ILLUSTRIERENDE PRÜFUNGSAUFGABEN FÜR DIE SCHRIFTLICHE ABITURPRÜFUNG

Teil 1: Beispielaufgaben

Die Illustrierenden Prüfungsaufgaben (Teil 1: Beispielaufgaben, Teil 2: Erläuterungen und Lösungsvorschläge) dienen der einmaligen exemplarischen Veranschaulichung von Struktur, Anspruch und Niveau der Abiturprüfung im neunjährigen Gymnasium in Bayern.

Mathematik

erhöhtes Anforderungsniveau

Prüfungsteil B

Bei der Bearbeitung der Aufgaben dürfen, sobald die Abgabe von Prüfungsteil A erfolgt ist, folgende Hilfsmittel verwendet werden[1]:

- das vom Staatsministerium genehmigte Dokument mit mathematischen Formeln
- eine der vom Staatsministerium für Leistungserhebungen zugelassenen mathematisch-naturwissenschaftlichen Formelsammlungen
- ein wissenschaftlicher Taschenrechner, der den vom Staatsministerium getroffenen Regelungen entspricht

Zu den Sachgebieten Analysis, Stochastik und Geometrie wählt der Fachausschuss jeweils eine der beiden Aufgaben zur Bearbeitung aus.

Spätester Abgabezeitpunkt: **300 Minuten** nach Prüfungsbeginn

Das Geheft mit den Aufgabenstellungen ist abzugeben.

[1] In den Abiturprüfungen 2026 und 2027 sind außerdem stochastische Tabellen als weiteres Hilfsmittel zugelassen.

Aufgabe B1 (Analysis) **BE**

1 Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $f: x \mapsto \frac{1}{100} \cdot \left(2x^3 - 43x^2 + 248x\right)$. Abbildung 1 zeigt den Graphen G_f von f im Bereich $0 \leq x \leq 10$.

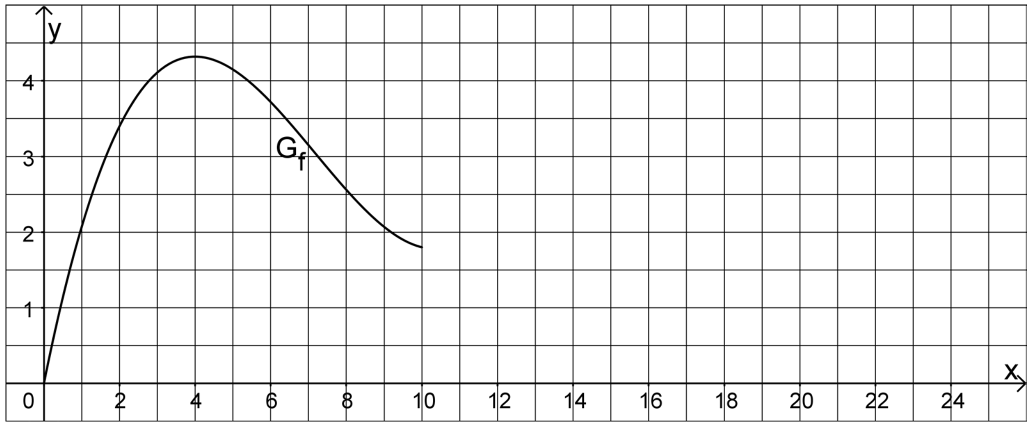


Abb. 1

a Begründen Sie anhand des Terms von f, dass G_f nicht symmetrisch bezüglich des Koordinatenursprungs ist, und zeigen Sie rechnerisch, dass G_f für $x < 7\frac{1}{6}$ rechtsgekrümmt ist. 4

b Es gibt eine Stelle $x_0 \in [0;10]$, an der die lokale Änderungsrate von f mit der mittleren Änderungsrate von f im Intervall $[0;10]$ übereinstimmt. Ermitteln Sie grafisch anhand von Abbildung 1 einen Näherungswert für x_0. 3

c Bestimmen Sie eine Gleichung der Tangente t an G_f im Punkt $(10 \mid f(10))$ und zeichnen Sie t für $x \geq 10$ in Abbildung 1 ein. 4

(zur Kontrolle: Gleichung von t: $y = -0{,}12x + 3$)

2 Betrachtet wird die Schar der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen $g_k : x \mapsto 3x \cdot e^{kx}$ mit $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Der Graph jeder Funktion g_k der Schar hat genau einen Extrempunkt E_k. Abbildung 2 zeigt den Graphen G einer Funktion dieser Schar.

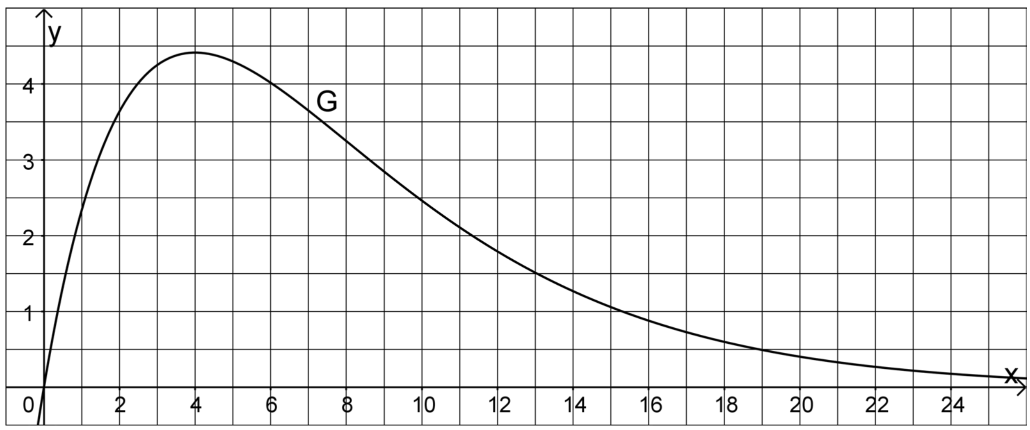


Abb. 2

a Alle Extrempunkte E_k liegen auf der Gerade h. Bestimmen Sie rechnerisch die Steigung von h. 5

Der Graph G besitzt den Hochpunkt $\left(4 \mid \frac{12}{e}\right)$.

b Begründen Sie, dass G der Graph der Funktion g_k mit $k = -0{,}25$ ist. 2

c Geben Sie alle Werte $a \in \mathbb{R}$ an, für die die Gleichung $3x \cdot e^{-0{,}25x} = a$ genau eine Lösung besitzt. 2

(Fortsetzung nächste Seite)

3 Junge Hunde wachsen in ihren ersten Lebensmonaten sehr schnell zu ausgewachsenen Hunden heran. Zur Beschreibung der Zunahme der Körpermasse eines Hundes einer bestimmten Rasse in den ersten 25 Lebensmonaten werden die folgenden beiden Modelle betrachtet:

- Für Modell A wird für $0 \leq x \leq 10$ der Graph G_f aus Aufgabe 1 und für $10 \leq x \leq 25$ die Tangente t (vgl. Aufgabe 1d) verwendet.
- Für Modell B wird für $0 \leq x \leq 25$ der Graph G der Funktion $g_{-0,25}$ aus Aufgabe 2 genutzt.

In beiden Modellen steht die x-Koordinate des jeweiligen Punkts auf den Graphen bzw. der Tangente für die Zeit in Monaten, die seit der Geburt des Hundes vergangen sind, und seine y-Koordinate für die momentane Änderungsrate der Körpermasse des Hundes in Kilogramm pro Monat. Dabei wird vereinfachend davon ausgegangen, dass jeder Monat 30 Tage hat.

a Formulieren Sie eine Aussage im Sachzusammenhang, die für beide Modelle für $x = 4$ zutrifft. 1

b Berechnen Sie auf der Grundlage von Modell A, wie viele Monate nach der Geburt ein Hund der betrachteten Rasse erstmals nicht mehr an Körpermasse zunimmt. 2

(zur Kontrolle: 25 Monate)

c Begründen Sie, dass auf der Grundlage von Modell A die Masse in Kilogramm, um die ein Hund der betrachteten Rasse in den ersten 25 Monaten nach seiner Geburt insgesamt zunimmt, mit dem Term $\int_0^{10} f(x)\,dx + 13{,}5$ berechnet werden kann. 3

d Die Funktionen f und $g_{-0,25}$, die für die Modelle A bzw. B verwendet werden, stimmen im Bereich $0 \leq x \leq 10$ nur für $x = 0$ in ihren Funktionswerten überein. Zur Entwicklung weiterer Modelle sind in $[0; 10]$ definierte Funktionen gesucht, deren Funktionswerte für $x > 0$ zwischen den Funktionswerten von f und $g_{-0,25}$ liegen. Geben Sie für zwei verschiedene solche Funktionen jeweils einen Funktionsterm an. 4

30

Aufgabe B2 (Analysis) **BE**

1 Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $f: x \mapsto -\frac{8}{27}x^3 + ax^2$ mit $a \in \mathbb{R}$. Die Nullstellen von f sind 0 und $\frac{9}{4}$. Abbildung 1 zeigt den Graphen G_f von f.

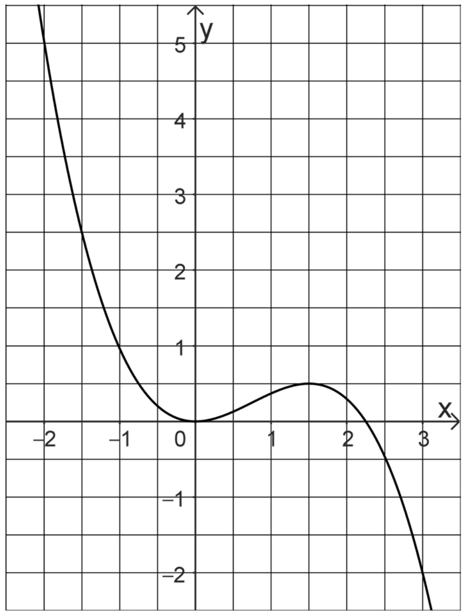


Abb. 1

a Bestimmen Sie rechnerisch den Wert von a. 2

(zur Kontrolle: $a = \frac{2}{3}$)

b Berechnen Sie den Inhalt des Flächenstücks, das G_f im ersten Quadranten mit der x-Achse einschließt. 3

Die Tangente an G_f im Punkt $\left(\frac{9}{4} \mid 0\right)$ wird mit t bezeichnet.

c Weisen Sie nach, dass t durch den Punkt $\left(0 \mid \frac{27}{8}\right)$ verläuft. Begründen Sie, dass der Inhalt des Flächenstücks, das G_f im ersten Quadranten mit t und der y-Achse einschließt, kleiner als $\frac{1}{2} \cdot \frac{9}{4} \cdot \frac{27}{8}$ ist. 5

d Eine in $\mathbb{R}$ definierte ganzrationale Funktion g hat die folgenden Eigenschaften: 3

- t ist Tangente an den Graphen von g im Punkt $\left(\frac{9}{4} \mid 0\right)$.
- Der Graph von g verläuft für $0 < x < \frac{9}{4}$ oberhalb von t.

Geben Sie einen möglichen Term von g an.

2 In einer Messstation wird seit 1958 kontinuierlich die CO_2-Konzentration in der Luft gemessen, die in ppm (parts per million) angegeben wird. Die Tabelle gibt für die Jahre 1960, 1985 und 2010 jeweils den jährlichen Durchschnittswert der Messwerte an.

Jahr	1960	1985	2010
CO_2-Konzentration	317 ppm	346 ppm	390 ppm

a Die jährlichen Durchschnittswerte haben sich im Zeitraum von 1960 bis 1985 in guter Näherung exponentiell entwickelt. Ermitteln Sie die zugehörige Wachstumsrate in Prozent. 3

(zur Kontrolle: etwa 0,35 %)

b Berechnen Sie unter der Annahme, dass sich das exponentielle Wachstum nach 1985 in gleicher Weise fortgesetzt hat, den jährlichen Durchschnittswert für das Jahr 2010. Vergleichen Sie diesen Wert mit dem zugehörigen Wert aus der Tabelle und formulieren Sie das Ergebnis Ihres Vergleichs im Sachzusammenhang. 3

Innerhalb eines Jahres schwankt die CO_2-Konzentration. Für einen bestimmten Zeitraum von acht Monaten lassen sich die gemessenen Werte modellhaft durch die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $k: x \mapsto 3{,}3 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6}x\right) + 406$ beschreiben. Dabei ist x die in diesem Zeitraum vergangene Zeit in Monaten und $k(x)$ die CO_2-Konzentration in ppm. Vereinfachend wird davon ausgegangen, dass jeder Monat 30 Tage hat.

c Geben Sie an, wie der Graph von k schrittweise aus dem Graphen der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion $s: x \mapsto \sin(x)$ hervorgeht. Beurteilen Sie, ob die Reihenfolge der einzelnen Schritte von Bedeutung ist. 5

(Fortsetzung nächste Seite)

d Der durchschnittliche Funktionswert einer Funktion h im Intervall $[a;b]$ kann mithilfe der folgenden Überlegung bestimmt werden: 6

Schließt der Graph von h mit der x-Achse und den Geraden mit den Gleichungen $x = a$ und $x = b$ ein Flächenstück ein, so gibt es ein Rechteck der Länge $b - a$, das den gleichen Flächeninhalt wie das Flächenstück hat (vgl. Abbildung 2). Die Breite dieses Rechtecks stimmt mit dem Betrag des durchschnittlichen Funktionswerts von h im Intervall $[a;b]$ überein.

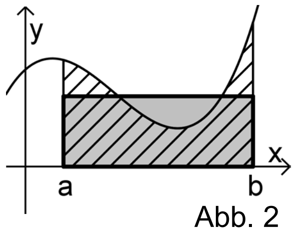


Abb. 2

Bestimmen Sie für den betrachteten Zeitraum von acht Monaten die prozentuale Abweichung des Maximums der CO_2-Konzentration von der durchschnittlichen CO_2-Konzentration.

30

Aufgabe B3 (Stochastik) **BE**

1 Bei einer Verkehrszählung zur Untersuchung des Sicherheitsbewusstseins im Straßenverkehr wurden 630 Radfahrer erfasst. Ein Drittel davon fuhr ein Fahrrad mit Elektromotor, 147 waren mit einem Fahrrad ohne Elektromotor unterwegs und trugen keinen Helm. Insgesamt trugen 40 % der Radfahrer keinen Helm.

Aus den bei der Verkehrszählung erfassten Radfahrern wird eine Person zufällig ausgewählt.

Betrachtet werden die folgenden Ereignisse:

E: „Die Person fuhr ein Fahrrad mit Elektromotor.“

H: „Die Person trug einen Helm.“

a Begründen Sie anhand der vorliegenden Daten, dass E und H stochastisch abhängig sind. 3

b Beschreiben Sie das Ereignis $\overline{E} \cap H$ im Sachzusammenhang und ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Person einen Helm trug, wenn bekannt ist, dass sie auf einem Fahrrad ohne Elektromotor unterwegs war. 3

2 Nach einer statistischen Erhebung eines Fahrradmagazins tritt auf einer 50 km langen, mit dem Fahrrad zurückgelegten Strecke mit einer Wahrscheinlichkeit von 1,6 % eine Reifenpanne auf. 5

Ermitteln Sie auf 50 km genau, ab welcher mit dem Fahrrad zurückgelegten Gesamtstrecke unter diesen Voraussetzungen die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens eine Reifenpanne auftritt, mehr als 90 % beträgt.

3 Im Jahr 2020 wurden in Deutschland rund fünf Millionen Fahrräder verkauft. Dabei waren 40 % der verkauften Fahrräder Pedelecs (unterstützende Elektrofahrräder). Unter allen im Jahr 2020 verkauften Fahrrädern werden 200 zufällig ausgewählt. Die Zufallsgröße X beschreibt die Anzahl der Pedelecs unter den 200 zufällig ausgewählten Fahrrädern.

a Bestimmen Sie $P(70 \leq X \leq 90)$ und beschreiben Sie die Bedeutung des Terms im Sachzusammenhang. 3

Aufgrund der hohen Anschaffungskosten wurde für jedes vierte im Jahr 2020 verkaufte Pedelec eine Versicherung abgeschlossen. Die Zufallsgröße Y beschreibt die Anzahl der Pedelecs unter den 200 zufällig ausgewählten Fahrrädern, für die eine Versicherung abgeschlossen wurde.

b Berechnen Sie $P(Y = 0)$. 2

c Ermitteln Sie den größtmöglichen Wert von k, für den $P_{0,1}^{200}(Y \geq k) > 0,8$ gilt, und interpretieren Sie das Ergebnis im Sachzusammenhang. 4

20

Aufgabe B4 (Stochastik) BE

Die Bigband einer Schule nimmt anlässlich des 50-jährigen Jubiläums der Schule eine CD mit zehn Musikstücken auf; vier dieser Stücke sind kurz, sechs lang. Diese CD wird in großer Anzahl hergestellt.

1 Bei der Jubiläumsfeier werden von einer dieser CDs in zufälliger Reihenfolge Stücke abgespielt, wobei jedes Stück mehrfach abgespielt werden kann. 4

Berechnen Sie jeweils die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich unter zwölf abgespielten Stücken

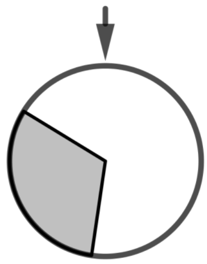
- genau fünf lange Stücke befinden.
- mehr lange als kurze Stücke befinden.

2 Als die CDs vor der Jubiläumsfeier geliefert wurden, entdeckten die Mitglieder der Bigband unter den ersten 20 betrachteten CDs ein Exemplar mit fehlerhafter Hülle und befürchteten, dass mindestens 5 % aller Hüllen fehlerhaft sind. Sie planten deshalb, die Nullhypothese „Der Anteil der fehlerhaften Hüllen ist kleiner als 5 %." mithilfe einer Stichprobe von 150 CDs auf einem Signifikanzniveau von 10 % zu testen. Sollte das Ergebnis des Tests dafür sprechen, dass die Befürchtung zutrifft, wollten sie beim Hersteller einen Preisnachlass verlangen.

a Begründen Sie, dass die Nullhypothese genau dann abgelehnt wird, wenn mindestens zwölf Hüllen fehlerhaft sind. 3

b Beschreiben Sie die Bedeutung des Fehlers zweiter Art im Sachzusammenhang und ermitteln Sie den Bereich, in dem der tatsächliche Anteil fehlerhafter Hüllen liegen müsste, damit die Wahrscheinlichkeit für den Fehler zweiter Art kleiner als 25 % ist. 6

3 Bei der Jubiläumsfeier können die CDs sowohl zu einem Preis von 9 Euro pro Stück gekauft als auch bei einem Spiel gewonnen werden. Für das Spiel wird ein Glücksrad mit einem grauen und einem weißen Sektor verwendet (vgl. Abbildung). Für einen Einsatz von einem Euro wird das Glücksrad dreimal gedreht. Nur wenn dabei genau zweimal der grau markierte Sektor getroffen wird, erhält man eine CD. Die Größe des Öffnungswinkels des grauen Sektors im Bogenmaß wird mit b bezeichnet.



a Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, bei diesem Spiel eine CD zu erhalten, mithilfe des Terms $\frac{3}{4\pi^2}b^2 - \frac{3}{8\pi^3}b^3$ berechnet werden kann. 4

b Es gibt Werte von b, für die die Bigband bei vielfacher Durchführung des Spiels im Mittel pro CD die gleichen Einnahmen erwarten könnte wie beim Verkauf der CD. Geben Sie eine Gleichung an, mit der diese Werte von b berechnet werden könnten. 3

20

Aufgabe B5 (Geometrie) **BE**

Gegeben sind die Punkte $A(17|-10|0)$, $B(17|20|0)$, $C(2|4|8)$ und $D(2|-10|8)$. Es gilt $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$, somit ist das Viereck ABCD ein Trapez.

a Zeigen Sie, dass das Trapez ABCD bei D einen rechten Innenwinkel hat. 2

b Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Trapezes ABCD. 3

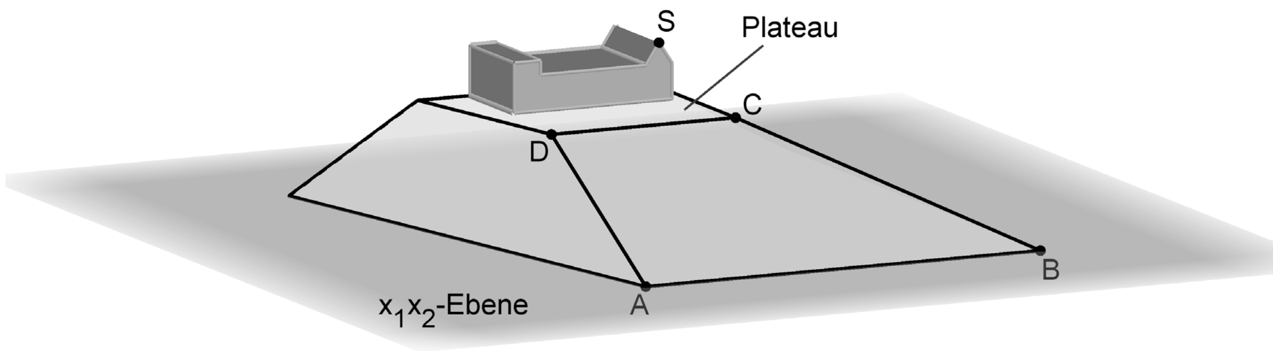
(zur Kontrolle: 374)

Das Trapez ABCD liegt in der Ebene H.

c Bestimmen Sie eine Gleichung von H in Koordinatenform. 3

(zur Kontrolle: $H: 8x_1 + 15x_3 - 136 = 0$)

In einem Modell stellt die x_1x_2-Ebene die horizontale Grundfläche dar, auf der sich ein Hügel erhebt. Ein Hang des Hügels wird durch das Trapez ABCD dargestellt. Auf einem parallel zur Grundfläche verlaufenden Plateau, das durch ein Viereck mit C und D als Eckpunkten beschrieben wird, steht eine Burg. Die höchste Stelle der vorderen Fassade der Burg wird dabei durch den Punkt $S(-6|2|12)$ dargestellt (vgl. Abbildung). Eine Längeneinheit entspricht 10 m in der Realität.



d Bestimmen Sie die Höhe der vorderen Burgfassade an ihrer höchsten Stelle in Metern. 2

e Der durch das Trapez ABCD beschriebene Hang wird auf seiner gesamten Fläche für den Weinanbau genutzt. Berechnen Sie den Inhalt der Weinanbaufläche des Hangs in Hektar und untersuchen Sie mithilfe der folgenden Tabelle, um welche Art von Weinanbaulage es sich handelt. 5

Art der Weinanbaulage	Größe des Neigungswinkels des Hangs gegenüber der horizontalen Grundfläche
Flachlage	0° bis 3°
Hanglage	3° bis 17°
Steillage	17° oder mehr

f Bei der Weinlese steht ein Arbeiter auf dem Hang an einer Stelle, die durch den Punkt $P(5{,}75|-2{,}5|6)$ beschrieben wird. Er stellt sich dort auf seine Zehenspitzen und versucht, aus einer Blickhöhe von zwei Metern die Burg zu sehen. Beurteilen Sie, ob der Hang dabei die freie Sicht auf die höchste Stelle der vorderen Fassade der Burg verhindert. 5

20

Aufgabe B6 (Geometrie) BE

Gegeben sind die Punkte $A(5\,|-5\,|\,12)$, $B(5\,|\,5\,|\,12)$ und $C(-5\,|\,5\,|\,12)$.

a Begründen Sie, dass A, B und C Eckpunkte eines Quadrats sein können, und geben Sie die Koordinaten des vierten Eckpunkts D dieses Quadrats an. 4

Im Folgenden wird die Doppelpyramide in Abbildung 1 betrachtet. Die beiden Teilpyramiden ABCDS und ABCDT sind gleich hoch. Der Punkt T liegt im Koordinatenursprung, der Punkt S ebenfalls auf der z-Achse.

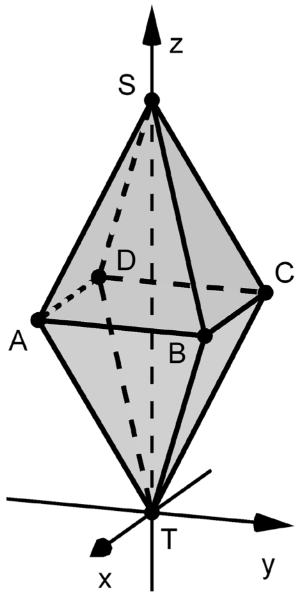


Abb. 1

Die Seitenfläche BCT liegt in einer Ebene E.

b Bestimmen Sie eine Gleichung von E in Koordinatenform. 3

(zur Kontrolle: $E: 12y - 5z = 0$)

c Bestimmen Sie die Größe des Winkels, den die Seitenfläche BCT mit der Fläche ABCD einschließt. 3

E gehört zur Schar der Ebenen $E_k: ky - 5z = 5k - 60$ mit $k \in \mathbb{R}$. Die Strecke $\overline{BC}$ liegt auf jeder Ebene dieser Schar.

d Ermitteln Sie diejenigen Werte von k, für die E_k mit der Seitenfläche ADS mindestens einen Punkt gemeinsam hat. 4

e Die Seitenfläche ADT liegt in der Ebene F. Geben Sie einen Normalenvektor von F an und begründen Sie Ihre Angabe, ohne die Koordinaten von A und D zu verwenden. Bestimmen Sie denjenigen Wert von k, für den E_k senkrecht zu F steht. 4

f Die Doppelpyramide wird so um die x-Achse gedreht, dass die Seitenfläche BCT in eine Fläche übergeht, die in der xy-Ebene liegt, und der Punkt S in einen Punkt S', der eine positive y-Koordinate hat. Abbildung 2 zeigt jeweils einen Längsschnitt der Doppelpyramide durch die yz-Ebene vor und nach dieser Drehung. 2

Begründen Sie anhand geeigneter Eintragungen in Abbildung 2, dass die y-Koordinate von S' den Wert $24 \cdot \sin\varphi$ hat, wobei φ die in Aufgabe c bestimmte Winkelgröße ist.

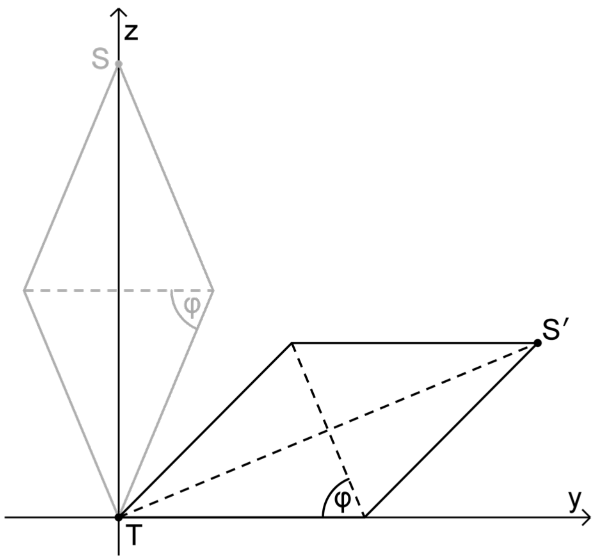


Abb. 2

20