ILLUSTRIERENDE PRÜFUNGSAUFGABEN FÜR DIE SCHRIFTLICHE ABITURPRÜFUNG

Teil 1: Beispielaufgaben

Die Illustrierenden Prüfungsaufgaben (Teil 1: Beispielaufgaben, Teil 2: Erläuterungen und Lösungsvorschläge) dienen der einmaligen exemplarischen Veranschaulichung von Struktur, Anspruch und Niveau der Abiturprüfung im neunjährigen Gymnasium in Bayern.

Mathematik

erhöhtes Anforderungsniveau

Prüfungsteil B (MMS)

Bei der Bearbeitung der Aufgaben dürfen folgende Hilfsmittel verwendet werden[1]:

- das vom Staatsministerium genehmigte Dokument mit mathematischen Formeln
- eine der vom Staatsministerium für Leistungserhebungen zugelassenen mathematisch-naturwissenschaftlichen Formelsammlungen
- ein wissenschaftlicher Taschenrechner, der den vom Staatsministerium getroffenen Regelungen entspricht
- **ein modulares Mathematiksystem, das den vom Staatsministerium getroffenen Regelungen entspricht**

Zu den Sachgebieten Analysis, Stochastik und Geometrie wählt der Fachausschuss jeweils eine der beiden Aufgaben zur Bearbeitung aus.

Das Geheft mit den Aufgabenstellungen ist abzugeben.

[1] In den Abiturprüfungen 2026 und 2027 sind außerdem stochastische Tabellen als weiteres Hilfsmittel zugelassen.

Aufgabe B1 (Analysis) BE

Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f mit $f(x)=\frac{1}{2}\cdot e^{-(x-5)}+\frac{1}{2}$. Ihr Graph wird mit G_f bezeichnet.

a Beschreiben Sie, wie G_f aus dem Graphen der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion $x \mapsto e^{-x}$ hervorgeht, und geben Sie die Wertemenge von f an. 4

b Berechnen Sie die mittlere Änderungsrate m von f im Intervall $[2;4]$ und bestimmen Sie rechnerisch die Koordinaten desjenigen Punkts auf G_f, in dem die Tangente an G_f die Steigung m besitzt. 4

c Zeigen Sie, dass die Funktion $u: x \mapsto 5-\ln(2x-1)$ mit geeignet gewählter Definitionsmenge D_u die Umkehrfunktion von f ist. Geben Sie D_u an. 2

d Geben Sie alle Stammfunktionen von f an und zeigen Sie, dass jede Stammfunktion die Wertemenge $\mathbb{R}$ besitzt. Begründen Sie, dass G_f mit dem Graphen jeder Stammfunktion von f genau einen Schnittpunkt hat. 5

Ein 20 m hoher Kühlturm soll gesprengt werden. Abbildung 1 zeigt schematisch einen Längsschnitt des Kühlturms. Der Turm ist rotationssymmetrisch; die Rotationsachse entspricht der y-Achse im eingezeichneten Koordinatensystem. Der Turmboden als Teil dieses Längsschnitts liegt auf der x-Achse. Eine Längeneinheit entspricht 1 m in der Wirklichkeit.

Die Profillinie der inneren Wandfläche wird für $x \leq 5$ und $y \leq 20$ modellhaft durch den Graphen der Funktion f beschrieben. Analog beschreibt für $x \leq 6$ und $y \leq 20$ der Graph G_g einer Funktion g die Profillinie der äußeren Wandfläche.

Der untere Teil des Turms ist ein Sockelring, dessen Wandflächen Zylindermäntel mit den Radien 5 m bzw. 6 m und den Höhen 1 m bzw. 2 m sind. Im Modell besitzt die innere Profillinie im Punkt K dadurch einen Knick.

Der Innenradius des kreisringförmigen oberen Turmrands in Metern wird mit r bezeichnet.

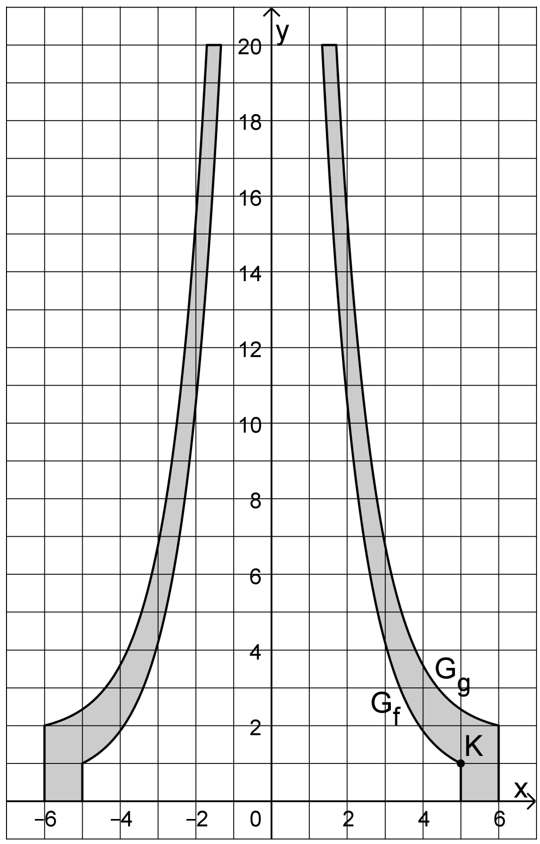


Abb. 1

e Berechnen Sie r auf eine Dezimale genau. 2

(zur Kontrolle: $r \approx 1{,}3$)

f Berechnen Sie die Größe des Winkels, der am Punkt K zwischen dem gekrümmten und dem vertikal verlaufenden Teil der inneren Profillinie eingeschlossen wird. 3

Zum Anbringen einer Sprengladung wird eine Bohrung in die Wand geplant. Der Bohrkanal wird im Modell durch eine Strecke beschrieben, die im Punkt K beginnt und einen Steigungswinkel von 60° hat.

g Begründen Sie, dass dabei der senkrechte Teil der äußeren Wandfläche nicht durchbohrt werden kann. 3

(Fortsetzung nächste Seite)

h Die Bohrung soll die Wand vollständig durchdringen. Beschreiben Sie, wie man bei der Berechnung der dazu erforderlichen Länge des Bohrkanals schrittweise vorgehen könnte. 4

i Machen Sie durch Ergänzung einer geeigneten Strecke in Abbildung 1 plausibel, dass nicht jede Stelle am Turmboden bzw. an der Turminnenwand direkt von einem Sonnenstrahl, der durch die obere Turmöffnung eintritt, getroffen werden kann. 7

Zur Ausleuchtung der Bohrstelle wird an der Position, die im Modell dem Punkt $(5\,|\,0)$ entspricht, ein Scheinwerfer aufgestellt. Die höchste Stelle an der Innenfläche der Turmwand, die durch den Scheinwerfer gerade noch beleuchtet wird, befindet sich gegenüber dem Scheinwerfer. Berechnen Sie die Höhe dieser Stelle.

j Berechnen Sie das Volumen des Hohlraums im Turminneren vom Turmboden bis zur Höhe 20 m. 4

(zur Kontrolle: ca. 416 m^3)

k Der gesamte Kühlturm einschließlich Hohlraum hat ein Volumen von 665 m^3. Nach der Sprengung des Turms wird der Schutt durch einen Lastwagen abtransportiert, der ein Fassungsvermögen von 13 m^3 besitzt. Ermitteln Sie, wie viele Fahrten der Lastwagen zum vollständigen Abtransport des Schutts durchführen muss. 2

40

Aufgabe B2 (Analysis) **BE**

1 Gegeben sind die in IR definierten Funktionen $f_a : x \mapsto -\frac{a}{250}x^4 + \frac{1}{25}x^3$ mit $a \in \mathbb{R}^+$ sowie $g_a : x \mapsto f_a(x) - \frac{3}{5}x$. Die Abbildung 1 zeigt den Graphen von g_1.

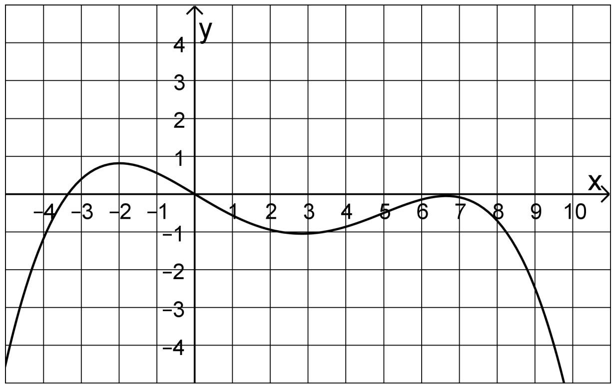


Abb. 1

a Berechnen Sie für den Graphen von f_1 die Koordinaten der Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen sowie die Koordinaten des Extrempunkts. Zeichnen Sie den Graphen von f_1 in die Abbildung 1 ein. 6

b Geben Sie an, für welche Werte von x der Graph von f_1 oberhalb des Graphen von g_1 verläuft und für welche unterhalb. Begründen Sie Ihre Angabe. 3

c Für jeden Wert von a gilt: 5

I Die Funktionsterme von f_a und g_a unterscheiden sich nur um den Summanden $-\frac{3}{5}x$.

II Der Graph von f_a hat genau zwei Wendepunkte, deren x-Koordinaten 0 und $\frac{5}{a}$ sind.

Geben Sie an, was sich aus I und II hinsichtlich der Anzahl und der Lage der Wendepunkte des Graphen von g_a im Vergleich zu den Wendepunkten des Graphen von f_a folgern lässt. Begründen Sie Ihre Angabe.

Die Tangente an den Graphen von f_a im Punkt $\left(\frac{5}{a} \mid f_a\left(\frac{5}{a}\right)\right)$ wird mit t_f bezeichnet, die Tangente an den Graphen von g_a im Punkt $\left(\frac{5}{a} \mid g_a\left(\frac{5}{a}\right)\right)$ mit t_g und der Schnittpunkt dieser beiden Tangenten mit S. Die Tangente t_g wird durch die Gleichung $y = \frac{5-3a^2}{5a^2}x - \frac{5}{2a^3}$ beschrieben.

d Weisen Sie rechnerisch nach, dass t_f durch die Gleichung $y = \frac{1}{a^2}x - \frac{5}{2a^3}$ dargestellt wird. 3

Begründen Sie, dass S für jeden Wert von a auf der y-Achse liegt.

e Die Gerade mit der Gleichung $x = \frac{5}{a}$ schneidet t_f im Punkt F und t_g im Punkt G. 6

Untersuchen Sie, für welche Werte von $a \in \mathbb{R}^+$ das Dreieck SGF rechtwinklig ist.

(Fortsetzung nächste Seite)

2 Die Abbildung 2 zeigt schematisch die Profillinie einer Skipiste in einer Skihalle. Die Piste ist nur in der abgebildeten Längsrichtung geneigt und durchgehend 30 m breit.

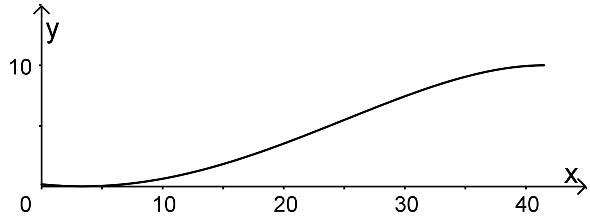


Abb. 2

Die Profillinie wird für $0 \le x \le 41{,}5$ durch den Graphen der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion $p: x \mapsto -0{,}000004x^4 + 0{,}015x^2 - 0{,}1x + 0{,}1875$ dargestellt. Im verwendeten Koordinatensystem beschreibt die x-Achse die Horizontale; eine Längeneinheit entspricht 10 m in der Realität.

a Berechnen Sie die Größe des größten Neigungswinkels der Piste gegenüber der Horizontalen. 4

Ein Seil ist an zwei Punkten befestigt, die im Modell durch $A(5\,|\,2{,}31)$ und $B(37\,|\,10{,}68)$ dargestellt werden. Der Verlauf des Seils kann modellhaft mithilfe einer in $\mathbb{R}$ definierten Funktion $h: x \mapsto b \cdot c^x$ mit $b, c \in \mathbb{R}^+$ beschrieben werden.

b Bestimmen Sie die Werte von b und c. 2

(zur Kontrolle: $b \approx 1{,}818$, $c \approx 1{,}049$)

c Untersuchen Sie, in welchen Bereichen der vertikale Abstand des Seils zur Piste mindestens 3 m beträgt. Ermitteln Sie die Höhendifferenz, um die die beiden Befestigungspunkte gemeinsam mindestens angehoben werden müssten, damit das Seil an jeder Stelle von der Piste einen vertikalen Abstand von mindestens 3 m hat. 6

d Die Abbildung 3 zeigt grau markiert die Schneeauflage im unteren Bereich der Piste; dazu wurde die Abbildung 2 in Richtung der y-Achse stärker vergrößert als in Richtung der x-Achse. Der Untergrund, auf dem der Schnee aufgebracht ist, wird für $0 \le x \le 5$ durch die x-Achse dargestellt. Für den übrigen Teil der Piste soll davon ausgegangen werden, dass die in vertikaler Richtung gemessene Schneehöhe 60 cm beträgt. 5

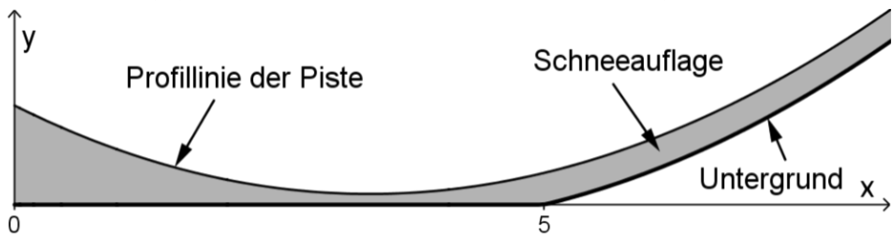


Abb. 3

Bestimmen Sie das Volumen der Schneeauflage der gesamten Piste.

40

Aufgabe B3 (Stochastik) | **BE**

1 Bei einer Verkehrszählung zur Untersuchung des Sicherheitsbewusstseins im Straßenverkehr wurden 630 Radfahrer erfasst. Ein Drittel davon fuhr ein Fahrrad mit Elektromotor, 147 waren mit einem Fahrrad ohne Elektromotor unterwegs und trugen keinen Helm. Insgesamt trugen 40 % der Radfahrer keinen Helm.

Aus den bei der Verkehrszählung erfassten Radfahrern wird eine Person zufällig ausgewählt.

a Begründen Sie anhand der vorliegenden Daten, dass die folgenden Ereignisse stochastisch abhängig sind: 3

H: „Die Person trug einen Helm."

E: „Die Person fuhr ein Fahrrad mit Elektromotor."

b Ermitteln Sie 4

- die Wahrscheinlichkeit p_1 dafür, dass die Person auf einem Fahrrad ohne Elektromotor unterwegs war und einen Helm trug.
- die Wahrscheinlichkeit p_2 dafür, dass die Person einen Helm trug, wenn bekannt ist, dass sie mit einem Fahrrad ohne Elektromotor unterwegs war.

c Begründen Sie, dass bei jeder beliebigen Verkehrszählung, bei der sowohl Fahrräder mit als auch ohne Elektromotor erfasst wurden, ein Ergebnis vorliegt, bei dem für die in Aufgabe 1b zu berechnenden Wahrscheinlichkeiten $p_1 \le p_2$ gilt. 2

2 Nach einer statistischen Erhebung eines Fahrradmagazins tritt auf einer 50 km langen, mit dem Fahrrad zurückgelegten Strecke mit einer Wahrscheinlichkeit von 1,6 % eine Reifenpanne auf.

a Ermitteln Sie auf 50 km genau, ab welcher mit dem Fahrrad zurückgelegten Gesamtstrecke unter diesen Voraussetzungen die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens eine Reifenpanne auftritt, mehr als 90 % beträgt. 4

b Beurteilen Sie, ob die folgende Aussage wahr ist: 2

Wenn die zurückgelegte Strecke verdoppelt wird, verdoppelt sich auch die Wahrscheinlichkeit, genau eine Reifenpanne zu haben.

3 Im Jahr 2020 wurden in Deutschland rund fünf Millionen Fahrräder verkauft. Dabei waren 40 % der verkauften Fahrräder Pedelecs (unterstützende Elektrofahrräder). Unter allen im Jahr 2020 verkauften Fahrrädern werden 200 nacheinander zufällig ausgewählt. Die Zufallsgröße X beschreibt die Anzahl der Pedelecs unter den 200 zufällig ausgewählten Fahrrädern.

a Der Erwartungswert von X wird mit μ bezeichnet. Bestimmen Sie $P(\mu - 10 \le X \le \mu + 10)$ und beschreiben Sie die Bedeutung des Terms im Sachzusammenhang. 3

b Geben Sie im Sachzusammenhang ein Ereignis an, dessen Wahrscheinlichkeit mit dem Term $0{,}4^2 \cdot \binom{198}{75} \cdot 0{,}4^{75} \cdot 0{,}6^{123}$ berechnet werden kann. 2

Aufgrund der hohen Anschaffungskosten wurde für jedes vierte im Jahr 2020 verkaufte Pedelec eine Versicherung abgeschlossen. Die Zufallsgröße Y beschreibt die Anzahl der Pedelecs unter den 200 zufällig ausgewählten Fahrrädern, für die eine Versicherung abgeschlossen wurde.

c Berechnen Sie $P(Y = 0)$. 2

d Ermitteln Sie den größtmöglichen Wert von k, für den $P_{0,1}^{200}(Y \ge k) > 0{,}8$ gilt, und interpretieren Sie das Ergebnis im Sachzusammenhang. 3

25

Aufgabe B4 (Stochastik) **BE**

Die Bigband einer Schule nimmt anlässlich des 50-jährigen Jubiläums der Schule eine CD mit zehn Musikstücken auf; vier dieser Stücke sind kurz, sechs lang. Diese CD wird in großer Anzahl hergestellt.

1 Bei der Jubiläumsfeier werden von einer dieser CDs in zufälliger Reihenfolge Stücke abgespielt, wobei jedes Stück mehrfach abgespielt werden kann.

a Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die ersten drei abgespielten Stücke verschieden sind. 2

b Berechnen Sie jeweils die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich unter zwölf abgespielten Stücken 4

- genau fünf lange Stücke befinden.
- mehr lange als kurze Stücke befinden.

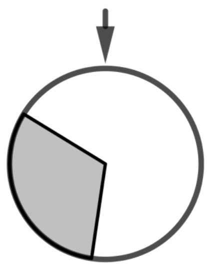
2 Als die CDs vor der Jubiläumsfeier geliefert wurden, entdeckten die Mitglieder der Bigband unter den ersten 20 betrachteten CDs ein Exemplar mit fehlerhafter Hülle und befürchteten, dass mindestens 5 % aller Hüllen fehlerhaft sind. Sie planten deshalb die Durchführung eines Signifikanztests mit einem Signifikanzniveau von 10 % und der Nullhypothese „Der Anteil der fehlerhaften Hüllen ist kleiner als 5 %." Sollte das Ergebnis des Tests dafür sprechen, dass die Befürchtung zutrifft, wollten sie beim Hersteller einen Preisnachlass verlangen.

a Geben Sie eine Überlegung an, die zur Wahl der Nullhypothese geführt haben könnte, und begründen Sie Ihre Angabe. 3

b Dem Test wurde eine Stichprobe von 150 CDs zugrunde gelegt. Bestimmen Sie die zugehörige Entscheidungsregel. 5

c Angenommen, der beschriebene Test wird auf der Grundlage einer Stichprobe von 250 CDs durchführt. In diesem Fall wird die Nullhypothese abgelehnt, wenn mindestens 18 Hüllen fehlerhaft sind. Ermitteln Sie den Bereich, in dem der tatsächliche Anteil fehlerhafter Hüllen liegen müsste, damit die Wahrscheinlichkeit für den Fehler zweiter Art kleiner als 25 % ist. 4

3 Bei der Jubiläumsfeier können die CDs sowohl zu einem Preis von 9 Euro pro Stück gekauft als auch bei einem Spiel gewonnen werden. Für das Spiel wird ein Glücksrad mit einem grauen und einem weißen Sektor verwendet (vgl. Abbildung). Für einen Einsatz von einem Euro wird das Glücksrad dreimal gedreht. Nur wenn dabei genau zweimal der grau markierte Sektor getroffen wird, erhält man eine CD. Die Größe des Öffnungswinkels des grauen Sektors im Bogenmaß wird mit b bezeichnet.



a Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, bei diesem Spiel eine CD zu erhalten, mithilfe des Terms $\frac{3}{4\pi^2}b^2 - \frac{3}{8\pi^3}b^3$ berechnet werden kann. 3

b Es gibt Werte von b, für die die Bigband bei vielfacher Durchführung des Spiels im Mittel pro CD die gleichen Einnahmen erwarten könnte wie beim Verkauf der CD. Ermitteln Sie diese Werte von b. 4

25

Aufgabe B5 (Geometrie) BE

Gegeben sind die Punkte $A(17\,|\,-10\,|\,0)$, $B(17\,|\,20\,|\,0)$, $C(2\,|\,4\,|\,8)$ und $D(2\,|\,-10\,|\,8)$, die in der Ebene H liegen.

a Begründen Sie, dass das Viereck ABCD ein Trapez ist, das bei D einen rechten Innenwinkel hat. 3

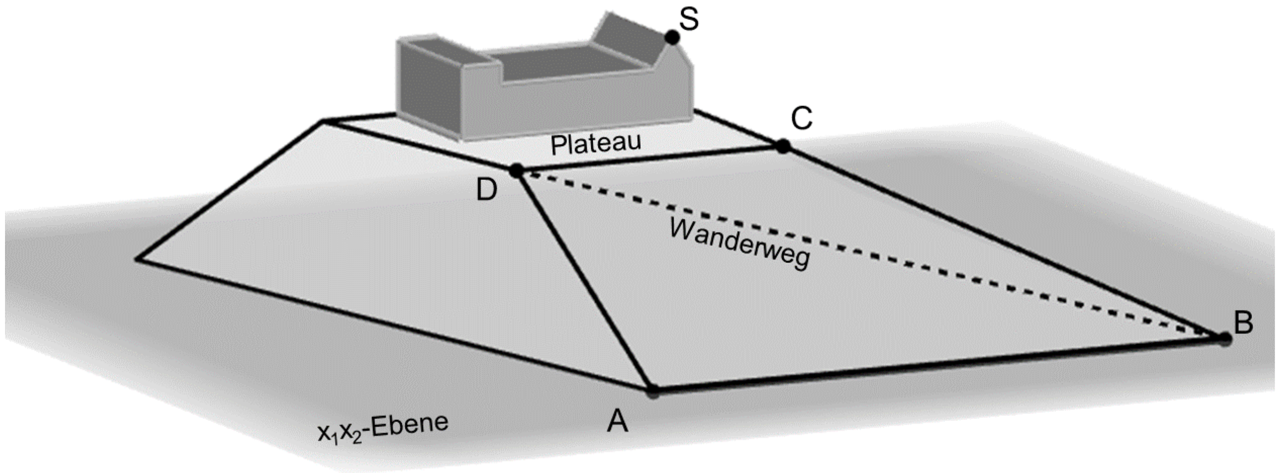
b Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Trapezes ABCD. 3

(zur Kontrolle: 374)

c Bestimmen Sie eine Gleichung von H in Koordinatenform und beschreiben Sie die Lage dieser Ebene im Koordinatensystem. 3

(zur Kontrolle: $H: 8x_1 + 15x_3 - 136 = 0$)

In einem Modell stellt die x_1x_2-Ebene die horizontale Grundfläche dar, auf der sich ein Hügel erhebt. Ein Hang des Hügels wird durch das Trapez ABCD dargestellt. Auf einem parallel zur Grundfläche verlaufenden Plateau, das durch ein Viereck mit C und D als Eckpunkten beschrieben wird, steht eine Burg. Die höchste Stelle der vorderen Fassade der Burg wird dabei durch den Punkt $S(-6\,|\,2\,|\,12)$ dargestellt (vgl. Abbildung). Eine Längeneinheit entspricht 10 m in der Realität.



d Bestimmen Sie die Höhe der vorderen Burgfassade an ihrer höchsten Stelle in Metern. 2

e Der durch das Viereck ABCD beschriebene Hang wird auf 90 % seiner Fläche für den Weinanbau genutzt. Berechnen Sie den Inhalt der Weinanbaufläche des Hangs in Hektar und untersuchen Sie mithilfe der folgenden Tabelle, um welche Art von Weinanbaulage es sich handelt. 6

Art der Weinanbaulage	Größe des Neigungswinkels des Hangs gegenüber der horizontalen Grundfläche
Flachlage	0° bis 3°
Hanglage	3° bis 17°
Steillage	17° oder mehr

f Ein Wanderer besteigt den Hügel entlang eines Wanderwegs, der im Modell der Strecke $\overline{BD}$ entspricht. Nachdem der Wanderer einen Teil des Wegs zurückgelegt hat, stellt er sich auf die Zehenspitzen und versucht, aus einer Blickhöhe von 2 Metern die Burg zu sehen. Ermitteln Sie, wie viele Meter über der horizontalen Grundfläche sich diejenige Stelle des Wegs befindet, ab der der Wanderer für die gesamte restliche Wegstrecke die höchste Stelle der vorderen Fassade der Burg erblicken kann. 8

25

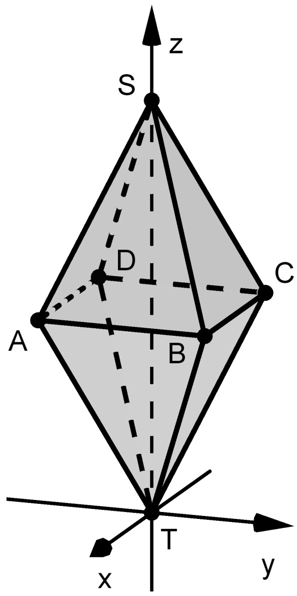
Aufgabe B6 (Geometrie) BE

Gegeben sind die Punkte $A(5\,|\,{-5}\,|\,12)$, $B(5\,|\,5\,|\,12)$ und $C(-5\,|\,5\,|\,12)$.

a Zeigen Sie, dass das Dreieck ABC gleichschenklig ist. 2

b Begründen Sie, dass A, B und C Eckpunkte eines Quadrats sein können, und geben Sie die Koordinaten des vierten Eckpunkts D dieses Quadrats an. 3

Im Folgenden wird die abgebildete Doppelpyramide betrachtet. Die beiden Teilpyramiden ABCDS und ABCDT sind gleich hoch. Der Punkt T liegt im Koordinatenursprung, der Punkt S ebenfalls auf der z-Achse.



Die Seitenfläche BCT liegt in einer Ebene E.

c Bestimmen Sie eine Gleichung von E in Koordinatenform. 2

(zur Kontrolle: $E: 12y - 5z = 0$)

d Bestimmen Sie die Größe des Winkels, den die Seitenfläche BCT mit der Fläche ABCD einschließt. 3

E gehört zur Schar der Ebenen $E_k: ky - 5z = 5k - 60$ mit $k \in \mathbb{R}$.

e Alle Ebenen der Schar schneiden sich in einer Gerade. Weisen Sie nach, dass die Kante $\overline{BC}$ auf dieser Gerade liegt. 2

f Ermitteln Sie diejenigen Werte von k, für die E_k mit der Seitenfläche ADS mindestens einen Punkt gemeinsam hat. 4

g Die Seitenfläche ADT liegt in der Ebene F. Geben Sie einen Normalenvektor von F an und begründen Sie Ihre Angabe, ohne die Koordinaten von A und D zu verwenden. Bestimmen Sie denjenigen Wert von k, für den E_k senkrecht zu F steht. 4

h Die Doppelpyramide wird so um die x-Achse gedreht, dass die bisher mit BCT bezeichnete Seitenfläche in der xy-Ebene liegt und der bisher mit S bezeichnete Punkt eine positive y-Koordinate hat. Bestimmen Sie diese y-Koordinate und veranschaulichen Sie Ihr Vorgehen durch eine Skizze. Geben Sie die Größe des zugehörigen Drehwinkels an. 5

25