ILV – Seminarsitzung und Studierzeit

(ausgearbeitetes Beispiel für das Fach Mathematik)

Jahrgangsstufe	9
Fach	Mathematik
Übergreifende Bildungs- und Erziehungsziele	♦ Digitale Bildung
Zeitrahmen	eine Doppelstunde (9. Seminarsitzung) + zwei Zeitstunden (Studierzeit im Anschluss an die 9. Seminarsitzung)
Kompetenzerwartungen der Seminarsitzung	♦ Erfassen des Übergangs vom Differenzen- zum Differentialquotienten anhand der Visualisierung des Übergangs von der Sekanten- zur Tangentensteigung in einem Punkt des Graphen einer Funktion der Form $x \mapsto ax^2$ ♦ Nachvollziehen der rechnerischen Herleitung des Terms der Ableitungsfunktion von Funktionen der Form $x \mapsto ax^2$ ♦ Berechnen der Terme der Ableitungsfunktionen quadratischer Funktionen unter Nutzung der Faktor- und Summenregel
Kompetenzerwartungen der Studierzeit	♦ Anwenden der in der Seminarsitzung erworbenen Kompetenzen ♦ Bestimmen der Gleichung der Tangente in einem Punkt des Graphen einer quadratischen Funktion; Zeichnen des Graphen der Funktion und der Tangente, auch mithilfe eines Funktionenplotters
Benötigtes Material / Medien	Seminarsitzung: ♦ je Schülerin und Schüler eine Kopie des Arbeitsblatts (ILV-M-9-9_AB.pdf) ♦ Computer & Beamer zur Projektion der GeoGebra-Dateien ♦ GeoGebra-Datei ILV-M-9-9_Einstieg.ggb ♦ GeoGebra-Datei ILV-M-9-9_Vis1.ggb ♦ GeoGebra-Datei ILV-M-9-9_Vis2.ggb Studierzeit: ♦ Arbeitsauftrag für die Schülerinnen und Schüler (ILV-M-9-9_AA.pdf) ♦ Erklärvideo Tangentengleichung (ILV-M-9-9_EV.mp4)

Vorbemerkungen

Für die nachfolgend beschriebene Seminarsitzung wurde bewusst eine im Hinblick auf das Alter der Schülerinnen und Schüler inhaltlich anspruchsvolle und stofflich relativ dichte Doppelstunde ausgewählt. Der Schwerpunkt der Seminarsitzung liegt dabei auf dem gemeinsamen Erarbeiten, das Unterrichtsgeschehen ist entsprechend ausgestaltet. „Hefteintrag“ oder „Tafelbild“ sind bewusst nicht explizit ausgewiesen, da dies von der individuellen (methodischen) Ausgestaltung dieser Seminarsitzung sowie der ILV im Allgemeinen abhängt; wichtige inhaltliche Erkenntnisse sind aber deutlich markiert.

Aus der 7. und 8. Seminarsitzung sowie aus den Studierzeiten zwischen der 7. und 8. sowie der 8. und 9. Seminarsitzung werden insbesondere die folgenden Kompetenzen vorausgesetzt:

- Interpretieren der Steigung in einem Punkt eines Graphen als Tangentensteigung; graphisches Bestimmen dieser Steigung
- graphisches Ermitteln der Tangentensteigung m_x an mehreren Punkten $(x \mid f(x))$ des Graphen einer Funktion f und Eintragen der Punkte $(x \mid m_x)$ in dasselbe Koordinatensystem
- Beschreiben der Ableitungsfunktion als Funktion, die jeder Stelle x die Steigung des Graphen an dieser Stelle zuordnet
- Begründen aus der Anschauung heraus, dass $f'(x) = m$ der Term der Ableitung einer Funktion f mit $f(x) = mx + t$ ist
- Aufstellen von Geradengleichungen bei gegebener Steigung und gegebenem Geradenpunkt (Wiederholung)

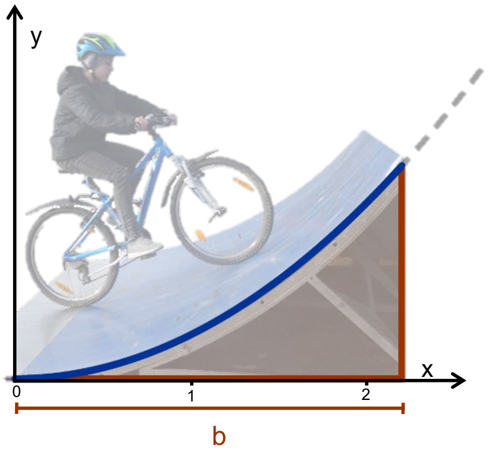
Überblick über die 9. Seminarsitzung

Phase	Inhalt	Material	Zeitbedarf (zur groben Orientierung)
Wiederholung	Eingehen auf Fragen zur vorangegangenen Studierzeit		10 min
Motivation / Problematisierung	Nachbau einer Mountainbike-Sprungrampe, wobei der Absprungwinkel 45° betragen soll → Im Folgenden Untersuchung, ob dafür die Breite der Rampe verändert werden muss Zunächst: Frage nach der Steigung der bestehenden Rampe beim Absprung bzw. (anschließend an Modellierung) nach der Steigung der Funktion f mit $f(x) = 0{,}25x^2$ im Punkt $P(2{,}2 \mid f(2{,}2))$	Präsentation: ILV-M-9-9_ Einstieg.ggb	10 min
Motivation der rechnerischen Bestimmung	Zeichnerische Bestimmung der Steigung des Graphen von f im Punkt P durch Einzeichnen der Tangente → Motivation der rechnerischen Bestimmung der Steigung	Arbeitsblatt: ILV-M-9-9_ AB.pdf	5 min
Erarbeitung	Rechnerische Bestimmung der Steigung einer Sekante mithilfe des Differenzenquotienten sowie rechnerische Bestimmung der Steigung der Tangente im Punkt P mithilfe des Differentialquotienten	Visualisierung (begleitend): ILV-M-9-9_ Vis1.ggb	20 min
Problematisierung / Motivation	Umkehrung der Problemstellung: Bestimmung des x-Werts zu einer vorgegebenen Steigung (hier: 1) → Notwendigkeit eines Funktionsterms der Ableitungsfunktion		5 min
Erarbeitung Rückschluss	Rechnerische Bestimmung eines Funktionsterms der Ableitung f' von f mithilfe des Differentialquotienten → Lösung des Anfangsproblems	Visualisierung (begleitend): ILV-M-9-9_ Vis2.ggb	10 min
Lernzielkontrolle / Verallgemeinerung	Anwenden des Verfahrens auf weitere Beispiele führt zur Faktorregel für Funktionen der Form $x \mapsto ax^2$ Mitteilung der allgemeinen Faktorregel		10 min
Vertiefung / Verallgemeinerung	Mitteilung der Summenregel → Erkenntnis, dass damit (unter Einbeziehung des Vorwissens) nun jede quadratische Funktionen abgeleitet werden kann		10 min
Lernzielkontrolle / Anwendung	Anwenden der Faktor- und Summenregel auf unterschiedliche Funktionsterme		10 min

Skizze des Verlaufs der 9. Seminarsitzung

Motivation / Problematisierung

Für einen Mountainbike-Parcours soll die abgebildete Sprungrampe nachgebaut werden. Dabei soll der Absprungwinkel genau 45° betragen. Im Folgenden soll untersucht werden, ob dafür die Breite $b = 2{,}20\,\text{m}$ der Rampe verändert werden muss.



Mithilfe der Datei ILV-M-9-9_Einstieg.ggb wird das oben beschriebene Problem visualisiert und anschließend die Profillinie der Sprungrampe im Bereich [0; 2,2] durch den Graphen der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion $f: x \mapsto 0{,}25x^2$ passend modelliert.

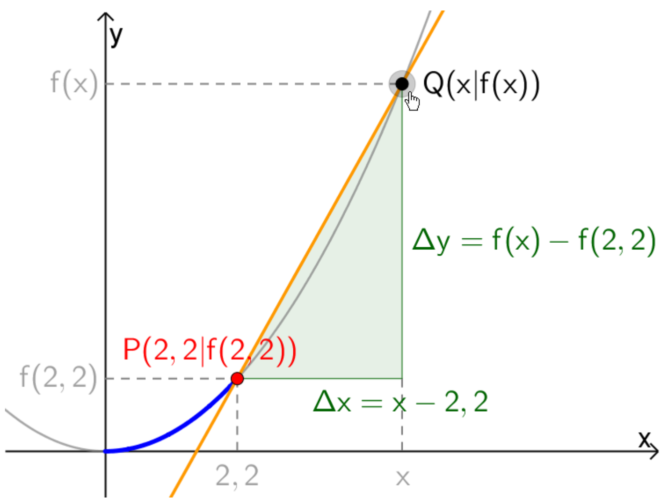
Da ein Absprungwinkel von 45° eine Steigung mit dem Wert 1 bedeutet (Steigungsdreieck gleichschenklig!), wirft dies zunächst die Frage nach der Steigung der abgebildeten Rampe im Absprungpunkt auf, d. h. nach der Steigung des Graphen von f im Punkt $P(2{,}2 \mid f(2{,}2))$.

Motivation der rechnerischen Bestimmung

Auf die zeichnerische Bestimmung der gesuchten Steigung durch Einzeichnen der Tangente im Arbeitsblatt (ILV-M-9-9_AB.pdf) folgt die Erkenntnis, dass das so erhaltene Ergebnis eher ungenau ist. Dies motiviert die Frage nach einer Möglichkeit zur Berechnung der Steigung der Parabel in einem gegebenen Punkt.

Erarbeitung

Dazu wird zunächst die Sekante PQ durch den Punkt $P(2{,}2 \mid f(2{,}2))$ und einen weiteren beliebigen Punkt $Q(x \mid f(x))$ auf dem Graphen von f betrachtet.



Ausgehend vom Steigungsdreieck kann die Steigung dieser Sekante mit dem sogenannten Differenzenquotienten berechnet werden:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(2{,}2)}{x - 2{,}2}$$

Mithilfe der Datei ILV-M-9-9_Vis1.ggb (vgl. nebenstehender Screenshot) kann dynamisch veranschaulicht werden, dass sich durch das Annähern des Graphenpunkts Q an den Punkt P die Sekante PQ immer mehr der Tangente an den Graphen von f im Punkt P annähert, d. h. für $x \to 2{,}2$ „konvergiert" die Sekante gegen diese Tangente.

Somit entspricht die gesuchte Tangentensteigung m bzw. die Ableitung von f an der Stelle $x = 2{,}2$ dem zugehörigen Grenzwert des Differenzenquotienten, der als Differentialquotient bezeichnet wird, und kann entsprechend berechnet werden:

$$m = f'(2,2) = \lim_{x \to 2,2} \frac{f(x) - f(2,2)}{x - 2,2} = \lim_{x \to 2,2} \frac{0,25x^2 - 0,25 \cdot (2,2)^2}{x - 2,2} = \lim_{x \to 2,2} \frac{0,25\left(x^2 - (2,2)^2\right)}{x - 2,2} =$$
$$\lim_{x \to 2,2} \frac{0,25(x - 2,2)(x + 2,2)}{x - 2,2} = \lim_{x \to 2,2} \frac{0,25(x + 2,2)}{1} = \frac{0,25(2,2 + 2,2)}{1} = 1,1$$

Problematisierung / Motivation der Notwendigkeit eines Funktionsterms der Ableitungsfunktion

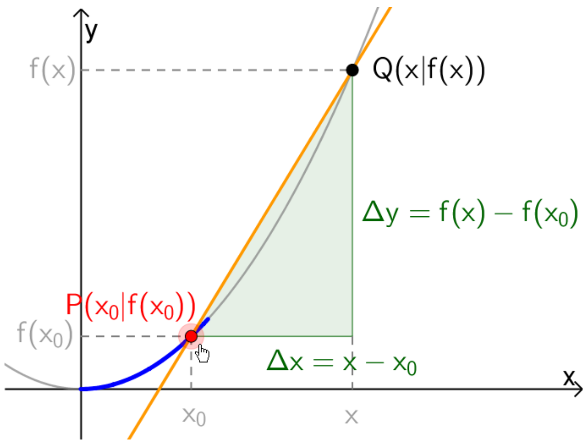
Die so erhaltene Steigung $m = 1,1$ ist in Bezug auf das Anfangsproblem zu groß, wonach der Absprungwinkel 45° betragen soll. Die Breite der Rampe muss somit verändert werden.

Dies wirft die Frage auf, wie breit die Rampe (bei unveränderter Modellierung ihrer Profillinie mithilfe des Graphen von f) sein muss, damit die Steigung beim Absprung den Wert 1 hat. Im mathematischen Modell entspricht dies der Frage nach den zu einer gegebenen Steigung gehörigen x-Werten entsprechender Graphenpunkte.

Eine mögliche erste Idee, die Lösung durch Probieren zu finden, indem der Ansatz von oben verwendet und für verschiedene x-Werte jeweils der Wert des Differentialquotienten berechnet wird, wird als zu umständlich bzw. zeitaufwändig verworfen. Diese Überlegung führt jedoch zu einer neuen Idee: Ausgehend von einem allgemeinen Ansatz für einen beliebigen Punkt $P(x_0 \mid f(x_0))$ kann ein Term für den Wert der Ableitung an der Stelle x_0 ermittelt werden. Da x_0 beliebig gewählt war, erhält man auf diese Weise einen allgemeinen Term der Ableitungsfunktion f' von f; setzt man diesen gleich 1, kann der gesuchte x-Wert unmittelbar berechnet werden.

Erarbeitung

Mithilfe der Datei ILV-M-9-9_Vis2.ggb (vgl. nebenstehender Screenshot) kann die Annäherung des Graphenpunkts Q an einen beliebigen Punkt $P(x_0 \mid f(x_0))$ dynamisch veranschaulicht werden.



Daran anschließend kann der zugehörige Differentialquotient und damit die Steigung der zugehörigen Tangente berechnet werden:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} =$$
$$\lim_{x \to x_0} \frac{0,25x^2 - 0,25x_0^2}{x - x_0} =$$
$$\lim_{x \to x_0} \frac{0,25(x - x_0)(x + x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{0,25(x + x_0)}{1} = 0,25 \cdot 2x_0 = 0,5 \cdot x_0$$

Rückschluss

Damit kann das Eingangsproblem gelöst werden: $f'(x_0) = 1 \Leftrightarrow 0,5x_0 = 1 \Leftrightarrow x_0 = 2$

Die Rampe muss bei einer Modellierung ihrer Profillinie mit der Funktion f folglich genau 2 m breit sein, damit der Absprungwinkel genau 45° beträgt.

Lernzielkontrolle / Verallgemeinerung (Faktorregel)

In einer ersten Lernzielkontrolle soll der Umgang mit dem Differentialquotienten geübt und im Zuge dessen eine Vermutung aufgestellt werden, wie es sich auf den Term der Ableitungsfunktion auswirkt, wenn die Ausgangsfunktion um einen konstanten Faktor verändert wird.

Dazu sollen die Schülerinnen und Schüler im Rahmen eines Arbeitsauftrags (z. B. arbeitsteilig in Partnerarbeit) für Funktionen wie f_1, f_2 und f_3 mit $f_1(x)=x^2$, $f_2(x)=2x^2$ und $f_3(x)=3x^2$ jeweils einen Term der Ableitungsfunktion ermitteln. Daran anknüpfend wird (z. B. im Rahmen einer gemeinsamen Betrachtung im Plenum) plausibel, dass $f'(x)=a\cdot 2x$ ein Term der Ableitung einer Funktion f mit $f(x)=a\cdot x^2$ ist ($a\in\mathbb{R}$). Dies wird sodann (ohne Nachweis) zur Faktorregel verallgemeinert (z. B. per Mitteilung durch die Lehrkraft).

> Für die Ableitungsfunktion einer Funktion f mit $f(x)=x^2$ gilt: $f'(x)=2x$.
>
> Außerdem gilt für $a\in\mathbb{R}$ die sogenannte Faktorregel: Sind $f'(x)$ und $g'(x)$ Terme der Ableitungsfunktionen zweier Funktionen f und g mit $f(x)=a\cdot g(x)$, so gilt: $f'(x)=a\cdot g'(x)$.

Vertiefung / Verallgemeinerung auf ganzrationale Funktionen vom Grad 2

Durch eine Reflexion des bisher Gelernten und ein Mitteilen der Summenregel kann das Bilden der Ableitung auf ganzrationale Funktionen vom Grad 2 erweitert werden.

Ausgehend von der Frage nach einem Term der Ableitung einer Funktion p mit $p(x)=3x^2+4x+5$ werden dazu zunächst die einzelnen Summanden $p_1(x)=3x^2$, $p_2(x)=4x$ und $p_3(x)=5$ des Funktionsterms betrachtet und es wird festgestellt, dass entsprechende Funktionen bereits abgeleitet werden können („$ax^2\to 2ax$“, „$mx\to m$“, „$c\to 0$“). Für konstante und lineare Funktionen erfolgt dabei das Ableiten nicht mittels des Differentialquotienten, sondern durch Interpretation des Funktionsgraphen als Gerade mit naturgemäß konstanter Steigung (vgl. die 8. Seminarsitzung). Hierbei kann nun vertiefend auch auf die Gültigkeit der Faktorregel bei direkt proportionalen Funktionen eingegangen werden.

An dieser Stelle wird sodann die Summenregel lediglich mitgeteilt, wonach man beim Bilden der Ableitung einer Summe die einzelnen Summanden ableiten und die erhaltenen Ableitungsterme addieren darf:

> Summenregel: Sind $f_1'(x)$ und $f_2'(x)$ Terme der Ableitungsfunktionen zweier Funktionen f_1 und f_2 und ist f eine Funktion mit $f(x)=f_1(x)+f_2(x)$, so gilt: $f'(x)=f_1'(x)+f_2'(x)$.

Damit erhalten die Schülerinnen und Schüler schließlich einen Term der Ableitungsfunktion der Funktion p: $p'(x)=p_1'(x)+p_2'(x)+p_3'(x)=3\cdot 2x+4+0=6x+4$.

Abschließend kann das so erhaltene Ergebnis, z. B. mithilfe von GeoGebra, durch das Berechnen von Steigungen an beliebigen Stellen der zugehörigen Parabel bekräftigt werden.

Lernzielkontrolle / Anwendung

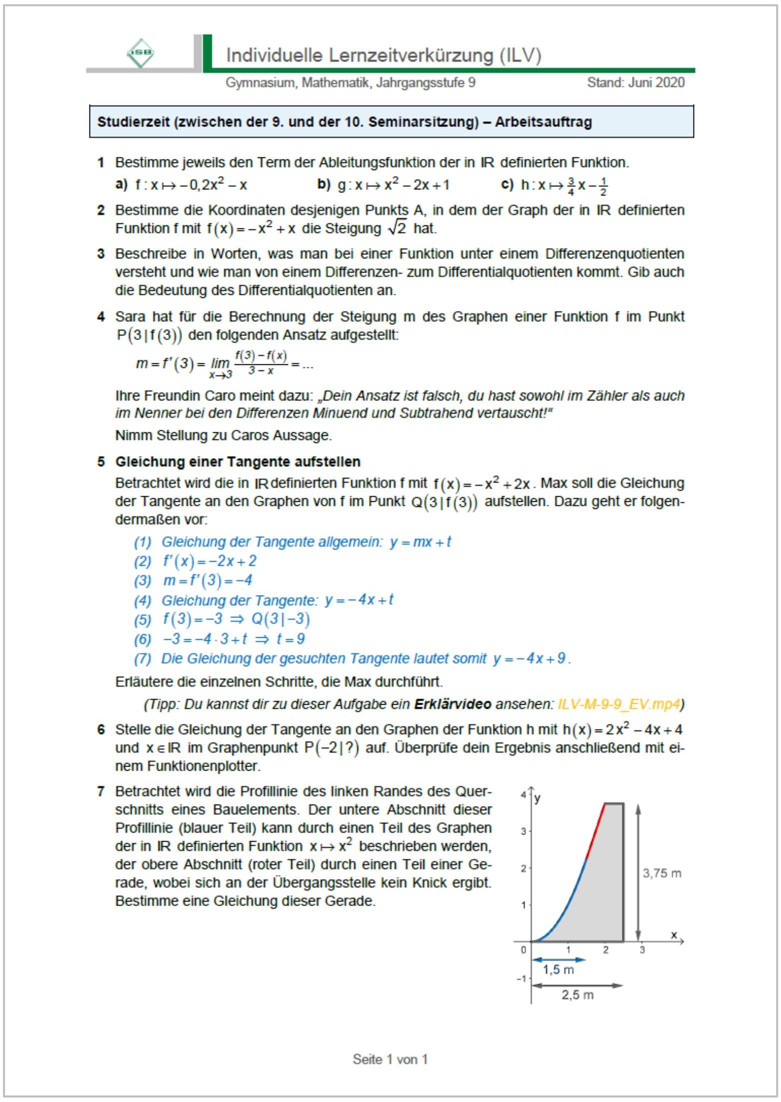
Bearbeitung der folgenden Aufgaben, z. B. in Einzel- oder Partnerarbeit:

- Bestimme jeweils einen Term der Ableitungsfunktion für die in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen $f: x\mapsto -4x^2-2x$ und $g: x\mapsto 6x^2+2$.
- Bestimme die Koordinaten desjenigen Punkts, in dem der Graph der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion f mit $f(x)=2x^2+24x-7$ die Steigung 4 hat.
- *<u>Für Schnelle:</u> Bestimme denjenigen Wert von a, für den die Ableitung der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion $f: x\mapsto ax^2$ an der Stelle 2,2 den Wert 1 hat. Stelle einen Zusammenhang dieser Aufgabe mit der Problemstellung rund um die Mountainbikerampe her.*

Studierzeit (zwischen der 9. und der 10. Seminarsitzung)

Mithilfe eines Arbeitsauftrags (ILV-M-9-9_AA.pdf) sollen die Schülerinnen und Schüler in der folgenden Studierzeit sowohl das Gelernte festigen als es auch auf die Berechnung von Tangentengleichungen anwenden. Das entsprechende Verfahren sollen sie dabei selbständig erarbeiten, wozu auch ein Erklärvideo (ILV-M-9-9_EV.mp4) als Hilfestellung bereitsteht.

Arbeitsauftrag (Screenshot):



Individuelle Lernzeitverkürzung (ILV)

Gymnasium, Mathematik, Jahrgangsstufe 9 Stand: Juni 2020

Studierzeit (zwischen der 9. und der 10. Seminarsitzung) – Arbeitsauftrag

1 Bestimme jeweils den Term der Ableitungsfunktion der in IR definierten Funktion.

a) $f: x \mapsto -0{,}2x^2 - x$ **b)** $g: x \mapsto x^2 - 2x + 1$ **c)** $h: x \mapsto \frac{3}{4}x - \frac{1}{2}$

2 Bestimme die Koordinaten desjenigen Punkts A, in dem der Graph der in IR definierten Funktion f mit $f(x) = -x^2 + x$ die Steigung $\sqrt{2}$ hat.

3 Beschreibe in Worten, was man bei einer Funktion unter einem Differenzenquotienten versteht und wie man von einem Differenzen- zum Differentialquotienten kommt. Gib auch die Bedeutung des Differentialquotienten an.

4 Sara hat für die Berechnung der Steigung m des Graphen einer Funktion f im Punkt $P(3 \mid f(3))$ den folgenden Ansatz aufgestellt:

$$m = f'(3) = \lim_{x \to 3} \frac{f(3) - f(x)}{3 - x} = \ldots$$

Ihre Freundin Caro meint dazu: *„Dein Ansatz ist falsch, du hast sowohl im Zähler als auch im Nenner bei den Differenzen Minuend und Subtrahend vertauscht!“*

Nimm Stellung zu Caros Aussage.

5 **Gleichung einer Tangente aufstellen**

Betrachtet wird die in IR definierten Funktion f mit $f(x) = -x^2 + 2x$. Max soll die Gleichung der Tangente an den Graphen von f im Punkt $Q(3 \mid f(3))$ aufstellen. Dazu geht er folgendermaßen vor:

(1) Gleichung der Tangente allgemein: $y = mx + t$

(2) $f'(x) = -2x + 2$

(3) $m = f'(3) = -4$

(4) Gleichung der Tangente: $y = -4x + t$

(5) $f(3) = -3 \Rightarrow Q(3 \mid -3)$

(6) $-3 = -4 \cdot 3 + t \Rightarrow t = 9$

(7) Die Gleichung der gesuchten Tangente lautet somit $y = -4x + 9$.

Erläutere die einzelnen Schritte, die Max durchführt.

*(Tipp: Du kannst dir zu dieser Aufgabe ein **Erklärvideo** ansehen: ILV-M-9-9_EV.mp4)*

6 Stelle die Gleichung der Tangente an den Graphen der Funktion h mit $h(x) = 2x^2 - 4x + 4$ und $x \in$ IR im Graphenpunkt $P(-2 \mid ?)$ auf. Überprüfe dein Ergebnis anschließend mit einem Funktionenplotter.

7 Betrachtet wird die Profillinie des linken Randes des Querschnitts eines Bauelements. Der untere Abschnitt dieser Profillinie (blauer Teil) kann durch einen Teil des Graphen der in IR definierten Funktion $x \mapsto x^2$ beschrieben werden, der obere Abschnitt (roter Teil) durch einen Teil einer Gerade, wobei sich an der Übergangsstelle kein Knick ergibt. Bestimme eine Gleichung dieser Gerade.

y, x, 0, 1, 2, 3, 4, −1, 3,75 m, 1,5 m, 2,5 m

Seite 1 von 1

Erklärvideo (Screenshot):