RISCH, M., (2015). Investigation about representations used in teaching to prevent misconceptions regarding inverse proportionality; *International Journal of STEM Education, 2014*, 1:4 (2015) DOI: 10.1186/2196-7822-1-4 *http://www.stemeducationjournal.com/content/1/1/4*

RISCH, M. (2014). Anfangsschwierigkeiten von Hochschulstudenten und Fehlverständnisse in Mathematik und Naturwissenschaften, 203–228, In: L. HUBER, A. PILNIOK, R.SETHE & B.SZCZYRBA (Hg.): Forschendes Lehren im eigenen Fach: Scholarship of Teaching and Learning in Beispielen 125, Reihe: Blickpunkt Hochschuldidaktik der dghd. Bielefeld: Bertelsmann, 203–228.

REIF, F. (1987). Interpretation of scientific or mathematical concepts: Cognitive issues and instructional implications. *Cognitive Science*, *11*, 395–416.

RUPPERT, M. & WEIGAND, H.-G. (2015). Die Top ten, Was sind die schönsten Sätze in der Mathematik, *Mathematik Lehren 193*, 38–42.

SKOVSMOSE, O. (2010). Thematic Approach in Mathematics Education: Exemplarity. In: *Towards a Philosophy of Critical Mathematics Education (Mathematics Education Library)* 73–78. Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers-Springer.

TEMMEL, A. (2005). Die Kuppelfläche. *MNU 58*(1), 13–17.

WELLS, D., (1990). Are these the most beautiful?; *The Mathematical Intelligencer 12 (3), 1990 New York: Springer, 37–41, www.science4all.org/article/eulers-identity/*.

DR. MATTHIAS RISCH, matthias.risch@hs-augsburg.de, ist Professor an der Hochschule Augsburg in der Fakultät AGN, An der Hochschule 1, 86161 Augsburg.

Wie ist das mit Raum und Zeit?

S.I S.I+II S.II PHYSIK

Eine neue graphische Veranschaulichung der Lorentz-Transformation

WALTHER BIEN

Die meisten Veröffentlichungen über die Eigenheiten von Raum und Zeit in der Speziellen Relativitätstheorie geben die Verhältnisse entweder zu stark vereinfacht oder im Gegensatz zu abstrakt wieder. Die relativistischen Effekte einsichtig darzustellen, ist nicht ganz einfach. Der Autor hat deshalb ein graphisches Modell ausgearbeitet, das die relativistischen Effekte möglichst direkt aufzeigt und damit den Schüler/innen/n das Verständnis für das doch recht ungewohnte Verhalten von Raum und Zeit erleichtert. Aus ihm folgt auch eine gut nachvollziehbare Erklärung des so genannten »Zwillingsparadoxons«, das bis heute von manchen Zeitgenossen missbraucht wird, um der Relativitätstheorie einen inneren Widerspruch nachzuweisen.

1 Einführung

Die Entwicklung der physikalischen Erkenntnisse beim Übergang vom 19. in das 20. Jahrhundert ist bekanntlich durch zwei radikale Brüche gekennzeichnet, die beide das menschliche Vorstellungsvermögen an seine Grenzen bringen: die Quantentheorie und die (zunächst Spezielle) Relativitätstheorie. Erstere beschreibt die Welt des Mikrokosmos, die zweite das Verhalten physikalischer Objekte bei hohen Geschwindigkeiten. Beide zusammen bilden das Fundament der »modernen« Physik. Ihre mathematischen Modelle deuten zwar die Realität in ihrem jeweiligen Anwendungsbereich auf richtige Weise, stellen aber viele der gewohnten Vorstellungen von unserer Umwelt auf den Kopf und widersprechen so zunächst unserer Anschauung. Da sich hier auch ganz neuartige philosophische und erkenntnistheoretische Fragen auftun, ist es besonders wichtig, wenigstens in der Sekundarstufe II diese radikalen Umbrüche zu diskutieren. Hier sind unsere pädagogischen Fähigkeiten als Physik-Lehrkräfte besonders gefordert.

Aber gerade die erwähnten anschaulichen Schwierigkeiten sind ein großes Problem. Anschauungshilfen in Form von guten Labortisch-Experimenten sind schon bei der Demonstration von Quanteneffekten rar. Im Falle der Speziellen Relativitätstheorie sind Experimente zum Verhalten von Körpern bei Geschwindigkeiten nahe der Lichtgeschwindigkeit im Schulversuch jedoch überhaupt nicht mehr realisierbar. Umso wichtiger wird die Durchsichtigkeit der Darstellung dieser Themen. Man ist methodisch allein darauf angewiesen, möglichst anschauliche Bilder zu liefern und den Stoff in einer einprägsamen und verständlichen Modellwelt darzustellen.

2 Theorie und »Theorie«

Leider suggeriert die umgangssprachliche Bedeutung des Begriffs »Theorie« zunächst, man habe es lediglich mit einem wo-

MNU Journal – Ausgabe 03.2019 – ISSN 0025-5866 – © Verlag Klaus Seeberger, Neuss

möglich hoch spekulativen, aber unbewiesenen Denkgebäude zu tun. Dabei tragen unsere innerphysikalischen Sprachregelungen eine Mitschuld an solchem Missverständnis: Wir sprechen bei »Mechanik«, »Optik« und »Elektrizitätslehre« nie davon, dass es sich auch hier nur um Theorien im wissenschaftlichen Sinn handelt, nämlich um Denkgebäude, welche die experimentelle Wirklichkeit in ihrem Geltungsbereich richtig beschreiben. Warum sprechen wir bei der Speziellen Relativitätstheorie nicht besser von »Hochgeschwindigkeitsphysik«? Doch für eine Umbenennung ist es historisch wohl zu spät, steckt doch sogar in der Abkürzung »SRT« bereits der Theorie-Begriff. Für Schüler/innen ist diese Wortwahl aber zunächst psychologisch irreführend. Es muss daher im Unterricht deutlich herausgestellt werden, dass weder ein Elektronenmikroskop, noch ein Teilchenbeschleuniger, noch ein medizinisches Bestrahlungsgerät funktionierten, würde man bei deren technischem Aufbau die Gültigkeit der relativistischen Gesetze nicht beachten.

3 Konstanz der Lichtgeschwindigkeit

Natürlich gründet auch die Relativitätstheorie, wie alles in der Physik, auf Experimenten. Kein noch so kluger Denker, kein PLATO, kein ARISTOTELES und kein KANT, hätte durch scharfes Nachdenken finden können, was erst die immer besser entwickelte physikalische Messtechnik des 19. Jahrhunderts aufdeckte. Denn die erst in dieser Zeit möglichen Präzisionsmessungen der Vakuum-Lichtgeschwindigkeit lieferten paradoxe Ergebnisse. Ob sich eine Lichtquelle auf einen zu oder von einem wegbewegt, oder man sich selbst relativ zu einer Lichtquelle bewegt: Man misst immer die gleiche Geschwindigkeit, so als ob die Eigenbewegung des messenden Beobachters überhaupt keinen Einfluss hätte. (Als Beleg wird gewöhnlich das bekannte Michelson-Experiment angeführt. Seine Behandlung im Unterricht ist jedoch recht aufwändig. Auch musste historisch erst eine ganze Reihe weiterer Experimente die These von der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit untermauern, so dass seine alleinige Diskussion unvollständig wäre. Es ist daher sinnvoller, die Quintessenz aus all diesen Experimenten lediglich mitzuteilen). Dies widerspricht komplett allen Denkgewohnheiten und Folgerungen der Erfahrung und wurde deshalb auch von hochrangigen Physikern nur widerstrebend und mit Verzögerung angenommen. Warum dies so schwer zu begreifen ist, lässt sich durch ein einfaches Gedankenexperiment (Abb. 1) veranschaulichen: Man denke sich einen Lichtblitz, der vom Nullpunkt zweier Koordinatensysteme zum Zeitpunkt $t = 0$ ausgesandt wird, die zu diesem Zeitpunkt gerade in Deckung sind. Dann bewege sich das x'-z'-System (blau) mit der Geschwindigkeit v relativ zum (ruhenden) x-z-System nach rechts. Zu einem späteren Zeitpunkt t hat die Front des Lichtblitzes die Gestalt der Oberfläche einer Kugel (rot) mit dem Mittelpunkt O und dem Radius $c \cdot t$.

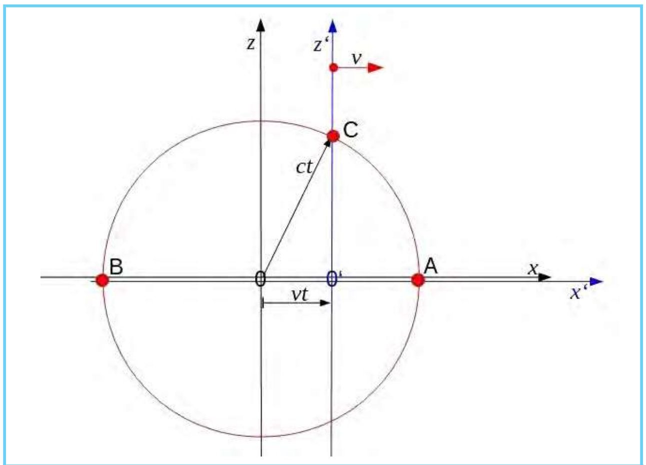

Abb. 1. Lichtgeschwindigkeit im ruhenden und im bewegten System

Vom bewegten x'-z'-System aus betrachtet hat von dessen Nullpunkt O' aus gemessen der Lichtstrahl aber bei seinem Weg zu den Punkten A, B und C in der gleichen Zeit t verschieden lange Wege $O'A$, $O'B$ und $O'C$ zurückgelegt. Deshalb müsste ein im x'-z'-System mitbewegter Beobachter nach unserer üblichen Vorstellung beispielsweise für den kürzeren Weg $O'A$ eine langsamere Lichtgeschwindigkeit c_A messen als für den längeren Weg $O'B$. Für ihn wäre also c ortsabhängig.
Alle realen Experimente mit Licht zeigen aber etwas anderes: Beobachter im bewegten System messen entgegen allen Erwartungen in jeder Richtung die gleiche Lichtgeschwindigkeit c.

4 Lorentz-Transformation

Dies lässt sich nur so deuten: Da sich c aus den Messungen von zurückgelegtem Weg s und vergangener Zeit t mit $c = s/t$ ergibt, müssen sich diese beiden Größen beim Übergang in das bewegte System so verändert haben, dass dabei trotzdem der Wert von c konstant geblieben ist. Da Punkt C der Kugeloberfläche von O' weniger weit entfernt ist als von O, muss beispielsweise im bewegten System etwas weniger Zeit vergangen sein als im ruhenden, damit hier die Lichtgeschwindigkeit trotzdem genau so groß herauskommt. Noch offensichtlicher wird diese Betrachtung für die Punkte A und B: An der x'_A-Koordinate muss weniger Zeit vergangen sein als bei C, bei x'_B dagegen mehr. Der Zeitablauf in verschieden bewegten Systemen scheint also auch vom jeweiligen Ort abhängig zu sein. Nur wenn man Längen- und Zeitmaße zwischen den beiden Koordinatensystemen geeignet anpasst, kann man überall für den Lichtblitz die gleiche Lichtgeschwindigkeit erhalten.

Die Lösung für dieses Problem ergibt sich nach entsprechenden mathematischen Umformungen durch die »Lorentz-Transformation«, welche sowohl für die räumlichen Koordinaten als auch für die Zeit Neuanpassungen vornimmt. Man findet:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad (1)$$

und

$$t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \qquad (2)$$

Die beiden übrigen räumlichen Koordinaten-Achsen bleiben von der Transformation unbeeinflusst, es gilt $y' = y$ und $z' = z$. (Die allgemeine Herleitung findet sich in jedem guten Schulbuch für die Sekundarstufe II und muss hier nicht wiederholt werden. Für den Unterricht kann es aber auch genügen, lediglich die Richtigkeit der Transformationsgleichungen, wie unten ausgeführt, nachträglich zu bestätigen.)

Mit $x - v \cdot t$ wird in (1) zunächst nur die ständige Verschiebung des mit der Geschwindigkeit v bewegten Koordinatensystems beschrieben. Neu ist aber der Faktor

$$k = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \tag{3}$$

in beiden Nennern, der sich mit seinem Kehrwert $1/k$ auf die Transformation auswirkt. Eine graphische Darstellung (vgl. Abb. 2) seiner Abhängigkeit von der Geschwindigkeit v zeigt, dass er sich erst bei sehr hohen Geschwindigkeiten in der Nähe der Lichtgeschwindigkeit c bemerkbar macht. Das erklärt, warum sich die relativistischen Effekte unseren gewohnten Vorstellungen so sehr widersetzen, da sie bei alltäglichen Geschwindigkeiten nicht vorkommen.

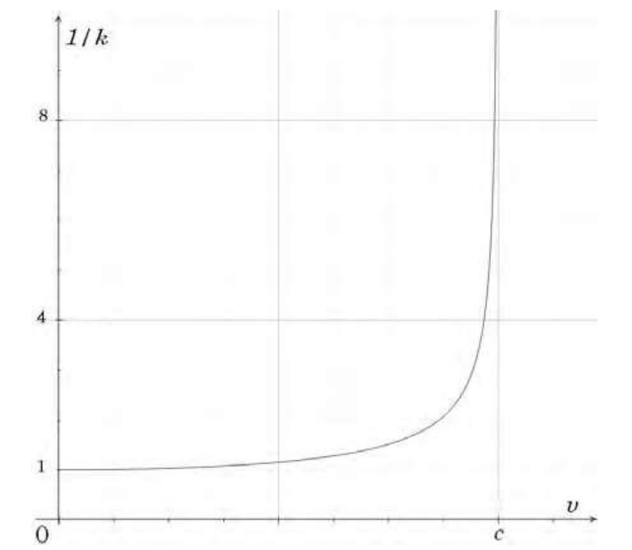

Abb. 2. $1/k$ in Abhängigkeit von v

Er bewirkt aber, wie man erkennt, eine Veränderung des Maßstabs der x'-Koordinate.

Für die Zeitskala wird eine tiefer greifende Umrechnung in ein bewegtes System notwendig:
In (2) bewirkt der k-Faktor zunächst ebenfalls eine Anpassung des Zeitmaßstabes.

Gravierender aber ist der Einfluss des von x abhängigen Summanden in (2), denn er ist linear von v abhängig und damit dominierender als $1/k$, das nur quadratisch von v abhängt. Der Summand $v \cdot x/c^2$ bewirkt, dass Uhren im bewegten System vom ruhenden System aus betrachtet je nach Lage auf der x'-Achse verschiedene Zeiten anzeigen. Es tritt hier eine ungewohnte Verkettung zwischen Raum und Zeit auf. Das bedeutet auch, dass im ruhenden System gleichzeitige Ereignisse, etwa die Ankunft des Lichtblitzes an den Punkten A und B in Abbildung 1, im bewegten System nicht mehr gleichzeitig sein müssen und umgekehrt.

Mit den Gleichungen (1) und (2) wird nun tatsächlich die Lichtgeschwindigkeit c überall gleich, wie sich durch eine einfache Rechnung bestätigen lässt: Nimmt man an, dass der in Abbildung 1 zum Zeitpunkt $t = 0$ gezündete Lichtblitz in Richtung der positiven x-Achse zum späteren Zeitpunkt t die Koordinate $x_A = c \cdot t$ erreicht hat, so lässt sich nun mit (1) für den Punkt A dessen Koordinate

$$x'_A = \frac{x_A - vt}{k} = \frac{t(c - v)}{k} \tag{4}$$

im bewegten System bestimmen. Auch die Zeit, die im bewegten System vergangen ist, muss nach (2) zu

$$t'_A = \frac{t - \frac{v}{c^2} x_A}{k} = \frac{t(c - v)}{c \cdot k} \tag{5}$$

transformiert werden. Wie man sieht, erhält man für den Quotienten x'_A / t'_A aus (4) und (5) genau c, also die gleiche Lichtgeschwindigkeit wie im ruhenden System, denn alle übrigen Parameter kürzen sich heraus.

Eine analoge Rechnung lässt sich auch für die Punkte B und C durchführen. Hier sind lediglich $x_B = -c \cdot t$ und $x_C = v \cdot t$ anzusetzen und in die entsprechenden Werte von x' und t' umzurechnen, was auch von Schüler/innen/n leicht zu bewältigen ist. Man erhält erwartungsgemäß ebenfalls die Lichtgeschwindigkeit c für die Wege $O'B$ und $O'C$.

5 Graphische Darstellung

Zwar erklärt die Lorentz-Transformation eigentlich alles vollständig, sogar mit zwei auch Schüler/innen/n verständlichen einfachen Gleichungen (1) und (2). Deren Anwendung ist aber keineswegs so einfach wie es zunächst scheint, denn der Teufel steckt, wie oft, auch hier im Detail. Daher soll ein anschauliches Beispiel zeigen, wie man mit der Transformation umgeht. Hierzu wird eine bildliche Darstellung gewählt, welche möglichst nahe an der Realität das Verhalten von Maßstäben und Uhren in den zu vergleichenden beiden Systemen direkt darstellt:
In einem Bahnhof stehe ein Zug, der in jedem Waggon eine Uhr beherberge. All diese Uhren sollen untereinander synchronisiert sein. An ihm fahre in unserem Beispiel ein weiterer Zug mit 86,6 % der Lichtgeschwindigkeit vorbei, also mit $v = 0{,}866c \approx 260.000$ km/s, der ebenso pro Waggon mit einer Uhr ausgestattet ist. Auch diese Uhren sollen synchronisiert sein, jedoch *innerhalb des fahrenden Zuges*. Mit der angegebenen Geschwindigkeit erhält man $k = 0{,}5$, was für die möglichst anschauliche bildliche Darstellung der Koordinatensysteme von Vorteil ist.

Mit diesen Vorgaben wurden die relevanten *x*- (schwarz) und *x′*-Achsen (blau) von ruhendem und bewegtem System und die jeweiligen Uhrzeiten an mehreren Punkten dieser beiden Achsen in einer Graphik dargestellt. Als Längeneinheit wurde die Lichtsekunde 1 Ls gewählt. Da das Licht in 1 s den Weg $s = 299.792$ km zurücklegt, ist $1\,\mathrm{Ls} = 299.792\,\mathrm{km} \approx 3{,}00 \cdot 10^8$ m. Mit Hilfe von (1) und (2) wurden für Uhren an den Normpunkten der Koordinatenachsen die Zeigerstände t und t' in der Einheit 1 s im ruhenden und im bewegten System berechnet und einander gegenübergestellt. Die Verhältnisse, die sich damit ergeben, zeigt Abbildung 3:

Zunächst erkennt man, dass ein im Bahnhof stationierter Beobachter die Maßstäbe der Koordinaten der Waggons im fahrenden Zug um den Faktor $k = 0{,}5$ *verkürzt* messen wird, man erhält eine »*Längenkontraktion*«.

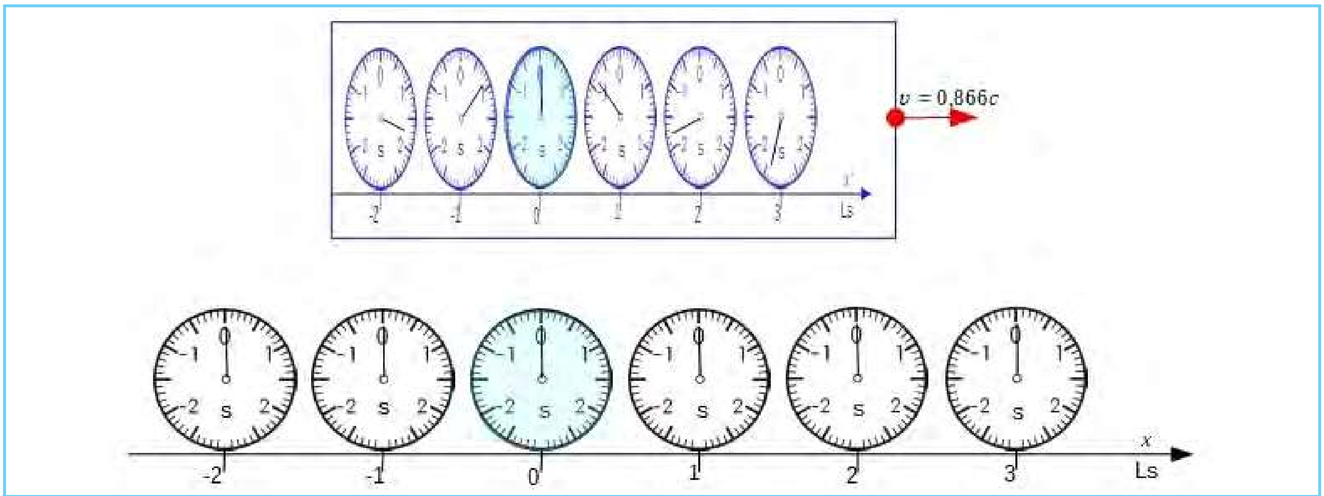

Abb. 3. Uhrenvergleich für $t = 0$

Bei den Uhren im fahrenden Zug sieht die Sache noch ungewohnter aus. Obwohl der Beobachter im Bahnhof weiß, dass man vor Fahrtbeginn alle Uhren im Zug entsprechend vorausschauend synchronisiert hat, zeigt nur die Uhr im mittleren Waggon die gleiche Zeit wie die Bahnhofsuhr an. Die Uhren im vorderen Zugbereich gehen, je weiter vorn sie sind, desto mehr nach, die Uhren im hinteren Zugbereich jedoch, je weiter hinten sie sich im Zug befinden, desto mehr vor. Das bedeutet: *Ereignisse, die im ruhenden System gleichzeitig stattfinden, werden im fahrenden Zug nicht mehr als gleichzeitig registriert.*

Betrachtet man den Vorgang noch zu einem späteren Zeitpunkt $t_1 = 1{,}155$ s (Abb. 4), so hat sich der fahrende Zug gerade um eine Längeneinheit weiterbewegt und man kann entsprechende Koordinaten und Uhrstände in den beiden Zügen gut vergleichen. Nun sehen die Verhältnisse noch komplizierter aus, denn auf der Uhr (hellblau) im fahrenden Zug, die zum Zeitpunkt $t = 0$ die gleiche Zeit anzeigte wie alle Uhren im stehenden Zug, ist nur die halbe Zeit der ruhenden Uhren vergangen: Im bewegten System läuft die Zeit *langsamer* ab als im ruhenden, es ergibt sich eine »*Zeitdilatation*«. Alle übrigen Uhren im bewegten System sind ebenfalls mit der halben Geschwindigkeit der ruhenden Uhren weitergelaufen, aber stets um den gleichen Betrag auf der *x′*-Achse zeitversetzt.

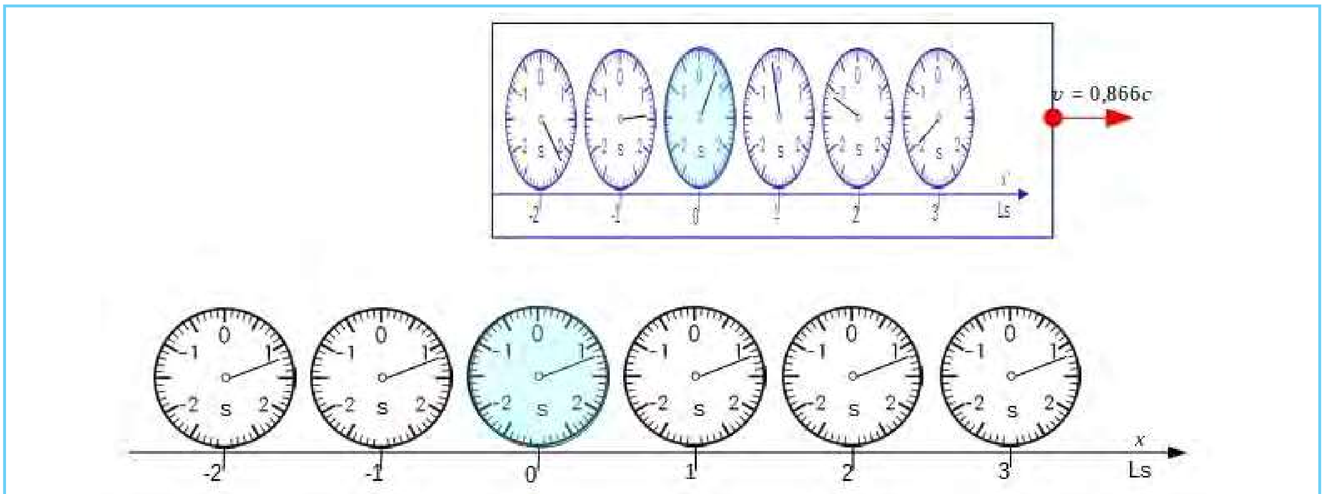

Abb. 4. Uhrenvergleich für $t_1 = 1{,}155$ s

Würde man den fahrenden Zug zu einem nochmals späteren Zeitpunkt $t_2 = 2{,}31\,\mathrm{s}$ beobachten, so wären alle Uhren wieder um den gleichen Betrag weiter.

6 *Zwillingsparadoxon*

Die Zeitdilatation hat einen scheinbaren Widerspruch zur Folge, der als »Zwillingsparadoxon« bekannt ist und immer wieder verwendet wird, um der Relativitätstheorie eine Inkonsistenz nachzuweisen.

6.1 Eine kurze Geschichte der Zeit

Man betrachte dazu (vgl. Abb. 5) einen Reisenden – nennen wir ihn Anton –, der zum Zeitpunkt $t = 0$ an der Stelle $x = 0$ aus dem stehenden in den fahrenden Zug bei $x' = 0$ umsteigt und sich von seiner Zwillingsschwester Berta verabschiedet, die dort bei $x = 0$ zurückbleibt.

Das Ziel seiner Reise (Abb. 6) sei die rosa Uhr an der Koordinate $x = 2$. Anton ist also dann relativ zum Ruhesystem 2 Ls weit gereist. Seine eigene Uhr (blau) bei Koordinate $x' = 0$ zeigt die Zeit $t' = 1{,}155\,\mathrm{s}$ an und er steigt dort aus dem blauen Zug aus.

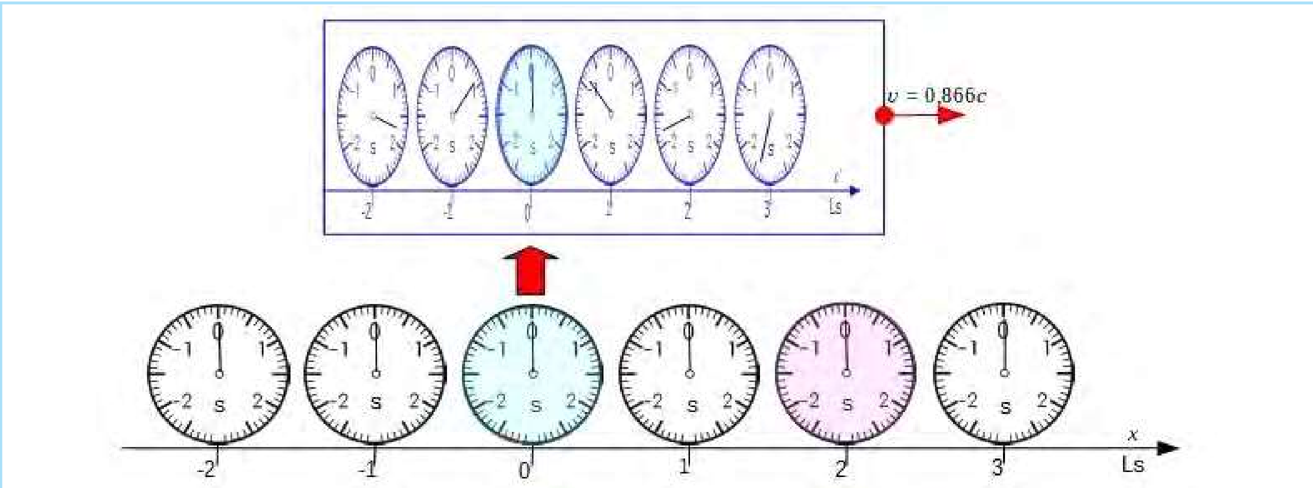

Abb. 5. Anton steigt in den fahrenden Zug ein. Stehender Zug als Bezugssystem.

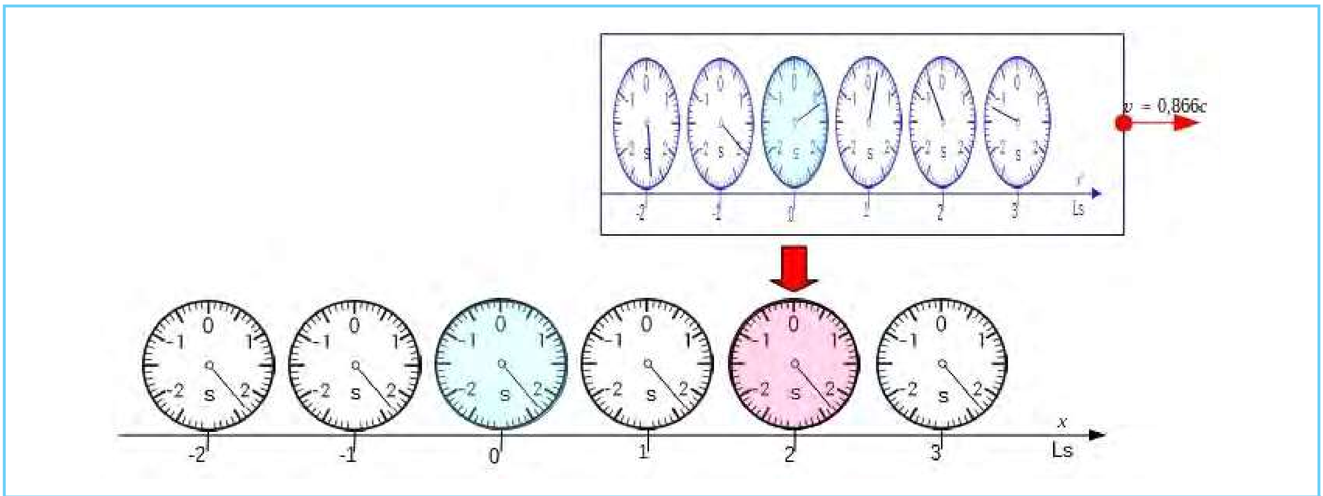

Abb. 6. Anton steigt aus dem fahrenden Zug aus. Stehender Zug als Bezugssystem.

Beim Vergleich mit der Uhr am Ankunftsort stellt er zu seiner Verwunderung jedoch fest, dass dort bereits 2,31 s vergangen sind, also doppelt so viel Zeit wie bei ihm im Zug – als Folge der Zeitdilatation. Auch ein Telefonat (die Übertragungsgeschwindigkeit muss herausgerechnet werden!) mit der bei $x = 0$ zurückgebliebenen Berta wird ihm bestätigen, dass diese mehr gealtert ist als er, denn ihre Uhr ist synchron mit der bei $x = 2$.

6.2 Eine längere Geschichte der Zeit

Nun wird oft argumentiert, dass hier ein Widerspruch entsteht, wenn man den Vorgang von Anton aus betrachtet. Für ihn ist ja, relativ betrachtet, nach dem Umstieg sein eigener (blauer) Zug das ruhende System, stattdessen fährt seine Schwester Berta mit der Geschwindigkeit $-v$ (im schwarzen Zug) von ihm weg, so dass jetzt bei *dieser* die Zeit halb so schnell abgelaufen sein müsste. Diese Argumentation ist aber, wie man sehen wird, zwar zur Hälfte richtig, aber nicht zu Ende gedacht.

Für Anton ist jetzt, wie erwähnt, der blaue Zug sein ruhendes Bezugssystem. Alle Uhren sind deshalb hier synchron. Für ihn fährt der schwarze Zug mit der Geschwindigkeit $-v$ zusammen

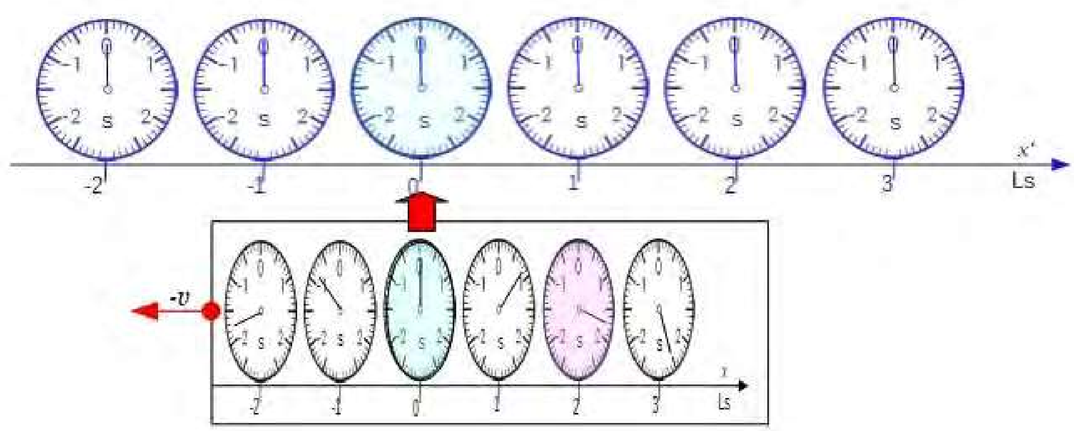

Abb. 7. Anton steigt in den fahrenden Zug ein. Fahrender Zug als Bezugssystem.

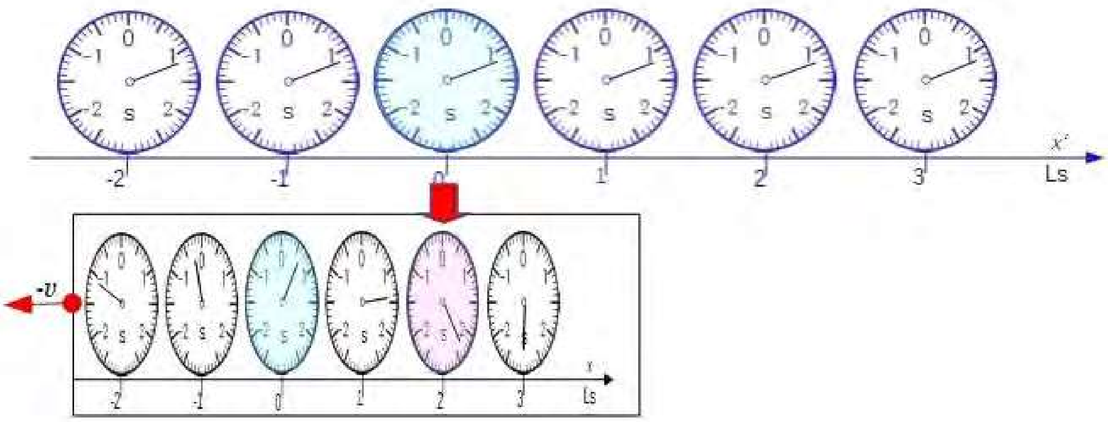

Abb. 8. Anton steigt aus dem fahrenden Zug aus. Fahrender Zug als Bezugssystem.

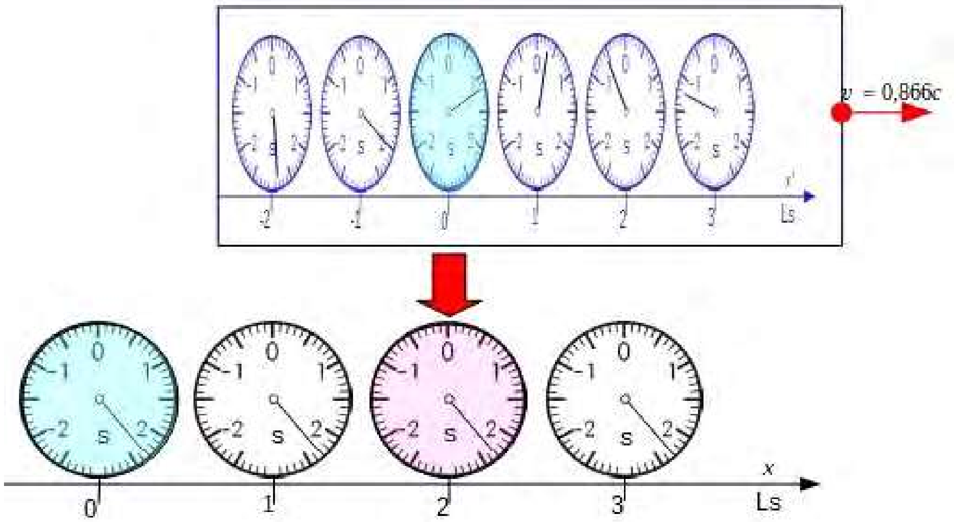

Abb. 9. Wie Abb. 6

mit Berta nach links (vgl. Abb. 7), aber dessen Uhren, die sich von Anton aus im bewegten System befinden, sind nun *nicht* mehr synchron.

Insbesondere rückt die rosa Uhr an der Ziel-Stelle x_2, während Anton aus dem schwarzen in den blauen Zug umsteigt (man vergleiche Abbildung 5 mit Abbildung 7!), bereits jetzt auf $t = 1{,}73$ s vor. Alle Waggons des schwarzen Zuges verkürzen sich, der Maßstab der Koordinaten verändert sich entsprechend. Der Zielort an der Stelle $x = 2$ ist vom blauen Zug aus betrachtet wegen der *Längenkontraktion* des schwarzen Zuges nur halb so weit entfernt, nämlich 1 Ls. Folglich wird Antons Reise jetzt auch schneller als gedacht beendet sein.
Bei der an der Stelle $x = 0$ zurückgebliebenen Berta (Abb. 8) zeigt die hellblaue Uhr kurz vor dem Aussteigen von Anton eine Zeit von $t = 0{,}578$ s. Dort ist wegen der Zeitdilatation nur die halbe Zeit vergangen wie bei ihm im fahrenden Zug. Berta altert also während der Reise ihres Zwillings Anton von ihm aus betrachtet zunächst tatsächlich ebenfalls halb so viel wie dieser. Um den gleichen Betrag von 0,578 s ist wie bei $x = 0$ auch die zeitversetzte rosa Uhr bei $x = 2$ während der Reise weitergelaufen. Da sie aber schon zu Fahrtbeginn einen Vorlauf von $t = 1{,}73$ s hatte, zeigt sie jetzt in Abbildung 8 eine Zeit von 2,31 s an.

Der kritische Zeitsprung geschieht bei der blauen Uhr im schwarzen Zug an der Stelle $x = 0$, während Anton aus dem blauen in den schwarzen Zug hinein aussteigt (man vergleiche Abbildung 8 mit Abbildung 9!), wenn er also sein Bezugssystem wechselt. Dies erscheint besonders paradox: Da während des Aussteigens die Uhren im schwarzen Zug wieder synchron werden, springt auch die Uhranzeige auf der hellblauen Uhr an der Stelle $x = 0$ von $t = 0{,}578$ s auf den Wert von $t = 2{,}31$ s, Berta altert also ganz plötzlich um die noch fehlenden 1,73 Sekunden. Somit erhält man hier insgesamt die gleiche Zeitverschiebung wie in 6.1, jedoch als Summe zweier verschiedener Anteile. Dazu springt auch die Reisestrecke schlagartig und gespenstisch von 1 Ls wieder auf 2 Ls.

Das Telefonat Antons mit Berta wird nicht anders ausfallen als in 6.1. Das Zwillingsparadoxon kann also widerspruchsfrei und in sich konsistent erklärt werden, wenn man nur die Transformationsgesetze richtig anwendet.
Üblicherweise lässt man Anton von der Reise wieder zurückkehren. Das ändert aber nichts an dieser Überlegung. Er durchläuft den entsprechenden Vorgang nur auf dem umgekehrten Weg. Auch hier gelten die gleichen Transformationsgesetze, der Vorgang wiederholt sich. Insgesamt werden die beiden Geschwister nach der Rückkehr Antons feststellen, dass die bodenständige Berta doppelt so stark gealtert ist wie ihr weit gereister Bruder.

6.3 Diskussion

Der Denkfehler bei der falschen Überlegung zum Zwillingsparadoxon liegt darin, dass sie unvollständig ist. Zwar wird die Relativität der Bewegungen angenommen, aber der Zeitversatz beim Wechsel des Bezugssystems nicht berücksichtigt. Man rechnet zwar mit der relativistischen *Zeitdilatation*, unterschlägt aber die (eigentlich wichtigere) *Zeitverschiebung*. Korrekt muss jedoch bei jedem Wechsel des Bezugssystems diese mitbedacht werden. So wechselt Anton zwei Mal sein Bezugssystem, Berta jedoch nicht.
Damit sind die beiden Betrachtungsweisen der Reise zwar verschiedenartig, im Ergebnis jedoch gleich. Das eigentliche Relativitätsprinzip ist trotzdem erfüllt: Würde nach Ende der Reise Anton im blauen Zug bleiben, aber dafür Berta vom schwarzen in den blauen umsteigen, so wäre *sie* danach das jüngere der beiden Geschwister!
Man kann nicht leugnen, dass bei dieser Art der Betrachtung des Vorgangs einige Aspekte vernachlässigt werden. So wäre der zweimalige Umstieg Antons einmal mit einer ungeheuren Beschleunigung von Null auf 86,6 % der Lichtgeschwindigkeit, sodann mit der entsprechenden negativen Beschleunigung verbunden, die wohl niemand überleben würde. Und die plötzliche Veränderung der Entfernung des Punktes $x = 0$ während des Aussteigens bedeutet für diesen Moment eine Phasengeschwindigkeit, die gegen unendlich geht. Die danach beginnende eigentliche Reise bei konstanter Geschwindigkeit kann dann aber über eine beliebig große Entfernung ausgedehnt werden, so dass im Vergleich dazu der Beitrag der Beschleunigungsphase praktisch verschwindet. Der beschriebene Gedankenversuch gibt deshalb die Verhältnisse im Prinzip durchaus korrekt wieder.

7 Zusammenfassung

Die Tatsache der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit zwingt uns dazu, liebgewonnene Vorstellungen über die Unabhängigkeit von Raum und Zeit über Bord zu werfen. Die Transformationsgleichungen enthalten stets *beides*. Der Mathematiker H. MINKOWSKI hat dies bereits 1908 pointiert so ausgedrückt: »*Von Stund' an sollen Raum für sich und Zeit für sich völlig zu Schatten herabsinken, und nur noch eine Art Union von beiden soll Selbständigkeit bewahren*«. In diesem Sinne spricht man heute in der Physik vom 4-dimensionalen »Raum-Zeit-Kontinuum«. Diesem Universum sind das *Relativitätsprinzip* und die damit zusammenhängende *Symmetrie* offensichtlich wichtiger als unsere begrenzten naiven Vorstellungen – mit weitreichenden Folgen:
Keines von zwei relativ zueinander mit konstanter Geschwindigkeit bewegten Systemen ist vor dem anderen physikalisch ausgezeichnet. Beide sind nicht nur in allen übrigen physikalischen Gesetzmäßigkeiten identisch, in jedem misst man sogar unerwartet die gleiche Lichtgeschwindigkeit. Jedes der Systeme kann jeweils als »ruhend« angenommen werden und gilt dann als »Beobachtersystem«: Es gibt im Universum keinen Zustand der absoluten Ruhe.
Die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit ist in diesem Sinne eher eine Konsequenz des Prinzips als seine Ursache.

Für die Bewegung von physikalischen Körpern folgen aus dem Relativitätsprinzip drei einzeln unterscheidbare ungewohnte Effekte:

1. Gegenstände in einem relativ bewegten System erscheinen vom ruhenden System aus verkürzt, man beobachtet dort eine *Längenkontraktion*: Dieser Effekt ist mathematisch betrachtet von zweiter Ordnung in der Relativgeschwindigkeit v und macht sich vor allem erst bei sehr hohen Geschwindigkeiten bemerkbar (siehe Abb. 2).

2. An einer bewegten Uhr läuft die Zeit vom ruhenden System aus betrachtet langsamer ab als an einer ruhenden, man beobachtet eine *Zeitdilatation*. Dieser Effekt ist ebenfalls von zweiter Ordnung.
3. Folgenreicher als diese beiden Effekte ist ein dritter: In einem bewegten System mit synchronisierten Uhren erscheinen diese, vom ruhenden System aus betrachtet, nicht mehr synchron, es tritt eine *Verschiebung der Gleichzeitigkeit* auf. Dieser Effekt ist, wie man in Gleichung (2) sieht, von erster Ordnung, also linear von v abhängig und macht sich deshalb auch bei niedrigen Geschwindigkeiten bemerkbar. Er ist beispielsweise die Ursache des Elektromagnetismus als Folge der Transformation der COULOMBschen Kraft bei Bewegung der elektrischen Ladungen in einem stromdurchflossenen Leiter (W. KUHN 1989, W. BIEN 1974 und 1990).

Schließlich ergeben sich als Folge des Relativitätsprinzips und der Lorentz-Transformation auf Mechanik, Optik und alle anderen Gebiete der Physik nochmals typische relativistische Effekte, etwa die bekannte Zunahme der Massenträgheit bei hoher Geschwindigkeit. Ihre Behandlung ist jedoch nicht mehr Teil dieses Artikels.

Literatur

DORN-BADER. Physik SII, Hannover, Schroedel Verlag GmbH.

KUHN, W. (1989). Praxis der Naturwissenschaften – Physik *38*(1), S. 2: Lorentz-Kraft als relativistischer Effekt.

BIEN, W. (1974). Einige Folgerungen aus der relativistischen Transformation statischer Kraftfelder. *Physikalische Blätter 30*, 251.

MINKOWSKI, H. (1908). Raum und Zeit, Vortrag, gehalten auf der 80. Naturforscherversammlung zu Köln am 21. September 1908 in *Jahresberichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Leipzig, 1909.*

mit online ergänzung www.mnu.de

WALTHER BIEN, Studiendirektor i. R., unterrichtete Mathematik, Physik und Informatik am Hölderlin-Gymnasium in Lauffen a. N.

Lernen in der digitalen Welt

S.I S.I+II S.II TECHNIK

Innovative Unterrichtsprojekte aus der MINT-Forschung

ACHIM GULDNER – SANDRO KRETEN – ANNE MÜLLER – TOBIAS ROTH

Im gegenwärtig geführten Diskurs über die Digitalisierung zukünftiger Lern-, Lebens- und Arbeitswelten wird von unterschiedlicher Seite eine offensive Verschiebung, weg von einer Wissensansammlung und hin zum Erwerb methodischer Kompetenzen – sogenannter Future Skills –, eingefordert. In diesem Kontext möchte der Beitrag unsere Aktivitäten in der digitalen Lehre sowie der schulischen MINT-Erziehung sichtbar(er) machen und entlang innovativer Beispiele für die Unterrichtspraxis konkretisieren.

1 IoT-Werkstatt – Das Internet der Dinge anfassbar machen

Die IoT Werkstatt ist ein disruptives außerschulisches Veranstaltungskonzept, bei dem kollaborativ Innovationen entstehen, Lösungen erarbeitet oder Produkte entworfen werden. Inzwischen wurde das Konzept im Rahmen von *Hackathons* mehrfach organisiert, durchgeführt und erprobt.
Mit diesem interdisziplinären wie integrativen Ansatz gelingt es, wichtige Inhalte aus der Informatik zu vermitteln, ohne dafür die von Lehrplänen geforderten Inhalte opfern zu müssen. Auf diese Weise soll die vom Lehrplan geforderte informatische Kompetenz verstärkt ausgebildet werden.
Das Team der IoT-Werkstatt veranstaltet dazu speziell auf die Themenwünsche der Schulen angepasste Kurz-Workshops, in denen das algorithmische Denken von Schüler/inne/n nachhaltig am Gegenstand des Internet der Dinge (Internet of Things), das schon heute viele Lebensbereiche der Schüler/innen durchdringt, gefördert werden soll. Weiter sollen darin die Schüler/innen für den Schutz und den Umgang mit Ihren Daten sensibilisiert oder ihnen technische Hilfestellung bei der Realisierung ihrer Projekt- und Programmierideen gegeben werden.
Weitere Informationen zum Konzept der IoT-Werkstatt sowie ein Portfolio an Beispielprojekten, die bereits von Schüler/innen in die Tat umgesetzt wurden, finden sich auf der Webseite zum Projekt (siehe: *https://www.iotwerkstatt.umwelt-campus.de*).

1.1 Projektmaterialien

Für einen didaktisch sinnvollen und technisch möglichst barrierefreien Einsatz im Unterricht, stellt die IoT-Werkstatt das nötige Equipment zur Verfügung. Die Basis ist ein Do-it-yourself-Kit aus einem WLAN-fähigen Mikroprozessor wie dem IoT-Octopus