(3)-407{,}2}{407{,}2}=\frac{409{,}3-407{,}2}{407{,}2}\approx 0{,}5\ \%$	6	K3: II K4: II K5: II K6: III
		30	

	Aufgabe B3 (Stochastik)	**BE**	
1 a	$\begin{array}{c\|c\|c\|c} & E & \overline{E} & \\ \hline H & 105 & 273 & 378 \\ \overline{H} & 105 & 147 & 252 \\ \hline & 210 & 420 & 630 \end{array}$ $P(H)=1-0{,}4=0{,}6$; $P_E(H)=\frac{105}{210}=0{,}5$ Wegen $P(H)\neq P_E(H)$ sind die Ereignisse stochastisch abhängig.	3	K1: I K3: II K5: I
b	Die Person fuhr ein Fahrrad ohne Elektromotor und trug einen Helm. $P_{\overline{E}}(H)=\frac{273}{420}=65\,\%$	3	K3: II K4: I K5: I K6: I
2	n: Anzahl der 50-km-Abschnitte Z: Anzahl der Reifenpannen $P_{0{,}016}^{n}(Z\geq 1)>0{,}9 \Leftrightarrow P_{0{,}016}^{n}(Z=0)<0{,}1 \Leftrightarrow 0{,}984^{n}<0{,}1$ $n>\log_{0{,}984}0{,}1=142{,}7...$ gesuchte Länge: $143\cdot 50\text{ km}=7150\text{ km}$	5	K1: I K2: III K3: II K5: II
3 a	$P_{0{,}4}^{200}(70\leq X\leq 90)=P_{0{,}4}^{200}(X\leq 90)-P_{0{,}4}^{200}(X\leq 69)\approx 87{,}1\,\%$ Der Term gibt die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass unter den 200 ausgewählten Fahrrädern wenigstens 70 und höchstens 90 Pedelecs sind.	3	K3: I K5: I K6: I
b	$\frac{1}{4}\cdot 0{,}4=0{,}1$; $P(Y=0)=\binom{200}{0}\cdot 0{,}1^{0}\cdot 0{,}9^{200}=0{,}9^{200}\approx 7{,}1\cdot 10^{-10}$	2	K1: I K3: I
c	$P_{0{,}1}^{200}(Y\geq k)>0{,}8 \Leftrightarrow 1-P_{0{,}1}^{200}(Y\leq k-1)>0{,}8 \Leftrightarrow P_{0{,}1}^{200}(Y\leq k-1)<0{,}2$ Mit $P_{0{,}1}^{200}(Y\leq 15)\approx 14{,}3\,\%$ und $P_{0{,}1}^{200}(Y\leq 16)\approx 20{,}7\,\%$ ergibt sich $k-1\leq 15 \Leftrightarrow k\leq 16$, also ist 16 der größtmögliche Wert von k. Unter den 200 ausgewählten Fahrrädern sind mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 80 % mindestens 16 versicherte Pedelecs.	4	K2: II K5: II K6: II
		20	

	Aufgabe B4 (Stochastik)	**BE**	
1	X: Anzahl der gespielten langen Stücke $P_{0{,}6}^{12}(X=5)\approx 10{,}1\,\%$ $P_{0{,}6}^{12}(X>6)\approx 66{,}5\,\%$	4	K3: I K5: I
2 a	Y: Anzahl der CDs mit fehlerhaften Hüllen $P_{0{,}05}^{150}(Y\geq 12)\approx 0{,}074$; $P_{0{,}05}^{150}(Y\geq 11)\approx 0{,}132$	3	K1: II K2: II K3: II K5: II

b	Fehler zweiter Art: Obwohl mehr als 5 % der Hüllen fehlerhaft sind, entscheiden sich die Mitglieder der Bigband aufgrund des Testergebnisses dagegen, beim Hersteller einen Preisnachlass zu verlangen. $P_{0,093}^{150}(Y \le 11) \approx 0,252$ $P_{0,094}^{150}(Y \le 11) \approx 0,239$ Da die Wahrscheinlichkeit für den Fehler zweiter Art mit steigendem Anteil fehlerhafter Hüllen abnimmt, ergibt sich für den gesuchten Bereich $]p_0;1]$ mit $p_0 \approx 0,093$.	6	K1: III K2: III K3: III K5: II K6: II
3 a	$\binom{3}{2}\cdot\left(\frac{b}{2\pi}\right)^2\cdot\left(1-\frac{b}{2\pi}\right)=3\cdot\frac{b^2}{4\pi^2}\cdot\left(1-\frac{b}{2\pi}\right)=\frac{3}{4\pi^2}b^2-\frac{3}{8\pi^3}b^3$	4	K2: II K3: II K5: II K6: I
b	$\frac{3}{4\pi^2}b^2-\frac{3}{8\pi^3}b^3=\frac{1}{9}$	3	K2: II K3: II K5: II
		20	

	Aufgabe B5 (Geometrie)	**BE**	
a	$\overrightarrow{DA}\circ\overrightarrow{DC}=\begin{pmatrix}15\\0\\-8\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}0\\14\\0\end{pmatrix}=0$	2	K1: I K5: I
b	$\frac{1}{2}\cdot\left(\lvert\overrightarrow{AB}\rvert+\lvert\overrightarrow{DC}\rvert\right)\cdot\lvert\overrightarrow{AD}\rvert=\frac{1}{2}\cdot(30+14)\cdot 17=374$	3	K5: II
c	$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}=\begin{pmatrix}0\\30\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-15\\0\\8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}240\\0\\450\end{pmatrix}=30\cdot\begin{pmatrix}8\\0\\15\end{pmatrix}$; somit: $H: 8x_1+15x_3-c=0$ $A \in H \Leftrightarrow c=136$	3	K2: II K5: II
d	$(12-8)\cdot 10\,\text{m}=40\,\text{m}$	2	K3: I K4: I K5: I
e	Inhalt der Anbaufläche: $374\cdot 100\,\text{m}^2=3,74\,\text{ha}$ Bezeichnet man die Größe des Neigungswinkels des Hangs mit φ, so gilt: $\cos\varphi=\frac{\begin{pmatrix}8\\0\\15\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}}{\left\lvert\begin{pmatrix}8\\0\\15\end{pmatrix}\right\rvert\cdot\left\lvert\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\rvert}=\frac{15}{17}\Rightarrow\varphi\approx 28,1^\circ>17^\circ$ Es handelt sich daher um eine Steillage.	5	K1: I K3: II K5: II K6: I
f	Die Blickposition des Arbeiters entspricht dem Punkt $W(5,75 \mid -2,5 \mid 6,2)$. Gleichung der Gerade WS: $\vec{x}=\begin{pmatrix}-6\\2\\12\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}11,75\\-4,5\\-5,8\end{pmatrix},\ \mu\in\mathbb{R}$ Einsetzen in die Gleichung von H liefert: $8\cdot(-6+11,75\mu)+15\cdot(12-5,8\mu)-136=0\Leftrightarrow\mu=\frac{4}{7}$ Also hat der Schnittpunkt von WS und H die x_3-Koordinate $12+\frac{4}{7}\cdot(-5,8)=8\frac{24}{35}$. Wegen $8\frac{24}{35}>8$ befindet sich dieser oberhalb der Ebene mit der Gleichung $x_3=8$, in welcher die Kante $\overline{DC}$ liegt. Der Hang verhindert die freie Sicht somit nicht.	5	K1: III K2: III K3: II K4: II K5: II K6: II
		20	

	Aufgabe B6 (Geometrie)	BE	
a	$\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}0\\10\\0\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BC}=\begin{pmatrix}-10\\0\\0\end{pmatrix}$, d. h. $\left\lvert\overrightarrow{AB}\right\rvert=\left\lvert\overrightarrow{BC}\right\rvert$; $\overrightarrow{AB}\circ\overrightarrow{BC}=0$; $D(-5\,\vert\,-5\,\vert\,12)$	4	K1: I K5: I
b	$\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{BT}=\begin{pmatrix}0\\-120\\50\end{pmatrix}=-10\cdot\begin{pmatrix}0\\12\\-5\end{pmatrix}$ Aus $(0\,\vert\,0\,\vert\,0)\in E$ ergibt sich $E:12y-5z=0$.	3	K5: II
c	$\tan\varphi=\dfrac{\frac{1}{2}\cdot\left\lvert\overline{ST}\right\rvert}{\frac{1}{2}\cdot\left\lvert\overline{AB}\right\rvert}=\frac{12}{5}$, d. h. $\varphi\approx 67{,}4°$	3	K4: II K5: I
d	$k\cdot 0-5z=5k-60\Leftrightarrow z=12-k$, d. h. E_k schneidet die z-Achse im Punkt $(0\,\vert\,0\,\vert\,12-k)$. Damit ergibt sich $-12\le k\le 0$.	4	K1: II K2: III K4: II K5: II K6: II
e	Da sich F durch Spiegelung an der xz-Ebene aus E ergibt, ist $\vec{n}=\begin{pmatrix}0\\-12\\-5\end{pmatrix}$ ein Normalenvektor von F. $\begin{pmatrix}0\\k\\-5\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}0\\-12\\-5\end{pmatrix}=0\Leftrightarrow k=\frac{25}{12}$	4	K1: II K2: I K4: I K5: II K6: II
f		2	K1: II K4: III
		20	