ILLUSTRIERENDE PRÜFUNGSAUFGABEN FÜR DIE SCHRIFTLICHE ABITURPRÜFUNG

Teil 1: Beispielaufgaben

Die Illustrierenden Prüfungsaufgaben (Teil 1: Beispielaufgaben, Teil 2: Erläuterungen und Lösungsvorschläge) dienen der einmaligen exemplarischen Veranschaulichung von Struktur, Anspruch und Niveau der Abiturprüfung im neunjährigen Gymnasium in Bayern.

Mathematik (MMS)

erhöhtes Anforderungsniveau

Prüfungsteil B

Bei der Bearbeitung der Aufgaben dürfen, sobald die Abgabe von Prüfungsteil A erfolgt ist, folgende Hilfsmittel verwendet werden[1]:

- das vom Staatsministerium genehmigte Dokument mit mathematischen Formeln
- eine der vom Staatsministerium für Leistungserhebungen zugelassenen mathematisch-naturwissenschaftlichen Formelsammlungen
- ein wissenschaftlicher Taschenrechner, der den vom Staatsministerium getroffenen Regelungen entspricht
- **ein modulares Mathematiksystem, das den vom Staatsministerium getroffenen Regelungen entspricht**

Zu den Sachgebieten Analysis, Stochastik und Geometrie wählt der Fachausschuss jeweils eine der beiden Aufgaben zur Bearbeitung aus.

Spätester Abgabezeitpunkt: **300 Minuten** nach Prüfungsbeginn

Das Geheft mit den Aufgabenstellungen ist abzugeben.

[1] In den Abiturprüfungen 2026 und 2027 sind außerdem stochastische Tabellen als weiteres Hilfsmittel zugelassen.

Aufgabe B1 (Analysis) | **BE**

Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{2} \cdot e^{-(x-5)} + \frac{1}{2}$. Ihr Graph wird mit G_f bezeichnet.

a Beschreiben Sie, wie G_f aus dem Graphen der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion $x \mapsto e^{-x}$ hervorgeht, und geben Sie die Wertemenge von f an. 4

b Die Funktion f ist umkehrbar. Zeigen Sie, dass die Funktion $u: x \mapsto 5 - \ln(2x-1)$ mit geeignet gewählter Definitionsmenge D_u die Umkehrfunktion von f ist. Geben Sie D_u an. 2

c Geben Sie alle Stammfunktionen von f an und zeigen Sie, dass jede dieser Stammfunktionen die Wertemenge $\mathbb{R}$ besitzt. 3

Ein 20 m hoher Kühlturm soll gesprengt werden. Abbildung 1 zeigt schematisch einen Längsschnitt des Kühlturms. Der Turm ist rotationssymmetrisch; die Rotationsachse entspricht der y-Achse im eingezeichneten Koordinatensystem. Der Turmboden als Teil dieses Längsschnitts liegt auf der x-Achse. Eine Längeneinheit entspricht 1 m in der Wirklichkeit.

Die Profillinie des Längsschnitts der inneren Wandfläche wird im ersten Quadranten für $x \leq 5$ und $y \leq 20$ modellhaft durch den Graphen der Funktion f beschrieben. Analog beschreibt für $x \leq 6$ und $y \leq 20$ der Graph G_g einer Funktion g im ersten Quadranten die Profillinie des Längsschnitts der äußeren Wandfläche.

Der untere Teil des Turms ist ein Sockelring, dessen Wandflächen Zylindermäntel mit den Radien 5 m bzw. 6 m und den Höhen 1 m bzw. 2 m sind. Im Modell besitzt die innere Profillinie im Punkt K dadurch einen Knick.

Der Innenradius des kreisringförmigen oberen Turmrands in Metern wird mit r bezeichnet.

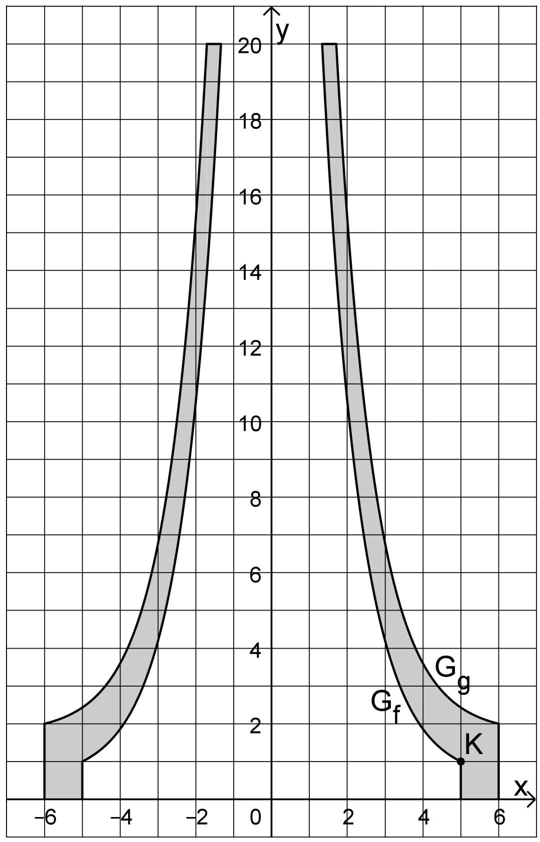


Abb. 1

d Berechnen Sie r auf eine Dezimale genau. 2

(zur Kontrolle: $r \approx 1{,}3$)

e Berechnen Sie die Größe des Winkels, der von dem gekrümmten und dem vertikal verlaufenden Teil der inneren Profillinie im Punkt K eingeschlossen wird. 3

Zum Anbringen einer Sprengladung wird eine Bohrung in die Wand geplant. Der Bohrkanal wird im Modell durch eine Strecke beschrieben, die im Punkt K beginnt und einen Steigungswinkel von 60° hat.

f Begründen Sie, dass dabei der senkrechte Teil der äußeren Wandfläche nicht durchbohrt werden kann. 3

g Die Bohrung soll die Wand vollständig durchdringen. Beschreiben Sie, wie man bei der Berechnung der dazu erforderlichen Länge des Bohrkanals schrittweise vorgehen könnte. 4

(Fortsetzung nächste Seite)

h An der Position, die im Modell dem Punkt $(5|0)$ entspricht, befindet sich ein Scheinwerfer. Die höchste Stelle an der Innenfläche der Turmwand, die durch den Scheinwerfer gerade noch beleuchtet wird, befindet sich gegenüber dem Scheinwerfer. Berechnen Sie die Höhe dieser Stelle. 5

i Berechnen Sie das Volumen des Hohlraums im Turminneren vom Turmboden bis zur Höhe 20 m. 4

30

Aufgabe B2 (Analysis) | **BE**

1 Gegeben sind die in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen $f_a : x \mapsto -\frac{a}{250}x^4 + \frac{1}{25}x^3$ mit $a \in \mathbb{R}^+$ sowie $g_a : x \mapsto f_a(x) - \frac{3}{5}x$. Die Abbildung 1 zeigt den Graphen von g_1.

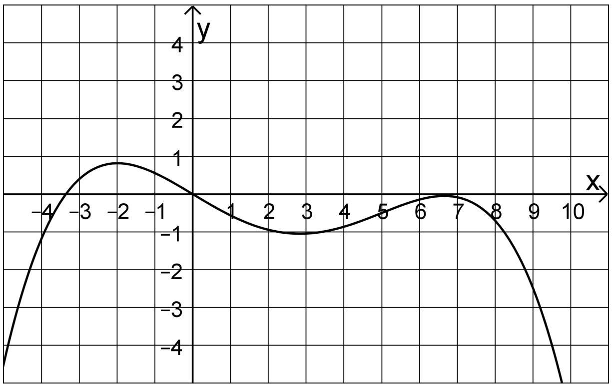


Abb. 1

a Berechnen Sie für den Graphen von f_1 die Koordinaten der Schnittpunkte mit der x-Achse sowie die Koordinaten des Extrempunkts. Zeichnen Sie den Graphen von f_1 in die Abbildung 1 ein. 5

b Geben Sie an, für welche Werte von x der Graph von f_1 oberhalb des Graphen von g_1 verläuft und für welche unterhalb. Begründen Sie Ihre Angabe. 3

Die Tangente an den Graphen von f_a im Punkt $\left(\frac{5}{a} \mid f_a\left(\frac{5}{a}\right)\right)$ wird mit t_f bezeichnet, die Tangente an den Graphen von g_a im Punkt $\left(\frac{5}{a} \mid g_a\left(\frac{5}{a}\right)\right)$ mit t_g und der Schnittpunkt dieser beiden Tangenten mit S. Die Tangente t_f wird durch die Gleichung $y = \frac{1}{a^2}x - \frac{5}{2a^3}$ beschrieben, die Tangente t_g durch die Gleichung $y = \frac{5-3a^2}{5a^2}x - \frac{5}{2a^3}$.

c Begründen Sie, dass S für jeden Wert von a auf der y-Achse liegt. Zeigen Sie, dass es keinen Wert von a gibt, für den die beiden Tangenten t_f und t_g senkrecht zueinander sind. 3

d Die Gerade mit der Gleichung $x = \frac{5}{a}$ schneidet t_f im Punkt F und t_g im Punkt G. 4

Untersuchen Sie, für welche Werte von $a \in \mathbb{R}^+$ das Dreieck SGF rechtwinklig ist.

2 Die Abbildung 2 zeigt schematisch die Profillinie einer Skipiste in einer Skihalle. Die Piste ist nur in der abgebildeten Längsrichtung geneigt und durchgehend 30 m breit.

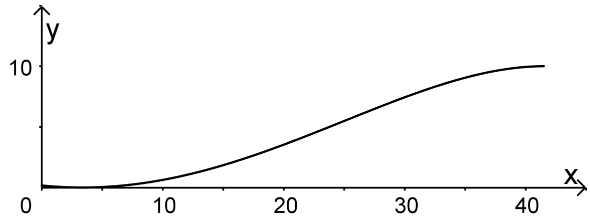


Abb. 2

Die Profillinie wird für $0 \le x \le 41{,}5$ durch den Graphen der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion $p : x \mapsto -0{,}000004x^4 + 0{,}015x^2 - 0{,}1x + 0{,}1875$ dargestellt. Im verwendeten Koordinatensystem beschreibt die x-Achse die Horizontale; eine Längeneinheit entspricht 10 m in der Realität.

a Berechnen Sie die Größe des größten Neigungswinkels der Piste gegenüber der Horizontalen. 4

(Fortsetzung nächste Seite)

Ein Seil ist an zwei Punkten befestigt, die im Modell durch $A(5\,|\,2{,}31)$ und $B(37\,|\,10{,}68)$ dargestellt werden. Der Verlauf des Seils kann modellhaft mithilfe einer in $\mathbb{R}$ definierten Funktion $h: x \mapsto b \cdot c^x$ mit $b, c \in \mathbb{R}^+$ beschrieben werden.

b Bestimmen Sie die Werte von b und c. 2

(zur Kontrolle: $b \approx 1{,}818$, $c \approx 1{,}049$)

c Ermitteln Sie die Höhendifferenz, um die die beiden Befestigungspunkte gemeinsam mindestens angehoben werden müssten, damit das Seil an jeder Stelle von der Piste einen vertikalen Abstand von mindestens 3 m hat. 4

d Die Abbildung 3 zeigt grau markiert die Schneeauflage im unteren Bereich der Piste; dazu wurde die Abbildung 2 in Richtung der y-Achse stärker vergrößert als in Richtung der x-Achse. Der Untergrund, auf dem der Schnee aufgebracht ist, wird für $0 \leq x \leq 5$ durch die x-Achse dargestellt. Für den übrigen Teil der Piste soll davon ausgegangen werden, dass die in vertikaler Richtung gemessene Schneehöhe 60 cm beträgt. 5

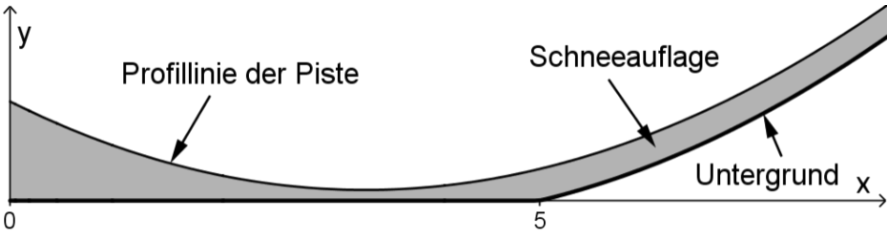


Abb. 3

Bestimmen Sie das Volumen der Schneeauflage der gesamten Piste.

30

Aufgabe B3 (Stochastik) | **BE**

1 Bei einer Verkehrszählung zur Untersuchung des Sicherheitsbewusstseins im Straßenverkehr wurden 630 Radfahrer erfasst. Ein Drittel davon fuhr ein Fahrrad mit Elektromotor, 147 waren mit einem Fahrrad ohne Elektromotor unterwegs und trugen keinen Helm. Insgesamt trugen 40 % der Radfahrer keinen Helm.

Aus den bei der Verkehrszählung erfassten Radfahrern wird eine Person zufällig ausgewählt.

Betrachtet werden die folgenden Ereignisse:

E: „Die Person fuhr ein Fahrrad mit Elektromotor."

H: „Die Person trug einen Helm."

a Begründen Sie anhand der vorliegenden Daten, dass E und H stochastisch abhängig sind. 3

b Beschreiben Sie das Ereignis $\overline{E} \cap H$ im Sachzusammenhang und ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Person einen Helm trug, wenn bekannt ist, dass sie auf einem Fahrrad ohne Elektromotor unterwegs war. 3

2 Nach einer statistischen Erhebung eines Fahrradmagazins tritt auf einer 50 km langen, mit dem Fahrrad zurückgelegten Strecke mit einer Wahrscheinlichkeit von 1,6 % eine Reifenpanne auf. 5

Ermitteln Sie auf 50 km genau, ab welcher mit dem Fahrrad zurückgelegten Gesamtstrecke unter diesen Voraussetzungen die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens eine Reifenpanne auftritt, mehr als 90 % beträgt.

3 Im Jahr 2020 wurden in Deutschland rund fünf Millionen Fahrräder verkauft. Dabei waren 40 % der verkauften Fahrräder Pedelecs (unterstützende Elektrofahrräder). Unter allen im Jahr 2020 verkauften Fahrrädern werden 200 zufällig ausgewählt. Die Zufallsgröße X beschreibt die Anzahl der Pedelecs unter den 200 zufällig ausgewählten Fahrrädern.

a Bestimmen Sie $P(70 \leq X \leq 90)$ und beschreiben Sie die Bedeutung des Terms im Sachzusammenhang. 3

Aufgrund der hohen Anschaffungskosten wurde für jedes vierte im Jahr 2020 verkaufte Pedelec eine Versicherung abgeschlossen. Die Zufallsgröße Y beschreibt die Anzahl der Pedelecs unter den 200 zufällig ausgewählten Fahrrädern, für die eine Versicherung abgeschlossen wurde.

b Berechnen Sie $P(Y = 0)$. 2

c Ermitteln Sie den größtmöglichen Wert von k, für den $P_{0,1}^{200}(Y \geq k) > 0,8$ gilt, und interpretieren Sie das Ergebnis im Sachzusammenhang. 4

20

Aufgabe B4 (Stochastik) | **BE**

Die Bigband einer Schule nimmt anlässlich des 50-jährigen Jubiläums der Schule eine CD mit zehn Musikstücken auf; vier dieser Stücke sind kurz, sechs lang. Diese CD wird in großer Anzahl hergestellt.

1 Bei der Jubiläumsfeier werden von einer dieser CDs in zufälliger Reihenfolge Stücke abgespielt, wobei jedes Stück mehrfach abgespielt werden kann. 4

Berechnen Sie jeweils die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich unter zwölf abgespielten Stücken

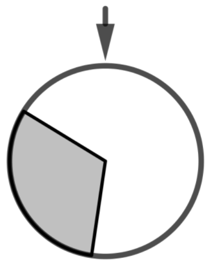
- genau fünf lange Stücke befinden.
- mehr lange als kurze Stücke befinden.

2 Als die CDs vor der Jubiläumsfeier geliefert wurden, entdeckten die Mitglieder der Bigband unter den ersten 20 betrachteten CDs ein Exemplar mit fehlerhafter Hülle und befürchteten, dass mehr als 5 % aller Hüllen fehlerhaft sind. Sie planten deshalb, die Nullhypothese „Der Anteil der fehlerhaften Hüllen beträgt höchstens 5 %." mithilfe einer Stichprobe von 150 CDs auf einem Signifikanzniveau von 10 % zu testen. Sollte das Ergebnis des Tests dafür sprechen, dass die Befürchtung zutrifft, wollten sie beim Hersteller einen Preisnachlass verlangen.

a Begründen Sie, dass die Nullhypothese genau dann abgelehnt wird, wenn mindestens zwölf Hüllen fehlerhaft sind. 3

b Beschreiben Sie die Bedeutung des Fehlers zweiter Art im Sachzusammenhang und ermitteln Sie den Bereich, in dem der tatsächliche Anteil fehlerhafter Hüllen liegen müsste, damit die Wahrscheinlichkeit für den Fehler zweiter Art kleiner als 25 % ist. 6

3 Bei der Jubiläumsfeier können die CDs sowohl zu einem Preis von 9 Euro pro Stück gekauft als auch bei einem Spiel gewonnen werden. Für das Spiel wird ein Glücksrad mit einem grauen und einem weißen Sektor verwendet (vgl. Abbildung). Für einen Einsatz von einem Euro wird das Glücksrad dreimal gedreht. Nur wenn dabei genau zweimal der grau markierte Sektor getroffen wird, erhält man eine CD. Die Größe des Öffnungswinkels des grauen Sektors im Bogenmaß wird mit b bezeichnet.



a Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, bei diesem Spiel eine CD zu erhalten, mithilfe des Terms $\frac{3}{4\pi^2}b^2 - \frac{3}{8\pi^3}b^3$ berechnet werden kann. 3

b Es gibt Werte von b, für die die Bigband bei vielfacher Durchführung des Spiels im Mittel pro CD die gleichen Einnahmen erwarten könnte wie beim Verkauf der CD. Ermitteln Sie diese Werte von b. 4

20

Aufgabe B5 (Geometrie) **BE**

Gegeben sind die Punkte $A(17|-10|0)$, $B(17|20|0)$, $C(2|4|8)$ und $D(2|-10|8)$. Es gilt $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$, somit ist das Viereck ABCD ein Trapez.

a Zeigen Sie, dass das Trapez ABCD bei D einen rechten Innenwinkel hat. 2

b Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Trapezes ABCD. 3

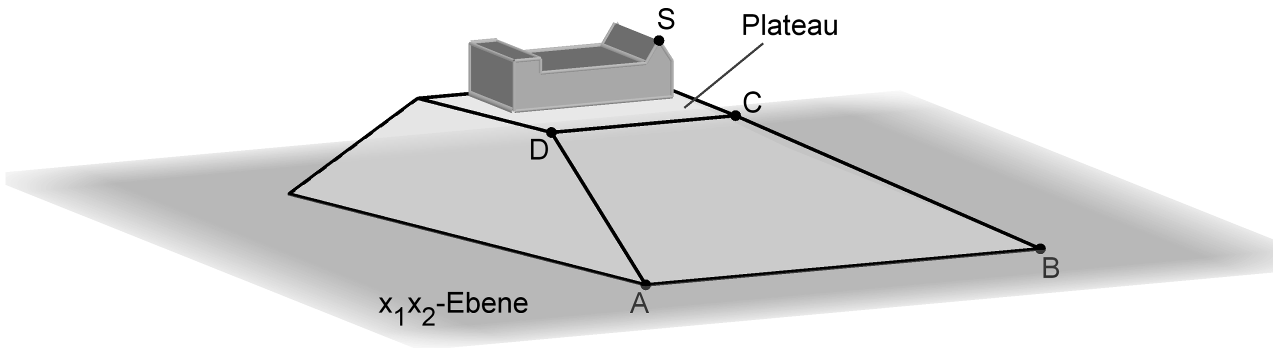
(zur Kontrolle: 374)

Das Trapez ABCD liegt in der Ebene H.

c Bestimmen Sie eine Gleichung von H in Koordinatenform und beschreiben Sie die Lage dieser Ebene im Koordinatensystem. 3

(zur Kontrolle: $H: 8x_1 + 15x_3 - 136 = 0$)

In einem Modell stellt die x_1x_2-Ebene die horizontale Grundfläche dar, auf der sich ein Hügel erhebt. Ein Hang des Hügels wird durch das Trapez ABCD dargestellt. Auf einem parallel zur Grundfläche verlaufenden Plateau, das durch ein Viereck mit C und D als Eckpunkten beschrieben wird, steht eine Burg. Die höchste Stelle der vorderen Fassade der Burg wird dabei durch den Punkt $S(-6|2|12)$ dargestellt (vgl. Abbildung). Eine Längeneinheit entspricht 10 m in der Realität.



d Bestimmen Sie die Höhe der vorderen Burgfassade an ihrer höchsten Stelle in Metern. 2

e Der durch das Trapez ABCD beschriebene Hang wird auf seiner gesamten Fläche für den Weinanbau genutzt. Berechnen Sie den Inhalt der Weinanbaufläche des Hangs in Hektar und untersuchen Sie mithilfe der folgenden Tabelle, um welche Art von Weinanbaulage es sich handelt. 5

Art der Weinanbaulage	Größe des Neigungswinkels des Hangs gegenüber der horizontalen Grundfläche
Flachlage	0° bis 3°
Hanglage	3° bis 17°
Steillage	17° oder mehr

f Bei der Weinlese steht ein Arbeiter auf dem Hang an einer Stelle, die durch den Punkt $P(5{,}75|-2{,}5|6)$ beschrieben wird. Er stellt sich dort auf seine Zehenspitzen und versucht, aus einer Blickhöhe von zwei Metern die Burg zu sehen. Beurteilen Sie, ob der Hang dabei die freie Sicht auf die höchste Stelle der vorderen Fassade der Burg verhindert. 5

20

Aufgabe B6 (Geometrie) **BE**

Gegeben sind die Punkte $A(5\,|\,-5\,|\,12)$, $B(5\,|\,5\,|\,12)$ und $C(-5\,|\,5\,|\,12)$.

a Zeigen Sie, dass das Dreieck ABC gleichschenklig ist. 2

b Begründen Sie, dass A, B und C Eckpunkte eines Quadrats sein können, und geben Sie die Koordinaten des vierten Eckpunkts D dieses Quadrats an. 3

Im Folgenden wird die Doppelpyramide in Abbildung 1 betrachtet. Die beiden Teilpyramiden ABCDS und ABCDT sind gleich hoch. Der Punkt T liegt im Koordinatenursprung, der Punkt S ebenfalls auf der z-Achse.

Die Seitenfläche BCT liegt in einer Ebene E.

c Bestimmen Sie eine Gleichung von E in Koordinatenform. 2

(zur Kontrolle: $E: 12y - 5z = 0$)

d Bestimmen Sie die Größe des Winkels, den die Seitenfläche BCT mit der Fläche ABCD einschließt. 3

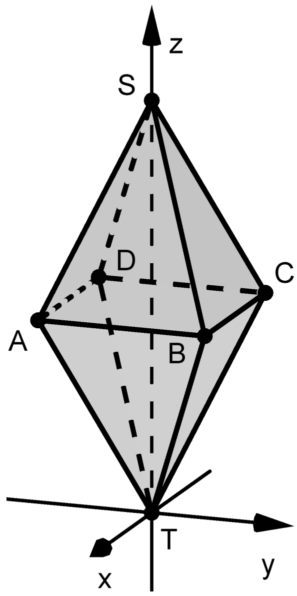


Abb. 1

E gehört zur Schar der Ebenen $E_k: ky - 5z = 5k - 60$ mit $k \in \mathbb{R}$. Die Strecke $\overline{BC}$ liegt auf jeder Ebene dieser Schar.

e Ermitteln Sie diejenigen Werte von k, für die E_k mit der Seitenfläche ADS mindestens einen Punkt gemeinsam hat. 4

f Die Seitenfläche ADT liegt in der Ebene F. Geben Sie einen Normalenvektor von F an und begründen Sie Ihre Angabe, ohne die Koordinaten von A und D zu verwenden. Bestimmen Sie denjenigen Wert von k, für den E_k senkrecht zu F steht. 4

g Die Doppelpyramide wird so um die x-Achse gedreht, dass die Seitenfläche BCT in eine Fläche übergeht, die in der xy-Ebene liegt, und der Punkt S in einen Punkt S', der eine positive y-Koordinate hat. Abbildung 2 zeigt jeweils einen Längsschnitt der Doppelpyramide durch die yz-Ebene vor und nach dieser Drehung. 2

Begründen Sie anhand geeigneter Eintragungen in Abbildung 2, dass die y-Koordinate von S' den Wert $24 \cdot \sin\varphi$ hat, wobei φ die in Aufgabe c bestimmte Winkelgröße ist.

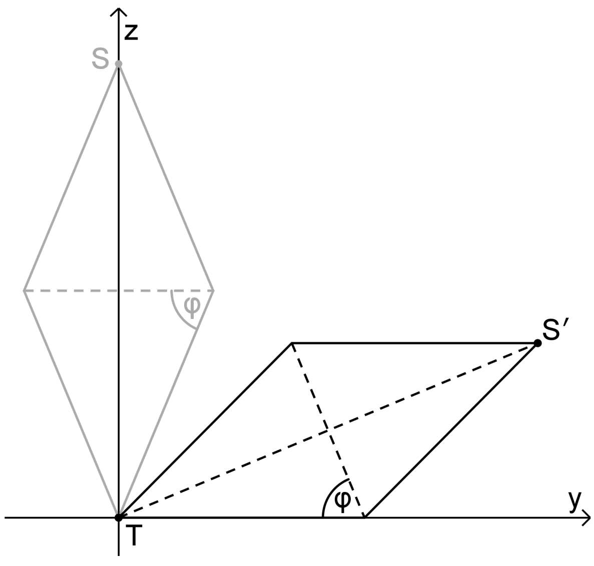


Abb. 2

20