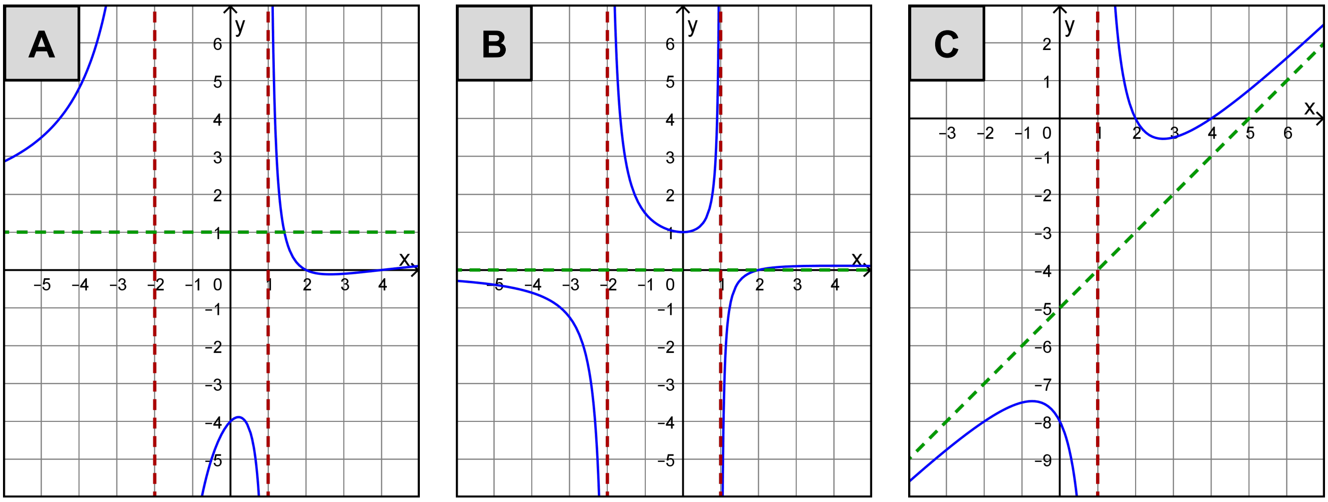
Aufgaben

Aufgabe 1

Ordnen Sie den hier abgebildeten Graphen A, B und C begründet jeweils einen der folgenden Funktionsterme zu:

$f_1(x)=\frac{(x-4)(x-2)}{(x-1)(x+2)}$ $\quad f_2(x)=\frac{(x-4)(x-2)}{x+1}$ $\quad f_3(x)=\frac{(x-4)(x-2)}{(x+1)(x+2)}$ $\quad f_4(x)=\frac{x-2}{(x-1)(x+2)}$

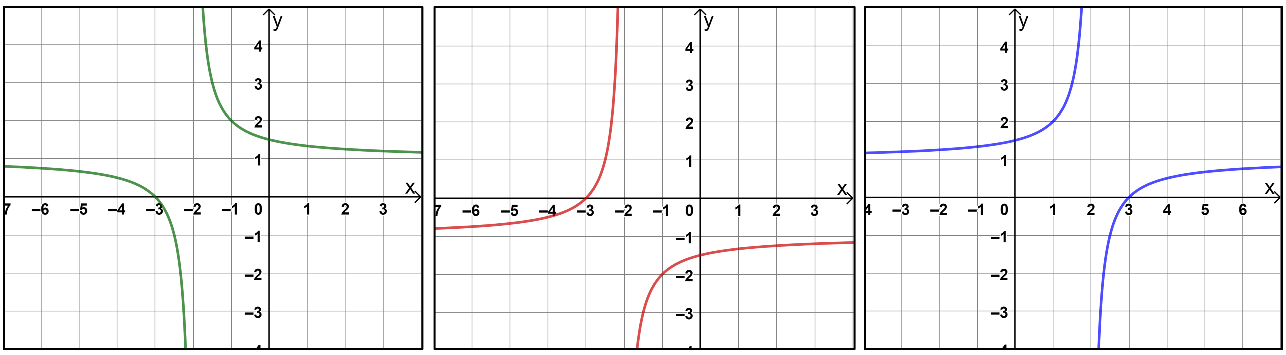
$f_5(x)=\frac{x-2}{(x+1)(x+2)}$ $\quad f_6(x)=\frac{(x+4)(x-2)}{(x-1)(x+2)}$ $\quad f_7(x)=\frac{(x-4)(x-2)}{x-1}$ $\quad f_8(x)=\frac{(x-4)(x+2)}{x-1}$



Aufgabe 2

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x)=\frac{x+3}{x+2}$ und $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

a) Entscheiden Sie, welcher der drei Graphen zu f gehört, und begründen Sie Ihre Entscheidung.



b) Beschreiben Sie den Verlauf des Graphen von f unter Verwendung von Fachbegriffen. Gehen Sie dabei insbesondere auf Monotonie und Asymptoten ein.

c) Gegeben sind die Geraden $g: y = 2x + 4$ und $h: y = -0{,}5x + 1$.

Eine der Geraden schneidet den Graphen von f in zwei Punkten, die andere schneidet ihn nicht. Begründen Sie ohne Rechnung, welche Gerade den Graphen schneidet, und berechnen Sie anschließend die Koordinaten der beiden Schnittpunkte.

Aufgabe 3 **(aus: Abiturprüfung 2012, Analysis, Aufgabengruppe II, Teil 1)**

Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto \frac{2x+3}{x^2+4x+3}$ mit maximaler Definitionsmenge D. Bestimmen Sie D sowie die Nullstelle von f.

Aufgabe 4 **(aus: Abiturprüfung 2015, Prüfungsteil B, Analysis, Aufgabengruppe 1)**

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+3}$ und Definitionsbereich $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-3; -1\}$. Der Graph von f wird mit G_f bezeichnet.

a) Zeigen Sie, dass $f(x)$ zu jedem der drei folgenden Terme äquivalent ist:

$$\frac{2}{(x+1)(x+3)}; \quad \frac{2}{x^2+4x+3}; \quad \frac{1}{0{,}5 \cdot (x+2)^2 - 0{,}5}$$

b) Begründen Sie, dass die x-Achse horizontale Asymptote von G_f ist, und geben Sie die Gleichungen der vertikalen Asymptoten von G_f an. Bestimmen Sie die Koordinaten des Schnittpunkts von G_f mit der y-Achse.

Aufgabe 5 **(aus: Abiturprüfung 2020, Prüfungsteil A, Analysis, Aufgabengruppe 2)**

Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $k: x \mapsto \frac{-x^2+2x}{2x^2+4}$. Ihr Graph wird mit G_k bezeichnet.

a) Geben Sie die Nullstellen von k an und begründen Sie anhand des Funktionsterms, dass G_k die Gerade mit der Gleichung $y = -0{,}5$ als waagrechte Asymptote besitzt.

b) Berechnen Sie die x-Koordinate des Schnittpunkts von G_k mit der waagrechten Asymptote.

Aufgabe 6 **(aus: Abiturprüfung 2021, Prüfungsteil B, Analysis, Aufgabengruppe 1)**

Gegeben ist die in $\mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$ definierte Funktion $f: x \mapsto \frac{6x}{x^2-4}$. Der Graph von f wird mit G_f bezeichnet und ist symmetrisch bezüglich des Koordinatenursprungs.

a) Geben Sie die Gleichungen aller senkrechten Asymptoten von G_f an. Begründen Sie, dass G_f die x-Achse als waagrechte Asymptote besitzt.

Aufgabe 7 **(aus: Abiturprüfung 2011, Analysis, Aufgabengruppe II, Teil 1)**

Geben Sie den Term einer gebrochen-rationalen Funktion f mit Definitionsmenge $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ an, deren Graph die Gerade mit der Gleichung $y = 2$ als Asymptote besitzt und in $x = -1$ eine Polstelle ohne Vorzeichenwechsel hat.

Aufgabe 8 **(aus: Abiturprüfung 2015, Prüfungsteil A, Analysis, Aufgabengruppe 2)**

Geben Sie jeweils den Term einer Funktion an, die die angegebene(n) Eigenschaft(en) besitzt.

a) […]

b) Die Funktion k hat in $x = 2$ eine Nullstelle und in $x = -3$ eine Polstelle ohne Vorzeichenwechsel. Der Graph von k hat die Gerade mit der Gleichung $y = 1$ als Asymptote.

Lösungshinweise

Die Lösungshinweise dienen in erster Linie der Unterstützung der Lehrkräfte; sie gehen i. d. R. nicht auf mögliche gleichwertige alternative Lösungswege ein.

zu Aufgabe 1

	Graph A	Graph B	Graph C
Nullstellen der zugehörigen Funktion, die zugleich Nullstellen des Zählers des gesuchten Funktionsterms sind	2 und 4	2	2 und 4
Polstellen der zugehörigen Funktion, die zugleich Nullstellen des Nenners des gesuchten Funktionsterms sind	-2 und 1	-2 und 1	1
gesuchter Funktionsterm	$f_1(x)=\frac{(x-4)(x-2)}{(x-1)(x+2)}$	$f_4(x)=\frac{x-2}{(x-1)(x+2)}$	$f_7(x)=\frac{(x-4)(x-2)}{x-1}$

zu Aufgabe 2

a) Es gilt $f(1)=\frac{4}{3}$. Daher gehört der links abgebildete (grüne) Graph zu f.

b) Der Graph von f hat die Gerade mit der Gleichung $x=-2$ als senkrechte und die Gerade mit der Gleichung $y=1$ als waagrechte Asymptote. In jedem der beiden Teilintervalle $]-\infty;-2[$ und $]-2;+\infty[$ des Definitionsbereichs von f fällt der Graph von f streng monoton.

c) Da die Steigung von g positiv ist, schneidet g den Graphen von f.

$$\frac{x+3}{x+2}=2x+4 \Leftrightarrow x+3=(2x+4)(x+2) \Leftrightarrow x+3=2x^2+8x+8 \Leftrightarrow 2x^2+7x+5=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_{1/2}=\frac{-7\pm\sqrt{7^2-4\cdot 2\cdot 5}}{2\cdot 2} \Leftrightarrow x_{1/2}=\frac{-7\pm 3}{4} \Leftrightarrow x=-\frac{5}{2} \vee x=-1$$

$2\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)+4=-1$; $2\cdot(-1)+4=2$; gesuchte Schnittpunkte: $\left(-\frac{5}{2}\middle|-1\right)$ und $(-1|2)$

zu Aufgabe 3

$$x^2+4x+3=0 \Leftrightarrow x_{1/2}=\frac{-4\pm\sqrt{4^2-4\cdot 1\cdot 3}}{2} \Leftrightarrow x_{1/2}=\frac{-4\pm 2}{2} \Leftrightarrow x=-3 \vee x=-1;\ D=\mathbb{R}\setminus\{-3;-1\}$$

Nullstelle von f: $2x+3=0 \Leftrightarrow 2x=-3 \Leftrightarrow x=-\frac{3}{2}$

zu Aufgabe 4

a) $\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+3}=\frac{x+3}{(x+1)(x+3)}-\frac{x+1}{(x+1)(x+3)}=\frac{2}{(x+1)(x+3)}=\frac{2}{x^2+4x+3}=\frac{1}{0{,}5\cdot\left(x^2+4x+3\right)}=$

$=\frac{1}{0{,}5\cdot\left(x^2+4x+4-1\right)}=\frac{1}{0{,}5\cdot\left((x+2)^2-1\right)}=\frac{1}{0{,}5\cdot(x+2)^2-0{,}5}$

b) Die x-Achse ist horizontale Asymptote von G_f, da im Term $\frac{2}{x^2+4x+3}$ der Grad des Zählerpolynoms 0 und der Grad des Nennerpolynoms 2 ist.

Gleichungen der vertikalen Asymptoten von G_f: $x=-3$; $x=-1$

$f(0)=\frac{2}{3}$; Schnittpunkt von G_f mit der y-Achse: $\left(0\,\middle|\,\frac{2}{3}\right)$

zu Aufgabe 5

a) Nullstellen von k: 0 und 2

Da im Term $\frac{-x^2+2x}{2x^2+4}$ der Grad des Zählerpolynoms gleich dem Grad des Nennerpolynoms ist und der Quotient aus den zur höchsten Potenz x^2 gehörenden Koeffizienten -1 und 2 gleich $-0{,}5$ ist, hat G_k die Gerade mit der Gleichung $y=-0{,}5$ als Asymptote.

b) $\frac{-x^2+2x}{2x^2+4}=-0{,}5 \Leftrightarrow -x^2+2x=-0{,}5\cdot\left(2x^2+4\right) \Leftrightarrow -x^2+2x=-x^2-2 \Leftrightarrow 2x=-2 \Leftrightarrow x=-1$

zu Aufgabe 6

a) Gleichungen der senkrechten Asymptoten: $x=-2$; $x=2$

Da im Term $\frac{6x}{x^2-4}$ der Grad des Zählerpolynoms kleiner als der Grad des Nennerpolynoms ist, hat G_f die x-Achse als Asymptote.

zu Aufgabe 7

$f(x)=\frac{2x^2}{(x+1)^2}$

zu Aufgabe 8

a) [...]

b) $k(x)=\frac{x\cdot(x-2)}{(x+3)^2}$