Bayerisches Staatsministerium für
Bildung und Kultus, Wissenschaft und Kunst

Computeralgebrasysteme (CAS) im Mathematikunterricht des Gymnasiums

Jahrgangsstufen 11 und 12

STAATSINSTITUT FÜR SCHULQUALITÄT
UND BILDUNGSFORSCHUNG
MÜNCHEN

COMPUTERALGEBRASYSTEME (CAS) IM MATHEMATIKUNTERRICHT DES GYMNASIUMS

Jahrgangsstufen 11 und 12

München 2017

Grußwort des Staatssekretärs im Bayerischen Staatsministerium für Bildung und Kultus, Wissenschaft und Kunst

Liebe Mathematiklehrkräfte,

es ist mir ein großes Anliegen, dass die Schülerinnen und Schüler auf die Veränderungen durch die zunehmende Digitalisierung aller Lebensbereiche vorbereitet und entsprechend gefördert werden. Ich bin davon überzeugt, dass eine fundierte Bildung in diesem Bereich unerlässlich ist, um sich in unserer modernen Welt zurechtzufinden und in dieser erfolgreich sein zu können. Dabei umfasst Digitale Bildung weit mehr als den Erwerb von Fertigkeiten, die zur Bedienung von Handys, Tablets oder Rechnern nötig sind. Erforderlich ist eine umfassende Medienkompetenz. Gerade auch der verantwortungsbewusste Umgang mit den immer komplexer werdenden digitalen Angeboten muss den Schülerinnen und Schülern vermittelt werden, was z. B. auch eine kritische Betrachtung recherchierter Informationen, eine nachhaltige Nutzung der uns zur Verfügung stehenden Ressourcen und ein Bewusstsein für den Schutz personenbezogener Daten umfasst.

Das Fach Mathematik fördert Kernkompetenzen, die auf der einen Seite zu verstehen helfen, wie die digitale Welt funktioniert, auf der anderen Seite aber auch die Voraussetzung dafür schaffen, deren Entwicklung reflektiert mitgestalten zu können. Zur Erreichung wesentlicher Ziele einer altersgerechten informationstechnischen Grundbildung, z. B. des Erwerbs von Kompetenzen in den Bereichen Tabellenkalkulation und Informationsverarbeitung (u. a. Grundlagen der Modellbildung und des algorithmischen Denkens), leistet das Fach Mathematik einen fundamentalen Beitrag - insbesondere auch durch die Art und Weise des in dieser Handreichung vorgeschlagenen Einsatzes von Computeralgebrasystemen in der Oberstufe des Gymnasiums.

Ein zeitgemäßer Mathematikunterricht z. B. ohne dynamische Visualisierungen ist kaum mehr vorstellbar. Ich möchte Sie daher dazu ermutigen, den hier vorgelegten Anregungen für eine stärkere Verankerung digitaler Medien im Mathematikunterricht aufgeschlossen zu begegnen. Ich bin mir sicher, dass durch die vielen gelungenen Beispiele in der Handreichung sehr schnell die vielfältigen Einsatzmöglichkeiten und die Vorzüge von Computeralgebrasystemen deutlich werden.

Ich möchte mich abschließend ausdrücklich für Ihr Engagement für Ihre Schülerinnen und Schüler und für Ihren Einsatz für das Fach Mathematik bedanken und wünsche Ihnen viel Freude bei der Lektüre der Handreichung.

München, im März 2017

Ihr Georg

Georg Eisenreich
Staatssekretär im Bayerischen Staatsministerium für Bildung und Kultus, Wissenschaft und Kunst

Vorwort

Liebe Kolleginnen und Kollegen,

die vorliegende Handreichung knüpft an die gleichnamige Handreichung für die Jahrgangsstufe 10 an und soll Sie beim gewinnbringenden Einsatz von Computeralgebrasystemen (CAS) – und ganz allgemein von **Dynamischen Mathematiksystemen** – im Mathematikunterricht der Jahrgangsstufen 11 und 12 unterstützen. Sie geht zunächst einleitend auf die Situation in Bayern und in den anderen Ländern, auf die Bedeutung des CAS-Einsatzes für das Lehren und Lernen im Allgemeinen sowie auf die Grundfertigkeiten in der Anwendung von CAS ein, die bis zur Abiturprüfung erworben werden sollen. Im Anschluss daran liefern zahlreiche Vorschläge zur Gestaltung des Unterrichts exemplarisch Anregungen für eine Umsetzung des Lehrplans unter Verwendung von CAS, wobei über die Inhalte des Lehrplans deutlich hinausgehende Anregungen in der Regel als „Exkurs" bezeichnet werden. Die Anregungen sollen Sie darüber hinaus auch bei der Auswahl geeigneter Aufgaben aus dem vielfältigen Angebot der zugelassenen Lehrbücher unterstützen.

Um Ihnen die Arbeit mit der Handreichung zu erleichtern, werden die Inhalte in ihrem Hauptteil durch **Screenshots des CAS GeoGebra** veranschaulicht, dessen Eignung für den Einsatz in schriftlichen Leistungsnachweisen im Fach Mathematik ab der Jahrgangsstufe 10 des Gymnasiums derzeit im Rahmen eines Schulversuchs erprobt wird; die ersten Ergebnisse sind dabei sehr ermutigend (vgl. Kapitel 1.1). GeoGebra kann als Open-Source-Software kostenlos von der Internetseite *http://www.geogebra.org/* heruntergeladen werden und ist auf unterschiedlichen Betriebssystemen und Endgeräten lauffähig. Dadurch soll möglichst vielen unter Ihnen ermöglicht werden, den Umgang mit einem CAS unmittelbar selbst auszuprobieren bzw. zu vertiefen. CAS können auch außerhalb von CAS-Klassen bzw. CAS-Kursen (vgl. Kapitel 1.1) den Mathematikunterricht substanziell bereichern, z. B. im Rahmen der (dynamischen) Untersuchung oder Demonstration mathematischer Zusammenhänge, sodass sich die vorliegende Handreichung ausdrücklich auch an diejenigen Lehrkräfte unter Ihnen richtet, die in „herkömmlichen" Klassen bzw. Kursen unterrichten.

Um Ihnen den Einstieg in die Syntax eines CAS bei Bedarf zu erleichtern, ist jedem Kapitel ein **„Schnelleinstieg"** vorangestellt, in dem wesentliche Funktionen und Befehle des CAS im Zusammenhang mit dem jeweiligen Kapitel kurz zusammengefasst sind. Alle dargestellten Inhalte lassen sich unter Beachtung einer ggf. geringfügig abweichenden Syntax analog auf andere CAS übertragen. Um Sie im Besonderen auch in der Arbeit mit den derzeit als Hilfsmittel in der Abiturprüfung zugelassenen **CAS-Rechnern** zu unterstützen, sind sämtliche Schnelleinstiege im Anhang der Handreichung für diese Geräte, d. h. den TI-Nspire CAS bzw. TI-Nspire CX CAS (Texas Instruments), das ClassPad 330 bzw. ClassPad II FX-CP400 (Casio) sowie den Prime Graphing Calculator (Hewlett Pacard), jeweils eigens aufbereitet.

Die Handreichung steht auf den Internetseiten des Staatsinstituts für Schulqualität und Bildungsforschung (*www.isb.bayern.de*) zum **Download** bereit.

Weitere grundlegende Hinweise zu den Vorteilen eines CAS und zur Verwendung von CAS bei Leistungsnachweisen sowie Antworten auf häufig gestellte Fragen zum CAS-Einsatz finden Sie in der Handreichung „Computeralgebrasysteme im Mathematikunterricht des Gymnasiums – Jahrgangsstufe 10", die ebenfalls unter *www.isb.bayern.de* zum Download bereitsteht. Die Akademie für Lehrerfortbildung und Personalführung (ALP) in Dillingen bietet **Fortbildungsveranstaltungen** zum Einsatz von CAS und von GeoGebra im Mathematikunterricht an.

Den Mitgliedern des für die Erarbeitung der vorliegenden Handreichung verantwortlichen Arbeitskreises gilt – ebenso wie den Mitgliedern des vormaligen Arbeitskreises, der eine erste Entwurfsfassung für die Handhelds von TI und Casio erstellt hatte – mein besonderer Dank für sehr wertvolle Beiträge und Anregungen. Ein ebensolcher Dank gilt Herrn Prof. Dr. Hans-Georg Weigand für die wissenschaftliche Beratung.

München, im Februar 2017

Achim Brunnermeier

Achim Brunnermeier
Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung
Abteilung Gymnasium – Referat Mathematik

1 Einführende Hinweise

Computeralgebrasysteme (CAS) – darunter werden im Folgenden Taschencomputer mit integriertem CAS ebenso verstanden wie allgemein dynamische Mathematiksysteme wie GeoGebra, die als Software auf unterschiedlichen Endgeräten wie Notebooks, Tablets oder auch Smartphones installiert werden können – verfügen im Vergleich zu einem herkömmlichen Taschenrechner über eine wesentlich umfangreichere Funktionalität (z. B.: Differenzieren und Integrieren von Funktionen, Zeichnen und dynamisches Verändern von Graphen, Tabellenkalkulation, dynamische Geometrie). Daher bietet ein CAS vielfältige Einsatzmöglichkeiten als individuell einsetzbares Lernwerkzeug und vielseitig methodisch-didaktisches Hilfsmittel, das die Möglichkeiten des Lehrens und Lernens mathematischer Inhalte erweitert. So kann der CAS-Einsatz eine ausgewogene Förderung der allgemeinen mathematischen Kompetenzen der Bildungsstandards im Sinne eines zeitgemäßen Unterrichts unterstützen. Dabei können, insbesondere bei der Auswahl von Aufgaben, die allgemeinen mathematischen Kompetenzen „Mathematisch argumentieren“, „Probleme mathematisch lösen“, „Mathematisch modellieren“ und „Kommunizieren“ stärker als in der Vergangenheit akzentuiert und gefördert werden.

1.1 Situation in Bayern und in den Bundesländern

Zum Schuljahr 2003/2004 initiierte das Bayerische Staatsministerium für Unterricht und Kultus den **Schulversuch „Medienintegration im Mathematikunterricht“**, an dem etwa 20 Gymnasien teilnahmen. Gegenstand des Schulversuchs, der mit Ablauf des Schuljahres 2012/2013 endete, war der Einsatz von Computeralgebrasystemen (CAS) im Mathematikunterricht ab der Jahrgangsstufe 10. Der Schulversuch wurde durch den Lehrstuhl für Didaktik der Mathematik der Universität Würzburg wissenschaftlich begleitet und evaluiert. Im Rahmen des Schulversuchs wurde die Verwendung eines Taschencomputers mit integriertem CAS (im Folgenden als **CAS-Rechner** bezeichnet) im Rahmen von Leistungserhebungen erprobt. Den am Schulversuch beteiligten Gymnasien wurde im Schuljahr 2011/2012 erstmals eine Abiturprüfung im Fach Mathematik angeboten, bei der ein CAS-Rechner als Hilfsmittel zugelassen war. Beginnend mit der Abiturprüfung 2014 besteht nunmehr für alle Schülerinnen und Schüler der bayerischen Gymnasien die Möglichkeit, im Fach Mathematik alternativ an einer CAS-Abiturprüfung teilzunehmen, bei der im Prüfungsteil B ein CAS-Rechner als weiteres Hilfsmittel zugelassen ist. Aufbauend auf den Ergebnissen des beschriebenen Schulversuchs wird seit dem Schuljahr 2012/2013 im Auftrag des Bayerischen Staatsministeriums für Bildung und Kultus, Wissenschaft und Kunst in Kooperation mit der Johannes-Kepler-Universität Linz an aktuell sechs bayerischen Gymnasien der **Schulversuch „CAS in Prüfungen“** durchgeführt, der die Erprobung der Mathematiksoftware GeoGebra als Hilfsmittel bei Leistungsnachweisen im Fach Mathematik ab der Jahrgangsstufe 10 zum Gegenstand hat. Im Rahmen dieses Schulversuchs haben im Jahr 2016 erstmals Schülerinnen und Schüler an einem bayerischen Gymnasium die CAS-Abiturprüfung mit dem CAS GeoGebra erfolgreich abgelegt, wobei dazu herkömmliche Computer verwendet wurden, auf denen GeoGebra in einer Prüfungsumgebung ausgeführt wurde, die von einem eigens dafür entwickelten USB-Stick aufgerufen wird. Aktuell wird im Rahmen des Schulversuchs auch der Einsatz von GeoGebra auf Tablets (in Zukunft voraussichtlich auch Smartphones) erprobt; erste Ergebnisse hierbei sind vielversprechend, insbesondere die in die GeoGebra-App integrierte **Prüfungsumgebung** könnte künftig den Einsatz von CAS in Prüfungen erheblich erleichtern.

CAS-Abiturprüfung und Aufgabenkultur

In aktuell bereits 14 anderen **Bundesländern** ist der Einsatz von CAS in der (schriftlichen) Abiturprüfung möglich, in einzelnen Ländern sogar verpflichtend (z. B. Thüringen). Auch der vom Institut zur Qualitätsentwicklung im Bildungswesen (IQB) im Auftrag der Kultusministerkonferenz (KMK) ab der Abiturprüfung 2017 für alle Bundesländer zur Verfügung gestellte **Aufgabenpool** für die schriftliche Abiturprüfung im Fach Mathematik enthält neben klassischen Aufgaben, bei denen ein wissenschaftlicher Taschenrechner als Hilfsmittel zugelassen ist, auch solche, bei denen ein CAS zugelassen ist (vgl. hierzu die der Orientierung insbesondere hinsichtlich der Gestaltung dieses Pools dienende Aufgabensammlung, die im Jahr 2015 unter *www.iqb.hu-berlin.de/bista/abi/* veröffentlicht wurde). Die **CAS-Abiturprüfungen** unterscheiden sich dabei von der – auch in Zukunft weiterhin angebotenen – klassischen Abiturprüfung, deren Aufgaben ohne CAS-Einsatz zu bearbeiten sind, hinsichtlich der Aufgabenstellung und der Anzahl der bezüglich einzelner Aufgaben erreichbaren Bewertungseinheiten insbesondere dann, wenn typische Funktionen eines CAS zum Tragen kommen (vgl. hierzu auch das Dokument „Wesentliche Rahmenbedingungen in der Abiturprüfung ab dem Jahr 2014“, das auf den Internetseiten des Staatsinstituts für Schulqualität und Bildungsforschung, *www.isb.bayern.de*, zum Download bereitsteht).

Die **Arbeitsaufträge der vorliegenden Handreichung** berücksichtigen in besonderem Maße spezifische Tendenzen hinsichtlich der Aufgabenkultur, um die zukünftig zu erwartende Entwicklung aufzuzeigen (z. B. Anpassen von Funktionen an vorgegebene Bedingungen). Nicht alle diese Tendenzen werden und wurden zugleich in voller Tiefe in den ersten CAS-Abiturprüfungen realisiert. Eine Weiterentwicklung der Aufgabenkultur in der Abiturprüfung muss in angemessenem Maße erfolgen – mit einer sprunghaften Veränderung ist weiterhin nicht zu rechnen. Zur **Vorbereitung auf die CAS-Abiturprüfung** sind neben den Arbeitsaufträgen der vorliegenden Handreichung insbesondere folgende Materialien geeignet, die unter *www.isb.bayern.de* zum Download bereitstehen:

- CAS-Abiturprüfungen (ab 2014)
- Beispiel-Abiturprüfung (2013)
- CAS-Abiturprüfungen im Rahmen des Schulversuchs „Medienintegration im Mathematikunterricht“ (2012 und 2013)
- Arbeitsaufträge der Handreichung „Computeralgebrasysteme (CAS) im Mathematikunterricht des Gymnasiums – Jahrgangsstufe 10“

Die zugelassenen **Lehrbücher** berücksichtigen den möglichen Einsatz von CAS und enthalten speziell darauf zugeschnittene Aufgaben und Projektvorschläge, die eine Vertiefung der Lerninhalte mithilfe von CAS unterstützen. Darüber hinaus bieten sie vielfältige Anregungen und Aufgaben, die häufig unverändert auch mithilfe von CAS bearbeitet werden können. Besonders im Zusammenhang mit Leistungsnachweisen ist jedoch zu beachten, dass die Verwendung eines CAS die Bearbeitung herkömmlicher Aufgaben wesentlich vereinfachen kann, wenn typische Funktionen des CAS genutzt werden können.

CAS-Klassen und CAS-Kurse

In Bayern wird derzeit in der Qualifikationsphase der Oberstufe im Fach Mathematik unterschieden zwischen **CAS-Kursen**, in denen bei Leistungsnachweisen ein CAS als Hilfsmittel zugelassen ist, und herkömmlichen Kursen, in denen bei Leistungsnachweisen kein CAS verwendet werden darf. Seit dem Schuljahr 2012/2013 ist eine Einrichtung von CAS-Kursen in der Oberstufe (beginnend mit der Jahrgangsstufe 11) möglich – unabhängig davon, ob an der jeweiligen Schule für die betreffenden Schülerinnen und Schüler in der Jahrgangsstufe 10 **CAS-Klassen** eingerichtet waren. Die Teilnahme an einem CAS-Kurs kann für die Schülerinnen und Schüler ausschließlich auf eigenen Wunsch hin erfolgen. In der Jahrgangsstufe 12 müssen sich alle Schülerinnen und Schüler bis zu einem Stichtag entscheiden, ob sie im Fach Mathematik an der CAS-Abiturprüfung oder an der klassischen Abiturprüfung teilnehmen. Dabei besteht für alle Schülerinnen und Schüler unabhängig von der Belegung des Mathematikkurses Wahlfreiheit zwischen beiden Prüfungsvarianten.

1.2 Bedeutung des CAS-Einsatzes für das Lehren und Lernen

Die Verwendung von CAS unterstützt insbesondere im Zusammenhang mit der Bearbeitung von Aufgaben in vielfältiger Weise eine Verschiebung der Schwerpunkte mathematischen Arbeitens im Unterricht. Mithilfe eines CAS lassen sich mathematische Inhalte auf unterschiedliche Weise veranschaulichen und Zusammenhänge zwischen verschiedenen Darstellungsformen verdeutlichen. Elementare algebraische und geometrische Arbeitsschritte können mit verhältnismäßig geringem Zeitaufwand ausgeführt werden. So unterstützt der CAS-Einsatz beispielsweise die Bearbeitung realitätsnaher Anwendungsaufgaben, die häufig mit einem hohen rechnerischen Aufwand verbunden sind; eine Beschränkung auf einfache, häufig unrealistische Daten ist unnötig. Ist die Aufmerksamkeit der Schülerinnen und Schüler im Rahmen der Beschäftigung mit einer Aufgabe weniger durch Rechenarbeiten gebunden, so können sie sich stärker auf mathematische Inhalte und Zusammenhänge, die bewusste Auswahl mathematischer Verfahren, die Modellierung von Sachsituationen sowie die Interpretation von Ergebnissen konzentrieren – das Verständnis wird gefördert. Auch offene Aufgabenstellungen lassen sich mithilfe eines CAS effektiv bearbeiten. Dessen Einsatz trägt zur Entwicklung unterschiedlicher Lösungswege bei, deren Vergleich Schülerinnen und Schülern Anlass für Kommunikation über mathematische Inhalte und Verfahren geben kann. Der CAS-Einsatz unterstützt damit experimentelles und forschendes Arbeiten. Die Erleichterung der Darstellung, Strukturierung und Analyse komplexer mathematischer Objekte (z. B. Funktionenscharen) erweitert die Möglichkeiten zur Bearbeitung von Problemstellungen. Insbesondere im Rahmen schülerzentrierter Unterrichtsformen oder von Hausaufgaben können die Schülerinnen und Schüler mithilfe eines CAS Ergebnisse individuell kontrollieren und ihr Vorgehen sowie mögliche Fehlerquellen analysieren – selbständiges und eigenverantwortliches Lernen wird gefördert.

Die Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife fassen dies treffend zusammen: „Die Entwicklung mathematischer Kompetenzen wird durch den sinnvollen Einsatz digitaler Mathematikwerkzeuge unterstützt. Das Potenzial dieser Werkzeuge entfaltet sich im Mathematikunterricht

- beim **Entdecken** mathematischer Zusammenhänge, insbesondere durch interaktive Erkundungen beim Modellieren und Problemlösen,

- durch **Verständnisförderung** für mathematische Zusammenhänge, nicht zuletzt mittels vielfältiger Darstellungsmöglichkeiten,
- mit der **Reduktion** schematischer Abläufe und der **Verarbeitung größerer Datenmengen**,
- durch die Unterstützung individueller Präferenzen und Zugänge beim Bearbeiten von Aufgaben einschließlich der reflektierten Nutzung von **Kontrollmöglichkeiten**." (BS M Allg. HSR, S. 13)

Diese Ausführungen schließen mit der bemerkenswerten Aussage: „Einer durchgängigen Verwendung digitaler Mathematikwerkzeuge im Unterricht folgt dann auch deren Einsatz in der Prüfung." (BS M Allg. HSR, S. 13)

Trotz Verfügbarkeit eines CAS sind manuelle Grundfertigkeiten sowie Kopfrechnen unverzichtbar. Deshalb muss darauf geachtet werden, dass Schülerinnen und Schülern nachhaltig Sicherheit im Umgang mit Zahlen, Termen und Gleichungen gewinnen. Entsprechende Übungsphasen dürfen nicht vernachlässigt werden; auf eine Verwendung des CAS sollte – auch bei Leistungsnachweisen – immer wieder gezielt verzichtet werden (vgl. auch Abiturprüfung ab dem Jahr 2014, Prüfungsteil A).

1.3 CAS-Grundfertigkeiten

Die folgende Tabelle enthält die Grundfertigkeiten im Umgang mit CAS, die in den Jahrgangsstufen 10, 11 und 12 erworben werden sollen und für eine Abiturprüfung im Fach Mathematik, bei der ein CAS verwendet werden darf, zur Verfügung stehen müssen. Ausdrücklich wird darauf hingewiesen, dass diese Grundfertigkeiten auch ausschließlich in den Jahrgangsstufen 11 und 12 erworben werden können; eine Teilnahme an einem CAS-Kurs ist Schülerinnen und Schülern entsprechend auch dann grundsätzlich möglich, wenn sie in der Jahrgangsstufe 10 nicht in einer CAS-Klasse waren.

Grundfertigkeiten, die bereits in der Handreichung „Computeralgebrasysteme im Mathematikunterricht des Gymnasiums – Jahrgangsstufe 10" genannt sind, sind mit (10) gekennzeichnet.

Kategorie	CAS-Grundfertigkeit
Einstellungen	Winkelmaß einstellen/interpretieren(10)
Term	Taschenrechner verwenden(10)
	Term definieren(10) (z. B. Festlegen des Terms einer Funktion, die hinsichtlich unterschiedlicher Kriterien untersucht werden soll)
	Termwert berechnen(10)
	Term vereinfachen(10)
	Term faktorisieren(10)
	Term ausmultiplizieren(10)
	Terme vergleichen(10) (z. B. Untersuchen eines Funktionsgraphen auf Symmetrie)
	Wertetabelle erstellen(10)
	Grenzwert berechnen(10)
	Ableitung bestimmen
	Berechnung mit Vektoren durchführen
	Term einer Stammfunktion bestimmen
	Wert eines bestimmten Integrals berechnen
Gleichung	Gleichung lösen(10)
	Gleichungssystem lösen(10)

Graph	Graph zeichnen, geeigneten Anzeigebereich wählen(10)
	Graphen von Scharfunktionen zeichnen(10)
Daten	Punktdiagramm zeichnen (z. B. Veranschaulichen einer Messreihe) (10)
	Histogramm zeichnen
	Tabellenkalkulation durchführen
	Binomialverteilung anwenden

2 Einsatz von CAS in der Jahrgangsstufe 11

Die folgenden Vorschläge zur Gestaltung des Unterrichts liefern exemplarisch Anregungen für eine Umsetzung des Lehrplans unter Verwendung von CAS im Mathematikunterricht der Jahrgangsstufe 11. Sie zeigen, an welchen Stellen und zu welchem Zweck ein CAS gewinnbringend eingesetzt werden kann, und unterstützen Lehrkräfte damit bei der Entwicklung eigener Unterrichtsideen. Dazu wird auch immer wieder auf das vielfältige Angebot der zugelassenen Lehrbücher verwiesen.

Ausdrücklich wird darauf hingewiesen, dass die Vorschläge zur Unterrichtsgestaltung die jeweils behandelten Lehrplanabschnitte oder Lehrplaninhalte nicht vollständig abdecken. Abhängig von der jeweiligen Einsatzmöglichkeit des CAS sind die Vorschläge außerdem unterschiedlich ausführlich beschrieben.

2.1 Analysis

2.1.1 Schnelleinstieg – grundlegende Einsatzmöglichkeiten des CAS

Im Folgenden wird ein kurzer Überblick gegeben, welche Funktionen eines CAS sich insbesondere in der Analysis der Jahrgangsstufe 11 anbieten. Dieser Überblick ist nicht als vollständig zu verstehen, er vermittelt vielmehr einen kurzen Eindruck der Einsatzmöglichkeiten.

Exakte und näherungsweise Ausgabe von Eingaben bzw. Ergebnissen

Viele CAS bieten Einstellungen an, um Eingaben bzw. Ergebnisse exakt oder näherungsweise ausgeben zu lassen. Das vorliegend verwendete CAS verfügt dazu über entsprechende Buttons, mithilfe derer auch die (in der Regel standardmäßige) automatische Vereinfachung eigegebener Terme deaktiviert werden kann (und die z. B. bei gebrochen-rationalen Funktionen zu unerwünschten Informationsverlusten infolge des Kürzens von Linearfaktoren führen kann). Damit können Schülerinnen und Schüler beispielsweise ihre Eingaben überprüfen.

Zeile 1: $\boxed{=}$ ≈ ✓

Zeile 2: = $\boxed{\approx}$ ✓

Zeile 3: = ≈ $\boxed{\checkmark}$

1	(1/3)*x+2z-3x → $-\frac{8}{3}x+2z$
2	(1/3)*x+2z-3x ≈ $-2.67x+2z$
3	(1/3)*x+2z-3x ✓ $\frac{1}{3}x+2z-3x$

Funktion definieren

Je nach Syntax des verwendeten CAS werden anstelle oder ergänzend zur mathematisch üblichen Notation „:=" Befehle wie z. B. „define" angeboten. Dabei legen die CAS standardmäßig den maximal möglichen Definitionsbereich zugrunde, in einigen CAS kann dieser eingeschränkt werden. (Eingabe von Sonderzeichen im Beispiel durch Anklicken des Symbols „α")

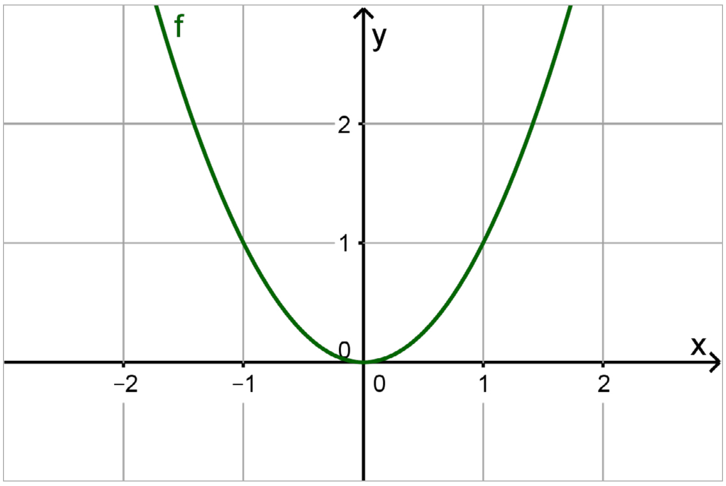
1	f(x):=x^2 → $f(x) := x^2$
2	h(x):=Funktion[x²,0,∞] → $h(x) := \text{Wenn}\left[x \geq 0, x^2\right]$

Funktionsgraph zeichnen

Je nach verwendetem CAS wird der Graph nach Definition der Funktion gleich mit ausgegeben oder kann aufgerufen werden. Im Beispiel zeigt der blaue Button in Zeile 1 (s. o.) an, dass der zugehörige Funktionsgraph bereits gezeichnet wurde. Ein Klick auf diesen Button ermöglicht es, den Graphen auszublenden. Die Farbe des Graphen entspricht der Farbe, in der der Funktionsterm dargestellt ist.

Eigenschaften der graphischen Darstellung wie Strichdicke, Farbe, Anzeigeausschnitt, Achsenskalierung, Koordinatengitter etc. können per Menü bedarfsgerecht angepasst werden.

Hinweis: Beim hier verwendeten CAS wird der Funktionsgraph entgegen der üblichen Notation mit dem Funktionsnamen bezeichnet.



Funktionswerte berechnen

Neben exakten Werten werden häufig auch Näherungswerte benötigt (Zeile 6).

Hinweis: Die Notation „$5" referenziert (dynamisch) auf die Zeile Nr. 5. Dies bedeutet, dass der Wert automatisch angepasst wird, sollte sich Zeile 5 ändern (z. B., indem der Funktionsterm von g in Zeile 4 nachträglich verändert wird).

3	f(-2) → **4**
4	g(x):=sqrt(x) → $g(x) := \sqrt{x}$
5	g(3) → $\sqrt{3}$
6	Numerisch[$5] → **1.73**

Parameter im Funktionsterm

Enthält ein Funktionsterm einen Parameter, so empfiehlt es sich, bei Verwendung eines CAS den Parameter als zweite Variable festzulegen. Damit ist im weiteren Verlauf ein flexibler Zugriff auf Funktionsterme und -werte möglich.

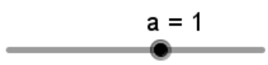
Zeile 4: Ausgabe mehrerer Funktionsterme der Schar

1	f(x,k):=x+k → $f(x,k) := k + x$
2	f(x, 1) → $x + 1$
3	f(3,1) → **4**
4	f(x,{1,2,3,4}) → $\{x+1, x+2, x+3, x+4\}$

Schieberegler

Mithilfe eines Schiebereglers (Erstellung in den Bereichen Algebra/Graphik mithilfe des Menü-Buttons) lässt sich der Wert einer Variablen im jeweils definierten Bereich in jeweils definierter Schrittweite verändern; die Variable ist sodann in allen Kontexten mit diesem Wert belegt.

Zur Verwendung eines Schiebereglers empfiehlt es sich häufig, eine neue Variable festzulegen. Nebenstehend ist „a" per Schieberegler aktuell mit dem Wert „1" belegt, „k" dagegen nicht.



5	f(x,a) → $x + 1$
6	f(x,k) → $k + x$

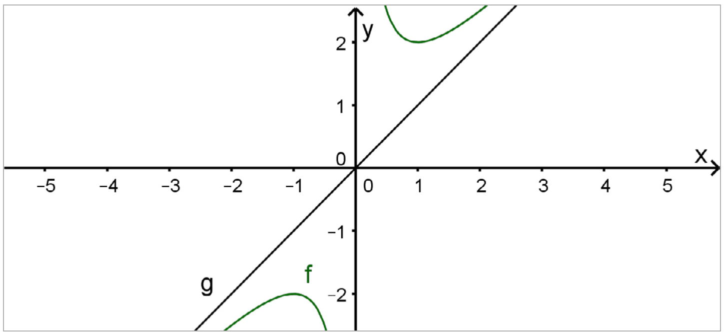
Asymptoten

Der Divisions-Befehl umfasst in der Regel auch die Möglichkeit zur Division von Polynomen.

Zeile 3: Manche CAS stellen auch einen eigenen Befehl zur Bestimmung der Gleichungen der Asymptoten eines Funktionsgraphen bereit.

Zeile 4: Zur Visualisierung von Asymptoten sind entsprechende Funktionen zu definieren. Beim hier verwendeten CAS ist alternativ die Aktivierung des dann blauen Buttons (in Zeile 3) möglich, es werden dadurch alle Asymptoten unmittelbar visualisiert.

1	f(x) := (x² + 1) / x
	→ $f(x) := \frac{x^2+1}{x}$
2	Division[x^2+1, x]
	→ $\{x, 1\}$
3	Asymptote[f(x)]
	→ $\{y = x, x = 0\}$
4	g(x) := x
	→ $g(x) := x$



Grenzwerte

Zeilen 5, 6: Verhalten im Unendlichen

Zeilen 7, 8: Verhalten an der Definitionslücke

5	Grenzwert[f(x), +∞]
	→ ∞
6	Grenzwert[f(x), -∞]
	→ $-\infty$
7	LinksseitigerGrenzwert[f(x), 0]
	→ $-\infty$
8	RechtsseitigerGrenzwert[f(x), 0]
	→ ∞

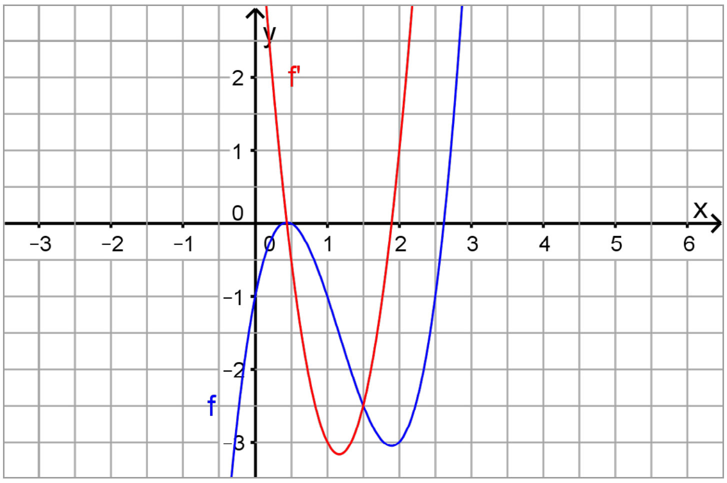
Erste Ableitung

Es empfiehlt sich, zunächst den Term der Ableitungsfunktion zu berechnen und erst in einem zweiten Schritt eine neue Funktion (hier: „ f' “) zu definieren (Grund s. u.).

Hinweis: Nicht alle CAS erlauben die Verwendung von Hochkommata für die Bezeichnung von Objekten; in solchen Fällen ist die Verwendung „sprechender“ Alternativen wie z. B f1 oder fs (und für höhere Ableitungen entsprechend f2, f3, … bzw. fss, fsss, …) zu empfehlen.

Besonders interessant für den Lehr-Lern-Prozess kann es sein, die Graphen von Funktion (blau) und Ableitungsfunktion (rot) in einem Koordinatensystem darzustellen.

1	f(x) := 2x³ - 7x² + 5x - 1
	→ $f(x) := 2x^3 - 7x^2 + 5x - 1$
2	Ableitung[f(x), x, 1]
	→ $6x^2 - 14x + 5$
3	f'(x):=$2
	→ $f'(x) := 6x^2 - 14x + 5$



Nullstellen / mögliche Extremstellen

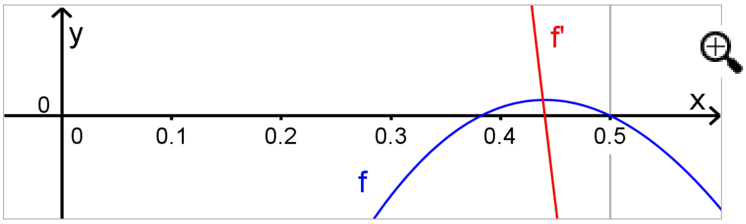
Das mit Blick allein auf den obigen Graphen u. U. überraschende Ergebnis *dreier* Nullstellen kann zum Anlass genommen werden, die Notwendigkeit eines stets kritischen Umgangs mit den Ausgaben des CAS zu thematisieren. In diesem Fall bietet es sich an, den Graphen anschließend zu „vergrößern" („zoom in").

Zeile 5: Nullstellen der ersten Ableitung als Kandidaten für Extremstellen

Zeile 6: Manche CAS stellen für die Bestimmung von Nullstellen einen eigenen Befehl bereit.

4 Löse[f(x)=0, x]

$\rightarrow \left\{x = \frac{-\sqrt{5}+3}{2}, x = \frac{1}{2}, x = \frac{\sqrt{5}+3}{2}\right\}$



5 Löse[f'(x)=0,x]

$\rightarrow \left\{x = \frac{-\sqrt{19}+7}{6}, x = \frac{\sqrt{19}+7}{6}\right\}$

6 Nullstelle[f'(x)]

$\rightarrow \left\{x = \frac{-\sqrt{19}+7}{6}, x = \frac{\sqrt{19}+7}{6}\right\}$

Art der Extrema / zweite Ableitung

Hinweis: Die zweite Ableitung wird an dieser Stelle aufgrund des passenden Zusammenhangs, unabhängig von der Verortung im Lehrplan, angeführt.

Zeilen 9, 10: Identifizieren der Extrema über die zweite Ableitung (im Beispiel möglich)

Zeilen 11, 12: Identifizieren der Extrema über das Vorzeichenverhalten der ersten Ableitung

7 Ableitung[f(x), x, 2]

$\rightarrow 12x - 14$

8 f''(x):=$7

$\rightarrow f''(x) := 12x - 14$

9 f''((-sqrt(19) + 7) / 6)

$\rightarrow -2\sqrt{19}$

10 f''((sqrt(19) + 7) / 6)

$\rightarrow 2\sqrt{19}$

11 Löse[f'(x)>0]

$\rightarrow \left\{\frac{-\sqrt{19}+7}{6} > x, x > \frac{\sqrt{19}+7}{6}\right\}$

12 Löse[f'(x)<0]

$\rightarrow \left\{\left(x > \frac{-\sqrt{19}+7}{6}\right) \wedge \left(\frac{\sqrt{19}+7}{6} > x\right)\right\}$

Graphisches Untersuchen einer Funktion

Im Gegensatz zur Arbeit ohne CAS steht eine graphische Darstellung der Funktion sofort zur Verfügung. In vielen Situationen (z. B.: Entwickeln von Vermutungen, Lösen bestimmter Aufgabenstellungen, Überprüfen von Ergebnissen auf Plausibilität) kann es didaktisch oder strategisch von Interesse sein, sich mithilfe des CAS diverse Näherungswerte zu verschaffen.

Alle CAS stellen Werkzeuge zur Verfügung, um graphische Untersuchungen durchzuführen, wie z. B. die näherungsweise Bestimmung der Koordinaten besonderer Graphenpunkte oder von Steigungen.

Das hier verwendete CAS verfügt über das

f(x) = 2x³ - 7x² + 5x - 1

Intervall | Punkte

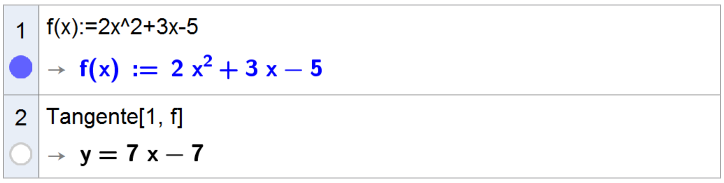
Eigenschaft	Wert
Min	(1.8931 , -3.0522)
Max	(3 , 5)
Nullstelle	2.62
Integral	-2.6667
Fläche	4.3934
Mittelwert	-1.3333
Länge	10.5087

1 ≤ x ≤ 3

Werkzeug „Funktionsinspektor“ (vgl. Screenshot, aufrufbar in den Bereichen Algebra/Graphik mithilfe des Menü-Buttons , der mit dem Winkel-Button gruppiert ist), das z. B. auch ermöglicht, durch „Verschieben“ eines ausgewählten Graphenpunkts die in diesem Punkt eingeblendete Tangente an den Graphen dynamisch mitzubewegen.

Tangente

Neben der oben geschilderten dynamischen Darstellungsvariante besteht bei den meisten CAS die Möglichkeit, die Gleichungen von Tangenten mithilfe eines speziell dafür zur Verfügung stehenden Befehls zu ermitteln.



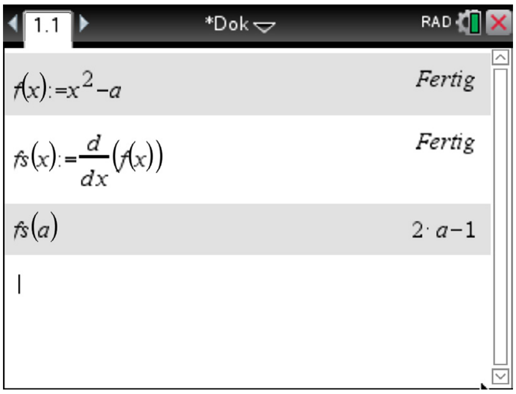
→ Hinweis zur Vorgehensweise beim Definieren der Ableitungsfunktion mit dem CAS

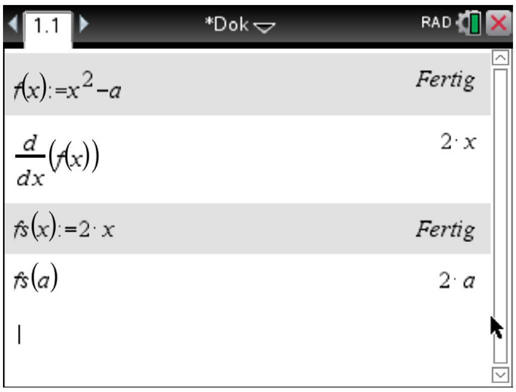
Bei einigen CAS empfiehlt es sich, zunächst jeweils den Term der Ableitungsfunktion zu berechnen und diesen erst danach, in einem zweiten Schritt, einer neuen Variablen zuzuweisen (und damit eine neue Funktion zu definieren). Verknüpft man die Zuweisung direkt mit dem Ableitungsoperator, so kann das bei diesen CAS zu unerwünschten Interpretationen führen.

Als Beispiel wird die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $f: x \mapsto x^2 - a$ betrachtet. Der Funktionsterm der ersten Ableitung ist $f'(x) = 2x$, es ist also $f'(a) = 2a$.

Nebenstehend ist der Ableitungsoperator Bestandteil der Definition von „ $fs(x)$ “. Die Anweisung „ $fs(a)$ “ führt in diesem Fall dazu, dass zunächst a in $f(x)$ eingesetzt wird (was $a^2 - a$ liefert) und anschließend (definitionsgemäß) nach a differenziert wird: $\frac{d}{da}\left(a^2 - a\right) = 2a - 1$.

Definiert man die Ableitungsfunktion dagegen nicht in Verbindung mit dem Operator, befindet man sich stets „auf der sicheren Seite“.





2.1.2 Graphen gebrochen-rationaler Funktionen

„Seit Jahrgangsstufe 8 kennen die Schüler Beispiele für gebrochen-rationale Funktionen. Sie vertiefen nun ihre Kenntnisse über diesen Funktionstyp und erweitern den aus der Anschauung gewonnenen Grenzwertbegriff für $x \to \pm\infty$ auf den Fall $x \to x_0$. Den Grobverlauf eines Graphen erschließen sie sich durch Analyse des Funktionsterms. Dabei berücksichtigen die Schüler auch schräge Asymptoten, wenn deren Gleichung unmittelbar aus dem jeweiligen Funktionsterm ersichtlich ist.“ (Fachlehrplan 2004, M 11.1.1)

Da mithilfe des CAS die Gleichung einer schrägen Asymptote auch dann verhältnismäßig einfach bestimmt werden kann, wenn deren Gleichung nicht unmittelbar aus dem gegebenen Funktionsterm ersichtlich ist, kommt dies als Vertiefungsmöglichkeit im Sinne eines Exkurses in Betracht (vgl. z. B. Arbeitsauftrag 1, Aufgabe b).

Im Zusammenhang mit den beschriebenen Vorschlägen zur Unterrichtsgestaltung kommen insbesondere folgende CAS-Grundfertigkeiten zur Anwendung:

- Term definieren
- Term faktorisieren
- Term ausmultiplizieren
- Grenzwert berechnen
- Gleichung lösen
- Graph zeichnen, geeigneten Anzeigebereich wählen

Vorschläge zur Unterrichtsgestaltung

Arbeitsauftrag 1

Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto \dfrac{x^4+2x^3-3x^2}{x^3+5x^2+3x-9}$ mit maximalem Definitionsbereich D_f. Der Graph von f wird mit G_f bezeichnet.

a) Bestimmen Sie D_f sowie die Nullstellen von f.

b) Geben Sie das Verhalten von f an den Rändern von D_f sowie die Gleichungen der Asymptoten von G_f an.

c) Zeichnen Sie G_f und seine Asymptoten unter Berücksichtigung der bisherigen Ergebnisse in ein geeignet skaliertes Koordinatensystem ein.

d) Ändern Sie im Funktionsterm von f eine Zahl so ab, dass $y = 0$ Gleichung einer Asymptote der zugehörigen geänderten Funktion ist. Begründen Sie Ihre Änderung.

Zielsetzung Übung (im Hinblick auf den Umgang mit Asymptoten auch: Vertiefung im Sinne eines Exkurses); Erkennen der Notwendigkeit, dass die Ergebnisse eines CAS kritisch betrachtet werden müssen

Voraussetzung gebrochen-rationale Funktionen und deren Graphen (Nullstellen, Polstellen, Grenzwerte und Asymptoten)

Anregung Dieser Auftrag lässt sich gut als Gruppenarbeit erweitern: Jede Gruppe untersucht dabei die Aufgaben a bis d für einen anderen Funktionsterm. Nach einer Präsentation der Ergebnisse können die Schülerinnen und Schüler in einem weiteren Arbeitsschritt eine Zusammenfassung bzgl. des Zusammenhangs zwischen Zählergrad, Nennergrad und der Art der damit in Verbindung stehenden Asymptote erstellen, z. B. in Form eines Posters.

Hinweise zur Bearbeitung

Zu a)

Zeile 1: Beim hier verwendeten CAS wird zur Eingabe des Definitionsterms gebrochen-rationaler Funktionen die Einstellung „ = ≈ ✓ “ empfohlen (vgl. Kapitel 2.1.1). Anhand eines Vergleichs mit den Ergebnissen, die bei einer alternativen Eingabe mittels

1	f(x):=(x^4+2x^3-3x^2)/(x^3+5x^2+3x-9)
	✓ $f(x) := \dfrac{x^4+2x^3-3x^2}{x^3+5x^2+3x-9}$
2	Löse[x^3+5x^2+3x-9=0]
	→ $\{x=-3, x=1\}$
3	Löse[f(x)=0]
	→ $\{x=0\}$

„= ≈ ✓“ vom CAS ermittelt werden, wird den Schülerinnen und Schülern deutlich, dass die Ergebnisse des CAS stets kritisch geprüft werden sollten.

Zeilen 4-6: Alternative Lösungswege

4	Faktorisiere[x^4+2x^3-3x^2]
	$\rightarrow\ x^2\ (x-1)\ (x+3)$
5	Faktorisiere[x^3+5x^2+3x-9]
	$\rightarrow\ (x-1)\ (x+3)^2$
6	Nullstelle[f(x)]
	$\rightarrow\ \{x=0\}$

Zu b)

Die Grenzwerte für $x \to \pm\infty$ können direkt am Funktionsterm abgelesen oder, wie dargestellt, berechnet werden.

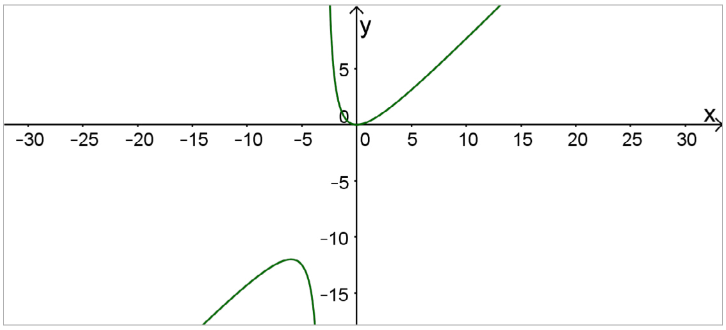
Zeile 11: Mit dem speziellen Befehl „Asymptote“ können die Gleichungen der Asymptoten direkt ausgegeben werden.

Zeile 12: Alternativ lässt sich die Gleichung der schrägen Asymptote mit dem Befehl „Division“ ermitteln, der auch die Polynomdivision umfasst.

7	LinksseitigerGrenzwert[f(x), -3]
	$\rightarrow\ -\infty$
8	RechtsseitigerGrenzwert[f(x), -3]
	$\rightarrow\ \infty$
9	LinksseitigerGrenzwert[f(x), 1]
	$\rightarrow\ \frac{1}{4}$
10	RechtsseitigerGrenzwert[f(x), 1]
	$\rightarrow\ \frac{1}{4}$
11	Asymptote[f(x)]
	$\rightarrow\ \{y = x-3, x = -3\}$
12	Division[x^4+2x^3-3x^2, x^3+5x^2+3x-9]
	$\rightarrow\ \{x-3, 9\,x^2+18\,x-27\}$

Zu c)

Das Graphikfenster gibt den Graphen von f (und bei Bedarf auch die Graphen der Asymptoten) direkt aus. Daran können sich die Schülerinnen und Schüler für die anzufertigende (möglichst genaue, vollständig beschriftete) Zeichnung orientieren. Das Graphikfenster stellt für derartige Aufgabenstellungen stets ein Hilfsmittel, jedoch keine Dokumentation dar (vgl. Kapitel 4, Lösungsdokumentation).



Arbeitsauftrag 2

Gegeben ist die Schar der Funktionen $f_n : x \mapsto \frac{(x-2)^n}{(x-2)^2}$ mit $n \in \mathbb{N}$ und maximalem Definitionsbereich D. Der Graph von f_n wird mit G_n bezeichnet.

Bearbeiten Sie die folgenden Aufgaben jeweils für $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$ und $n = 4$.

a) Geben Sie D sowie die Nullstellen von f_n an.

b) Untersuchen Sie das Verhalten von f_n an den Rändern von D und ermitteln Sie die Gleichungen der Asymptoten von G_n.

c) Zeichnen Sie G_n und seine Asymptoten in ein geeignet skaliertes Koordinatensystem ein.

d) Beschreiben Sie den Einfluss, den die Änderung des Werts des Exponenten n im Funktionsterm von f_n auf G_n hat.

Zielsetzung Übung/Vertiefung

Voraussetzung gebrochen-rationale Funktionen und deren Graphen (Nullstellen., Polstellen, Grenzwerte, Asymptoten)

Anregungen Die Schülerinnen und Schüler untersuchen die Funktionenschar arbeitsteilig (Aufteilung z. B. in „n = 1; 3“ und „n = 2; 4“), bei Bedarf zunächst nur anhand der Aufgaben a-c, und präsentieren und besprechen anschließend ihre Ergebnisse im Plenum oder in gemischten Paaren bzw. Gruppen.

Im Rahmen der Bearbeitung bzw. Besprechung bietet es sich an, allgemein den Einfluss der Änderung von Werten von Parametern in einem Funktionsterm auf den zugehörigen Graphen, insbesondere ein Verschieben des Graphen, zu wiederholen.

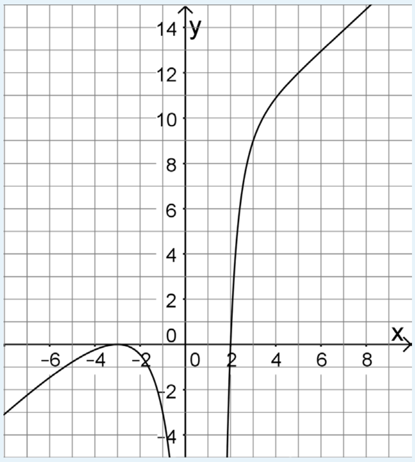
Eine Möglichkeit für einen Exkurs bietet die Untersuchung der Graphen von f_n für rationale Werte des Parameters n.

Arbeitsauftrag 3

Die Abbildung zeigt den Graphen einer gebrochen-rationalen Funktion f.

a) Ermitteln Sie einen Funktionsterm, der den Graphen möglichst gut beschreibt.

b) Ermitteln Sie anhand des Graphen auch eine geeignete Gleichung der schrägen Asymptote das Graphen von f.
Überprüfen Sie Ihr Ergebnis rechnerisch unter Einbeziehung des in Aufgabe a ermittelten Funktionsterms.



Zielsetzung Vertiefung; Verwendung des CAS auch als Werkzeug zur Kontrolle von Ergebnissen bzw. zur Entwicklung von Vermutungen

Voraussetzung Zusammenhänge zwischen Graph und Funktionsterm gebrochen-rationaler Funktionen (in Bezug auf Nullstellen, Polstellen und deren Vielfachheiten sowie auf Asymptoten)

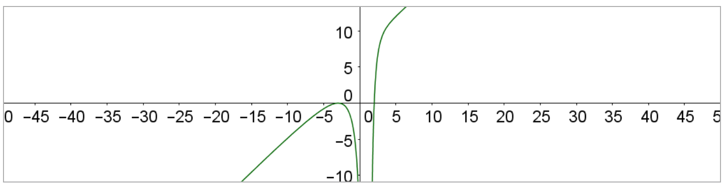
Hinweise zur Bearbeitung

Zu a)

Mithilfe des CAS lässt sich die Eignung des anhand der Analyse des Graphen aufgestellten Terms durch Vergleich des zugehörigen Graphen mit dem gegebenen Graphen prüfen; anschließend kann der Term (bei Bedarf mithilfe des CAS) ggf. geeignet modifiziert werden.

Eine sehr gute Übereinstimmung ergibt sich für den Term $\frac{(x-2)(x+3)^2}{(x-1)^2}$.

1	f(x) := ((x - 2)*(x + 3)²)/(x - 1)²
	✓ $f(x) := \frac{(x-2)\ (x+3)^2}{(x-1)^2}$



Zu b)

Überprüfen der ermittelten Gleichung (naheliegend: $y = x + 6$) z. B. anhand einer Grenzwertbetrachtung

2	g(x):=x+6
	→ $g(x) := x+6$
3	Grenzwert[f(x)-g(x), ∞]
	→ **0**
4	Grenzwert[f(x)-g(x), -∞]
	→ **0**

Arbeitsauftrag 4

Betrachtet werden gebrochen-rationale Funktionen, deren Funktionsterme sowohl im Zähler als auch im Nenner aus jeweils zwei Linearfaktoren mit jeweils maximaler Vielfachheit 2 bestehen.

a) Denken Sie sich einen solchen Funktionsterm aus und notieren Sie ihn auf einem Blatt Papier; verbergen Sie den Term vor Ihrem Nachbarn, der ebenso vorgeht wie Sie.

b) Zeichnen Sie den zum notierten Funktionsterm gehörigen Graphen und händigen Sie Ihrem Nachbarn die Zeichnung mit dem Auftrag aus, dazu einen passenden Funktionsterm zu ermitteln.

Zielsetzung Wiederholung (des Zusammenhangs zwischen der Vielfachheit einer Nullstelle bzw. einer Polstelle und dem Verlauf des zugehörigen Graphen, in Partnerarbeit auf der Grundlage selbst erstellter Aufgaben)

Voraussetzung Zusammenhänge zwischen Graph und Funktionsterm gebrochen-rationalen Funktionen (in Bezug auf Nullstellen, Polstellen und deren Vielfachheiten)

Anregungen Der Arbeitsauftrag kann vielfältig variiert werden, indem z. B.

- die Anzahl der Faktoren vergrößert wird,
- das CAS zur Erstellung des Graphen explizit nicht verwendet werden darf,
- das CAS zur Ermittlung eines passenden Funktionsterms explizit nicht verwendet werden darf oder
- zwei Schülerinnen bzw. Schüler gemeinsam eine Aufgabe stellen, die von zwei anderen Schülerinnen bzw. Schülern zu lösen ist.

Arbeitsauftrag 5 – aus Abiturprüfung 2013, Mathematik (CAS), Analysis, Aufgabengruppe II

BE

Teil 2

Gegeben ist die Schar der Funktionen $f_k : x \mapsto \frac{x^2+k}{2\cdot(x+1)}$ mit $k \in \mathbb{R}^+$ und Definitionsbereich $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

Der Graph von f_k wird mit G_k bezeichnet; Abbildung 2 zeigt G_{15}.

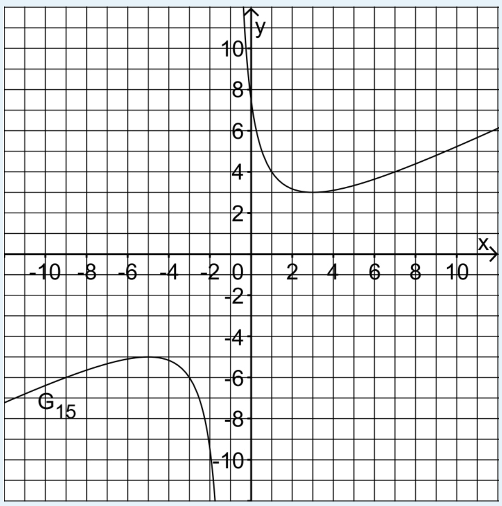


Abb. 2

1 Betrachtet wird zusätzlich die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $a : x \mapsto \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$.

3 **a)** Begründen Sie, dass der Graph von a Asymptote aller Graphen von f_k ist. Geben Sie an, für welche x-Werte G_k unterhalb und für welche x-Werte G_k oberhalb dieser schrägen Asymptote verläuft.

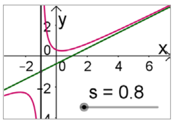
2 **b)** Geben Sie die Gleichung der weiteren Asymptote von G_k an und zeichnen Sie die beiden Asymptoten für G_{15} in Abbildung 2 ein.

4 **c)** Ermitteln Sie in Abhängigkeit von k, für welche x-Werte sich die Funktionswerte von f_k und a um weniger als $\frac{1}{4}$ unterscheiden.

Zielsetzung Abschließende Übung / Einordnung des eigenen Lernstands

Voraussetzung gemäß Lehrplan zu erwerbende Kompetenzen im Umgang mit gebrochen-rationalen Funktionen in diesem Abschnitt (M 11.1.1); Grundfertigkeiten im Umgang mit Scharparametern

Anregung Mithilfe eines Schiebereglers (mit neuer Variablen, vgl. Kapitel 2.1.1) lässt sich der Verlauf der Graphen G_k in Abhängigkeit vom Wert von k dynamisch visualisieren; so kann z. B. auch die Universalität der beiden Asymptoten anschaulich gemacht werden.



Hinweise zur Bearbeitung

Zu 1a)

Zeilen 3-5: Annäherung an den ersten Teil der Aufgabe mithilfe einer Grenzwertbetrachtung

Zeilen 6, 7: Ermittlung der Werte für die Beantwortung des zweiten Aufgabenteils

1	f(x,k):=(x^2+k)/(2(x+1)) $\rightarrow\ f(x,k) := \frac{x^2+k}{2x+2}$
2	a(x):=0.5x-0.5 $\rightarrow\ a(x) := \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$
3	i(x,k):=f(x,k)-a(x) $\rightarrow\ i(x,k) := \frac{k+1}{2x+2}$
4	Grenzwert[i(x, k), x,∞] $\rightarrow\ 0$
5	Grenzwert[i(x, k), x,-∞] $\rightarrow\ 0$
6	Löse[f(x,k)<a(x), x,k>0] $\rightarrow\ \{x < -1\}$
7	Löse[f(x,k)>a(x), x,k>0] $\rightarrow\ \{x > -1\}$

Zu 1c)

8	Löse[|f(x,k)-a(x)|<0.25,x,k>0] $\rightarrow\ \{x < -2k - 3, x > 2k + 1\}$

2.1.3 Lokales Differenzieren

„Ausgehend von graphischen Betrachtungen und numerischen Untersuchungen des Differenzenquotienten lernen die Jugendlichen den Differentialquotienten als Grenzwert kennen. Sie verstehen ihn als geeignetes Maß zur Beschreibung lokaler Änderungsraten und deuten ihn geometrisch am Graphen. Die dabei benötigten Grenzwerte ermitteln sie mithilfe elementarer Termumformungen. Die Schülerinnen und Schüler lernen die Betragsfunktion als eine Funktion kennen, die an einer Stelle ihres Definitionsbereichs nicht differenzierbar ist, und interpretieren diese Eigenschaft auch graphisch." (Fachlehrplan 2004, M 11.1.2)

Mithilfe des CAS lassen sich Rechenarbeiten im Rahmen der geforderten numerischen Untersuchungen des Differenzenquotienten wesentlich vereinfachen. Außerdem unterstützt das CAS die Veranschaulichung des Grenzübergangs von der Sekantensteigung zur Tangentensteigung und erleichtert damit das Verständnis.

Im Zusammenhang mit den beschriebenen Vorschlägen zur Unterrichtsgestaltung kommen insbesondere folgende CAS-Grundfertigkeiten zur Anwendung:

- Term definieren
- Termwert berechnen
- Term faktorisieren
- Term ausmultiplizieren
- Gleichung lösen
- Grenzwert berechnen
- Graph zeichnen, geeigneten Anzeigebereich wählen

Vorschläge zur Unterrichtsgestaltung

Arbeitsauftrag 1

Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $f: x \mapsto -0{,}5 \cdot (x-1)^2 + 3$. Der Graph von f wird mit G_f bezeichnet.

a) Berechnen Sie für $h = 3$, $h = 2$ und $h = 1$ jeweils die Steigung der Sekante, die G_f in den Punkten $P(1|3)$ und $Q_h(1+h\,|\,f(1+h))$ schneidet.

b) Zeichnen Sie G_f sowie die drei Sekanten in ein gemeinsames Koordinatensystem ein. Stellen Sie bereits jetzt eine begründete Vermutung auf, wie sich die Sekantensteigung für kleiner werdende positive Werte von h verhält. Diskutieren Sie mit Ihren Mitschülerinnen und Mitschülern!

c) Ermitteln Sie die Steigung der Sekante s_h durch die Punkte P und Q_h in Abhängigkeit von h. Kontrollieren Sie Ihr Ergebnis anhand der Werte für $h = 3$, $h = 2$ und $h = 1$.

d) Ermitteln Sie die Gleichung der Sekante s_h durch die Punkte P und Q_h in Abhängigkeit von h. Kontrollieren Sie ihr Ergebnis, indem Sie s_h für $h = 3$, $h = 2$ und $h = 1$ jeweils mithilfe des CAS darstellen.

e) Vergleichen Sie die Graphen von s_h für kleiner werdende positive Werte von h und beschreiben Sie das Verhalten für $h \to 0$. Bestimmen Sie die zugehörige Geradengleichung.

f) Ermitteln Sie die Steigung der Sekante durch die Punkte $(x\,|\,f(x))$ und $(x+h\,|\,f(x+h))$ in Abhängigkeit von x und h. Bestimmen Sie in Abhängigkeit von x die Steigung, die sich für $h \to 0$ ergibt.

Zielsetzung Erarbeitung: Ausgehend vom Differenzenquotienten können die Schülerinnen und Schüler die Bedeutung des Grenzwerts des Differenzenquotienten mithilfe des CAS selbständig entdeckend erarbeiten.

Voraussetzung Differenzenquotient

Anregungen Der Arbeitsauftrag eignet sich zur Bearbeitung in Gruppen. Innerhalb einer Gruppe teilen sich die Schülerinnen und Schüler die Berechnungen für die verschiedenen Werte von h auf – bei Bedarf können weitere Werte hinzugefügt werden. Nach Bearbeitung der Aufgaben a und b fügen die Schülerinnen und Schüler ihre Ergebnisse in der Gruppe zusammen und bearbeiten die weiteren Aufgaben gemeinsam. Für die Aufgaben b und e bietet sich die Placemat-Methode an.

Diese Aufgabe kann auch gut zur Demonstration eingesetzt werden, wenn nicht alle Schülerinnen und Schüler über ein CAS verfügen. So können z. B. zunächst die Aufgaben a bis d in Partnerarbeit gelöst werden, um schließlich – nach einer zwischengeschalteten Besprechung der Ergebnisse – die restlichen Aufgaben mithilfe eines projizierten CAS gemeinsam im Plenum zu bearbeiten.

Hinweise zur Bearbeitung

Zu a)

Der Differenzenquotient kann im CAS definiert und für verschiedene Werte berechnet werden.

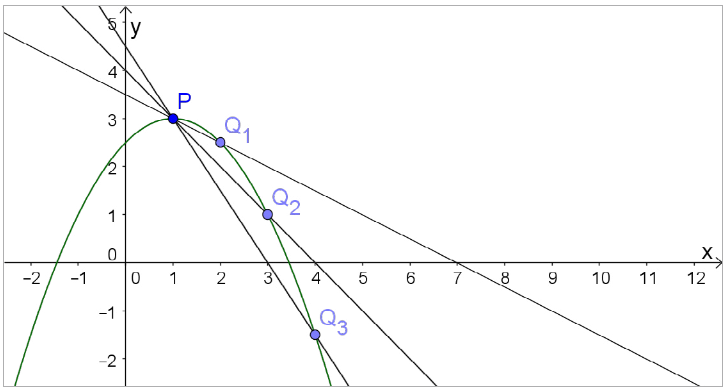
Einige CAS geben im Zuge der Definition des Differenzenquotienten unmittelbar den Term für die Sekantensteigung in Abhängigkeit von h aus.

1	f(x):=-0.5(x-1)^2 +3 $\rightarrow\ f(x) := -\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{5}{2}$
2	df(x,h):=(f(x+h)-f(x))/h $\rightarrow\ df(x,h) := -\frac{1}{2}h - x + 1$
3	df(1,{3,2,1}) $\rightarrow\ \left\{-\frac{3}{2}, -1, -\frac{1}{2}\right\}$

Zu b)

Die Sekanten können mithilfe der Punkte P und Q_3, Q_2 bzw. Q_1 gezeichnet werden.

Anhand der Graphik können die Schülerinnen und Schüler unmittelbar erkennen, dass sich die Sekantensteigung für kleiner werdende Werte von h der Steigung der Tangente an G_f im Punkt P annähert.



Zu c)

Der Term für die Steigung von s_h lässt sich direkt ausgeben.

Hinweis: Selbstverständlich müssen die Schülerinnen und Schüler in der Lage sein, insbesondere die Gleichungen der Sekanten auch manuell zu bestimmen. Mithilfe des CAS können sie sich an dieser Stelle jedoch auf die mathematischen Zusammenhänge, die bewusste Auswahl mathematischer Verfahren sowie die Interpretation der Ergebnisse konzentrieren.

4 df(1,h)

$\rightarrow -\frac{1}{2}\,h$

Zu d)

Die Gleichung der Sekante in Abhängigkeit von h lässt sich nach entsprechender Vorüberlegung mit dem CAS in einem Schritt aufstellen (Zeile 5) und für die verschiedenen Werte von h ausgeben (Zeilen 6-8).

Die Ergebnisse lassen sich sowohl algebraisch als auch graphisch überprüfen (vgl. Aufgabe c).

5 s(x,h):=df(1,h)*x+f(1)-df(1,h)*1

$\rightarrow s(x,h) := -\frac{1}{2}\,h\,x + \frac{1}{2}\,h + 3$

6 g(x):=s(x, 3)

$\rightarrow g(x) := -\frac{3}{2}\,x + \frac{9}{2}$

7 p(x):=s(x, 2)

$\rightarrow p(x) := -x + 4$

8 q(x):=s(x, 1)

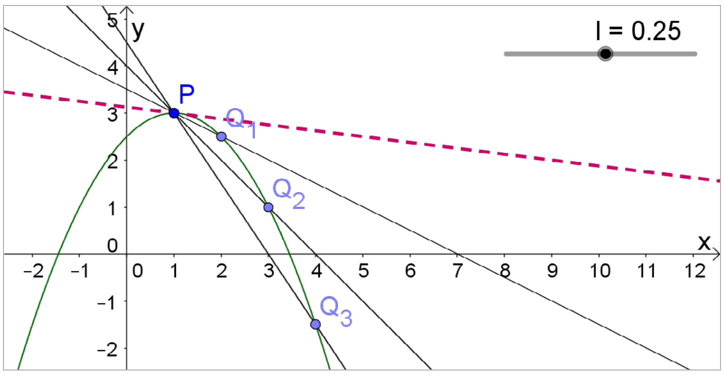
$\rightarrow q(x) := -\frac{1}{2}\,x + \frac{7}{2}$

Zu e)

Die Verwendung der vom CAS bereitgestellten Werkzeuge, mit deren Hilfe sich Parameterwerte auf einfache Weise variieren lassen, bietet sich insbesondere bei Verwendung der Aufgabe zur Demonstration an.

Um den Parameter h mit Blick auf die noch folgenden Aufgabenteile nicht mit einem festen Wert zu belegen, wurde für den Schieberegler eine neue Variable verwendet (vgl. Kapitel 2.1.1).

Zeile 9: Als Grenzwert für $h \rightarrow 0$ ergibt sich die Gleichung der zugehörigen „Sekante" zu $y = 3$.



9 Grenzwert[s(x,h), h, 0]

$\rightarrow 3$

Zu f)

Die sich für $h \to 0$ ergebende Steigung der Tangente an G_f im Punkt $(x \mid f(x))$ lässt sich unmittelbar aus Zeile 2 ermitteln.

10	Grenzwert[df(x, h), h,0]
	$\to\ -x+1$

Arbeitsauftrag 2 – aus Abiturprüfung 2013, Mathematik (CAS), Analysis, Aufgabengruppe I, Teil 2

BE	Teil 2
	1 Gegeben ist die Schar der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen $f_{a,b}: x \mapsto ax \cdot e^{-bx^2}$ mit $a,b \in \mathbb{R}^+$.
	(…)
	Nun wird die Schar der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen $g_c: x \mapsto f(x)+c$ mit $c \in \mathbb{R}$ betrachtet. Dabei ist f die Funktion $f_{a,b}$ mit $a=2$ und $b=\frac{1}{2}$, d. h. $g_c(x) = 2x \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2} + c$.
	2 (…)
4	**d)** Betrachtet werden die mittlere Änderungsrate m_S von g_c im Intervall $[-d;d]$ mit $d \in \mathbb{R}^+$ sowie die lokale Änderungsrate m_T von g_c an der Stelle $x=0$. Bestimmen Sie d – auf zwei Dezimalen genau – so, dass m_S von m_T um 10 % abweicht.

Zielsetzung Vertiefung: Die Schülerinnen und Schüler sollen in diesem Auszug aus einer Abituraufgabe zu einer vorgegebenen Bedingung passende Intervallgrenzen finden.

Voraussetzung gemäß Fachlehrplan im Abschnitt „M 11.1.2 Lokales Differenzieren" zu erwerbende Kompetenzen

Anmerkung In der zugehörigen "klassischen" Abituraufgabe soll zu einem gegebenem Intervall die prozentuale Abweichung berechnet werden, was sich mit dem CAS ohne großen Aufwand durchführen lässt. Die vorliegende Aufgabe zeigt exemplarisch, wie „klassische" Aufgaben mit Blick auf die Möglichkeiten eines CAS adaptiert werden können.

Hinweise zur Bearbeitung

Zu 2d)

Für die Abschätzung ist die Gleichung $\frac{|m_S - m_T|}{m_T} = 0{,}1$ zu lösen (vgl. Zeile 5).

Zeile 1: Da der Parameter c im Folgenden nicht mit einem konkreten Wert belegt werden muss, bietet es sich zur Vereinfachung der anschließenden Eingaben an, ihn abweichend von der allgemeinen Empfehlung (vgl. Kapitel 2.1.1) hier nicht als Variable zu deklarieren.

1	gc(x) := 2x exp((-1)/2 x²) + c
	$\to\ \mathbf{gc(x) := 2\,x\,e^{-\frac{1}{2}x^2} + c}$
2	dmt(h):=(gc(0 + h) - gc(0)) / h
	$\to\ \mathbf{dmt(h) := 2\,e^{-\frac{1}{2}h^2}}$
3	Grenzwert[dmt(h),h,0]
	$\to\ \mathbf{2}$
4	ms:=(gc(d) - gc(-d)) / (2d)
	$\to\ \mathbf{ms := 2\,e^{-\frac{1}{2}d^2}}$
5	Löse[|(ms-2)/2|=0.1, d,d>0]
	$\approx\ \{\mathbf{d = 0.46}\}$

2.1.4 Globales Differenzieren

„Lokal ermittelte Werte für die Ableitung führen zum Begriff der Ableitungsfunktion. Die Schüler lernen, Potenzfunktionen mit ganzzahligen Exponenten zu differenzieren, und erarbeiten Regeln, die es ihnen erlauben, rationale Funktionen abzuleiten. Die Aufgabe, zu gegebener Ableitungsfunktion eine zugehörige Funktion zu finden, führt die Jugendlichen zum Begriff der Stammfunktion. Sie lernen auch, allein aus dem Graphen einer Funktion auf den Verlauf der Graphen der zugehörigen Ableitungsfunktion und möglicher Stammfunktionen zu schließen." (Fachlehrplan 2004, M 11.1.3)

Das CAS dient bis zur Einführung der Ableitungsregeln als Hilfsmittel zur Bestimmung von Ableitungen mithilfe des Differentialquotienten. Lässt sich eine Ableitung in dieser Phase auch manuell mit angemessenem Aufwand bestimmen, so kann das Ergebnis mithilfe des CAS kontrolliert werden. Später unterstützt das CAS eine Verschiebung der Schwerpunkte mathematischen Arbeitens, indem es – insbesondere bei der Bearbeitung realistischer Anwendungsaufgaben – vom Ausführen bloßer Routinen entlastet (vgl. dazu insbesondere Kapitel 2.1.8).

Selbstverständlich muss stets darauf geachtet werden, dass die Schülerinnen und Schüler auch eine Sicherheit bei der manuellen Bestimmung von Ableitungsfunktionen mithilfe der Ableitungsregeln gewinnen. Entsprechende Übungsphasen dürfen nicht vernachlässigt werden; auf eine Verwendung des CAS sollte immer wieder gezielt verzichtet werden.

Im Zusammenhang mit den beschriebenen Vorschlägen zur Unterrichtsgestaltung kommen insbesondere folgende CAS-Grundfertigkeiten zur Anwendung:

- Term definieren
- Grenzwert berechnen
- Ableitung bestimmen
- Wertetabelle erstellen
- Graph zeichnen, geeigneten Anzeigebereich wählen
- Tabellenkalkulation durchführen

Vorschläge zur Unterrichtsgestaltung

Arbeitsauftrag 1

Gegeben ist die Funktion $f : x \mapsto 0{,}5x^2 + 3x + 2$ mit Definitionsbereich $\mathbb{R}$. Der Graph von f wird mit G_f bezeichnet.

a) Zeichnen Sie G_f in ein geeignet skaliertes Koordinatensystem ein.

Für $x \in \mathbb{R}$ und $h \in \mathbb{R}^+$ werden die Quotienten $df(x,h) := \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ betrachtet.

b) Ergänzen Sie die folgende Wertetabelle für $x = -6$, $x = -5$, …, $x = 0$.

x	$f(x)$	$df(x,1)$	$m(x) := \lim\limits_{h\to 0} df(x,h)$

c) Interpretieren Sie $df(x,1)$ und $m(x)$ als Terme von Funktionen mit Definitionsbereich $\mathbb{R}$ und zeichnen Sie die Graphen dieser beiden Funktionen in das Koordinatensystem aus Aufgabe a ein.

d) Ersetzen Sie in der dritten Spalte Ihrer Wertetabelle $df(x,1)$ durch $df\left(x,\frac{1}{2}\right)$. Interpretieren Sie auch $df\left(x,\frac{1}{2}\right)$ als Term einer Funktion mit Definitionsbereich $\mathbb{R}$ und zeichnen Sie den Graphen dieser Funktion in das Koordinatensystem aus Aufgabe a ein.

e) Betrachten Sie die Nullstellen der Funktionen aus den Aufgaben c und d anhand der Graphen. Was lässt sich für immer kleiner werdende Werte von h folgern? Begründe Sie Ihre Antwort.

f) Untersuchen Sie, ob sich Ihre Erkenntnisse aus Aufgabe e auch auf andere Funktionen, z. B. auf die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $g : x \mapsto 0{,}5x^3 - x^2 + 1$, übertragen lassen. Beschreiben Sie Ihr Vorgehen.

Zielsetzung Erarbeitung (des Übergangs von einer Funktion, die die Sekantensteigung $df(x,h)$ für einen festen Wert von h in Abhängigkeit von x beschreibt, zur Ableitungsfunktion)

Voraussetzung Sekantensteigung, Tangentensteigung, lokales Differenzieren

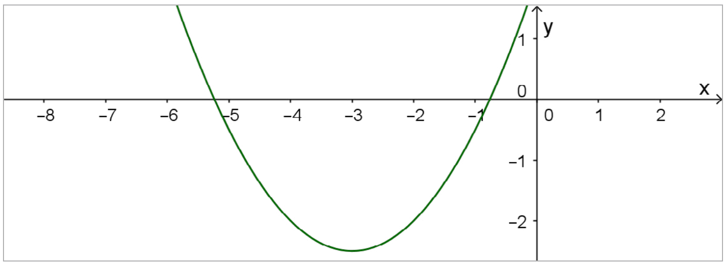
Anmerkungen Der Arbeitsauftrag ist als anspruchsvoll einzustufen. Die mit herkömmlichen Methoden zeitaufwändigen Berechnungen können dabei jedoch mithilfe des CAS verhältnismäßig einfach durchgeführt werden.

Diese Aufgabe kann gut in Gruppen bearbeitet werden (vgl. Kapitel 2.1.2, Arbeitsauftrag 1). Die Aufgabe eignet sich auch zur Demonstration, falls nicht genügend CAS-Geräte vorhanden sind.

Hinweise zur Bearbeitung

Zu a)

Das Graphikfenster (vgl. Screenshot) stellt stets nur ein Hilfsmittel und keine Dokumentation dar (vgl. Kapitel 4).

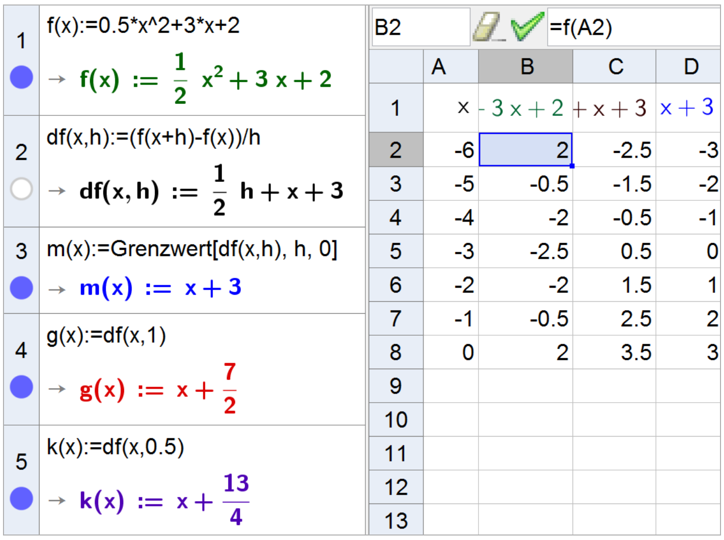


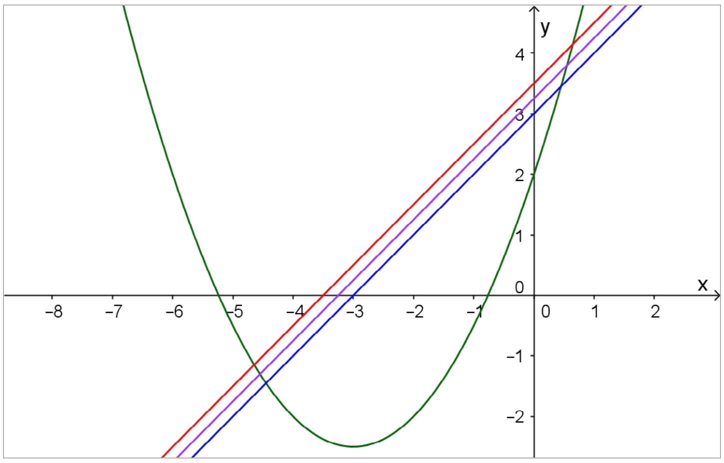
Zu b), c) und d)

Mit dem CAS können die Schülerinnen und Schüler insbesondere im Rahmen der Bearbeitung der Aufgabe b aufwändige Berechnungen relativ schnell durchführen.

Für einen besseren Überblick wurden in Zeile 1 der Tabelle die zugehörigen Terme eingetragen (die im Screenshot z. T. nicht vollständig sichtbar sind). Die Eingabe „= f" in Zelle B1 führt zur Ausgabe des vorher definierten Funktionsterms. Der Graph zu einer in einer Zelle eingegebenen Funktion wird im Graphikfenster unmittelbar dargestellt (und muss dann, sofern nicht benötigt, ausgeblendet werden).

Der Funktionswert $f(2)$ wird durch die Eingabe „$=f(A2)$" in Zelle B2 direkt berechnet. Die weiteren Funktionswerte können berechnet werden, indem bei Zelle B2 das blaue Quadrat rechts unten nach unten gezogen wird.





Zu e)

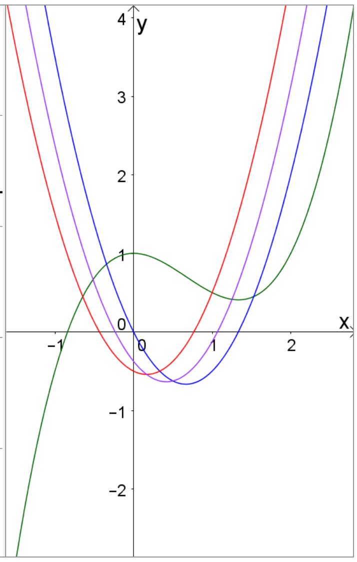
Ist x Nullstelle von $df(x,1)$, so stimmen an dieser Stelle der Funktionswert $f(x)$ und der Funktionswert $f(x,1)$ überein; die mittlere Änderungsrate ist an dieser Stelle gleich null. Je kleiner der Wert von h ($h>0$) ist, desto näher ist dieser x-Wert demjenigen des Scheitelpunkts der Parabel. Die Stelle, für die $m(x)=0$ ist, entspricht dem Grenzwert dieses Prozesses – die Steigung der Tangente an G_f im zugehörigen Graphenpunkt ist null.

Zu f)

Um die neue Situation zur erhalten, ist lediglich in Zeile 1 der Funktionsterm zu ändern, die weiteren Zeilen sowie die Graphen werden automatisch aktualisiert.

Anhand der Graphen können die Schülerinnen und Schüler erkennen, dass auch hier die Stellen, für die $m(x)=0$ ist, mit den x-Werten der Punkte, in denen die Steigung der Tangente an den Graphen gleich null ist, übereinstimmen.

1	f(x):=0.5*x^3-x^2+1 $\rightarrow$ $f(x) := \frac{1}{2}x^3 - x^2 + 1$
2	df(x,h):=(f(x+h)-f(x))/h $\rightarrow$ $df(x,h) := \frac{1}{2}h^2 + \frac{3}{2}x^2 +$
3	m(x):=Grenzwert[df(x,h), h, 0] $\rightarrow$ $m(x) := \frac{3}{2}x^2 - 2x$
4	g(x):=df(x,1) $\rightarrow$ $g(x) := \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$
5	k(x):=df(x,0.5) $\rightarrow$ $k(x) := \frac{3}{2}x^2 - \frac{5}{4}x - \frac{3}{8}$



Arbeitsauftrag 2

Ermitteln Sie zu den folgenden in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen jeweils für mehrere Parameterwerte den Term der zugehörigen Ableitungsfunktion mithilfe des CAS. Stellen Sie jeweils eine Vermutung für eine allgemeingültige Ableitungsregel auf und überprüfen Sie Ihre Vermutung für die Funktionen f und g, indem Sie jeweils den Differentialquotienten manuell berechnen; für die Funktion h darf zur Überprüfung der Vermutung das CAS verwendet werden.

a) $f: x \mapsto 3x^2 + bx + 2,\ b \in \mathbb{R}$ **b)** $g: x \mapsto 4x^3 - c,\ c \in \mathbb{R}$ **c)** $h: x \mapsto 3x^n,\ n \in \mathbb{Z}$

Zielsetzung Erarbeitung: Die Schülerinnen und Schüler entdecken erste Ableitungsregeln und bestätigen diese durch die Berechnung des Differentialquotienten. Die Schülerinnen und Schüler sollen hier bewusst selbst Strukturen erkennen, um Vermutungen aufstellen zu können – auf eine direkte Berechnung der Ableitung des allgemeinen Funktionsterms mithilfe des CAS soll an dieser Stelle noch bewusst verzichtet werden. Bei der Bearbeitung der Aufgabe festigen die Schülerinnen und Schüler ihre Fertigkeiten sowohl hinsichtlich der manuellen als auch der CAS-gestützten Berechnung des Differentialquotienten.

Voraussetzung Differentialquotient (insbesondere: dessen Berechnung)

Hinweise zur Bearbeitung

Zu a) und b)

Die CAS-Ausgabe führt unmittelbar zu der Vermutung $f'(x)=6x+b$ bzw. $g'(x)=12x^2$.

Die manuelle Berechnung gibt den Schülerinnen und Schülern Sicherheit im Umgang mit dem Differentialquotienten. Diese soll immer wieder bewusst gefestigt werden.

1	Ableitung[3*x^2+{3, 2,1}*x+2,x] $\rightarrow$ $\{6x+3, 6x+2, 6x+1\}$
2	Ableitung[4*x^3-{3,2,1}, x] $\rightarrow$ $\{12x^2, 12x^2, 12x^2\}$

Zu c)

Zeile 3: Die CAS-Ausgabe führt, nach eingehender Analyse, auf die Vermutung $h'(x)=3nx^{n-1}$.

Sowohl die direkte Ableitung „mit Parameter" (Zeile 4) als auch die Berechnung der Ableitung über den Differentialquotienten (Zeilen 5-7) bestätigen die Vermutung.

3	Ableitung[3*x^{3,2,1,0,-1,-2}, x] $\rightarrow$ $\left\{9x^2, 6x, 3, 0, -\frac{3}{x^2}, -\frac{6}{x^3}\right\}$
4	Ableitung[3*x^n] $\rightarrow$ $3nx^{n-1}$
5	dh(x,k):=(3*(x+k)^n-3*x^n)/k $\rightarrow$ $dh(x,k) := \frac{-3x^n + 3(k+x)^n}{k}$

6	Grenzwert[dh(x, k), k,0] $\rightarrow\ 3\,n\,\dfrac{e^{n\ln(x)}}{x}$
7	Vereinfache[$6] $\rightarrow\ 3\,n\,\dfrac{x^n}{x}$

Arbeitsauftrag 3

Gegeben sind die folgenden Terme von in ℝ definierten Ableitungsfunktionen.

i. $f(x) = 3x^2$ **ii.** $g(x) = 8x^4 + 2x + 5$ **iii.** $h(x) = \dfrac{3}{x^3} - 3$

a) Bestimmen Sie jeweils einen Funktionsterm, sodass dieser abgeleitet dem gegebenen Funktionsterm entspricht. Beschreiben Sie Ihr Vorgehen.

b) Vergleichen Sie Ihren jeweiligen Funktionsterm mit dem Ihres Nachbarn. Gibt es weitere Terme, und wenn ja, welche? Begründen Sie Ihre Antwort.

Zielsetzung Erarbeitung: Ausgehend von grundlegenden Ableitungsregeln entdecken die Schülerinnen und Schüler eine wesentliche Eigenschaft der bis dato noch unbekannten Stammfunktionen. Der Begriff selbst kann unmittelbar im Anschluss an die in Aufgabe b zu führende Diskussion eingeführt werden.

Voraussetzung Ableitungsregeln zu den gewählten Funktionstypen

Anregung Die Aufgabe kann durch Modifikation der zu betrachtenden Funktionen insbesondere im Schwierigkeitsgrad angepasst werden.

Hinweise zur Bearbeitung

Zu a)

Z. B. durch systematisches Probieren finden die Schülerinnen und Schüler passende Lösungen (rechts exemplarisch dargestellt für Beispiel iii).

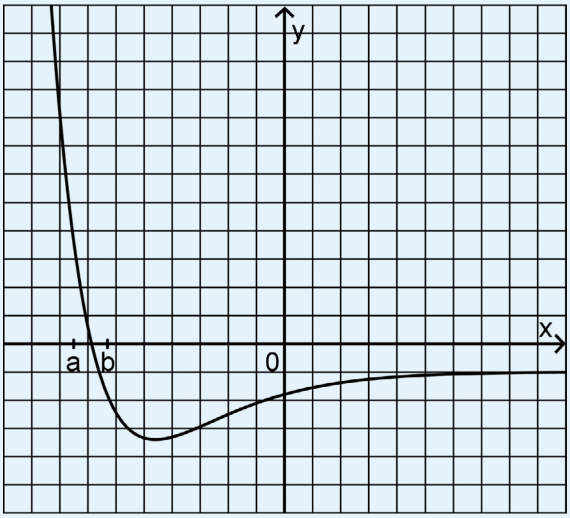
3	Ableitung[x^(-2)-3] $\rightarrow\ -\dfrac{2}{x^3}$
4	Ableitung[-x^(-2)/2*3-3x] $\rightarrow\ -3 + \dfrac{3}{x^3}$

Zu b)

Durch den Vergleich sowie durch erneutes Überdenken sollen die Schülerinnen und Schüler selbständig erkennen, dass es zahlreiche Lösungen gibt, die sich nur in einer additiven Konstante unterscheiden, die gemäß Ableitungsregel beim Ableiten „wegfällt“ (rechts exemplarisch dargestellt für Beispiel i).

5	Ableitung[x^3+1] $\rightarrow\ 3\,x^2$
6	Ableitung[x^3+c] $\rightarrow\ 3\,x^2$

Arbeitsauftrag 4 – aus Abiturprüfung 2014, Mathematik (CAS), Analysis, Aufgabengruppe 1

BE	**Prüfungsteil A (Bearbeitung ohne Hilfsmittel)**
	4 Die Abbildung zeigt den Graphen einer Funktion f.
	
2	**a)** Beschreiben Sie für $a \leq x \leq b$ den Verlauf des Graphen einer Stammfunktion von f.
3	**b)** Skizzieren Sie in der Abbildung den Graphen einer Stammfunktion von f im gesamten dargestellten Bereich.
	Ergänzung (nicht Bestandteil der Abiturprüfung 2014):
3	**c)** Skizzieren Sie in der Abbildung den Graphen der Ableitungsfunktion von f.

Zielsetzung Anhand dieser bewusst dem Prüfungsteil A entnommenen Abituraufgabe können die Schülerinnen und Schüler ihre manuellen Kompetenzen im Umgang mit den graphischen Zusammenhängen von Stammfunktion und Ableitungsfunktion (weiter)entwickeln. Diese Aufgabe kann sowohl zum ersten Einüben als auch z. B. zur Wiederholung eingesetzt werden.

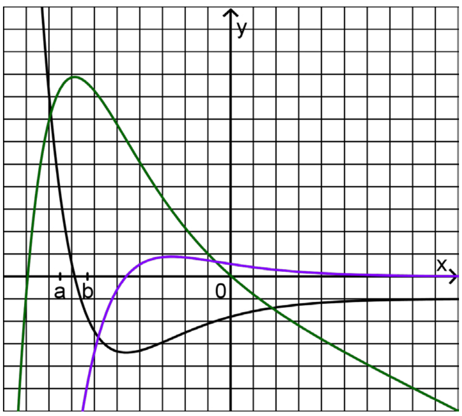
Voraussetzung graphische Zusammenhänge zwischen Funktion, Ableitungsfunktion und Stammfunktion

Hinweise zur Bearbeitung

Zu b) und c)

grün: Graph einer möglichen Stammfunktion

violett: Graph der Ableitungsfunktion



2.1.5 Anwendungen der ersten Ableitung – Newton-Verfahren

„Die Schüler erkennen, dass mithilfe der Ableitungsfunktion präzisere Aussagen über den Verlauf von Funktionsgraphen und das Änderungsverhalten von Funktionen gemacht werden können. Mit dem Newton-Verfahren lernen sie, ein effizientes iteratives Verfahren anzuwenden, das mithilfe der Ableitung Näherungswerte für Nullstellen liefert, die sich mit den bisherigen Kenntnissen nicht berechnen lassen.“ (Fachlehrplan 2004, M 11.1.4)

CAS bieten – neben der Implementierung bei der numerischen Lösung von Gleichungen – verschiedene Möglichkeiten, das Newton-Verfahren mit verhältnismäßig geringem Zeitaufwand schrittweise durchzuführen (z. B. Tabellenkalkulation, Berechnung mithilfe einer Folge, Programmierung des Newton-Verfahrens). Bei Einsatz eines CAS lässt sich die Idee des Verfahrens graphisch und symbolisch veranschaulichen. Der Einfluss des Startwerts auf das Ergebnis des Verfahrens kann am Graphen oder mithilfe der Tabellenkalkulation von den Schülerinnen und Schülern selbständig experimentell untersucht werden. Darüber hinaus können Gründe für den Erfolg des Newton-Verfahrens oder auch dessen Misserfolg hinsichtlich der Annäherung an eine bestimmte Nullstelle anschaulich plausibel gemacht werden.

Im Zusammenhang mit den beschriebenen Vorschlägen zur Unterrichtsgestaltung kommen insbesondere folgende CAS-Grundfertigkeiten zur Anwendung:

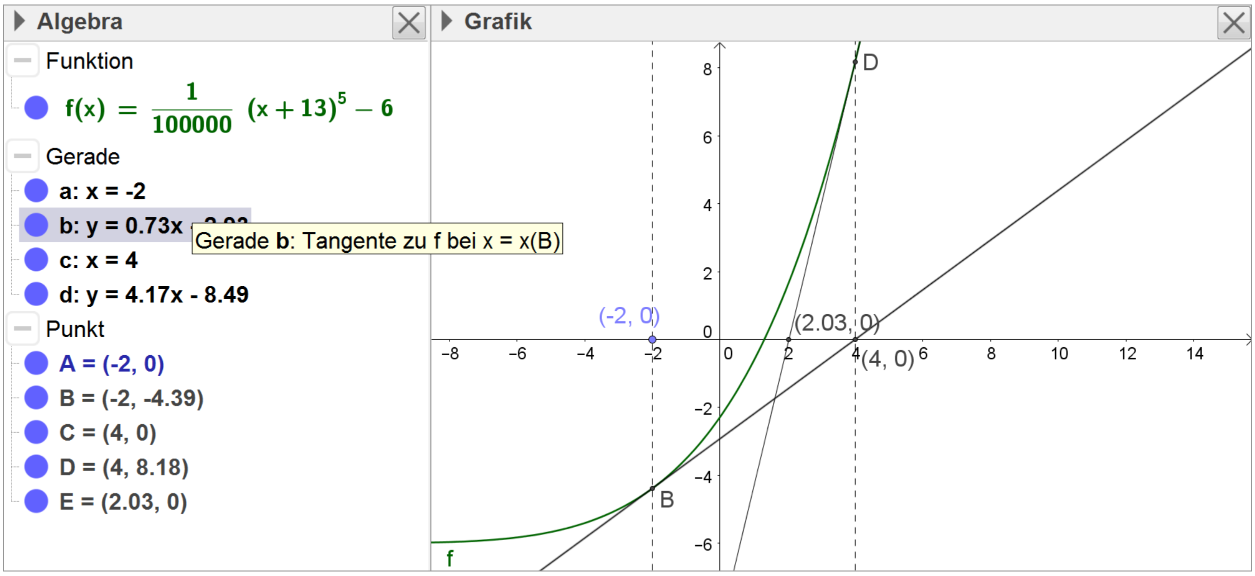
- Taschenrechner
- Term definieren
- Termwert berechnen
- Wertetabelle erstellen
- Gleichung lösen
- Ableitung bestimmen
- Graph zeichnen, geeigneten Anzeigebereich wählen
- Tabellenkalkulation durchführen

Vorschläge zur Unterrichtsgestaltung

Es bietet sich an, den Schülerinnen und Schülern zunächst anhand von Beispielen zu verdeutlichen, dass die Möglichkeiten einer manuellen Berechnung der Nullstellen einer Funktion begrenzt sind. Dabei liegt die Frage nahe, wie das CAS die Nullstellen ganzrationaler Funktionen ermittelt. Falls keiner der bekannten analytischen Lösungswege möglich ist, greifen auch moderne CAS in der Regel noch auf das Newton-Verfahren zurück.

Anschließend kann das Newton-Verfahren mit der zugehörigen Iterationsvorschrift $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ erarbeitet werden.

Die geometrische Konstruktion sollte sowohl manuell als auch mithilfe des CAS durchgeführt werden. Eine Veränderung des zugrunde liegenden Funktionsterms wird vom CAS automatisch für die Konstruktion übernommen. Insbesondere können so später die verschiedenen Fälle, in denen das Newton-Verfahren nicht zum gewünschten Ziel führt, anschaulich untersucht werden.



Nach Festlegen der x-Koordinate eines Punkts auf der x-Achse als Startwert (hier $x_0 = -2$) wird in diesem Punkt ein Lot auf dieselbe errichtet (hier gestrichelt eingezeichnet). Im Schnittpunkt des Lots mit dem Funktionsgraphen wird an diesen eine Tangente angelegt. Der Schnittpunkt der Tangente mit der x-Achse ist nun Ausgangspunkt für den nächsten Iterationsschritt.

Die Voraussetzungen dafür, dass das Newton-Verfahren zum gewünschten Ziel führt, sollten bei der Auswahl der Funktion und des Startwerts berücksichtig werden. Die geometrische Konstruktion kann dann mit den Schülerinnen und Schülern erarbeitet werden.

Da das CAS unabhängig von konkreten Funktionstermen symbolisch rechnen kann, ist auch denkbar, die Formel für das Newton-Verfahren mithilfe des CAS als Rechenwerkzeug allgemein herzuleiten bzw. zu verifizieren.

1	Tangente[x_n, f(x)] $\rightarrow\ y = -x_n\, f'(x_n) + x\, f'(x_n) + f(x_n)$
2	RechteSeite[$1] $\rightarrow\ -x_n\, f'(x_n) + x\, f'(x_n) + f(x_n)$
3	Löse[$2 = 0,x] $\rightarrow\ \left\{x = \frac{x_n\, f'(x_n) - f(x_n)}{f'(x_n)}\right\}$
4	x_{n+1}:=RechteSeite[Element[$3,1]] $\rightarrow\ x_{n+1} := \frac{x_n\, f'(x_n) - f(x_n)}{f'(x_n)}$

Arbeitsauftrag 1

Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$ mit Definitionsbereich $\mathbb{R}$.

a) Begründen Sie, dass die Funktion f genau drei Nullstellen besitzt.

b) Berechnen Sie mithilfe des Newton-Verfahrens die Nullstellen der Funktion f jeweils auf zwei Dezimalen genau.

c) Untersuchen Sie den Einfluss des Startwerts auf das Ergebnis des Newton-Verfahrens. Gibt es Startwerte, bei denen das Verfahren nicht wie gewohnt funktioniert? Erläutern Sie Ihre Erkenntnisse sowohl graphisch als auch rechnerisch.

Zielsetzung Übung/Erarbeitung: Die Schülerinnen und Schüler führen eine typische Anwendung des ihnen bekannten Newtonverfahrens durch und können dabei entdecken, dass Startwerte existieren, bei denen das Verfahren nicht zum gewünschten Ergebnis führt.

Voraussetzung Newton-Verfahren (Grundlagen, Durchführung)

Hinweise zur Bearbeitung

Zu a)

Zur Begründung dafür, dass eine vorgegebene Funktion eine bestimmte Anzahl von Nullstellen besitzt, sowie ergänzend zur Ermittlung der Intervalle, in denen sich die Nullstellen der Funktion befinden, bieten sich infolge des großen Funktionsumfangs eines CAS – abgesehen von der naheliegenden Möglichkeit, zunächst die zugehörige Gleichung mit dem CAS näherungsweise zu lösen bzw., sofern vorhanden, einen Befehl wie „Nullstelle[]“ zu nutzen oder auch den „Funktionsinspektor“ (vgl. Kapitel 2.1.1) zu bemühen – unterschiedliche Strategien an:

Mit dem CAS können der Term der Ableitung, deren Nullstellen und das Vorzeichenverhalten der Ableitung bestimmt werden.

1	f(x):=2x^3+3x^2-12x+1 $\rightarrow\ f(x) := 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$
2	Ableitung[f] $\rightarrow\ 6x^2 + 6x - 12$
3	f'(x):=6x² + 6x - 12 $\rightarrow\ f'(x) := 6x^2 + 6x - 12$

Zeilen 4, 5: Vorzeichenbetrachtung der Ableitung

Zeilen 6, 7: Ermittlung der Funktionswerte an den Extremstellen

Der Graph von f hat demnach einen Tiefpunkt bei $(-2|21)$ und einen Hochpunkt bei $(1|-6)$.

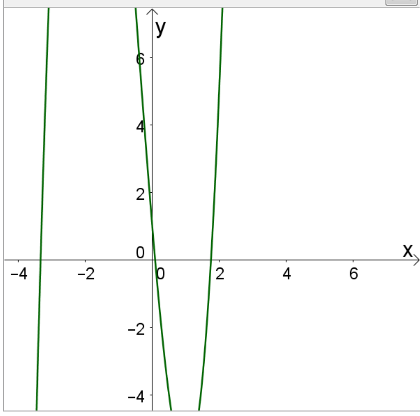
Zeilen 8, 9: Da außerdem $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ und $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ gilt, folgt, dass f genau drei Nullstellen besitzt.

4	Löse[f'(x)=0]
	→ $\{x = -2, x = 1\}$
5	Löse[f'(x)<0]
	→ $\{-2 < x < 1\}$
6	f(-2)
	→ 21
7	f(1)
	→ -6
8	Grenzwert[f(x), -∞]
	→ $-\infty$
9	Grenzwert[f(x), ∞]
	→ ∞

Alternativ können zur Begründung einzelne Funktionswerte herangezogen werden, z. B. $f(-4) = -31$, $f(0) = 1$, $f(1) = -6$ und $f(3) = 46$. (Da die Funktion dritten Grades ist, hat sie maximal drei Nullstellen.)

Intervalle, in denen sich die Nullstellen befinden – z. B. $[-4;-3]$, $[0;1]$ und $[1;2]$ – können mit dem CAS bei Bedarf z. B. anhand des Graphen von f oder mithilfe einer Wertetabelle ermittelt werden.

Grafik



Tabelle

B1 =f(A1)

	A	B
1	-4	-31
2	-3	10
3	-2	21
4	-1	14
5	0	1
6	1	-6
7	2	5
8	3	46
9	4	129
10	5	266

Zu b)

Umständlich: Jeweils gesonderte Berechnung der einzelnen Näherungswerte (Zeilen 1-3 s. o.)

Bei Bedarf können CAS so eingestellt werden, dass nur näherungsweise Berechnungen durchgeführt und die Lösungen nicht exakt (vgl. Zeile 5) ausgeben werden. CAS stellen dafür unterschiedliche Möglichkeiten bereit, vgl. Zeilen 6 (Verwendung des entsprechenden Befehls) und 7 (Aktivierung/Verwendung des entsprechenden Buttons vor/beim Auslösen der Berechnung).

4	x_0 := -4
	→ $x_0 := -4$
5	x_0 - f(x_0) / f'(x_0)
	→ $-\frac{209}{60}$
6	x_1:=Numerisch[x_0 - f(x_0) / f'(x_0)]
	→ $x_1 := -3.4833$
7	x_2:=x_1 - f(x_1) / f'(x_1)
	≈ $x_2 := -3.3498$

Eleganter: Definition der Iterationsformel des Newtonverfahrens als Funktion, die einem Näherungswert den nächsten Näherungswert zuordnet (Zeilen 1-3 s. o.)

4	n(x):=x-f(x)/f'(x)
	→ $n(x) := \frac{4x^3 + 3x^2 - 1}{6x^2 + 6x - 12}$
5	n(-4)
	≈ -3.4833
6	n($5)
	≈ -3.3498
7	n($6)
	≈ -3.3408
8	n($7)
	≈ -3.3408

Zu b) und c)

Eine alternative Darstellung des Verfahrens bietet die Tabellenkalkulation. Zusätzlich lässt sich hier der Wert der Ableitung bei jedem Iterationsschritt ablesen.

CAS

1 f(x) := 2x³ + 3x² - 12x + 1
→ $f(x) := 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$

2 Ableitung[f]
→ $6x^2 + 6x - 12$

3 f'(x):=6x² + 6x - 12
→ $f'(x) := 6x^2 + 6x - 12$

Tabelle

D2 =f'(B2)

	A	B	C	D	E	F
1	n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	x_{n+1}	
2	0	-4	-31	60	-3.4833	
3	1	-3.4833	-5.33	39.9017	-3.3498	
4	2	-3.3498	-0.3146	35.2266	-3.3408	
5	3	-3.3408	-0.0014	34.9217	-3.3408	
6	4	-3.3408	0	34.9203	-3.3408	

Mithilfe der Tabellenkalkulation können die Schülerinnen und Schüler verhältnismäßig einfach entdecken, dass z. B. $x = 1$ nicht als Startwert gewählt werden darf, da dort die Ableitung von f den Wert 0 hat. Dies lässt sich am Graphen von f mithilfe einer waagrechten Tangente veranschaulichen.

CAS

1 f(x) := 2x³ + 3x² - 12x + 1
→ $f(x) := 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$

2 Ableitung[f]
→ $6x^2 + 6x - 12$

3 f'(x):=6x² + 6x - 12
→ $f'(x) := 6x^2 + 6x - 12$

Tabelle

B2 =1

	A	B	C	D	E	F
1	n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	x_{n+1}	
2	0	1	-6	0	∞	
3	1	∞	?	∞	?	
4	2	?	?	?	?	
5	3	?	?	?	?	
6	4	?	?	?	?	

CAS, die an PC, Laptop oder Tablet ausgeführt werden, bieten versierten Schülerinnen und Schülern die Möglichkeit, die Tabellenkalkulation mit der dynamischen Geometrieanwendung dergestalt zu verküpfen, dass sie den Startwert durch einen dynamisch veränderbaren Punkt auf der x-Achse vorgeben und unmittelbar eine entsprechende Durchführung und Visualisierung des Newtonverfahrens erhalten. Alternativ kann auch von der Lehrkraft eine entsprechende Datei zur Erleichterung des entdeckenden Zugangs zur Verfügung gestellt werden (unten stehend ein Beispiel für eine solche Datei), die wiederum in ein dynamisches Arbeitsblatt eingebettet werden kann (vgl. Kapitel 5).

Algebra

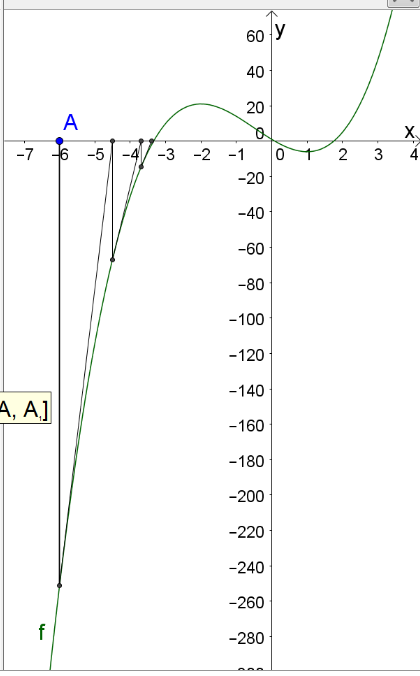
$f'(x) = 6x^2 + 6x - 12$

Punkt
A = (-6, 0)
A, = (-6, -251)
B = (-4.506, 0)
B, = (-4.506, -66.9919)
C = (-3.6967, 0)
C, = (-3.6967, -14.6796)
D = (-3.3897, 0)

Strecke
a = 251
b = 25
Strecke a: Strecke [A, A,]
c = 66.9919
d = 66.9968
e = 14.6796
g = 14.6828

Text
A1 = "n"
B1 = "x_{n}"

Grafik



Tabelle

E2 =B2 - C2 / D2

	A	B	C	D	E
1	n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	x_{n+1}
2	0	-6	-251	168	-4.506
3	1	-4.506	-66.9919	82.7859	-3.6967
4	2	-3.6967	-14.6796	47.8146	-3.3897
5	3	-3.3897	-1.75	36.603	-3.3419
6					
7					
8					
9					
10					
11					
12					
13					
14					
15					
16					
17					

Arbeitsauftrag 2

Ermitteln Sie mithilfe des Newton-Verfahrens, ausgehend von einem geeigneten Startwert, die Koordianten des Schnittpunkts der Graphen der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen f und g mit $f(x) = \sin(x-1)$ bzw. $g(x) = x$ auf vier Dezimalen genau.

Zielsetzung Übung (typische Anwendung des Newton-Verfahrens)

Voraussetzung Newton-Verfahren (Grundlagen, Durchführung)

Anmerkung Die Ableitung der Sinusfunktion ist im Fachlehrplan erst im Kapitel M 11.3 verortet; je nach Unterrichtsgang sollte die Aufgabe ggf. zu einem späteren Zeitpunkt verwendet oder der Funktionsterm von f durch einen anderen ersetzt werden, wobei es bei Verwendung eines CAS im Prinzip keine Rolle spielt, welche Funktion mit seiner Hilfe abgeleitet wird.

Hinweise zur Bearbeitung

Näherungsweise Bestimmung der Nullstelle der Differenzfunktion

CAS

1 f(x) := sin(x - 1)
→ $f(x) := \sin(x-1)$

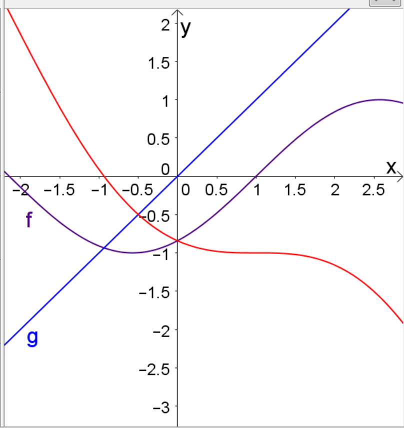
2 g(x) := x
→ $g(x) := x$

3 h(x):=f(x)-g(x)
→ $h(x) := \sin(x-1) - x$

4 Ableitung[$3]
→ $\cos(x-1) - 1$

5 h'(x):=$4
→ $h'(x) := \cos(x-1) - 1$

Grafik



Tabelle

B3 =E2

	A	B	C	D	E
1	n	x_n	$h(x_n)$	$h'(x_n)$	x_{n+1}
2	0	-1	0.0907	-1.4161	-0.936
3	1	-0.936	0.0019	-1.3571	-0.9346
4	2	-0.9346	0	-1.3558	-0.9346
5	3	-0.9346	0	-1.3558	-0.9346
6	4	-0.9346	0	-1.3558	-0.9346
7					
8					
9					
10					

Arbeitsauftrag 3

a) Die folgenden in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen besitzen jeweils im angegebenen Intervall genau eine Nullstelle. Ermitteln Sie jeweils mithilfe des Newton-Verfahrens mit dem angegebenen Startwert x_0 einen Näherungswert für die Nullstelle. Was stellen Sie fest? Erläutern Sie Ihre Ergebnisse.

- $f_1 : x \mapsto 3x^4 - \frac{20}{3}x^2 + 1$; $[0;1]$, $x_0 = 1$
- $f_2 : x \mapsto 2x^3 - 6x + 6$; $[-3;0]$, $x_0 = 0$
- $f_3 : x \mapsto 0{,}5x^3 - 0{,}1x^2 - 1{,}57x - 0{,}3$; $[1;2]$, $x_0 = 1$
- $f_4 : x \mapsto 9 \cdot 2^{0{,}5\cdot(x-1)} - 2^{3\cdot(x-1)} + 1{,}5$; $[0;3]$, $x_0 = 1$

b) Verändern Sie ggf. den genannten Startwert x_0 so, dass das Newton-Verfahren einen Näherungswert für die gesuchte Nullstelle liefert.

c) Ermitteln Sie weitere Funktionen samt Intervall und Startwert, bei denen das Newton-Verfahren in analoger Weise nicht zum gewünschten Ergebnis führt. Berücksichtigen Sie dabei möglichst verschiedenartige Funktionstypen.

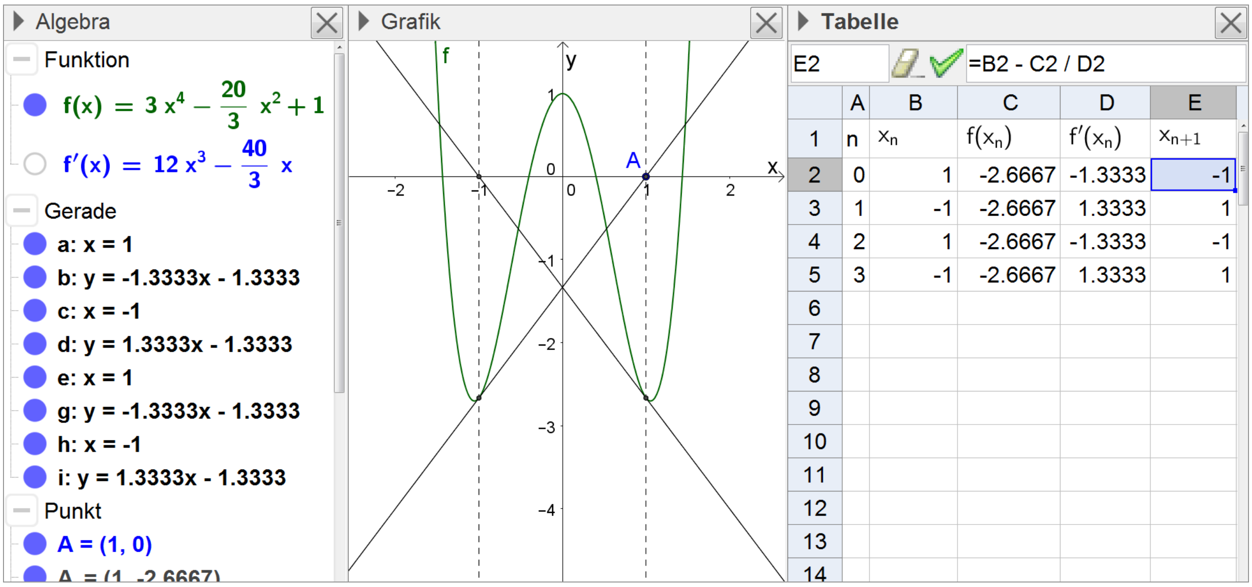
Zielsetzung Erarbeitung: Die Schülerinnen und Schüler entdecken, analysieren und systematisieren Gründe dafür, dass das Newton-Verfahren nicht immer zum gewünschten Ziel führt.

Voraussetzung Newton-Verfahren (Grundlagen, Durchführung)

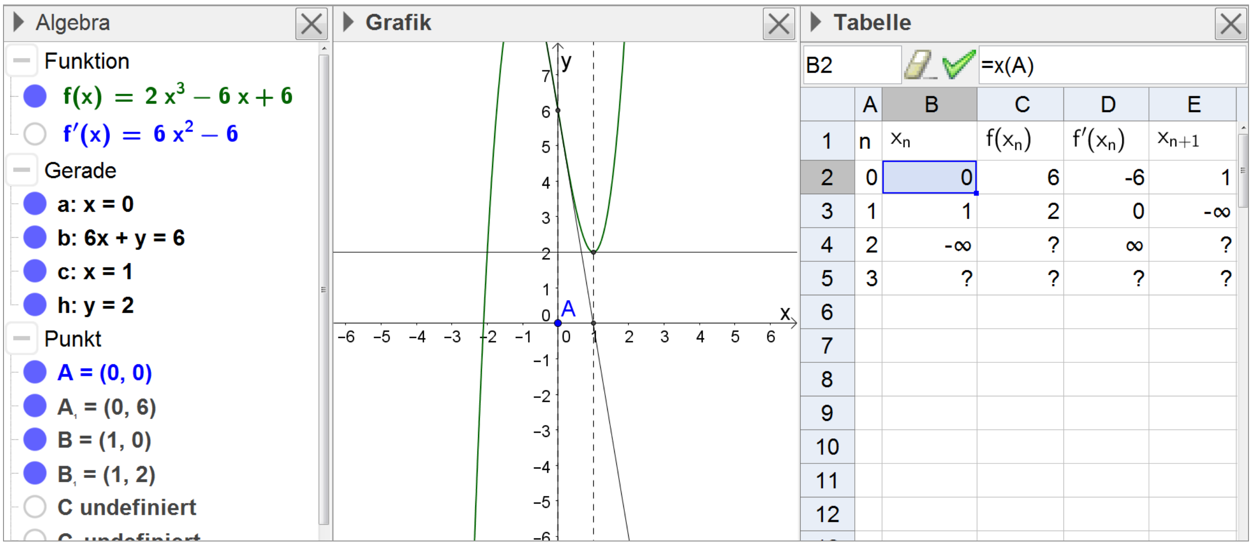
Hinweise zur Bearbeitung

Zu a)

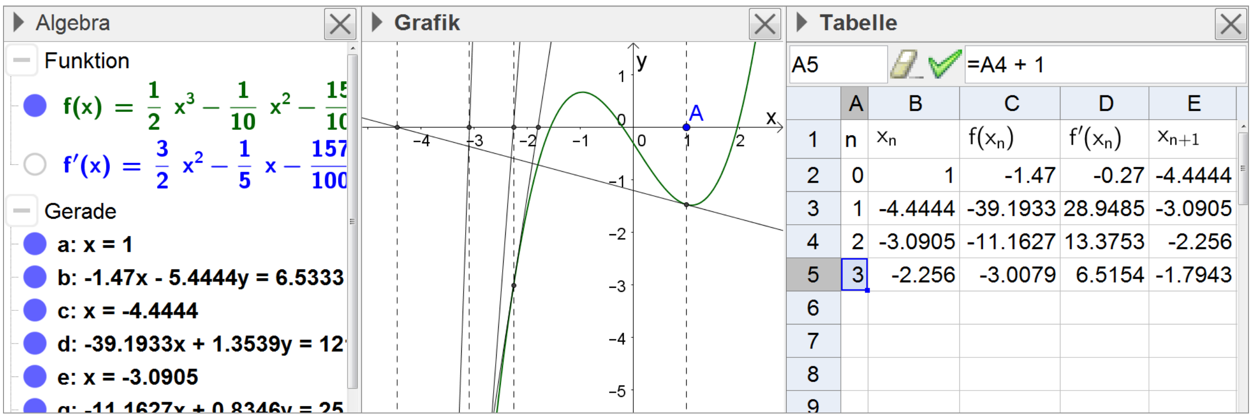
Bei f_1 divergiert das Newton-Verfahren zum vorgegebenen Startwert – es alterniert zwischen zwei Werten:



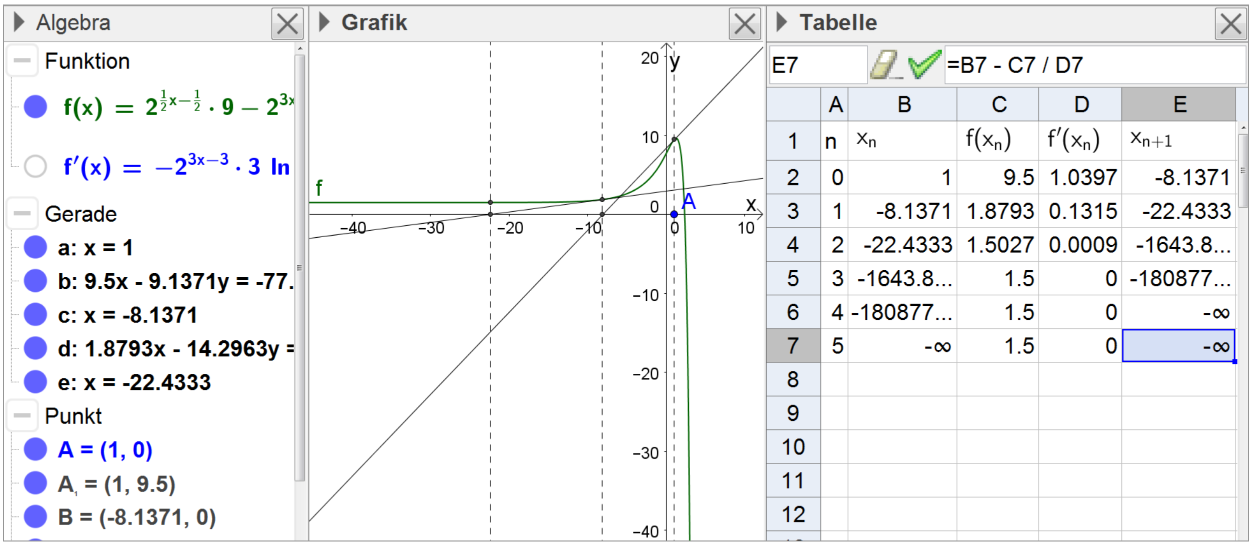
Bei f_2 bricht das Verfahren zum vorgegebenen Startwert ab, da der Näherungswert für die gesuchte Nullstelle im Verlauf der Berechnung einen Extremwert annimmt:



Bei f_3 liefert das Verfahren zum vorgegebenen Startwert eine Nullstelle, die nicht im vorgegebenen Intervall liegt:



Bei f_4 und vorgegebenem Startwert entfernen sich die Näherungswerte immer weiter von der gesuchten Nullstelle:



Zu b) und c)

Individuelle Lösungen

2.1.6 Weitere Ableitungsregeln

„Die Jugendlichen treffen beispielsweise bei der Untersuchung naturwissenschaftlicher Fragestellungen erneut auf die Sinus- und Kosinusfunktion, deren Ableitungsfunktionen sie sich auf graphischem Weg plausibel machen.
Der Übergang von der lokalen Umkehroperation zur zugehörigen Umkehrfunktion führt die Schüler von der Quadratfunktion zur Wurzelfunktion, die häufig auch in Verkettung mit anderen Funktionen auftritt. Sie lernen, mit diesem Funktionstyp umzugehen sowie die Kettenregel anzuwenden. Anhand vielfältiger, auch anwendungsbezogener Aufgabenbeispiele gewinnen die Jugendlichen zunehmend Sicherheit beim Arbeiten mit den bisher bekannten Ableitungsregeln."
(Fachlehrplan 2004, M 11.3)

Auch im Zusammenhang mit diesem Lehrplanabschnitt kann insbesondere das große Potential von CAS zur (dynamischen) Veranschaulichung mathematischer Zusammenhänge ausgenutzt werden. So lässt sich z. B. die Ableitung der Sinusfunktion mithilfe eines CAS relativ einfach selbständig erarbeiten. Bei der Bearbeitung von Aufgaben zum Üben der Kettenregel kann das CAS zur Kontrolle manuell ermittelter Ergebnisse dienen und dabei eigenverantwortliches Arbeiten unterstützen. Bei Potenzfunktionen mit rationalen Exponenten kann der Einfluss von Zähler und Nenner des Exponenten auf die Eigenschaften der Funktion ebenso zügig mit dem CAS erarbeitet und graphisch veranschaulicht werden wie der allgemeine Zusammenhang zwischen einer Funktion und deren Umkehrfunktion.

Im Zusammenhang mit den beschriebenen Vorschlägen zur Unterrichtsgestaltung kommen insbesondere folgende CAS-Grundfertigkeiten zur Anwendung:

- Term definieren
- Termwert berechnen
- Wertetabelle erstellen
- Ableitung bestimmen
- Gleichung lösen
- Graph zeichnen, geeigneten Anzeigebereich wählen
- Graphen von Scharfunktionen zeichnen
- Tabellenkalkulation durchführen

Vorschläge zur Unterrichtsgestaltung

Arbeitsauftrag 1

Gegeben sind die Funktionen $f: x \mapsto \frac{1}{2}x^2$ und $g: x \mapsto \sqrt{16-2x}$ mit den maximalen Definitionsbereichen D_f bzw. D_g.

a) Geben Sie D_f und D_g an.

b) Erstellen Sie eine Wertetabelle der folgenden Form:

x	$f(x)$	$g(f(x))$

c) Bestimmen Sie den Funktionsterm der Funktion h mit $h(x) = g(f(x))$. Geben Sie den maximalen Definitionsbereich D_h von h an.

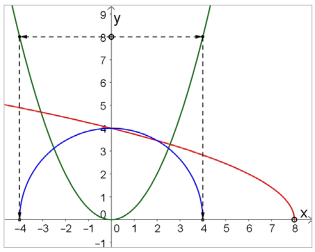
d) Zeichnen Sie die Graphen der Funktionen f, g und h und beschreiben Sie, wie man D_h anhand der Graphen von f und g ermitteln kann.

e) Untersuchen Sie, ob die Verkettung von Funktionen kommutativ ist, d. h. ob insbesondere $g(f(x)) = f(g(x))$ gilt.

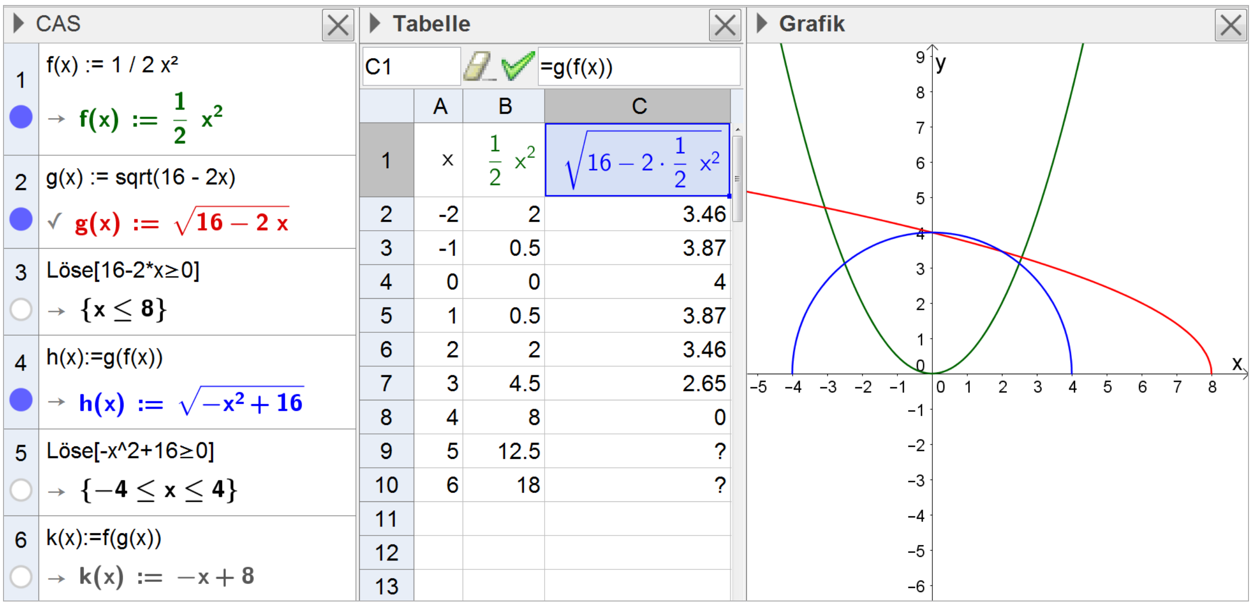
Zielsetzung Übung und Vertiefung: Die Schülerinnen und Schüler üben den Umgang mit der Verkettung von Funktionen anhand formaler und graphischer Fragestellungen. Vertiefend untersuchen sie die Frage, ob die Verkettung kommutativ ist.

Voraussetzung Verkettung von Funktionen (Grundkenntnisse und Grundfertigkeiten)

Anmerkung Die einzelnen Teilaufgaben bieten vielfach Anlass zur Untersuchung und Diskussion von Zusammenhängen anhand unterschiedlicher Darstellungsmittel, etwa der Wertetabelle (Aufgabe b) oder der Graphen (z. B. Aufgabe d: Um die Definitionsmenge von h anhand der Graphen ermitteln zu können, müssen die Schülerinnen und Schüler erkennen, dass dazu all die x-Werte auszumachen sind, für die $f(x) \le 8$ gilt, vgl. nebenstehende Abbildung).



Hinweise zur Bearbeitung



	A	B	C
1	x	$\frac{1}{2}x^2$	$\sqrt{16-2\cdot\frac{1}{2}x^2}$
2	-2	2	3.46
3	-1	0.5	3.87
4	0	0	4
5	1	0.5	3.87
6	2	2	3.46
7	3	4.5	2.65
8	4	8	0
9	5	12.5	?
10	6	18	?
11			
12			
13			

Arbeitsauftrag 2

Gegeben ist eine Funktion f mit Definitionsbereich D_f. Der Graph von f wird mit G_f bezeichnet.

a) Stellen Sie dar, wie sich – bei Kenntnis von $f(x)$ – der Abstand r eines Punkts $P \in G_f$ vom Koordinatenursprung berechnen lässt.

b) Gesucht ist eine Stelle $a \in D_f$, an der der Abstand r des zugehörigen Graphenpunkts $(a \mid f(a))$ vom Koordinatenursprung minimal wird. Welcher Zusammenhang besteht an dieser Stelle zwischen $f(a)$ und $f'(a)$? Geben Sie die Gleichung an, aus der sich a im Fall einer linearen Funktion mit $f(x) = mx + t$ berechnen lässt.

c) Berechnen Sie für die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $g: x \mapsto -2x + 4$ den Abstand des Graphenpunkts $P(1{,}6 \mid g(1{,}6))$ vom Koordinatenursprung. Ist P der Graphenpunkt mit dem kleinsten Abstand vom Koordinatenursprung? Begründen Sie Ihre Antwort und veranschaulichen Sie die Lage von P in einer geeigneten Zeichnung.

d) Gegeben ist die Schar der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen $h_k: x \mapsto kx^2 - 4$. Ermitteln Sie für $k = 1$ und $k = \frac{1}{9}$ jeweils die Koordinaten der Punkte auf dem Graphen von h_k, die vom Koordinatenursprung den kleinsten Abstand haben. Zeichnen Sie auch die Graphen von h_1 und $h_{\frac{1}{9}}$.

(nach Fokus 11, S. 138, Aufgabe 19)

Zielsetzung Übung und Vertiefung: Diese Aufgabe dient einerseits der Wiederholung von Ableitungsregeln und andererseits aufgrund der Einbettung in die Problematik „kleinste Abstände“ auch der Vertiefung sowie der Vernetzung der Analysis mit Lerninhalten aus der Mittelstufengeometrie (Satz des Pythagoras).

Voraussetzung grundlegende Ableitungsregeln

Anregung Die Aufgabe eignet sich als Partnerarbeit. Der Grad der individuellen Differenzierung kann durch gezielte Hilfestellungen zu einzelnen Teilaufgaben erhöht werden (Hilfekarten o. Ä.).

Hinweise zur Bearbeitung

Zu b)

Der gesuchte Zusammenhang $\frac{f(a)}{a} = -\frac{1}{f'(a)}$ lässt sich z. B. anhand einer geeigneten Zeichnung ermitteln. Hierzu kann das Graphikfenster des CAS eine Unterstützung sein.

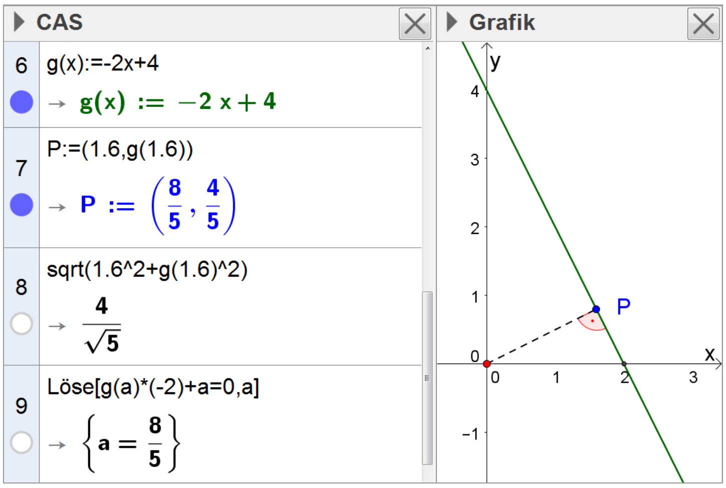
Zeilen 1-5: Rechnerisch führt der Ansatz $r'(a) = 0$ auf den gesuchten Zusammenhang, wobei in Zeile 5 zur Vereinfachung der in Zeile 4 erhaltenen Gleichung eine Äquivalenzumformung durchgeführt wird: Der Befehl $4*sqrt(a^2+f(a)^2) multipliziert beide Seiten der Gleichung mit dem Wurzelterm des Nenners aus Zeile 4.

(Ergänzend: Auch ohne CAS erhält man aus Zeile 5 für $f(x) = mx + t$ unmittelbar die zugehörige Gleichung $(m \cdot a + t) \cdot m + a = 0$.)

1	r(x):=sqrt(x^2+f(x)^2) $\rightarrow \mathbf{r(x) := \sqrt{x^2 + f(x)^2}}$
2	Ableitung[$1,x] $\rightarrow \mathbf{\frac{1}{2} \cdot \frac{2\,f'(x)\,f(x) + 2\,x}{\sqrt{x^2 + f(x)^2}}}$
3	r'(x):=$2 $\rightarrow \mathbf{r'(x) := \frac{1}{2} \cdot \frac{2\,f(x)\,f'(x) + 2\,x}{\sqrt{x^2 + f(x)^2}}}$
4	r'(a)=0 $\rightarrow \mathbf{\frac{1}{2} \cdot \frac{2\,f(a)\,f'(a) + 2\,a}{\sqrt{a^2 + f(a)^2}} = 0}$
5	$4 sqrt(a² + f[a]²) $\rightarrow \mathbf{f(a)\,f'(a) + a = 0}$

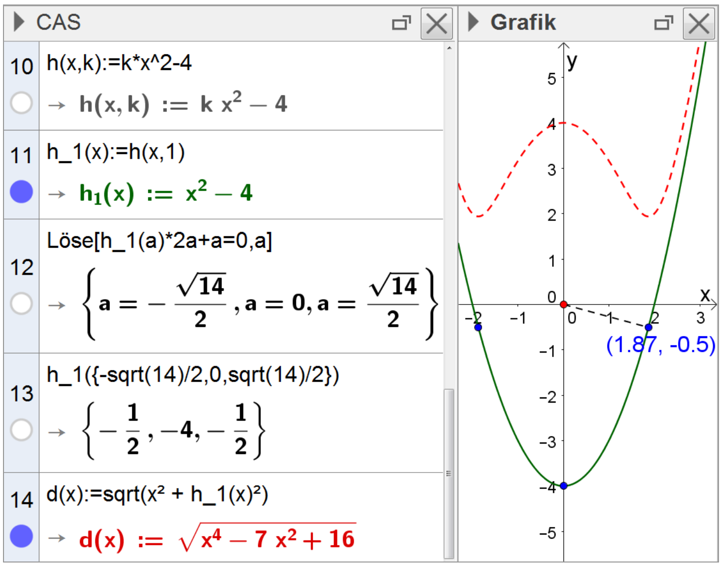
Zu c)

Die anzufertigende Zeichnung kann bei Bedarf zunächst mit dem CAS erstellt werden, wobei sich beim hier verwendeten CAS die unterstützende Nutzung von Zeichenwerkzeugen anbietet, die außerhalb des Bereichs CAS in den Bereichen Graphik bzw. Algebra angeboten werden.



Zu d)

Die im Fall von $k=1$ zu verwerfende Lösung $a=0$ der in Aufgabe b ermittelten Gleichung bietet Anlass zu einer reflektierten Betrachtung des rechnerischen Verfahrens und dessen Ausgangspunkt: die Bestimmung der Koordinaten der Tiefpunkte des Graphen der Abstandsfunktion (nebenstehend mit d bezeichnet), die sich gleichzeitig als alternativer Lösungsweg anbietet. (Ergänzend: Für $k=\frac{1}{9}$ ergibt sich der Scheitelpunkt der zugehörigen Parabel als Lösung.)



Arbeitsauftrag 3

Gegeben ist die in ℝ definierte Funktion $f: x \mapsto \sin(x)$.

a) Skizzieren Sie den Graphen von f und beschreiben Sie anhand des Graphen dessen Monotonieverhalten.

b) Erarbeiten Sie nun mit dem CAS den Graphen der Ableitungsfunktion. Definieren Sie dazu einen auf dem Graphen von f befindlichen, beweglichen Punkt P sowie die Tangente an den Graphen in diesem Punkt. Erzeugen Sie davon ausgehend – je nach verwendetem CAS im gleichen Fenster oder in einem Punktdiagramm – den Graphen, der aus allen Punkten der Form „(x-Koordinate von P | Steigung der Tangente in P)“ besteht. Beschreiben Sie die so erhaltene Ortskurve.

c) Stellen Sie, ausgehend von den bisherigen Ergebnissen, eine Vermutung für den Term der Ableitung von f auf. Überprüfen Sie diese mit dem CAS.

d) Gehen Sie analog vor, um die Ableitungsfunktion der in ℝ definierten Funktion $g: x \mapsto \cos(x)$ zu bestimmen.

Zielsetzung Graphische Erarbeitung bzw. graphisches Plausibelmachen der Ableitung von Sinus- und Kosinusfunktion

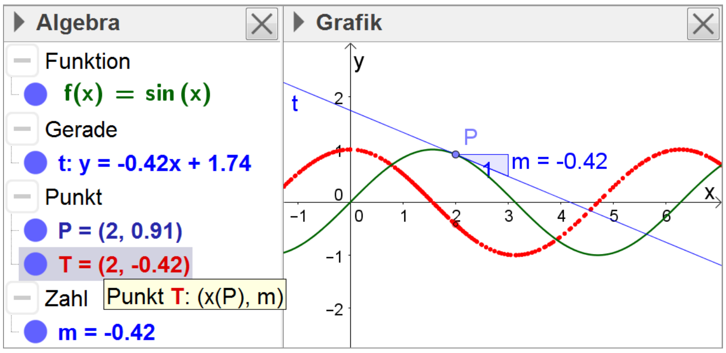
Voraussetzung Zusammenhänge zwischen Funktionsgraph und Graph der Ableitung; Verwendung von variablen Parametern / Schiebereglern im CAS

Anmerkung Die Aufgabe und die erstellte dynamische Konstruktion eignen sich auch gut zur Demonstration.

Hinweise zur Bearbeitung

Zu b)

Beim hier verwendeten CAS bietet sich die Nutzung des im Graphikbereich zur Verfügung stehenden Funktionsumfangs (z. B.: Punkt auf Objekt, Tangente, Steigung) ebenso an wie die Einbeziehung des Algebra-Fensters (z. B. zur Definition des Punkts, dessen Spur angezeigt werden soll, hier mit T bezeichnet).



Zu d)

Die in Aufgabe b erstellte Konstruktion kann hier weiter verwendet werden – es ist lediglich der Funktionsterm zu ändern, die Konstruktion passt sich automatisch an.

Arbeitsauftrag 4

Gegeben ist die Funktion h mit $h(t) = 0{,}25\cos(0{,}5\pi t) + 3{,}25$ und $t \in \mathbb{R}_0^+$. Sie gibt den zeitlichen Verlauf des Luftvolumens in der Lunge einer ruhenden Testperson an. Dabei ist t die seit Beobachtungsbeginn vergangene Zeit in Sekunden und $h(t)$ das Luftvolumen in Litern. Gesucht ist eine Funktion g, die die momentane Änderungsrate dieses Volumens in Abhängigkeit von der Zeit t, die sogenannte Atemstromstärke, beschreibt.

a) Zeichnen Sie den Graphen von h in ein geeignet skaliertes Koordinatensystem ein. Geben Sie an, welcher grundsätzliche mathematische Zusammenhang zwischen den Funktionen h und g besteht, und ergänzen Sie ohne Verwendung des CAS anhand graphischer Überlegungen eine möglichst genaue Skizze des Graphen von g.

b) Versuchen Sie – weiterhin ohne Verwendung des CAS – einen Funktionsterm für g aufzustellen und beschreiben Sie Ihr Vorgehen. Kontrollieren Sie Ihr Ergebnis mit dem CAS.
Beschreiben Sie im Sachzusammenhang die Bedeutung der Nullstellen von g sowie die Bedeutung der Extremstellen von g. Berechnen Sie $g(1{,}5)$ und interpretieren Sie das Ergebnis im Sachzusammenhang.

(Modellierung nach Abiturprüfung 2015, Mathematik, Prüfungsteil B, Analysis, Aufgabengruppe 2, Aufgabe 3)

Zielsetzung Erarbeitung oder Übung/Vertiefung: Dieser Arbeitsauftrag kann einerseits zur experimentellen graphischen Erarbeitung der Ableitung der Kosinusfunktion (im Rahmen eines Sachzusammenhangs) verwendet werden; dabei erleichtert die Kenntnis der Ableitung der Sinusfunktion die Bearbeitung wesentlich. Sind die Ableitungsregeln für Sinus- *und* Kosinusfunktion (sowie die Kettenregel) bereits bekannt, dient die Aufgabe der Übung bzw. Vertiefung dieser Zusammenhänge im Sachkontext.

Voraussetzung graphisches Ableiten; je nach Zielsetzung auch: Ableitung der Sinusfunktion (und der Kosinusfunktion), Kettenregel

Arbeitsauftrag 5

Die Funktion $f: t \to 4 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{365} \cdot (t - 80)\right) + 12$ mit Definitionsbereich $\{1, 2, 3, \dots, 365\}$ beschreibt für Regensburg modellhaft die Tageslänge in Stunden. Dabei gibt t den Tag innerhalb eines Kalenderjahres an, beginnend mit $t = 1$ für den 1. Januar; $t = 34$ steht dann für den 3. Februar. Die Tageslänge ist die Zeitspanne, die zwischen Sonnenaufgang und Sonnenuntergang verstreicht.

a) Ermitteln Sie für Regensburg auf der Grundlage des Modells anhand des Graphen von f möglichst genau,

i. zwischen welchen Werten die Tageslänge schwankt;

ii. an welchen Tagen die Tageslänge am größten bzw. am kleinsten ist;

iii. an welchen Tagen die Tageslänge zehn Stunden beträgt.

b) Welche der Ergebnisse aus Aufgabe a lassen sich unmittelbar mithilfe der Ableitung von f überprüfen? Führen Sie diese Überprüfung durch.

c) Geben Sie den größten und den kleinsten Wert der Ableitung von f an. Welche Bedeutung haben diese Werte bezüglich der Tageslänge?

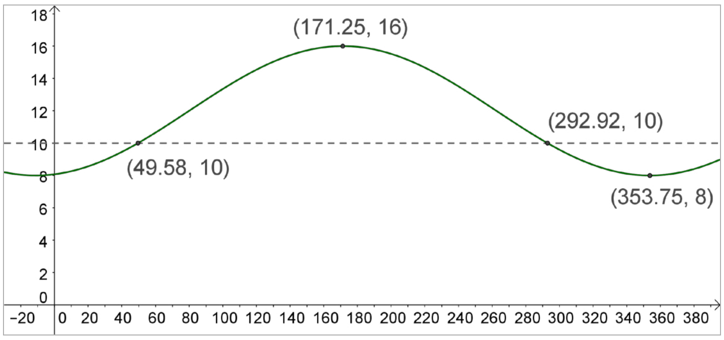
(nach bsv 11, S. 108, Aufgabe 9)

Zielsetzung Vertiefung (anhand eines Anwendungsbezugs der Sinusfunktion)

Voraussetzung Ableitung der Sinusfunktion, Kettenregel

Anmerkung Die Aufgabe eignet sich für eine Bearbeitung in Partnerarbeit.

Hinweise zur Bearbeitung



Zu a)

Mithilfe des Hochpunkts und des Tiefpunkts des Graphen von f ergibt sich, dass die Tageslänge in Regensburg zwischen etwa sechzehn Stunden am 20. Juni und etwa acht Stunden am 20. Dezember schwankt.

Die t-Koordinaten der Schnittpunkte des Graphen von f mit der Geraden mit der Gleichung $y = 10$ liefern den 19. Februar und den 20. Oktober als Tage mit einer Tageslänge von etwa zehn Stunden.

Zu b)

Das Ergebnis zu ii lässt sich unmittelbar anhand der Ableitung von f überprüfen.

5	Ableitung[f(t),t] $\rightarrow \frac{8}{365}\,\pi\,\cos\left(\frac{2}{365}\,\pi\,(t-80)\right)$
6	f'(t):=$5 $\rightarrow f'(t) := \frac{8}{365}\,\pi\,\cos\left(\frac{2}{365}\,\pi\,(t-80)\right)$
7	Löse[f'(t)=0,t] $\rightarrow \left\{t = \frac{365}{2}\,k_5 + \frac{685}{4}\right\}$
8	{685/4,365/2+685/4} $\approx \{171.25, 353.75\}$

Zu c)

Anhand (des Graphen) der Ableitung von f lässt sich ermitteln, dass die Tageslänge von einem Tag zum anderen um den 21. März am stärksten zunimmt und um den 20. September am stärksten abnimmt (jeweils um etwa 4,1 Minuten pro Tag). Ein Vergleich mit dem Graphen von f zeigt, dass dies diejenigen Stellen sind, an denen $\sin\left(\frac{2\pi}{365}\cdot(t-80)\right) = 0$ gilt. Somit sind sowohl der Tag als auch die Nacht 12 Stunden lang (Tag-und-Nacht-Gleiche).

2.1.7 Natürliche Exponential- und Logarithmusfunktion

„Die Schüler erkennen, dass sie noch nicht alle ihnen bekannten Funktionen differenzieren können. Beispielsweise bei der Frage nach der Ableitung der allgemeinen Exponentialfunktion lernen sie die Euler'sche Zahl e kennen. Hierbei bietet sich zur Abrundung der im Lauf der Gymnasialzeit aufgebauten Zahlvorstellung ein Rückblick auf die Zahlenbereichserweiterungen an. Mithilfe anschaulicher Überlegungen erfassen die Jugendlichen den Zusammenhang zwischen den Graphen von natürlicher Exponential- und natürlicher Logarithmusfunktion. Durch Untersuchung einfacher Verknüpfungen der

bisher bekannten Funktionen mit der natürlichen Exponential- und Logarithmusfunktion vertiefen sie ihre Kenntnisse." (Fachlehrplan 2004, M 11.4)

Im Rahmen der Untersuchung der natürlichen Exponential- und Logarithmusfunktion kann ein CAS u. a. der Veranschaulichung dienen; verschiedene Darstellungsformen von Funktionen können parallel betrachtet werden und es lassen sich Graphen in unterschiedlichen Bereichen und Maßstäben darstellen. Der Einfluss der Änderung von Parametern im Funktionsterm auf den zugehörigen Graphen kann dynamisch veranschaulicht werden, es ergeben sich vielfältige Möglichkeiten zu experimentellem Vorgehen sowie zur Binnendifferenzierung. Das CAS unterstützt, z. B. im Zusammenhang mit der „Entwicklung" der eulerschen Zahl e, selbständiges entdeckendes Lernen; Näherungswerte können verhältnismäßig einfach ermittelt und Grenzprozesse graphisch veranschaulicht werden. So können sich die Schülerinnen und Schüler auf die wesentlichen mathematischen Inhalte und Zusammenhänge konzentrieren.

Im Zusammenhang mit den beschriebenen Vorschlägen zur Unterrichtsgestaltung kommen insbesondere folgende CAS-Grundfertigkeiten zur Anwendung:

- Term definieren
- Termwert berechnen
- Term vereinfachen
- Wertetabelle erstellen
- Grenzwert berechnen
- Gleichung lösen
- Graph zeichnen, geeigneten Anzeigebereich wählen
- Graphen von Scharfunktionen zeichnen
- Punktdiagramm zeichnen
- Tabellenkalkulation durchführen

Vorschläge zur Unterrichtsgestaltung

→ Näherungsweise Ermittlung der eulerschen Zahl e

Anhand der Arbeitsaufträge 1, 2 und 3 können die Schülerinnen und Schüler (ggf. arbeitsteilig, auch mit anschießender gegenseitiger Präsentation, z. B. anhand erstellter Poster) auf unterschiedlichen Wegen jeweils die Zahl e kennenlernen und näher untersuchen, wobei Arbeitsauftrag 3 relativ anspruchsvoll ist und nicht zuletzt aufgrund der enthaltenen unendlichen Summe als Möglichkeit für einen vertiefenden Exkurs für leistungsstarke Schülerinnen und Schüler anzusehen ist. Die zugelassenen Lehrbücher bieten weitere Aufgaben zur Einführung der eulerschen Zahl e als Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ (z. B. bsv 11, S. 111; delta 11, S. 148; Fokus 11, S. 154, Auftrag 4; Lambacher Schweizer 11, S. 168).

Arbeitsauftrag 1

Dagobert Duck legt für die Dauer eines Jahres seinen Glückskreuzer bei der Entenhausener Bank an, bei der Zinsen stets mitverzinst werden.

a) Bestimmen Sie die Höhe seines Guthabens nach einem Jahr, wenn es jährlich mit einem Zinssatz von 100 % verzinst wird.

b) Bestimmen Sie die Höhe seines Guthabens nach einem Jahr, wenn es für jedes halbe Jahr mit einem Zinssatz von 50 % verzinst wird.

c) Dagobert wittert ein gutes Geschäft. Geben Sie einen Term an, der beschreibt, wie hoch sein Guthaben nach einem Jahr ist, wenn ein Jahr in n Zeitabschnitte ($n \in \mathbb{N}$) unterteilt und das Guthaben für jeden Zeitabschnitt mit einem Zinssatz von $\frac{100}{n}\,\%$ verzinst wird (unterjährige Verzinsung). Kann Dagobert mit dieser Geldanlage innerhalb eines Jahres unermesslich reich werden? Machen Sie Ihre Antwort graphisch plausibel und begründen Sie sie rechnerisch.

d) Der Grenzwert $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ heißt eulersche Zahl e. Bestimmen Sie $n \in \mathbb{N}$ so, dass $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ um weniger als 0,01 von e abweicht.

e) Nach wem ist die Zahl e benannt? Recherchieren Sie aus Ihrer Sicht Bemerkenswertes zur namensgebenden Persönlichkeit.

(nach HR CAS 10, S. 85)

Zielsetzung Erarbeitung (eulersche Zahl e)

Voraussetzung Grundwissen aus den Vorjahren; Verwendung von variablen Parametern / Schiebereglern im CAS

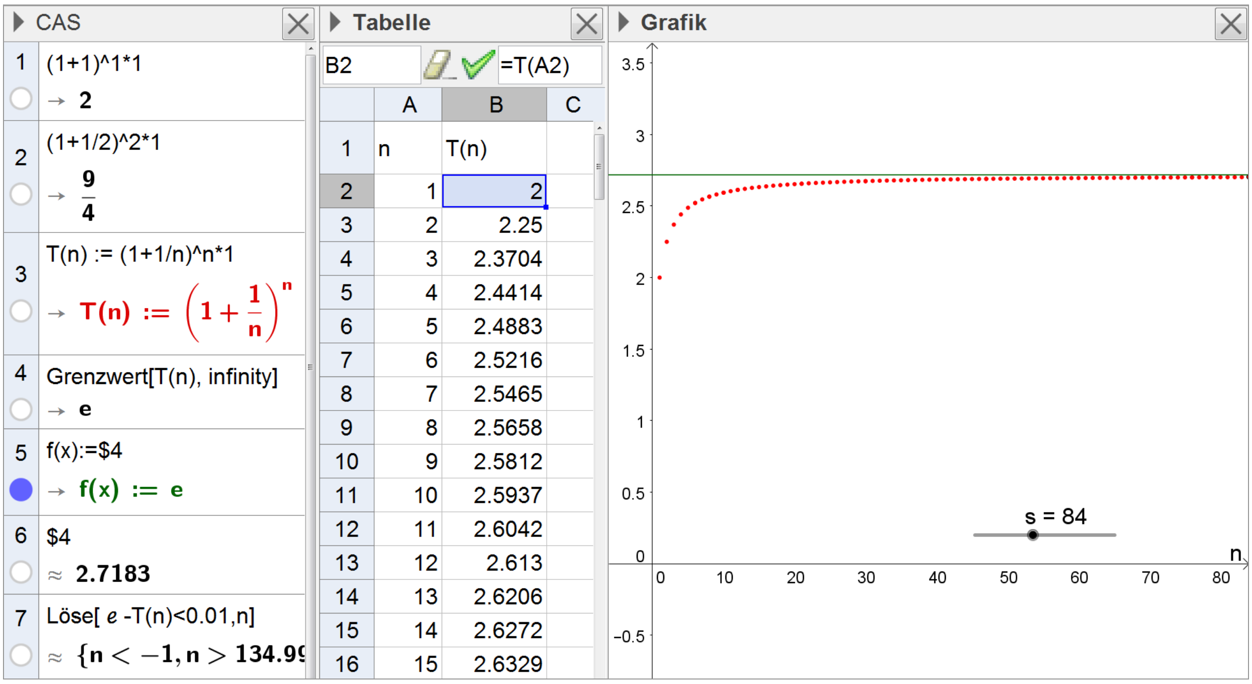
Hinweise zur Bearbeitung

Zu a), b), c) und d)

Die Lösungen zu Aufgabe a (vgl. Zeile 1) und Aufgabe b (vgl. Zeile 2) finden die Schülerinnen und Schüler auf unterschiedlichen Wegen (ggf. ohne CAS).

Für Aufgabe c bieten sich unterschiedliche Zugänge zur Untersuchung bzw. Darstellung der Entwicklung der Termwerte an (rechnerisch, tabellarisch und graphisch). Im Beispiel wurde ein Schieberegler in Verbindung mit der Spur des Punkts $(s\,|\,T(s))$ verwendet. Wie in Kapitel 2.1.1 ausgeführt, empfiehlt es sich dabei grundsätzlich, eine von der Bezeichnung einer bereits definierten Variablen (hier: n) abweichende Bezeichnung für die des Schiebereglers zu verwenden (hier: s).

Die Lösung $n = 135$ zu Aufgabe d kann mithilfe einer Ungleichung (Zeile 7) oder z. B. auch durch systematisches Probieren und Nachrechnen unter Einbeziehung der tabellierten Werte gefunden werden.



Arbeitsauftrag 2

Betrachtet werden für $a \in \mathbb{R}^+$ die Exponentialfunktionen $f: x \mapsto a^x$ mit Definitionsbereich $\mathbb{R}$.

a) Stellen Sie den Differentialquotienten in der Form $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ auf und vereinfachen Sie diesen so weit wie möglich.

b) Es gibt einen Wert $a_0 \in \mathbb{R}^+$, sodass für $a = a_0$ gilt: $f'(x) = f(x)$. Bestimmen Sie zunächst anhand der Graphen von f und f' (z. B. mithilfe eines Schiebereglers) experimentell einen möglichst genauen Näherungswert für a_0 und überprüfen Sie Ihr Ergebnis anschließend rechnerisch.

c) Der in Aufgabe b ermittelte Wert von a_0 heißt eulersche Zahl e. Diese lässt sich auch in der Form $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ schreiben, wie folgende Herleitung zeigt:

Begründungsschritt	*Kommentar*
für $a=e$ gilt $f'(x)=f(x)$	Ergebnis Aufgabe b
für $a=e$ gilt $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f(x)$	
also $\lim\limits_{h\to 0}\frac{e^{x+h}-e^x}{h}=e^x$	
für $x=0$ folgt daraus $\lim\limits_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=1$	
für Werte von h nahe 0 gilt folglich $\frac{e^h-1}{h}\approx 1$	
für Werte von h nahe 0 gilt folglich $e\approx(1+h)^{\frac{1}{h}}$	
Wiedereinbau Grenzwert: $e=\lim\limits_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}}$	
per Ersetzung $n=\frac{1}{h}$ folgt daraus $e=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$	

Vollziehen Sie die einzelnen Schritte nach und notieren Sie dabei in der Spalte „Kommentar“ jeweils für Sie hilfreiche Überlegungen.

Überzeugen Sie sich abschließend davon, dass in Ihrem CAS der Grenzwert $e=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ korrekt implementiert ist.

Zielsetzung Erarbeitung (eulersche Zahl e)

Voraussetzung Differentialquotient; Ableitung; Verwendung von variablen Parametern / Schiebereglern im CAS

Hinweise zur Bearbeitung

Zu a)

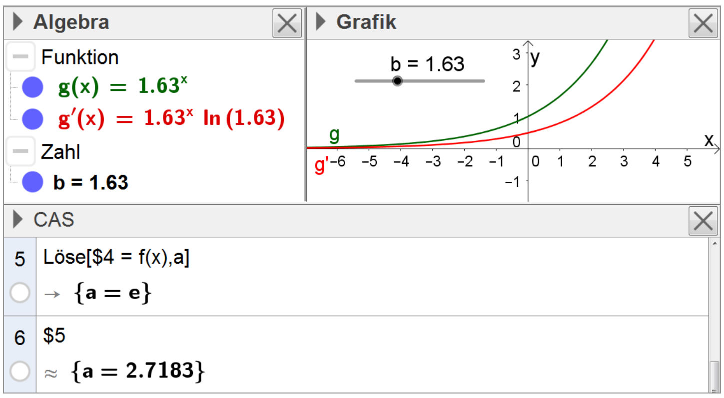
Mit dem CAS lässt sich der Differentialquotient problemlos berechnen und vereinfachen, unabhängig davon, ob die Schülerinnen und Schüler bereits wissen, was unter „ln(a)“ zu verstehen ist.

1	f(x):=a^x → $f(x) := a^x$
2	diff(x,h):=(f(x+h)-f(x))/h → $\mathrm{diff}(x,h) := \frac{a^{h+x}-a^x}{h}$
3	Grenzwert[diff(x, h),h,0] → $e^{x\ln(a)}\ln(a)$
4	Vereinfache[$3] → $a^x\ln(a)$

Zu b)

Die Schülerinnen und Schüler können experimentell anhand der Graphen erarbeiten, dass $a_0\approx 2{,}72$; bei entsprechender Vergrößerung ist eine noch höhere Genauigkeit erreichbar.

Die rechnerische Überprüfung führt unmittelbar auf die eulersche Zahl (Zeilen 5 und 6).



Zu c)

Verifizierung des Grenzwerts

7	Grenzwert[(1+1/n)^n, infinity]
	→ **e**

Arbeitsauftrag 3 – Exkurs (Vertiefungsmöglichkeit)

a) Stellen Sie den Term einer in $\mathbb{R}$ definierten ganzrationalen Funktion f mit $f(0)=1$ und $f'(x)=f(x)$ auf und schreiben Sie ihn unter Verwendung des Summenzeichens. Warum muss der Term unendlich viele Summanden haben?

Der Funktionswert von f an der Stelle 1 heißt eulersche Zahl e.

b) Bestimmen Sie mithilfe des Terms von f einen Näherungswert für e. Veranschaulichen Sie den dabei beschrittenen Grenzprozess durch eine geeignete graphische Darstellung.

c) Wie viele Summanden des Funktionsterms von f sind nötig, damit der Näherungswert um weniger als 0,01 von e abweicht?

d) Machen Sie durch einen Vergleich geeigneter Graphen plausibel, dass $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = a^x$ mit $a \in \mathbb{R}^+$ genau dann gilt, wenn $a = e$ ist.

Zielsetzung Erarbeitung (eulersche Zahl e)

Voraussetzung Ableitung; unendliche Summen (Summenzeichen), Fakultät

Anmerkung geeignet primär für leistungsstarke Schülerinnen und Schüler

Hinweise zur Bearbeitung

Zu a)

Term von f: $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$

Zu b)

Ein Näherungswert kann rechnerisch (vgl. Zeilen 1-3) oder anhand einer Wertetabelle ermittelt werden. Zur graphischen Veranschaulichung können z. B. Punkte mit den Koordinaten $\left(n \,\middle|\, \sum_{k=0}^{n} \frac{1^k}{k!}\right)$ in der Tabelle generiert und gemeinsam mit der Geraden mit der Gleichung $y = e$ in einem Koordinatensystem dargestellt werden.

(Anmerkung: CAS übersetzen den Term in Zeile 1 nach Abschluss der Eingabe zumeist unmittelbar in den Term e^x; dies kann beim hier verwendeten CAS per Auswahl des entsprechenden Buttons verhindert werden (vgl. Kapitel 2.1.1).)

CAS

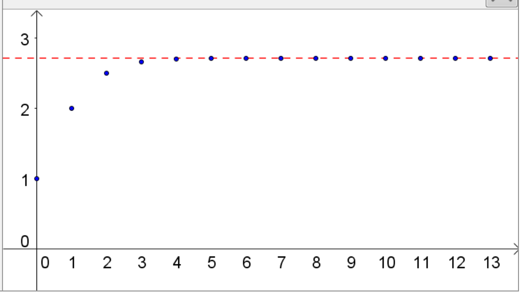
1	f(x):=Summe[x^k/k!, k, 0, infinity]
	√ $f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$
2	f(1)
	→ **e**
3	$2
	≈ **2.7183**

Tabelle

B2 =B1 + 1 / A2!

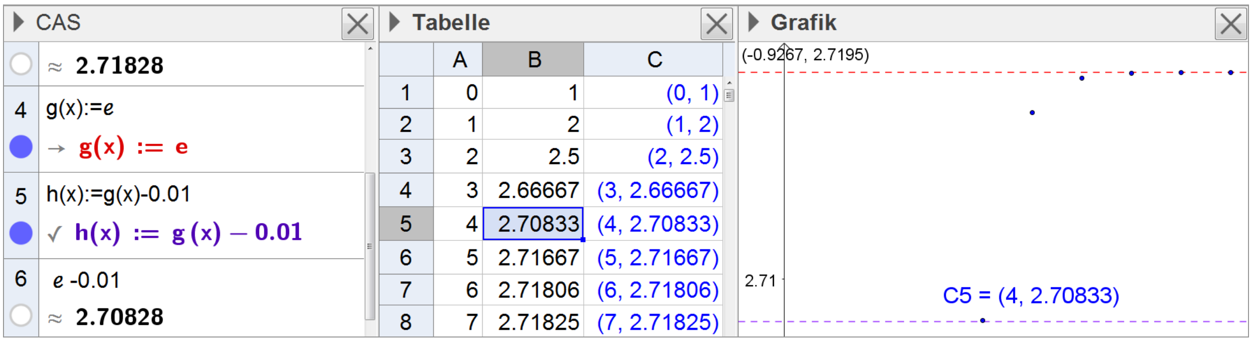
	A	B	C
1	0	1	(0, 1)
2	1	2	(1, 2)
3	2	2.5	(2, 2.5)
4	3	2.6667	(3, 2.6667)
5	4	2.7083	(4, 2.7083)
6	5	2.7167	(5, 2.7167)

Grafik

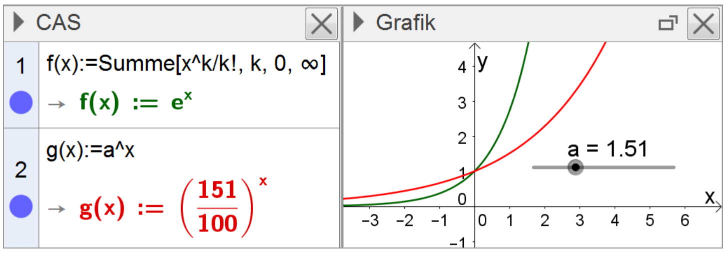


Zu c)

Auch hier bieten sich verschiedene Lösungswege an, z. B. eine Berechnung des zu übertreffenden Werts (Zeile 6) in Verbindung mit gezieltem Suchen in der Tabelle, wozu ggf. die im CAS eingestellte Stellengenauigkeit angepasst werden muss – oder auch ein geschicktes Arbeiten mit dem Graphikfenster (Vergrößerung).



Zu d)



→ Zusammenhang zwischen den Graphen der natürlichen Exponential- und Logarithmusfunktion

Anhand der Arbeitsaufträge 4 und 5 können die Schülerinnen und Schüler die charakteristischen Eigenschaften der beiden Funktionstypen mithilfe des CAS selbständig entdeckend erarbeiten, aufbauend auf ihren Vorkenntnissen über die allgemeine Exponentialfunktion (vgl. HR CAS 10, S. 53 f.). Auch hier kommt eine (z. T. arbeitsteilige) Bearbeitung in Gruppen in Betracht (ggf. mit gegenseitiger Präsentation der Ergebnisse).

Arbeitsauftrag 4

Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte natürliche Exponentialfunktion $f : x \mapsto e^x$. Der Graph von f wird mit G_f bezeichnet.

a) Zeichnen Sie G_f. Ermitteln Sie die wesentlichen Eigenschaften von f.

Betrachtet werden nun für $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ die folgenden Scharen in $\mathbb{R}$ definierter Funktionen:

$f_a : x \mapsto e^x + a \qquad f_b : x \mapsto b \cdot e^x \qquad f_c : x \mapsto e^{x-c} \qquad f_d : x \mapsto e^{d \cdot x}$

b) Untersuchen Sie für jede Schar den Einfluss einer Änderung des Parameters auf den zugehörigen Graphen. Berücksichtigen Sie dabei jeweils den Graphen von f.

c) Begründen Sie, dass sich jede Funktion der Schar f_c als Funktion der Schar f_b darstellen lässt. Ist dies auch für die Funktionen der Scharen f_a und f_d möglich? Begründen Sie Ihre Antwort.

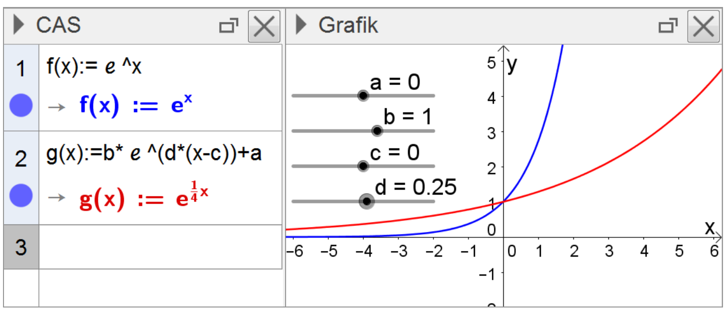
Zielsetzung Erarbeitung (charakteristische Eigenschaften der natürlichen Exponentialfunktion)

Voraussetzung eulersche Zahl e

Hinweise zur Bearbeitung

Zu b)

Das CAS bietet die Möglichkeit, mehrere Graphen einer Funktionenschar in einem gemeinsamen Koordinatensystem darzustellen oder per Schieberegler dynamisch zu variieren. So können die Schülerinnen und Schüler diese Graphen miteinander vergleichen, den Einfluss der Änderung eines Parameters diskutieren und angestellte Vermutungen mathematisch begründen.



Arbeitsauftrag 5

Gegeben ist die in $\mathbb{R}^+$ definierte natürliche Logarithmusfunktion $f: x \mapsto \ln x$. Der Graph von f wird mit G_f bezeichnet.

a) Zeichnen Sie G_f. Ermitteln Sie die wesentlichen Eigenschaften von f.

Betrachtet werden nun die folgenden Scharen von Funktionen mit jeweils maximaler Definitionsmenge:

$$f_a: x \mapsto \ln x + a \qquad f_b: x \mapsto b \cdot \ln x \qquad f_c: x \mapsto \ln(x-c) \qquad f_d: x \mapsto \ln(d \cdot x)$$

b) Geben Sie für a, b, c und d jeweils den größtmöglichen Bereich an, aus dem die Werte des Parameters gewählt werden dürfen.

c) Untersuchen Sie für jede Schar den Einfluss einer Änderung des Parameters auf den zugehörigen Graphen. Beschreiben Sie dabei jeweils auch, wie der Graph aus dem Graphen von f hervorgeht.

Geben Sie zu jeder Schar – in Abhängigkeit von a, b, c bzw. d – die maximale Definitionsmenge an.

d) Begründen Sie, dass sich jede Funktion der Schar f_d als Funktion der Schar f_a darstellen lässt. Ist dies auch für die Funktionen der Scharen f_b und f_c möglich? Begründen Sie Ihre Antwort.

e) Vergleichen Sie die natürliche Logarithmus- und die natürliche Exponentialfunktion hinsichtlich ihrer Graphen und Eigenschaften. Welcher Zusammenhang besteht zwischen den beiden Funktionen?

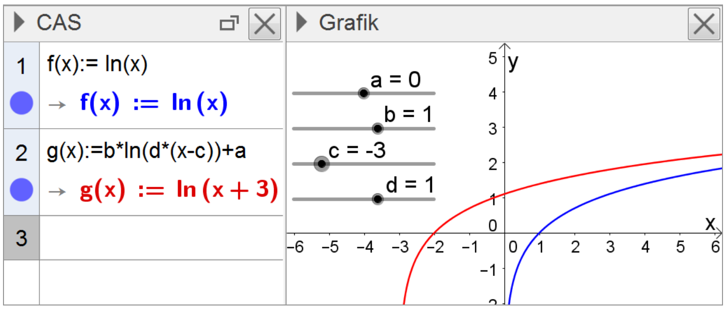
Zielsetzung Erarbeitung (charakteristische Eigenschaften der natürlichen Exponentialfunktion)

Voraussetzung natürliche Exponentialfunktion; natürlicher Logarithmus als Schreibweise

Hinweise zur Bearbeitung

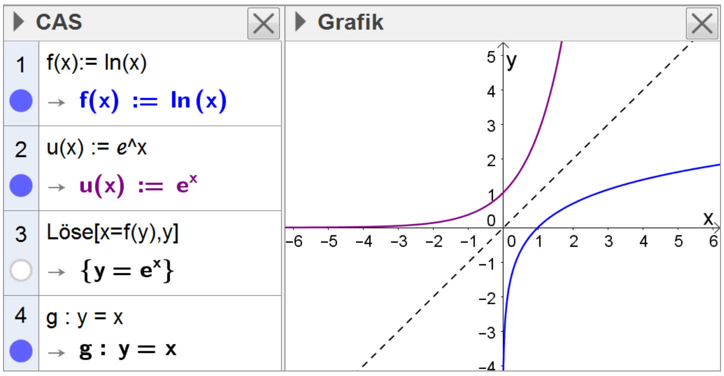
Zu c)

vgl. Arbeitsauftrag 4, Aufgabe b



Zu e)

Sowohl anhand eines Vergleichs der Eigenschaften als auch der Graphen – in einigen CAS, wie dem hier verwendeten, besteht dabei die Möglichkeit, einen Funktionsgraphen per Mausklicks an einer Geraden (Zeile 4) zu spiegeln – können die Schülerinnen und Schüler erkennen, dass die beiden Funktionen jeweils Umkehrfunktionen zueinander sind. Zur weiteren Verifizierung kommt auch die Bestimmung des Terms der Umkehrfunktion in Betracht (Zeile 3).



→ Verknüpfungen von Funktionen

Mithilfe des CAS können die Schülerinnen und Schüler einfache Verknüpfungen der bisher bekannten Funktionen mit der natürlichen Exponential- und Logarithmusfunktion selbständig untersuchen. Die zugelassenen Lehrbücher, die Beispielabiturprüfung sowie die Abiturprüfungen der letzten Jahre liefern eine Vielzahl von Variations- und Erweiterungsmöglichkeiten zum folgend vorgestellten Arbeitsauftrag, etwa bezüglich der verknüpften Funktionstypen, der Art der Verknüpfung, einer Einbeziehung von Parametern oder einer Einbettung in Sachzusammenhänge (vgl. auch Kapitel 3.1 der vorliegenden Handreichung).

Arbeitsauftrag 6

Gegeben sind die in IR definierten Funktionen $f: x \mapsto x$ und $g: x \mapsto e^x$. Die Graphen von f und g werden mit G_f bzw. G_g bezeichnet.

a) Zeichnen Sie G_f und G_g in ein geeignet skaliertes Koordinatensystem.

Nun wird die in IR definierte Funktion $h: x \mapsto x \cdot e^x$ betrachtet. Der Graph von h wird mit G_h bezeichnet.

b) Ermitteln Sie ausschließlich mithilfe von G_f und G_g (ohne CAS!),
- an welcher Stelle G_h die x-Achse schneidet;
- in welchen Bereichen G_h oberhalb bzw. unterhalb der x-Achse verläuft;
- die Koordinaten der Punkte, in denen G_h die Graphen von f oder g schneidet;
- wie sich G_h für $x \to -\infty$ und für $x \to +\infty$ verhält.

c) Skizzieren Sie G_h anhand Ihrer Ergebnisse aus Aufgabe b in das Koordinatensystem aus Aufgabe a. Überprüfen Sie Ihre Ergebnisse mithilfe des CAS.

Zielsetzung Übung/Vertiefung (Verknüpfung von Funktionen)

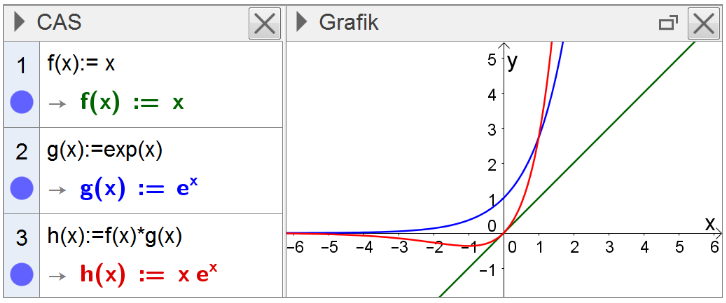
Voraussetzung natürliche Exponentialfunktion; grundlegende Eigenschaften von Funktionen

Hinweise zur Bearbeitung

Zu c)

Überprüfung der Graphen mithilfe des CAS

Ergänzend lassen sich einzelne Ergebnisse aus Aufgabe b im CAS-Bereich rechnerisch überprüfen.



2.1.8 Anwendungen der Differentialrechnung

„Beispielsweise bei Fragen der Optimierung setzen die Schüler ihre neu erworbenen Kenntnisse über Funktionen und deren Ableitung ein. Die Interpretation der Ableitung als Änderungsverhalten der Funktion bzw. als Tangentensteigung des zugehörigen Graphen wird dabei den Jugendlichen erneut bewusst. Sie vertiefen die erlernten Techniken, indem sie diese auch auf einfache Funktionen mit Parametern anwenden und Funktionsterme mit vorgegebenen Eigenschaften bestimmen. Die Schüler erkennen, dass insbesondere bei praktischen Anwendungen verschiedenster Funktionen die berechneten Ergebnisse stets interpretiert und auf ihre Sinnhaftigkeit überprüft werden müssen, etwa im Zusammenhang mit Randextrema oder Parametern." (Fachlehrplan 2004, M 11.6)

Das CAS entlastet vom Ausführen umfangreicher oder komplexer Rechenarbeiten. So können das bewusste Auswählen mathematischer Verfahren, das Modellieren von Sachsituationen sowie das Interpretieren von Ergebnissen stärker betont werden. Außerdem wird die Bearbeitung realitätsnaher Anwendungsaufgaben unterstützt. Insbesondere im Zusammenhang mit der Modellierung von Sachsituationen unterstützt das CAS den experimentellen Vergleich unterschiedlicher Ansätze.

Im Rahmen eines Exkurses kann das CAS weiterführend auch zur Durchführung einer Regression verwendet werden. Insbesondere leistungsstärkere Schülerinnen und Schüler können in diesem Zusammenhang der Frage nach der Funktionsweise des CAS nachgehen – beispielsweise im Rahmen einer Unterrichtsphase mit Binnendifferenzierung.

Im Zusammenhang mit den beschriebenen Vorschlägen zur Unterrichtsgestaltung kommen insbesondere folgende CAS-Grundfertigkeiten zur Anwendung:
- Taschenrechner verwenden
- Term definieren
- Termwert berechnen
- Ableitung bestimmen

- Gleichung lösen
- Gleichungssystem lösen
- Graph zeichnen, geeigneten Anzeigebereich wählen
- Punktdiagramm zeichnen
- Tabellenkalkulation durchführen

Vorschläge zur Unterrichtsgestaltung

Im Allgemeinen bieten offene Aufgabenstellungen den Schülerinnen und Schülern insbesondere mit Unterstützung eines CAS die Möglichkeit, unterschiedliche Lösungswege zu entwickeln. Deren Vergleich kann ihnen Anlass für eine Kommunikation über mathematische Inhalte und Verfahren geben. Außerdem können sie ihr Repertoire an Lösungsstrategien erweitern (vgl. insbesondere die folgenden Arbeitsaufträge 1 und 2).

→ Fragen der Optimierung

Arbeitsauftrag 1

Der Goldgräber Mike MacNugget möchte direkt an einem annähernd geradlinig verlaufenden Teilstück eines Flusses einen rechteckigen Claim abstecken. Um ein möglichst großes Flächenstück abzugrenzen, steht ihm Zaun mit einer Länge von 10 km zur Verfügung. Wie sollte Mike seinen Claim abstecken?

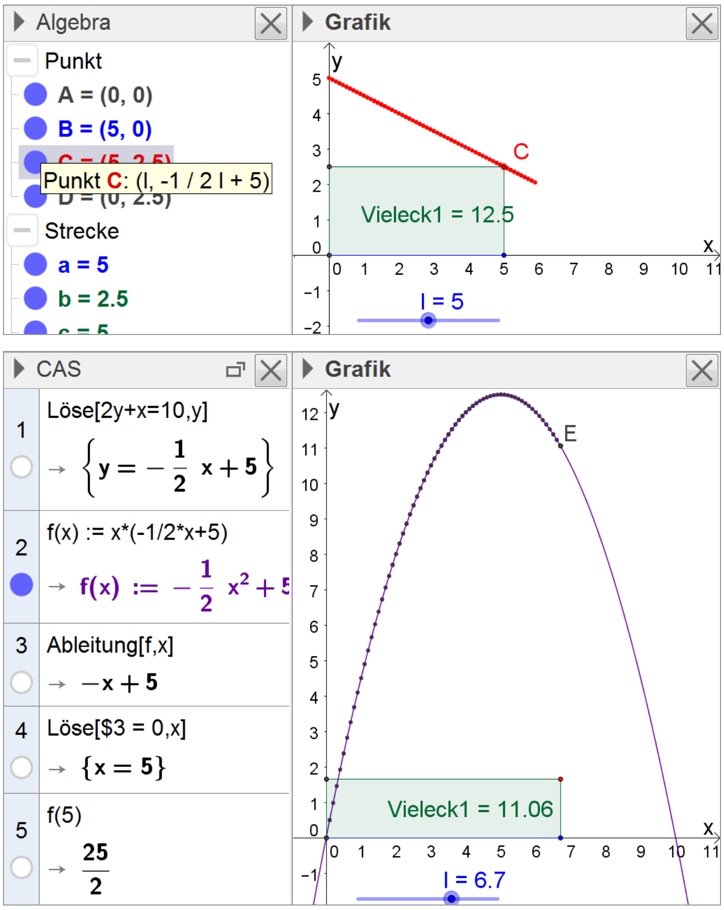
Zielsetzung Erarbeitung oder Übung

Voraussetzung Ableitung (Grundlagen, insbesondere: Interpretation, grundlegende Ableitungsregeln)

Anmerkungen Der relativ offen formulierte Arbeitsauftrag eignet sich besonders zur Bearbeitung in Gruppen. Die mithilfe des CAS erarbeiteten Lösungswege (graphisch, tabellarisch oder algebraisch) können anschließend präsentiert werden. Selbstverständlich müssen die Schülerinnen und Schüler in der Lage sein, den Arbeitsauftrag auch ohne Verwendung von Hilfsmitteln zu bearbeiten.

Hinweise zur Bearbeitung

Einen intuitiven Zugang zur Lösung des Problems ermöglicht die dynamische Geometriefunktion des CAS. Damit können ein Näherungswert für den maximalen Flächeninhalt sowie die zugehörige Länge und Breite des Flächenstücks experimentell ermittelt werden. Dieser graphische Weg einer Annäherung an die Lösung ist von den Schülerinnen und Schülern gut nachzuvollziehen. (Hinweis: Der „Wert" des Rechtecks ABCD, d. h. dessen Flächeninhalt, kann im CAS angezeigt werden; nebenstehend wird zudem die Spur des Punkts C ausgegeben.)



Erweiternd kann die Spur des Punkts E mit den Koordinaten (l | Fläche[Vieleck1]) betrachtet und die näherungsweise bestimmte Lösung graphisch bestätigt werden.

Als alternativer Zugang zu einer näherungsweisen Lösung bietet sich auch die Erstellung und Analyse einer geeigneten Wertetabelle an (hier nicht dargestellt).

Eine exakte Lösung des Problems ist mithilfe einer Funktion möglich, die den Inhalt des Flächenstücks – unter Berücksichtigung der Länge des zur Verfügung stehenden Zauns – z. B. in Abhängigkeit von der Länge des entstehenden Rechtecks beschreibt (vgl. Zeilen 1-5).

Arbeitsauftrag 2

Eine Konservendose hat die Form eines geraden Kreiszylinders. Die Dose soll ein Volumen von 120 cm^3 fassen.

a) Geben Sie verschiedene Möglichkeiten für die Maße einer solchen Dose an und berechnen Sie jeweils den Inhalt ihrer Oberfläche.

b) Ermitteln Sie, wie die Abmessungen der Dose gewählt werden müssen, damit der Inhalt ihrer Oberfläche möglichst klein wird. Welchen praktischen Nutzen haben diese Abmessungen?

c) Welche Kriterien werden Hersteller bei der Produktion von Konservendosen außerdem berücksichtigen?

(nach HR Abitur G8, S. 56, Aufgabe 3.1.2 B sowie nach Fokus 11, S. 242, Auftrag 2)

Zielsetzung Erarbeitung oder Übung

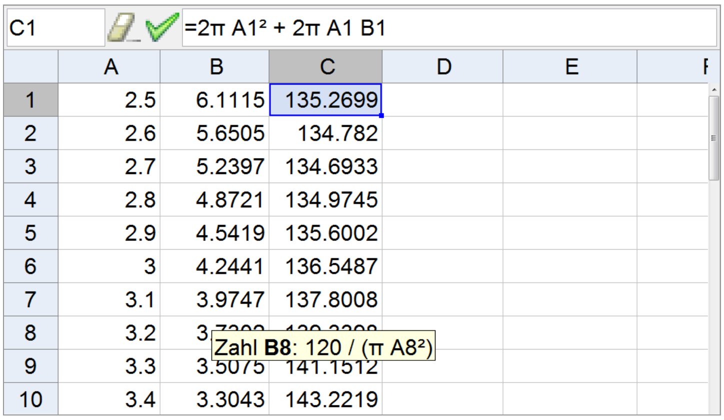
Voraussetzung Ableitung (Grundlagen, insbesondere: Interpretation, grundlegende Ableitungsregeln)

Anmerkung Im Rahmen der Bearbeitung wird deutlich, dass das CAS zwar von umfangreichen Rechenarbeiten entlastet, das Aufstellen einer geeigneten Funktion sowie das Durchführen der weiteren Lösungsschritte jedoch im Wesentlichen von den Schülerinnen und Schülern selbst geleistet werden müssen.

Hinweise zur Bearbeitung

Zu a)

Mithilfe von Aufgabe a sollen die Schülerinnen und Schüler einen Überblick über die Problemstellung gewinnen. Dafür bietet sich eine tabellarische Untersuchung an, die auch für die Bearbeitung von Aufgabe b genutzt werden kann.


C1 =2π A1² + 2π A1 B1

	A	B	C	D	E	F
1	2.5	6.1115	135.2699			
2	2.6	5.6505	134.782			
3	2.7	5.2397	134.6933			
4	2.8	4.8721	134.9745			
5	2.9	4.5419	135.6002			
6	3	4.2441	136.5487			
7	3.1	3.9747	137.8008			
8	3.2	[illegible]	[illegible]			
9	3.3	3.5075	141.1512			
10	3.4	3.3043	143.2219			

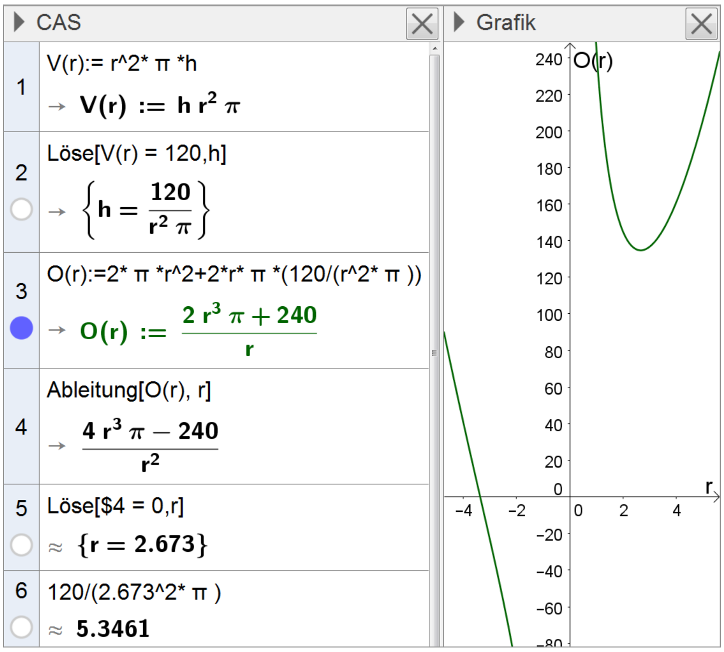
Zahl B8: 120 / (π A8²)

Zu b)

Der Term einer Funktion, die den Inhalt der Oberfläche der Dose z. B. in Abhängigkeit von ihrem Radius beschreibt, kann mit Unterstützung des CAS ermittelt werden (Zeilen 1 bis 3).

Auch bei Verwendung eines CAS sollte auf die Angabe eines sinnvollen Definitionsbereichs (Lösungsdokumentation!) geachtet werden; Ergebnisse sollten stets kritisch geprüft werden.

Die zum minimalen Inhalt der Oberfläche gehörenden Abmessungen der Dose können z. B. rechnerisch mithilfe der Differentialrechnung ermittelt werden (Zeilen 4-6); der Nachweis, dass es sich bei der in Zeile 5 ermittelten Stelle tatsächlich um ein Minimum handelt, kann abschließend auf unterschiedliche Weise erbracht werden (z. B. anhand des Graphen, per Monotonietabelle oder, sofern bereits eingeführt, mithilfe der zweiten Ableitung).



Die am Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung erarbeitete Handreichung „Das Abitur im Fach Mathematik am achtjährigen Gymnasium" sowie die zugelassenen Lehrbücher bieten zahlreiche weitere Aufgaben zu Extremwertproblemen (z. B. HR Abitur G8, S. 57, Aufgabe 3.1.2 C).

Arbeitsauftrag 3 – Exkurs (Vertiefungsmöglichkeit): lineare Regression

Gegeben sind folgende Messwerte:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	0	1,1	1,8	3,0	4,1	4,7	5,7	6,9	7,6	8,5	9,9

Zu bestimmen ist eine in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $g: x \mapsto mx$ mit $m \in \mathbb{R}$, die die Messwerte möglichst gut beschreibt. Dabei soll der Fehler, der sich aus den einzelnen Abweichungen $y_i - g(x_i)$ der gedanklich von $i = 1$ bis 11 durchnummerierten Wertepaare insgesamt ergibt, möglichst klein sein. Würde man diese Abweichungen addieren, so würden sich die Abweichungen nach oben und unten teilweise gegenseitig aufheben. Um dies zu vermeiden, kann man z. B. als Maß für den Fehler die Summe der Quadrate der Abweichungen verwenden. Dies führt zu einer quadratischen Fehlerfunktion f, die einen möglichst kleinen Wert annehmen soll.

a) Ermitteln Sie den Term der Fehlerfunktion f in Abhängigkeit von m.

b) Ermitteln Sie, für welchen Wert von m die Fehlerfunktion f ihren kleinsten Wert annimmt, und geben Sie den zugehörigen Term der Funktion g an.

c) Stellen Sie die Funktion g gemeinsam mit den Messwerten graphisch dar und beurteilen Sie Ihr Ergebnis.

Dieses Verfahren zur Beschreibung von Wertepaaren durch eine lineare Funktion bezeichnet man als lineare Regression. Das CAS stellt ein Werkzeug zur Durchführung des Verfahrens bereit.

d) Führen Sie das Verfahren der linearen Regression mit dem entsprechenden Werkzeug des CAS durch und vergleichen Sie den resultierenden Funktionsterm mit dem Ergebnis aus Aufgabe b.

e) Beschreiben Sie einen Sachzusammenhang, der bei geeigneter Messung die vorgegebenen Wertepaare liefern könnte.

Zielsetzung Erarbeitung (Verfahren der linearen Regression)

Voraussetzung Ableitung (Grundlagen, insbesondere: Interpretation, grundlegende Ableitungsregeln)

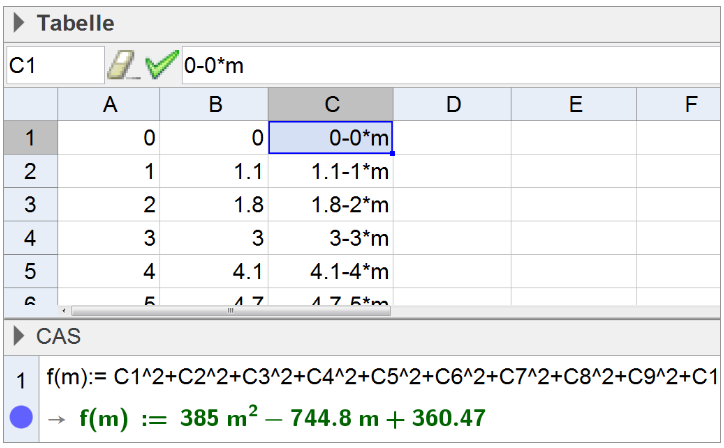
Anmerkung Im Rahmen der Bearbeitung dieses weiterführenden Arbeitsauftrags wird die Differentialrechnung auf eine quadratische Fehlerfunktion angewandt. Diese Anwendung bietet die Möglichkeit, das Prinzip der Regression zu erläutern, um Schülerinnen und Schüler in die Lage zu versetzen, die entsprechende Funktion des CAS mit Verständnis einsetzen zu können. Dieser Auftrag richtet sich primär an leistungsstarke Schülerinnen und Schülern und bietet diesen die Möglichkeit zur Vertiefung und Erweiterung ihres Wissens.

Hinweise zur Bearbeitung

Zu a)

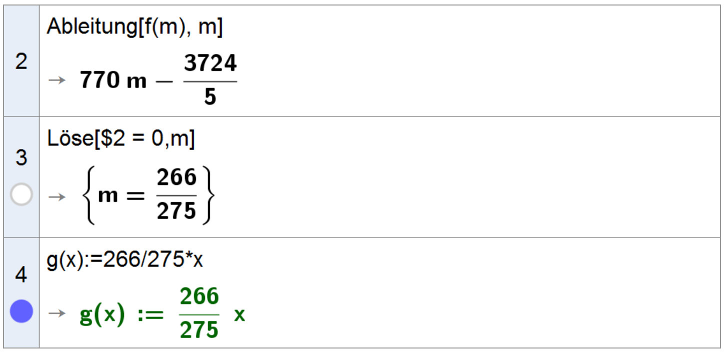
Mithilfe der Tabellenkalkulationsfunktion des CAS können die Quadrate der einzelnen Abweichungen sowie die Summenfunktion verhältnismäßig einfach bestimmt werden.

Auf dieser Grundlage lässt sich der Term der Fehlerfunktion f ermitteln (Zeile 1).



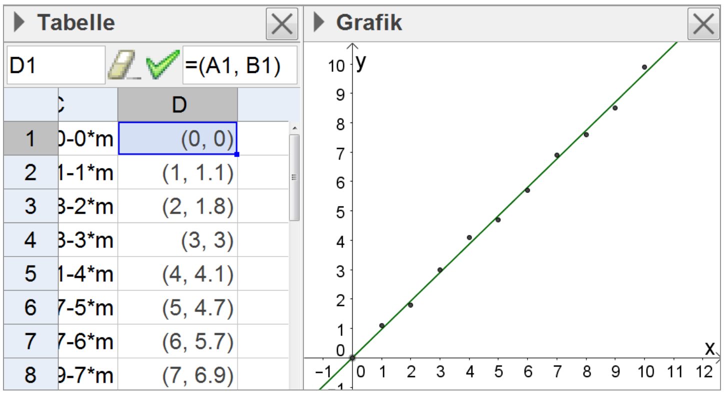
Zu b)

Bestimmung des Terms der Funktion g unter Anwendung der Differentialrechnung



Zu c)

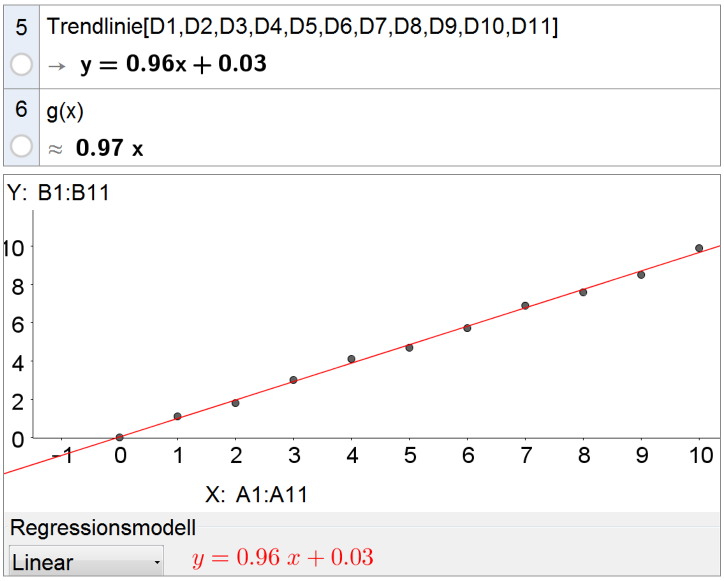
Anhand der graphischen Darstellung wird das Ziel des Verfahrens deutlich, die Abweichung der Geraden von den zu den Wertepaaren gehörenden Punkten möglichst klein zu halten.



Zu d)

Wendet man das vom CAS bereitgestellte Werkzeug zur Durchführung der linearen Regression auf die vorgegebenen Messwerte an, so stimmt der resultierende Funktionsterm – abgesehen vom vorher vernachlässigten konstanten Glied – gut mit dem Ergebnis aus Aufgabe b überein.

Beim hier verwendeten CAS kann die Regressionsgerade per CAS-Befehl (Zeile 5), per „Werkzeug Regressionsgerade" im Graphikfenster oder auch, wie nebenstehend im unteren Bereich dargestellt, per komfortabler Datenanalyse aus der Tabellenkalkulation heraus erzeugt werden.



Weiter vertiefend im Sinne eines Exkurses könnte darüber hinaus in Analogie zu den Aufgaben a-c eine in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $h: x \mapsto ax + b$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ bestimmt werden, die die Messwerte möglichst gut beschreibt; das CAS ermöglicht die dazu nötigen partiellen Ableitungen.

Auf der Grundlage des gewonnenen Verständnisses für das Verfahren der Regression können fortan die vom CAS bereitgestellten Werkzeuge zur Durchführung der quadratischen oder exponentiellen Regression mit mathematischem Verständnis angewandt werden.

→ Funktionen mit Parametern

Arbeitsauftrag 4 – nach Abiturprüfung 2013, Mathematik (CAS), Analysis, Aufgabengruppe II, Teil 2

Gegeben ist die Schar der Funktionen $f_k: x \to \frac{x^2+k}{2\cdot(x+1)}$ mit $k \in \mathbb{R}^+$ und Definitionsbereich $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$. Der Graph von f_k wird mit G_k bezeichnet.

Betrachtet wird zusätzlich die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $a: x \to \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$.

a) Begründen Sie, dass der Graph von a Asymptote aller Graphen von f_k ist. Geben Sie an, für welche x-Werte G_k oberhalb dieser schrägen Asymptote verläuft.

b) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von k die Lage aller Punkte von G_k, in denen G_k eine waagrechte Tangente besitzt. Begründen Sie, dass alle Extrempunkte von G_k auf der Geraden mit der Gleichung $y = x$ liegen.

Zielsetzung Übung (Umgang mit Funktionenscharen/Parametern)

Voraussetzung Ableitung (Grundlagen, insbesondere: Extremwerte, Grenzwerte)

Hinweise zur Bearbeitung

Zu a)

Zeilen 1-4: Nachweis der Asymptote (alternativ per Polynomdivision, sofern behandelt)

Zeile 5: Berechnung zum zweiten Teil der Aufgabenstellung

1	f(x,k):=(x^2+k)/(2*(x+1)) → $f(x,k) := \frac{x^2+k}{2x+2}$
2	a(x):=1/2*x-1/2 → $a(x) := \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$
3	Grenzwert[f(x,k)-a(x),∞] → 0
4	Grenzwert[f(x,k)-a(x),-∞] → 0
5	Löse[2*x+2>0,x] → $\{x > -1\}$

Zu b)

Zeilen 6-11: Bestimmung der Koordinaten der gesuchten Punkte und gleichzeitig Nachweis, dass die x- und die y-Koordinate eines jeden möglichen Extrempunkts jeweils übereinstimmen und diese Punkte somit auf der Geraden mit der Gleichung $y = x$ liegen

6	Ableitung[f(x,k),x] → $\frac{2x\,(2x+2) - 2\,(x^2+k)}{(2x+2)^2}$
7	Löse[$6 = 0,x] → $\left\{x = \sqrt{k+1} - 1, x = -\sqrt{k+1} - 1\right\}$
8	f(sqrt(k + 1) - 1,k) → $\frac{\sqrt{k+1}\,(k+1) - k - 1}{k+1}$
9	Vereinfache[$8] → $\sqrt{k+1} - 1$
10	f((-sqrt(k + 1)) - 1,k) → $\frac{\sqrt{k+1}\,(-k-1) - k - 1}{k+1}$
11	Vereinfache[$10] → $-\sqrt{k+1} - 1$

Arbeitsauftrag 5 – aus Abiturprüfung 2014, Mathematik (CAS), Analysis, Aufgabengruppe 2

BE	Prüfungsteil B
	1 Gegeben ist die Schar der Funktionen $f_a: x \mapsto \frac{1}{20}\cdot(a-x)\cdot\sqrt{x}$ mit $a \in \mathbb{R}^+$ und maximalem Definitionsbereich D. Der Graph von f_a wird mit G_a bezeichnet.
2	**a)** Geben Sie D sowie die Nullstellen von f_a an.
5	**b)** Berechnen Sie die Koordinaten des Punkts H_a, in dem G_a eine waagrechte Tangente besitzt. Begründen Sie, dass H_a ein Hochpunkt von G_a ist. *(Ergebnis: $H_a(\frac{a}{3} \mid \frac{a\sqrt{3a}}{90})$)*
3	**c)** Geben Sie den maximalen Definitionsbereich der Ableitungsfunktion f_a' von f_a an. Geben Sie $\lim\limits_{x\to 0} f_a'(x)$ an und beschreiben Sie die Eigenschaft von G_a, die sich aus diesem Ergebnis folgern lässt.
4	**d)** Bestimmen Sie denjenigen Wert von a, für den G_a die x-Achse unter einem Winkel der Größe 20° schneidet.

Zielsetzung Übung (Umgang mit Funktionenscharen/Parametern)

Voraussetzung Ableitung (Grundlagen, insbesondere: graphische Interpretation, Extremwerte, Grenzwerte)

Hinweise zur Bearbeitung

Zu a)

Zeile 2: Bestimmung der Nullstellen

1	f(x,a):=1/20*(a-x)*sqrt(x) $\rightarrow\ f(x,a) := \frac{1}{20}\sqrt{x}\,(a-x)$
2	Löse[f(x,a) = 0,x] $\rightarrow\ \{x = a, x = 0\}$

Zu b)

Der Nachweis, dass es sich bei H_a um einen Hochpunkt handelt, kann anhand der Ergebnisse in den Zeilen 2 und 6 (in Verbindung mit der Definitionsmenge D) unmittelbar erbracht werden.

3	Ableitung[f(x,a),x] $\rightarrow\ -\frac{1}{20}\sqrt{x} + \frac{1}{40}\cdot\frac{a-x}{\sqrt{x}}$
4	f'(x, a):=\$3 $\rightarrow\ f'(x,a) := \frac{a\sqrt{x} - 3\sqrt{x}\,x}{40\,x}$
5	Löse[f'(x,a) = 0,x] $\rightarrow\ \left\{x = \frac{1}{3}a\right\}$
6	f(1/3*a,a) $\rightarrow\ \sqrt{a}\cdot\frac{a}{\sqrt{3}\cdot 30}$

Zu c)

Bei manchen CAS gelingt die geforderte Berechnung über die Angabe der Zusatzbedingung $a > 0$, einige CAS sind jedoch nicht in der Lage, die Berechnung durchzuführen. Ggf. muss diese ohne Unterstützung des CAS erfolgen, was anhand der Termdarstellung in Zeile 3 leicht möglich ist.

7	RechtsseitigerGrenzwert[f'(x,a),x,0] $\rightarrow$?

Zu d)

8	Löse[tan(20°) = f'(a,a),a] $\approx\ \{a = 52.99\}$

→ Anpassen von Funktionen an vorgegebene Bedingungen

Während der folgende Arbeitsauftrag 6 unmittelbar an die Mittelstufe anschließt und noch gänzlich ohne Kenntnisse aus der Oberstufe bearbeitet werden kann, stellt Arbeitsauftrag 7 eine typische „Steckbriefaufgabe" dar, für deren Bearbeitung auch die Differentialrechnung benötigt wird. Die abschließenden Arbeitsaufträge 8 und 9, die wiederum ohne Oberstufenkenntnisse bearbeitet werden können, zeigen auf, dass CAS experimentelles Arbeiten und die Analyse erhobener Messwerte unterstützen und gerade auch in den naturwissenschaftlichen Fächern gewinnbringend eingesetzt werden können.

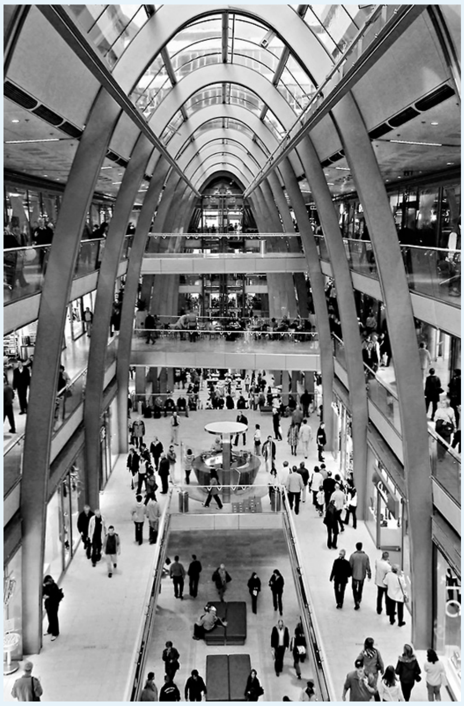
Die zugelassenen Lehrbücher bieten weitere Aufgaben zum Anpassen von Funktionen an vorgegebene Bedingungen (z. B. bsv 11, S. 152, Aufgabe 2; delta 11, S. 209, Aufgabe 9; Fokus 11, S. 230, Aufgabe 30; S. 231, Auftrag 4; S. 239, Aufgabe 32; Lambacher Schweizer 11, S. 216, Beispiel; S. 217, Aufgaben 6 und 10).

Arbeitsauftrag 6

Die Abbildung zeigt die Europa-Passage in Hamburg, eine Ladenpassage, deren obere Stockwerke von 21 gleichen, markanten Bögen gestützt werden.

Überprüfen Sie nachvollziehbar, ob die Bögen in der Abbildung parabelförmig sind.

(aus HR Abitur G8, S. 67, Aufgabe 3.2.1 A)



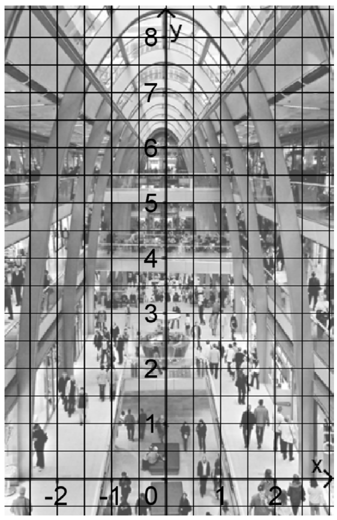
Bildquelle: Wikimedia Commons, lizensiert unter CC0

Zielsetzung Übung

Voraussetzung grundlegende Kenntnisse & Fertigkeiten zur Analysis der Mittelstufe

Hinweise zur Bearbeitung

Zur modellhaften Beschreibung der Form der Bögen durch eine quadratische Funktion kann die Innenseite des Bogens im Vordergrund gewählt werden. Es liegt nahe, die x Achse so festzulegen, dass sie durch die Punkte verläuft, die im Modell den Punkten entsprechen, in denen der Bogen auf den Boden trifft, die y-Achse so, dass sie im Modell den höchsten Punkt des Bogens enthält (vgl. Abbildung.).



Das CAS liefert die Lösung eines geeignet gewählten Gleichungssystems. Um das Ergebnis zu bewerten, kann z. B. der Funktionswert an der Stelle $x = 1$ mit der y-Koordinate des entsprechenden Punkts in der Abbildung verglichen werden – so erkennt man, dass die Bögen nicht parabelförmig sind.

1	f(x):=a*x^2+b*x+c $\rightarrow\ \mathbf{f(x)\ :=\ a\,x^2+b\,x+c}$
2	Löse[{f(0)=8.5,f(-2.5)=0,f(2.5)=0},{a,b,c}] $\rightarrow\ \left\{\left\{\mathbf{a=-\frac{34}{25},b=0,c=\frac{17}{2}}\right\}\right\}$
3	f(1) $\rightarrow\ \mathbf{a+b+c}$
4	-34/25+0+17/2 $\approx\ \mathbf{7.14}$

Arbeitsauftrag 7

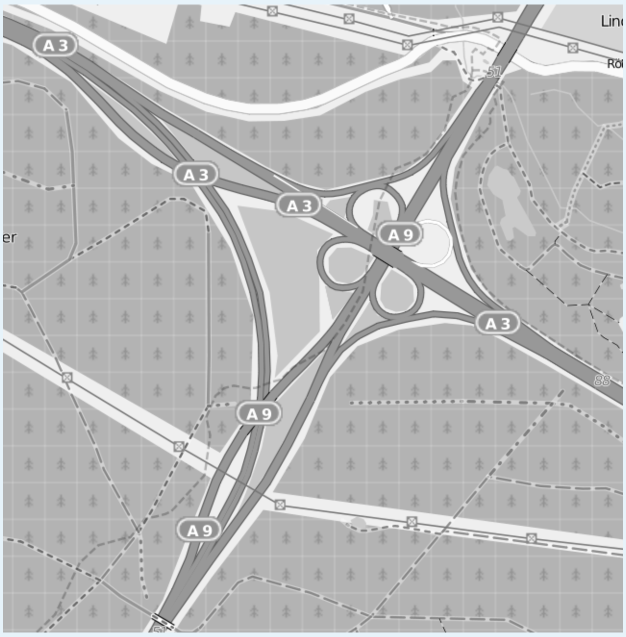
Biegt man am Autobahnkreuz Nürnberg auf der A3 von Würzburg kommend in Richtung München auf die A9 ab, so befährt man eine Verbindungsspange (vgl. Abbildung).

Der Verlauf dieser Spange soll durch eine Funktion f modellhaft beschrieben werden. Das Modell soll dabei der Forderung gerecht werden, dass die Spange jeweils ohne Knick in die Autobahnen übergehen muss.

a) Legen Sie ein Koordinatensystem so fest, dass die Stellen, an denen die Spange in die A3 bzw. in die A9 einmündet, im Modell Nullstellen der Funktion f sind.

b) Bestimmen Sie die Gleichungen der Geraden, durch die sich der jeweilige Verlauf der Autobahnen A3 und A9 im Bereich der Einmündungen modellhaft beschreiben lässt.

c) Stellen Sie einen Term der Funktion f auf. Prüfen Sie die Eignung des von Ihnen ermittelten Modells.



Bildquelle: Wikimedia Commons, lizensiert unter CC0

(nach bsv 11, S. 137, Aufgabe 9)

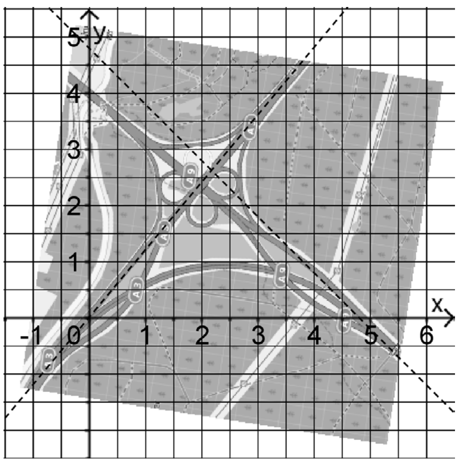
Zielsetzung Übung/Vertiefung

Voraussetzung grundlegende Kenntnisse und Fertigkeiten zur Analysis aus der Jgst. 11

Hinweise zur Bearbeitung

Zu a) und b)

Der jeweilige Verlauf der Autobahnen A3 und A9 lässt sich im Bereich der Einmündungen bei Verwendung des abgebildeten Koordinatensystems modellhaft durch die Geraden mit den Gleichungen $y = 1{,}2x$ bzw. $y = -x + 4{,}8$ beschreiben.



Zu c)

Der Term der Funktion f muss also folgende Bedingungen erfüllen:

- $f(0)=0$
- $f(4{,}8)=0$
- $f'(0)=1{,}2$
- $f'(4{,}8)=-1$

Legt man den möglichen Ansatz $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ zugrunde, so liefert der CAS-Rechner die Lösung des linearen Gleichungssystems.

1	f(x):=a*x^3+b*x^2+c*x+d $\rightarrow$ $f(x) := a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + d$
2	f'(x):=Ableitung[f(x),x] $\rightarrow$ $f'(x) := 3\,a\,x^2 + 2\,b\,x + c$
3	Löse[{f(0)=0,f(4.8)=0,f'(0)=1.2,f'(4.8)=-1},{a,b,c,d}] $\rightarrow$ $\left\{\left\{a = \frac{5}{576}, b = -\frac{7}{24}, c = \frac{6}{5}, d = 0\right\}\right\}$
4	f1(x):=Ersetze[f(x),$3] $\approx$ $f1(x) := 0.009\,x^3 - 0.292\,x^2 + 1.2\,x$

Um die Eignung des Modells zu überprüfen bietet es sich an, die Koordinaten des Hochpunkts des Graphen von f zu bestimmen und diese mit denjenigen des entsprechenden Punkts in der Abbildung zu vergleichen. Daran ist zu erkennen, dass die Annäherung über ein Polynom 3. Grades nicht optimal ist. Dies bietet Anlass, über alternative Modellierungen zu diskutieren und mithilfe einer solchen das Ergebnis zu verbessern (s. u.).

5	Ableitung[f1(x)] $\approx$ $0.026\,x^2 - 0.583\,x + 1.2$
6	Löse[$5 = 0,x] $\approx$ $\{x = 2.292, x = 20.108\}$
7	f1(2.292) $\approx$ 1.323

Variationsmöglichkeiten zur Aufgabenstellung

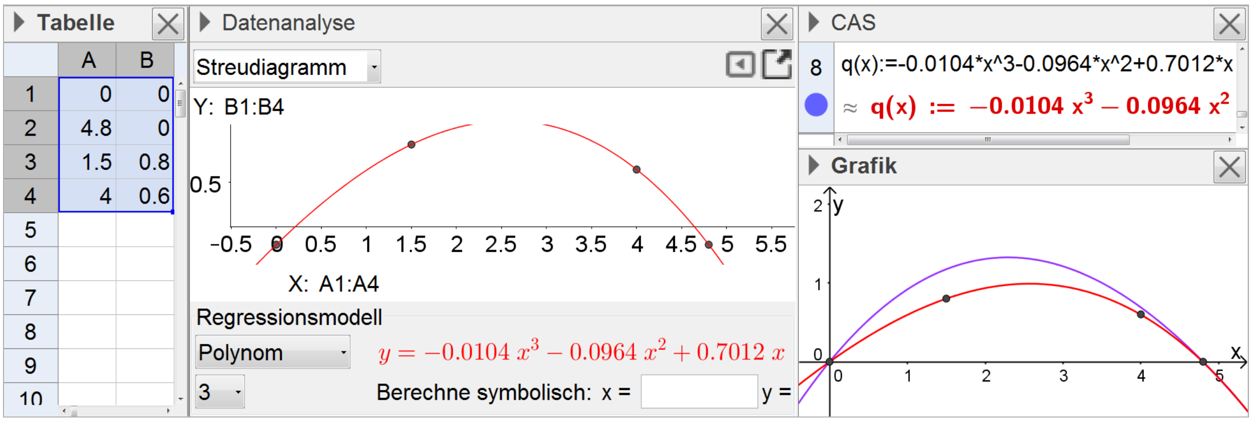
Alternativ zur oben dargestellten Modellierung ist z. B. auch eine Beschreibung durch eine quadratische Funktion, eine Sinusfunktion oder eine ganzrationale Funktion 4. Grades möglich. Entsprechend könnte die Modellierung im Nachgang verbessert werden (im Beispiel durch eine ganzrationale Funktion 4. Grades in Verbindung mit einer zusätzlichen Gleichung), oder es könnte der Arbeitsauftrag – weniger offen – von vorne herein arbeitsteilig in Gruppen bearbeitet werden, denen jeweils ein Ansatz für den zu ermittelnden Funktionsterm vorgegeben wird:

- $f(x)=ax^2+bx+c$
- $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$
- $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$
- $f(x)=a\cdot\sin(b\cdot(x+c))+d$

Je nach Kursgröße können bei Bedarf weitere Aufgabenstellungen aus den zugelassenen Lehrbüchern (s. u.) hinzugenommen werden, um zusätzliche Gruppen bilden zu können. Es bietet sich an, dass die einzelnen Gruppen ihre jeweiligen Ergebnisse übersichtlich auf jeweils einem Plakat zusammenstellen und diese anschließend präsentieren. Detaillierte Hinweise zur Methode „Gruppenarbeit mit Präsentation“ stehen unter *www.LehrplanPLUS.bayern.de* > *Gymnasium* > *Fachprofile* > *Mathematik* > *2.4 Förderung von Kompetenzen im Unterricht* > *Materialien* zum Download bereit.

Exkurs (Vertiefungsmöglichkeit zur Aufgabenstellung)

Unabhängig vom jeweiligen Ansatz kann auch in Erwägung gezogen werden, die Regressionsfunktion des CAS zu verwenden. Dazu werden der Abbildung einige Koordinatenpaare entnommen. Um das Ergebnis der Regression mit dem vorher durch Lösen eines Gleichungssystems ermittelten Funktionsterm zu vergleichen, können die zugehörigen Graphen mit dem CAS gemeinsam dargestellt werden. Die Screenshots zeigen das Ergebnis für eine kubische Regression (vgl. auch Arbeitsauftrag 3), das deutlich macht, dass die Forderung des „Ohne-Knick-Übergehens“ im Rahmen der Regression nicht berücksichtigt ist:



Arbeitsauftrag 8

Das Abkühlen eines heißen Getränks wie z. B. Kaffee soll durch ein mathematisches Modell beschrieben werden.

a) Füllen Sie z. B. heißen Kaffee in ein Gefäß und messen Sie in geeignet gewählten Zeitabständen die Temperatur des Getränks über einen Zeitraum von etwa 20 Minuten.

b) Stellen Sie die Daten mit dem CAS tabellarisch und graphisch dar.

c) Beschreiben Sie den Temperaturverlauf möglichst genau durch eine Funktion der Form $x \mapsto a \cdot b^x + c$, wobei x der vergangenen Zeit in Minuten entsprechen soll, und beurteilen Sie diesen Ansatz für eine Näherung.

d) Vergleichen Sie für ausgewählte Zeitpunkte Modell und Realität. Wie entwickelt sich die Temperatur im Modell insbesondere für lange Wartezeiten?

Zielsetzung Übung/Experimentelles Arbeiten

Voraussetzung grundlegende Kenntnisse und Fertigkeiten zur Analysis der Mittelstufe

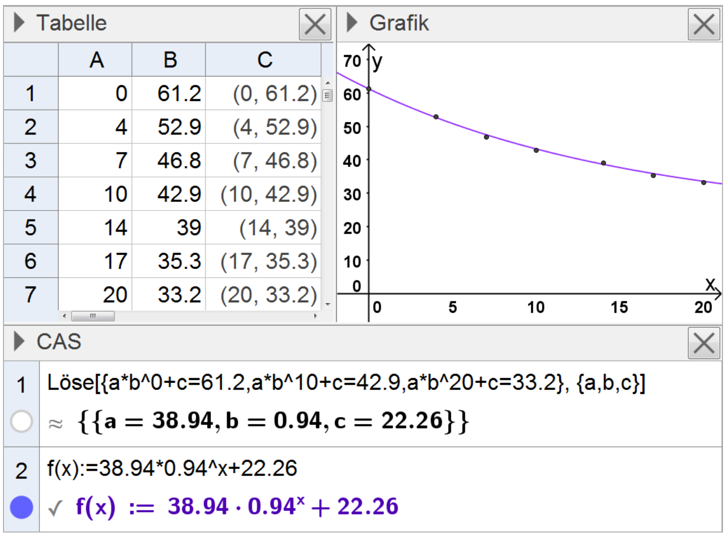
Anregung Vorentlastend können die Schülerinnen und Schüler (oder stellvertretend eine Schülergruppe) aufgefordert werden, die Messung bereits zu Hause durchzuführen. Alternativ können auch Messwerte vorgegeben oder diese gemeinsam im Unterricht aufgezeichnet werden.

Hinweise zur Bearbeitung

Die Messwerte (A: Zeit in Minuten, B: Temperatur in °C) sind Beispielwerte für nicht mehr ganz heißen Kaffee und eine Raumtemperatur von etwa 22 °C.

Um die Eignung des Modells zu überprüfen, können der Graph der Funktion f mit dem tatsächlichen Temperaturverlauf sowie einzelne Funktionswerte mit den zugehörigen Messwerten verglichen werden.

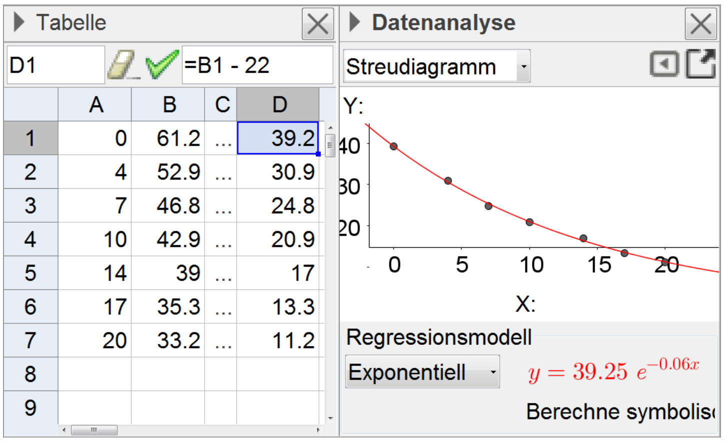
Lässt man die Schülerinnen und Schüler unabhängig voneinander die für die Gleichungen verwendeten Wertepaare auswählen, so ist mit unterschiedlichen Funktionstermen zu rechnen, was Anlass zur Reflexion bieten kann (etwa: Auswahl der Wertepaare).



Exkurs (Vertiefungsmöglichkeit zur Aufgabenstellung)

Da es ein naheliegendes Ziel ist, eine Funktion zu ermitteln, die alle Messwerte möglichst gut beschreibt, kann alternativ auch die Regressionsfunktion des CAS verwendet werden. Dazu muss aus den Messwerten für die Temperatur die Endtemperatur (Raumtemperatur) herausgerechnet werden, da die Regression beim hier verwendeten CAS nur einen Funktionsterm der Form $b \cdot a^x$ liefern kann.

Die so erhaltene Funktion kann anschließend mit der vorher durch Lösen eines Gleichungssystems bestimmten Funktion sowie mit dem die Messwerte darstellenden Punktdiagramm verglichen werden.



	A	B	C	D
1	0	61.2	...	39.2
2	4	52.9	...	30.9
3	7	46.8	...	24.8
4	10	42.9	...	20.9
5	14	39	...	17
6	17	35.3	...	13.3
7	20	33.2	...	11.2
8				
9				

Arbeitsauftrag 9 – Exkurs (Vertiefungsmöglichkeit)

Die gedämpfte Schwingung eines Federpendels soll durch ein mathematisches Modell beschrieben werden.

a) Nehmen Sie mithilfe eines CAS und einem System zur Messwerterfassung eine Messreihe zu einer gedämpften Schwingung eines Federpendels auf. Stellen Sie die Daten mit dem CAS graphisch dar.

b) Beschreiben Sie die Schwingung möglichst genau durch eine Funktion. Prüfen Sie die Eignung des von Ihnen ermittelten Modells.

Zielsetzung Übung/Experimentelles Arbeiten

Voraussetzung grundlegende Kenntnisse und Fertigkeiten zur Analysis der Mittelstufe; System zur Messwerterfassung; Versuchsaufbau

Anmerkungen Einige CAS verfügen über eine eigene Schnittstelle, um ein Messwerterfassungssystem direkt anzuschließen. Alternativ bietet sich die Aufnahme der Messwerte mithilfe von in den meisten Physiksammlungen zur Verfügung stehenden Messinterfaces über einen zentralen Computerarbeitsplatz an. Die Messdaten können sodann an die Schülerinnen und Schüler (in digitaler Form) ausgegeben werden.

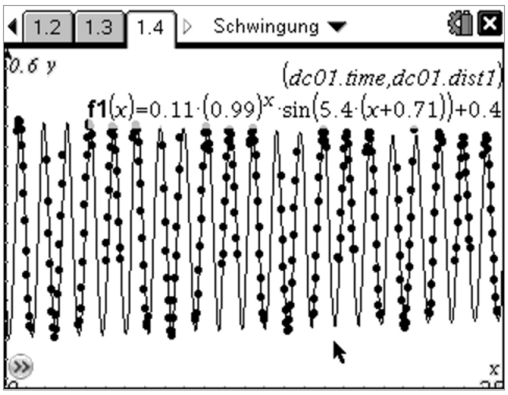
Anstelle der zeitlichen Analyse der Bewegung eines Federpendels kommt z. B. auch diejenige einer Kenngröße eines elektromagnetischen Schwingkreises in Betracht.

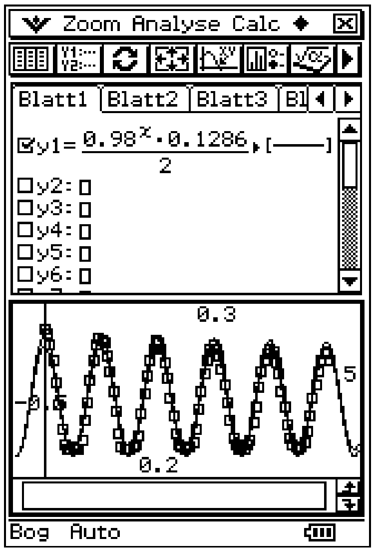
Hinweise zur Bearbeitung

Der Term der Funktion hat die Form $a \cdot b^x \cdot \sin(c \cdot (x+d)) + e$ mit $a,b,c,d,e \in \mathbb{R}$. Auf der Grundlage der Messwerte können mithilfe des CAS passende Werte für die Parameter a, b, c, d und e ermittelt werden.

Nebenstehend ist das Ergebnis zweier solcher Prozesse abgebildet, die mit zwei unterschiedlichen CAS-Rechnern durchgeführt wurden; die Messwerte wurden dazu vorher mit dem jeweiligen CAS-Rechner aufgezeichnet.

Ein Vergleich der jeweiligen Kurve mit den zugehörigen Messwerten zeigt, wie gut die Modelle jeweils sind.





2.2 Stochastik: Schnelleinstieg – grundlegende Einsatzmöglichkeiten des CAS

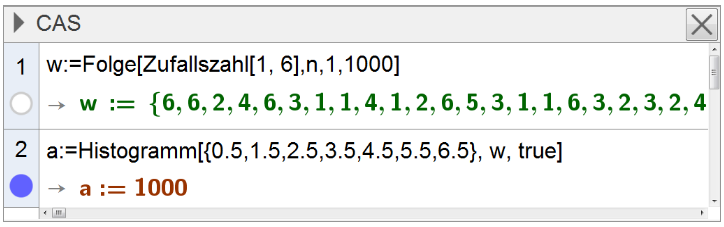
Im Zusammenhang mit den Lehrplaninhalten der Jahrgangsstufe 11 (Axiomatik und Ereignisalgebra, Stochastische Unabhängigkeit) beschränkt sich der Einsatz des CAS im Wesentlichen auf die Funktionen eines herkömmlichen Taschenrechners. Dabei kommen insbesondere folgende CAS-Grundfertigkeiten zur Anwendung:

- Taschenrechner verwenden
- Tabellenkalkulation durchführen
- Histogramm zeichnen

Im Gegensatz zu einem wissenschaftlichen Taschenrechner unterstützt das CAS jedoch durch einen deutlich besseren Funktionsumfang die Simulation von Zufallsexperimenten und deren graphische Auswertung. Im Zusammenhang mit den zugehörigen graphischen Darstellungen unterscheiden sich die CAS in ihrer Syntax dabei wesentlich stärker als beispielsweise in Bereichen der Analysis. Entsprechend ist es notwendig, dass sich sowohl die Lehrkraft als auch die Schülerinnen und Schüler mit der spezifischen Syntax ihres CAS auseinandersetzen. Da es aber im Wesentlichen nur um die Erzeugung von Histogrammen und Zufallszahlen geht, stellt dies im Unterrichtsalltag keine große Hürde dar, wobei zu beachten ist, dass der Ausgabe von Zufallszahlen („Pseudozufallszahlen“) ein Algorithmus zugrunde liegt.

Die Simulationsmöglichkeiten des CAS bieten sich z. B. für Referate oder kleinere Projektarbeiten an, die die Schülerinnen und Schüler dann im Kurs und/oder in einem anderen Rahmen präsentieren können.

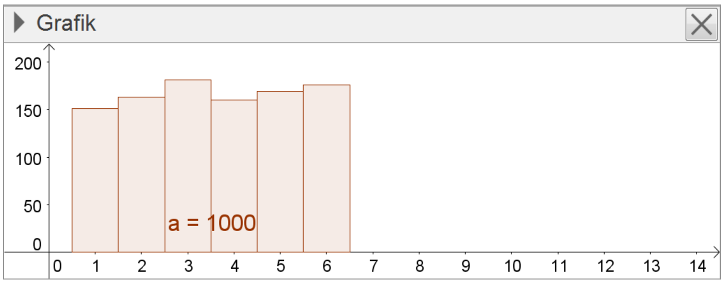
Im Folgenden wird anhand einer typischen Sachsituation ein kurzer Überblick gegeben, welche Funktionen eines CAS sich insbesondere in der Stochastik der Jahrgangsstufe 11 anbieten. Dabei werden **Zufallszahlen** sowie **Histogramme** erzeugt. Dieser Überblick ist nicht als vollständig zu verstehen, sondern gibt nur einen kurzen Eindruck der Einsatzmöglichkeiten.



Unter Nutzung der Tabellenkalkulation des CAS oder, wie nebenstehend dargestellt, der CAS-Eingabezeile kann z. B. das 1000-malige Werfen eines Laplace-Würfels simuliert werden. Im Beispiel wird dazu eine Folge von eintausend ganzzahligen Zufallszahlen erzeugt, welche jeweils zwischen 1 und 6 liegen, und in der Variablen „w“ gespeichert.

Zu dieser Variablen kann mit dem CAS ein Histogramm der absoluten Häufigkeiten der enthaltenen Zahlen erzeugt werden. Die zugehörigen Befehle sind von CAS zu CAS sehr unterschiedlich; im Beispiel erzeugt der Befehl sechs Balken der Breite 1, die symmetrisch um die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5 bzw. 6 gruppiert sind.

Hinweis: Einzelne absolute Häufigkeiten erhält man im Beispiel, etwa zur Zahl 1, mithilfe des Befehls „ZähleWenn[x==1,w]“.

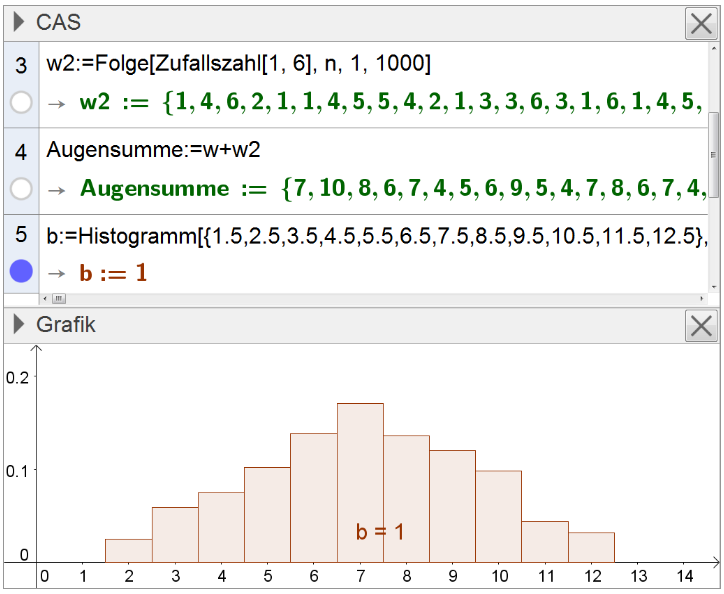


Anschließend können die Schülerinnen und Schüler in analoger Weise weitere eintausend Würfelwürfe simulieren und das Ergebnis in der Variablen „w2“ speichern.

Durch Addition der Listenvariablen „w“ und „w2“, welche komponentenweise vorgenommen wird, kann eine Variable „Augensumme“ erzeugt werden; jeder Eintrag stellt die Augensumme je zweier Würfelwürfe dar.

Ein Histogramm (relative Häufigkeiten) zeigt unmittelbar die Verteilung der Augensummen.

Hinweis: Im Beispiel wurde das Histogramm mittels „Histogramm[{1.5,2.5,3.5,4.5,5.5,6.5, 7.5,8.5,9.5,10.5,11.5,12.5},Augensumme,true, 1/1000]“ erzeugt. Der am Ende des Befehls angegebene Skalierungsfaktor „1/1000“ erzeugt die relativen Häufigkeiten.



2.3 Geometrie

2.3.1 Schnelleinstieg – grundlegende Einsatzmöglichkeiten des CAS

Im Folgenden wird ein kurzer Überblick gegeben, welche Funktionen eines CAS sich insbesondere in der Geometrie der Jahrgangsstufe 11 anbieten. Dieser Überblick ist nicht als vollständig zu verstehen, er vermittelt vielmehr einen kurzen Eindruck der Einsatzmöglichkeiten.

Vektoren eingeben

Vektoren werden im CAS einer Variablen als Wert zugewiesen, sodass bei Rechnungen leicht auf diese zurückgegriffen werden kann. Viele CAS formatieren Vektoren dabei so, dass sie der gewohnten Darstellung ähneln.

Hinweis: Das hier verwendete CAS interpretiert eine einzeilige Matrix als Vektor, wenn der Variablenbezeichner mit einem Kleinbuchstaben beginnt, andernfalls (Beginn mit einem Großbuchstaben) als Punkt.

Skalarmultiplikation, Vektoraddition

z. B. zur Bestimmung der Koordinaten des Mittelpunkts einer Strecke

Winkel zwischen Vektoren

Die Größe des von zwei Vektoren eingeschlossenen Winkels lässt sich mithilfe der bekannten Formel berechnen – manche CAS fassen diese bereits in einem eigenen Befehl zusammen (Zeile 4). Eine Umrechnung ins Gradmaß muss bei Bedarf nach korrekter Interpretation des ausgegebenen Winkelmaßes noch erfolgen (Zeile 6); das hier verwendete CAS ermöglicht aktuell keine globale Umstellung des Winkelmaßes.

4	Winkel[a, b]
	$\rightarrow \frac{1}{2}\pi + \arcsin\left(3 \cdot \frac{\sqrt{217}}{217}\right)$
5	π-Winkel[a, b]
	$\approx$ **1.37**
6	$5 / (2π) 360
	$\approx$ **78.25**

Länge eines Vektors

7	Länge[a]
	$\rightarrow \sqrt{14}$

Vektorgleichung

Gleichungen mit Vektoren sind im CAS komfortabel zu lösen, da sie als Vektorgleichungen eingegeben werden können, so hier z. B. die Gleichung $r \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$, $r, s \in \mathbb{R}$.

8	Löse[r*a+s*b=(10, 4,6),{r,s}]
	$\rightarrow \{\{r = 3, s = 1\}\}$

Skalarprodukt, Vektorprodukt

9	Skalarprodukt[a, b]
	$\rightarrow -6$
10	Kreuzprodukt[a, b]
	$\rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 24 \\ -16 \end{pmatrix}$

2.3.2 Koordinatengeometrie im Raum

„Die Schüler festigen ihre geometrischen Kenntnisse in anspruchsvolleren räumlichen Betrachtungen. In geeignet gewählten dreidimensionalen kartesischen Koordinatensystemen stellen sie Punkte sowie Körper dar und arbeiten mit Vektoren im Anschauungsraum – auch unter Verwendung der zugehörigen Koordinatenschreibweise. Beim Zeichnen geometrischer Körper im Schrägbild festigen die Jugendlichen ihr räumliches Vorstellungsvermögen und entwickeln ihre Vorstellung von Lagebeziehungen im Raum weiter. Fragen der Längen- und Winkelmessung führen die Schüler zum Skalarprodukt von Vektoren und dessen Anwendungen; dabei lernen sie auch, Gleichungen von Kugeln in Koordinatenform zu formulieren. Die Jugendlichen erkennen, dass zur Bestimmung von orthogonalen Vektoren das Vektorprodukt vorteilhaft eingesetzt werden kann. Der praktische Nutzen von Skalar- und Vektorprodukt wird ihnen auch bei der Ermittlung von Flächeninhalten und Volumina geeigneter geometrischer Objekte deutlich. Bei der Beschreibung und Untersuchung geometrischer Figuren und Körper sind die Schüler nun in der Lage, sowohl auf die Vektorrechnung als auch auf grundlegende Verfahren aus der Mittelstufe zurückzugreifen.“ (Fachlehrplan 2004, M 11.2)

Der Einsatz des CAS kann Rechenarbeiten vereinfachen, die mit herkömmlichen Methoden zeitaufwändig sind. So ist eine Konzentration auf die Festigung des räumlichen Vorstellungsvermögens und die Entwicklung der Vorstellung von Lagebeziehungen im Raum möglich – das Verständnis wird gefördert.

Im Zusammenhang mit den beschriebenen Vorschlägen zur Unterrichtsgestaltung kommen insbesondere folgende CAS-Grundfertigkeiten zur Anwendung:

- Winkelmaß einstellen/interpretieren
- Term definieren
- Berechnung mit Vektoren durchführen
- Gleichung lösen
- Gleichungssystem lösen

Vorschläge zur Unterrichtsgestaltung

Arbeitsauftrag 1

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Vektoren $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -14 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 11 \\ -2 \\ -10 \end{pmatrix}$ und $\vec{w} = \begin{pmatrix} -10 \\ -5 \\ -10 \end{pmatrix}$ gegeben.

a) Zeigen Sie, dass die Vektoren einen Würfel aufspannen.

b) Ermitteln Sie die Größe des Winkels, der von zwei Raumdiagonalen eines solchen Würfels eingeschlossen wird.

(nach Fokus 11, S. 213, Aufgabe 11b)

Zielsetzung Übung (Festigung von Grundfertigkeiten in den Bereichen Rechnen mit Vektoren und Skalarprodukt)

Voraussetzung Länge eines Vektors, Skalarprodukt, Winkel zwischen Vektoren

Hinweise zur Bearbeitung

Zu a)

Zeilen 1-3: Im CAS können die gegebenen Vektoren definiert werden, um anschließende Berechnungen zu vereinfachen.

Zeilen 4-6: Prüfung auf Längengleichheit

Zeilen 7-9: Prüfung auf Orthogonalität

1	u:=(2,-14,5)	$\rightarrow \mathbf{u} := \begin{pmatrix} 2 \\ -14 \\ 5 \end{pmatrix}$
5	Länge[v]	$\rightarrow$ **15**
6	Länge[w]	$\rightarrow$ **15**
8	Skalarprodukt[u, w]	$\rightarrow$ **0**
9	Skalarprodukt[v, w]	$\rightarrow$ **0**

Zu b)

Zeilen 10, 11: Definition von Richtungsvektoren der Raumdiagonalen mithilfe von Vektorketten

Zeile 12: Die exakte Größe des Winkels wird vom verwendeten CAS nur implizit angegeben.

Zeile 13: Berechnung eines Näherungswerts für die Größe des Winkels

Zeile 14: Umrechnung in das Gradmaß

Zeile 15: Berechnung der Größe des von den beiden Diagonalen eingeschlossenen spitzen Winkels

Anmerkung: Alternativ kann die Größe des gesuchten Winkels auch mithilfe trigonometrischer Überlegungen bestimmt werden, z. B.:

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{|\vec{u}|}{|\vec{u}+\vec{v}|} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

10	d1:=u+v+w	$\rightarrow \mathbf{d1} := \begin{pmatrix} 3 \\ -21 \\ -15 \end{pmatrix}$
11	d2:=u-v-w	$\rightarrow \mathbf{d2} := \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \\ 25 \end{pmatrix}$
12	Winkel[d2,d1]	$\rightarrow \frac{1}{2}\pi + \mathbf{arcsin}\left(\frac{1}{3}\right)$
13	Numerisch[$12]	$\rightarrow$ **1.91**
14	Numerisch[$13 (180 / π)]	$\rightarrow$ **109.47**
15	Numerisch[180 - $14]	$\rightarrow$ **70.53**

Arbeitsauftrag 2

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Vektoren $\vec{a}=\begin{pmatrix}3\\1\\5\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$, $\vec{c}=\begin{pmatrix}1\\4\\0\end{pmatrix}$ und $\vec{d}=\begin{pmatrix}4\\-14\\9\end{pmatrix}$ gegeben.

a) Schreiben Sie den Vektor $\vec{d}$ als Summe von Vielfachen der Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$, das heißt: Bestimmen Sie $r,s,t \in \mathbb{R}$ so, dass $\vec{d}=r\cdot\vec{a}+s\cdot\vec{b}+t\cdot\vec{c}$.

b) Entscheiden Sie, ob sich jeder Vektor als eine Summe von Vielfachen der Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ darstellen lässt. Begründen Sie Ihre Entscheidung.

c) Ermitteln Sie, ob sich der Vektor $\vec{d}$ als Summe von Vielfachen der Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{e}=\begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix}$ darstellen lässt.

(nach Fokus 11, S. 207, Aufgabe 32)

Zielsetzung Vertiefung (Umgang mit Vektorketten und deren Interpretation)

Voraussetzung Vektorketten, Gleichungssysteme, Vektorgleichungen

Anmerkung Das CAS nimmt bei dieser Aufgabe viel Rechenarbeit ab, sodass die vertiefte Auseinandersetzung mit den (unterschiedlichen) Lösungsstrategien deutlich erleichtert wird und in den Vordergrund treten kann.

Hinweise zur Bearbeitung

Zu a)

Zeilen 1-4: Definition der Vektoren

Zeile 5: Lösen der Vektorgleichung

Hinweis: Bei manchen CAS muss das zugrunde liegende Gleichungssystem explizit eingegeben werden.

4 d:=(4,-14,9)

$\rightarrow \mathbf{d} := \begin{pmatrix}4\\-14\\9\end{pmatrix}$

5 Löse[d=r*a+s*b+t*c]

$\rightarrow \left\{\left\{r=\frac{21}{23}, s=\frac{51}{23}, t=-\frac{73}{23}\right\}\right\}$

Zu b)

Die Vektorgleichung ist für einen allgemeinen Vektor $\begin{pmatrix}d_1\\d_2\\d_3\end{pmatrix}$ lösbar.

6 Löse[(d_1,d_2,d_3)=r*a+s*b+t*c,{r,s,t}]

$\rightarrow \left\{\left\{r=-\frac{8}{23}d_1+\frac{2}{23}d_2+\frac{9}{23}d_3, s=\frac{20}{23}d_1-\frac{5}{23}d_2-\frac{1}{2}\right.\right.$

Zu c)

Zeile 8: Die Vektorgleichung besitzt keine Lösung, also kann $\vec{d}$ nicht als Summe von Vielfachen der Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{e}$ dargestellt werden.

7 e:=(-1,3,1)

$\rightarrow \mathbf{e} := \begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix}$

8 Löse[r*a+s*b+t*e=d]

$\rightarrow \{\}$

Arbeitsauftrag 3 (Mittenviereck)

In einem kartesischen Koordinatensystem ist das Viereck ABCD mit den Eckpunkten $A(-1|0)$, $B(7|-3)$, $C(11|1)$ und $D(0|3)$ gegeben. Verbindet man die Mittelpunkte der Seiten $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ und $[DA]$, so entsteht ein sogenanntes Mittenviereck.

a) Stellen Sie das Viereck ABCD mithilfe des CAS dar und konstruieren Sie damit das zugehörige Mittenviereck.

b) Stellen Sie eine Vermutung hinsichtlich der Form des Mittenvierecks an. Überprüfen Sie Ihre Vermutung mithilfe der Vektorrechnung.

c) Bestätigen Sie, dass die Vermutung für jedes beliebige – nicht zwingend ebene – Viereck gilt.

(nach delta 11, S. 99, Aufgabe 13)

Zielsetzung Vertiefung: Die Schülerinnen und Schüler sollen mithilfe der Vektorrechnung eine Begründung für ein klassisches geometrisches Phänomen selbst entwickeln. Das CAS mit seiner dynamischen Geometriefunktion unterstützt dabei sowohl beim entdeckenden Lernen als auch beim Rechnen.

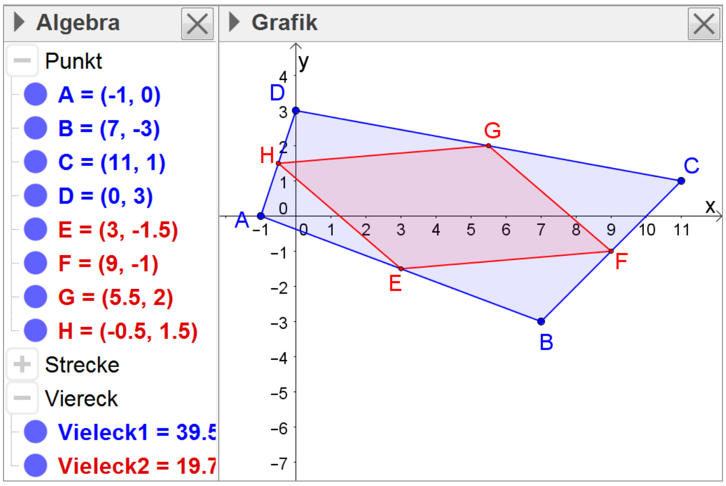
Voraussetzung Mittelpunkt einer Strecke, Länge eines Vektors, Parallelität von Vektoren

Anmerkung Die Aufgabe eignet sich gut zur Binnendifferenzierung.

Hinweise zur Bearbeitung

Zu a)

Mithilfe der dynamischen Geometriefunktion des CAS lassen sich das Viereck ABCD sowie das zugehörige Mittenviereck sehr einfach darstellen.



Zu b)

Beispielsweise durch Vergleich der Seitenlängen des Mittenvierecks (die Streckenlängen werden automatisch im Zuge der Generierung eines Vielecks mit definiert, Näherungswerte für ihre Längen können durch Ausklappen des Bereichs „Strecke“ im Algebra-Fenster abgelesen werden) gelangen die Schülerinnen und Schüler zu der Vermutung, dass es sich beim Mittenviereck um ein Parallelogramm handelt.

Zeilen 5 ff.: Vergleich der Verbindungsvektoren jeweils benachbarter Seitenmittelpunkte

Hinweis: Vektoren werden je nach CAS und Kontext teils in Zeilen- und teils in Spaltenschreibweise ausgegeben (vgl. Kapitel 2.3.1).

5	G-H $\rightarrow \left(6, \frac{1}{2}\right)$
6	F-E $\rightarrow \left(6, \frac{1}{2}\right)$
7	G-F $\rightarrow \left(-\frac{7}{2}, 3\right)$
8	H-E $\rightarrow \left(-\frac{7}{2}, 3\right)$

Zu c)

Zeilen 1-4: Festlegung der Ortsvektoren der Eckpunkte mit allgemeinen Koordinaten

Zeilen 5-8: Berechnung der Ortsvektoren der Seitenmittelpunkte

Zeilen 9, 10: Vergleich zweier einander gegenüberliegender Verbindungsvektoren jeweils benachbarter Seitenmittelpunkte

4	d:=(d_1,d_2,d_3) $\rightarrow \mathbf{d} := \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}$
5	mab:=1/2(a+b) $\rightarrow \mathbf{mab} := \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(a_1+b_2) \\ \frac{1}{2}(a_2+b_2) \\ \frac{1}{2}(a_3+b_3) \end{pmatrix}$
9	mbc-mab $\rightarrow \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}a_1+\frac{1}{2}c_1 \\ -\frac{1}{2}a_2+\frac{1}{2}c_2 \\ -\frac{1}{2}a_3+\frac{1}{2}c_3 \end{pmatrix}$
10	mcd-mda $\rightarrow \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}a_1+\frac{1}{2}c_1 \\ -\frac{1}{2}a_2+\frac{1}{2}c_2 \\ -\frac{1}{2}a_3+\frac{1}{2}c_3 \end{pmatrix}$

Arbeitsauftrag 4

In einem kartesischen Koordinatensystem bilden die Punkte $A(-1|2|-1)$, $B(1|3|1)$, $C(-1|5|2)$, $D(-3|4|0)$ und $S_k(-1+k\,|\,3{,}5+2k\,|\,0{,}5-2k)$ für jedes $k \in \mathbb{R}$ die Eckpunkte einer Pyramide mit der Spitze S_k.

a) Weisen Sie nach, dass die Grundfläche ABCD ein Quadrat ist und dass die vier Seitenkanten $[AS_k]$, $[BS_k]$, $[CS_k]$ und $[DS_k]$ gleich lang sind.

b) Beschreiben Sie möglichst genau den geometrischen Ort, auf dem sich alle Punkte S_k befinden, und zeichnen Sie die Pyramiden $ABCDS_{-1}$ und $ABCDS_{-2}$ in ein kartesisches Koordinatensystem ein.

c) Berechnen Sie auf zwei verschiedene Arten in Abhängigkeit von k das Volumen der Pyramide.

(nach Lambacher Schweizer 11, S. 114, Aufgabe 13)

Zielsetzung Übung (typische Aufgabenstellung zur Raumgeometrie)

Voraussetzung Abstand zweier Punkte, Winkel zwischen Vektoren, Pyramidenvolumen

Anmerkung Die Aufgabe bietet auch Anlass zur Diskussion des „entarteten“ Falls ($k = 0$).

Hinweise zur Bearbeitung

Zu a)

Zeilen 1-5: Definition der Eckpunkte

4	D:=(-3,4,0) $\rightarrow \mathbf{D} := (-3, 4, 0)$
5	S(k):=(-1+k,3.5+2k,0.5-2k) $\rightarrow \mathbf{S(k)} := \left(k-1, 2k+\frac{7}{2}, -2k+\frac{1}{2}\right)$

Zeilen 6-9: Definition der Differenzvektoren benachbarter Eckpunkte der Grundfläche

Zeilen 10-13: Nachweis gleicher Seitenlängen (Grundfläche)

Zeile 14: Nachweis der Orthogonalität zweier benachbarter Seiten der Grundfläche

Zeilen 15-19: Berechnung der Länge der Seitenkanten (Um die Ergebnisse besser vergleichen zu können, ist es bei manchen CAS hilfreich, diese zu vereinfachen.)

6	ab:=B-A $\rightarrow$ **ab** $:= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$
13	Länge[ad] $\rightarrow$ **3**
14	Skalarprodukt[ab, bc] $\rightarrow$ **0**
15	Länge[S(k)-A] $\rightarrow \sqrt{\frac{1}{4}}\sqrt{4k^2+(4k+3)^2+(-4k+3)^2}$
16	Vereinfache[Länge[S(k)-A]] $\rightarrow 3\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2k^2+1}}{2}$
17	Vereinfache[Länge[S(k)-B]] $\rightarrow 3\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2k^2+1}}{2}$

Zeilen 20-22: Alternative Möglichkeit zur Begründung, dass die vier Seitenkanten der Pyramide gleich lang sind: Berechnung der Koordinaten des Schnittpunkts M der Diagonalen der Grundfläche und Nachweis (durch Vergleich des Vektors $\overrightarrow{MS_k}$ mit dem Vektorprodukt $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}$), dass $[MS_k]$ senkrecht auf ABCD steht

20	M:=1/2(A+C) $\rightarrow$ **M** $:= \left(-1, \frac{7}{2}, \frac{1}{2}\right)$
21	h:=S(k)-M $\rightarrow$ **h** $:= \begin{pmatrix} k \\ 2k \\ -2k \end{pmatrix}$
22	Kreuzprodukt[ab, ad] $\rightarrow \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix}$

Zu c)

Die Berechnung des Volumens der Pyramide kann auf der Grundlage einer der beiden folgenden Einträge in der Merkhilfe zur Analytischen Geometrie bzw. zu Inhalten der Mittelstufe erfolgen:

- „Volumen V der dreiseitigen Pyramide ABCD: $V = \frac{1}{6}\cdot\left|\overrightarrow{AB}\circ\left(\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD}\right)\right|$ “
- „Pyramide: $V = \frac{1}{3}Gh$ “

23	2*1/6*abs(Skalarprodukt[Kreuzprodukt[ab,bc], S(k)-A]) $\rightarrow$ **9** $\lvert k\rvert$
24	1/3*Länge[ab]^2*Länge[h] $\rightarrow$ **9** $\lvert k\rvert$

3 Einsatz von CAS in der Jahrgangsstufe 12

Die folgenden Vorschläge zur Gestaltung des Unterrichts liefern exemplarisch Anregungen für eine Umsetzung des Lehrplans unter Verwendung von CAS im Mathematikunterricht der Jahrgangsstufe 12. Sie zeigen, an welchen Stellen und zu welchem Zweck ein CAS gewinnbringend eingesetzt werden kann, und unterstützen Lehrkräfte damit bei der Entwicklung eigener Unterrichtsideen. Dazu wird auch immer wieder auf das vielfältige Angebot der zugelassenen Lehrbücher verwiesen.

Ausdrücklich wird darauf hingewiesen, dass die Vorschläge zur Unterrichtsgestaltung die jeweils behandelten Lehrplanabschnitte oder Lehrplaninhalte nicht vollständig abdecken. Abhängig von der jeweiligen Einsatzmöglichkeit des CAS sind die Vorschläge außerdem unterschiedlich ausführlich beschrieben.

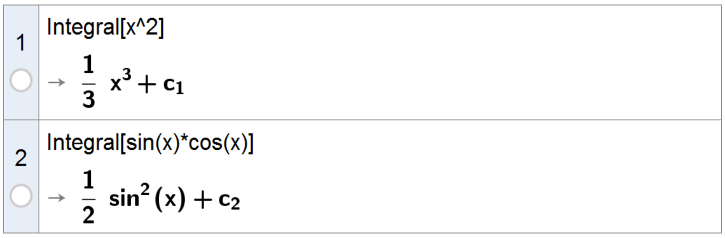
3.1 Analysis

3.1.1 Schnelleinstieg – grundlegende Einsatzmöglichkeiten des CAS

Im Folgenden wird ein kurzer Überblick gegeben, welche Funktionen eines CAS sich insbesondere in der Analysis der Jahrgangsstufe 12 anbieten. Dieser Überblick ist nicht als vollständig zu verstehen, er vermittelt vielmehr einen kurzen Eindruck der Einsatzmöglichkeiten.

Unbestimmtes Integral

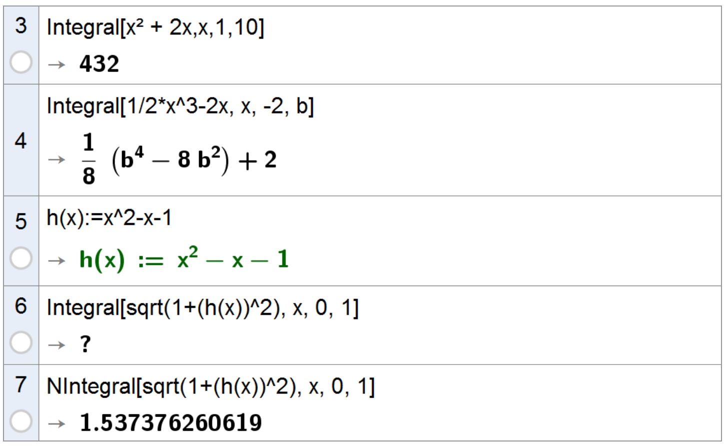
Die Terme von Stammfunktionen bzw. unbestimmte Integrale können mithilfe eines CAS direkt bestimmt werden. Das hier verwendete CAS gibt die entsprechende allgemeine Form mit einer Konstanten aus, deren Bezeichnung von CAS zu CAS variiert.



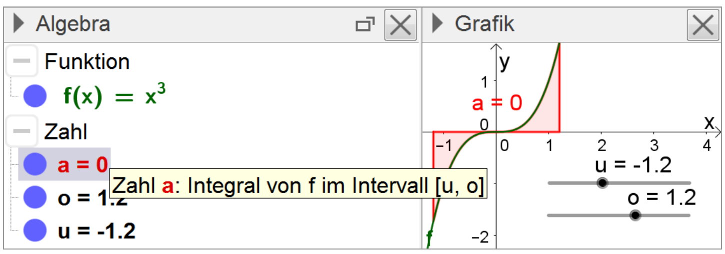
Bestimmtes Integral

Zeilen 3, 4: ohne bzw. mit Parameter

Zeilen 5-7: Manchmal kann es notwendig sein, ein bestimmtes Integral gezielt mithilfe eines Näherungsverfahrens zu bestimmen (beim hier verwendeten CAS per Befehl NIntegral[…]), insbesondere dann, wenn das CAS über das „exakte" Verfahren kein Ergebnis ermitteln kann.



Hinweis: Nutzt man beim hier verwendeten CAS alternativ das Algebra-Fenster in Verbindung mit dem Graphikfenster, so lässt sich das bestimmte Integral auch als Flächenbilanz visualisieren und bei Bedarf, wie nebenstehend dargestellt, mithilfe zweier Schieberegler (oder alternativ z. B. mithilfe zweier auf dem Graphen befindlicher Punkte, deren x-Koordinaten als obere bzw. untere Schranke verwendet werden) dynamisch untersuchen.



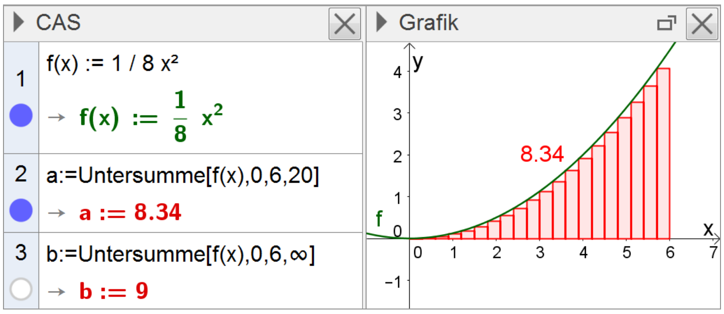
Uneigentliches Integral

Uneigentliche Integrale lassen sich z. B. mithilfe einer Grenzwertbildung betrachten.

8	Integral[1/x^2,x,1,a] $\rightarrow\ 1-\frac{1}{a}$
9	Grenzwert[$8,∞] $\rightarrow\ 1$

Unter- bzw. Obersumme

CAS eignen sich im Bereich der Einführung in die Integralrechnung gut, um Konzepte wie z. B. das der Unter- bzw. Obersummen dynamisch (bei Bedarf unterstützt durch einen Schieberegler) zu visualisieren. Dabei lässt sich das CAS auch zur Berechnung einzelner Näherungswerte und zur Grenzwertbildung einsetzen. Nebenstehender Screenshot verdeutlicht dies exemplarisch, wobei die graphische Darstellung von „b“ ausgeblendet ist (per Klick auf den Button unterhalb der Zeilennummer 3).



3.1.2 Flächeninhalt und bestimmtes Integral

„Die Schüler haben in Jahrgangsstufe 11 die Ableitung einer Funktion als Möglichkeit zur Erfassung der lokalen Änderungsrate kennengelernt; sie machen sich nun bewusst, dass sich die zugehörige Gesamtänderung als Flächeninhalt unter dem Graph, der die lokale Änderungsrate beschreibt, deuten lässt. Ihre Überlegungen führen die Jugendlichen auf das bestimmte Integral und dessen Interpretation als Flächenbilanz.
Die Schüler lernen, Integrale zu berechnen und in Sachzusammenhängen anzuwenden. Dazu begründen sie den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung mithilfe anschaulicher Überlegungen und stellen die Verbindung mit der aus Jahrgangsstufe 11 bekannten Stammfunktion her. Sie erkennen, dass Differenzieren und Integrieren Umkehroperationen sind.“ (Fachlehrplan 2004, M 12.1.1)

Der Einsatz des CAS kann in diesem Zusammenhang in besonderem Maße der Veranschaulichung dienen. So lässt sich beispielsweise der Zusammenhang zwischen Integrandenfunktion und Integralfunktion vor dem Hintergrund der Interpretation des bestimmten Integrals als Flächenbilanz dynamisch veranschaulichen. Da bei der Berechnung bestimmter Integrale, der Bestimmung von Termen von Stammfunktionen oder der integralfreien Darstellung einer Integralfunktion manuell erzielte Ergebnisse mithilfe des CAS kontrolliert werden können, ergeben sich vielfältige Möglichkeiten zu selbständig entdeckendem Lernen und zur Binnendifferenzierung.

Im Zusammenhang mit den beschriebenen Vorschlägen zur Unterrichtsgestaltung kommen insbesondere folgende CAS-Grundfertigkeiten zur Anwendung:

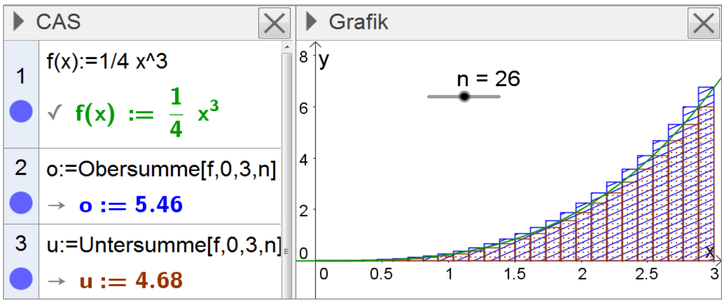
- Term definieren
- Termwert berechnen
- Ableitung bestimmen
- Term einer Stammfunktion bestimmen
- Wert eines bestimmten Integrals berechnen
- Gleichung lösen
- Gleichungssystem lösen
- Graph zeichnen, geeigneten Anzeigebereich wählen
- Graphen von Scharfunktionen zeichnen

Vorschläge zur Unterrichtsgestaltung

→ Veranschaulichung von Unter- und Obersumme – Demonstration durch die Lehrkraft (oder durch leistungsstarke Schülerinnen und Schüler, z. B. im Rahmen eines Referats)

Zur näherungsweisen Bestimmung des Inhalts eines Flächenstücks, das der Graph einer Funktion, die x-Achse sowie zwei Parallelen zur y-Achse einschließen, kann der zu bestimmende Flächeninhalt bekanntermaßen durch die Inhalte von Rechtecksflächen angenähert werden. Dieses Vorgehen wird bereits in der Handreichung „Computeralgebrasysteme im Mathematikunterricht des Gymnasiums – Jahrgangsstufe 10“ im Zusammenhang mit der näherungsweisen Bestimmung der Kreiszahl π verwendet (vgl. HR CAS 10, S. 31 ff.). Das dort beschriebene Verfahren lässt sich anwenden, um von Funktionsgraphen begrenzte Flächeninhalte mithilfe von Unter- und Obersummen zu bestimmen. Auch dabei liegt der besondere Nutzen des CAS weniger in der Herleitung des Verfahrens, als vielmehr in der Verarbeitung komplexer Terme, die gerade bei leistungsschwächeren Schülerinnen und Schülern das Verständnis für das eigentliche Verfahren erschweren können.

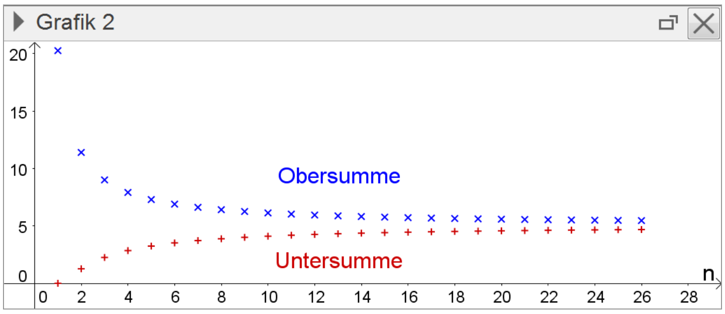
Nebenstehend ist exemplarisch dargestellt, wie sich mithilfe eines Schiebereglers Ober- und Untersumme dynamisch visualisieren lassen. Für die zugehörigen Summen $\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{3}{n}\cdot f\left(k\cdot\frac{3}{n}\right)\right)$ bzw. $\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{3}{n}\cdot f\left(k\cdot\frac{3}{n}\right)\right)$, $n\in\mathbb{N}$, stellt das hier verwendete CAS eigene Befehle bereit (vgl. auch Kapitel 3.1.1).



Mithilfe von Folgen (oder alternativ der Tabellenkalkulation) lassen sich die Werte von Unter- und Obersumme in Abhängigkeit von der Anzahl n der Rechtecke ermitteln. Im Beispiel wurden folgende zwei Eingabezeilen 4 und 5 verwendet, um nebenstehende Graphik zu erstellen:

Obersumme:=Folge[(i,Obersumme[f, 0, 3, i]),i,1,n]

Untersumme:=Folge[(i,Untersumme[f, 0, 3, i]),i,1,n]

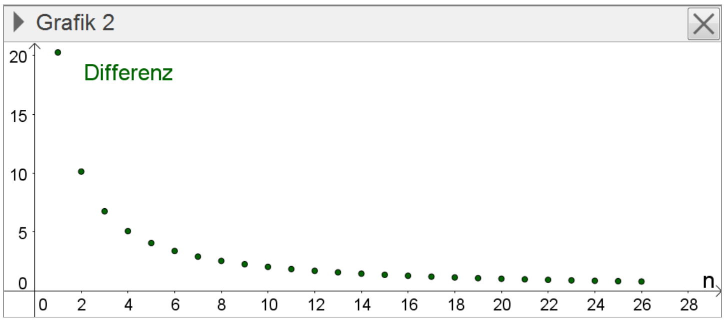


Diese graphische Darstellung der Werte veranschaulicht das Prinzip des Näherungsverfahrens.

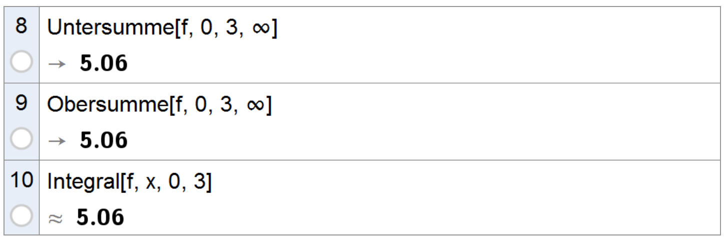
Auch eine Betrachtung der Differenz der jeweiligen Werte von Ober- und Untersumme kann dieses Prinzip zusätzlich illustrieren. Nebenstehende Graphik wurde mithilfe folgender zwei Eingabezeilen 6 und 7 erzeugt:

d:=Obersumme-Untersumme

Folge[(i,Element[d, i]*-(-1)^0.5),i,1,n]



Mithilfe des CAS lässt sich exemplarisch „verifizieren“, dass die Grenzwerte von Unter- und Obersumme übereinstimmen. Auch die Definition des bestimmten Integrals als gemeinsamer Grenzwert von Unter- und Obersumme kann mithilfe des CAS exemplarisch „überprüft“ werden.



→ Arbeitsaufträge

Arbeitsauftrag 1

Bestimmen Sie eine Stammfunktion der in $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ definierten Funktion $f: x \mapsto \frac{2}{x^2} - (5x+1)^3$.

(nach Lambacher Schweizer 12, S. 31, Beispiel 1)

Zielsetzung Übung

Voraussetzung Begriff der Stammfunktion

Anmerkung Mithilfe des CAS können die mit herkömmlichen Methoden recht zeitaufwändigen Berechnungen sehr einfach durchgeführt bzw. die händisch ermittelten Ergebnisse überprüft werden.

Hinweise zur Bearbeitung

Für die Konstante kann abschließend eine beliebige reelle Zahl gewählt werden.

1	Integral[(2/x^2 -(5x+1)^3)] ✓ $\int \frac{2}{x^2} - (5x+1)^3 \, dx$
2	Integral[(2/x^2 -(5x+1)^3)] → $-\frac{1}{20}(5x+1)^4 + c_1 - \frac{2}{x}$

Arbeitsauftrag 2

Bestimmen Sie zu der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion $f: x \mapsto x^2 - 2x$ diejenige Stammfunktion, deren Graph durch den Punkt $P\left(1 \middle| 2\frac{1}{3}\right)$ verläuft, und stellen Sie die Situation graphisch dar.

(nach Lambacher Schweizer 12, S. 27, Aufgabe 6a)

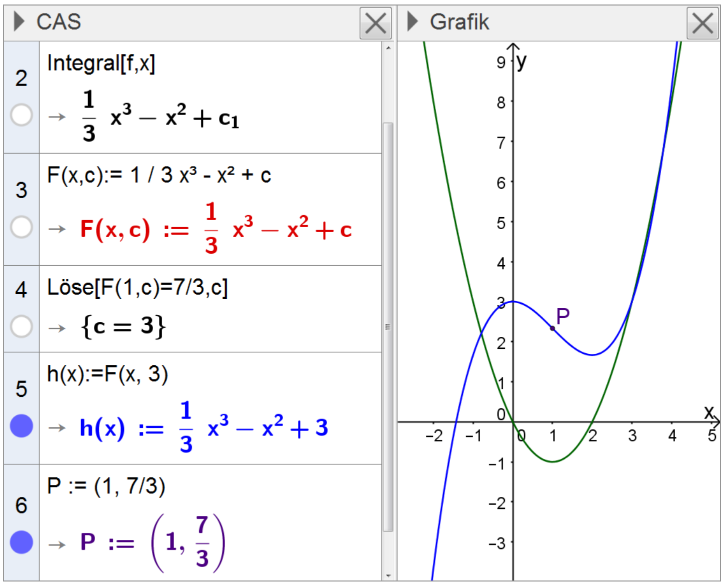
Zielsetzung Übung

Voraussetzung Begriff der Stammfunktion

Anmerkung Mithilfe des CAS können die mit herkömmlichen Methoden recht zeitaufwändigen Berechnungen sehr einfach durchgeführt bzw. die händisch ermittelten Ergebnisse überprüft werden.

Hinweise zur Bearbeitung

Die Zeilen 5 und 6 sowie die Graphik dienen der Vorbereitung der zu erstellenden Zeichnung.



Arbeitsauftrag 3

Berechnen Sie $\int_0^{2\pi} (2+\sin x)\,dx$ und interpretieren Sie das Ergebnis geometrisch.

(nach Fokus 12, S. 54, Aufgabe 17c)

Zielsetzung Übung/Vertiefung

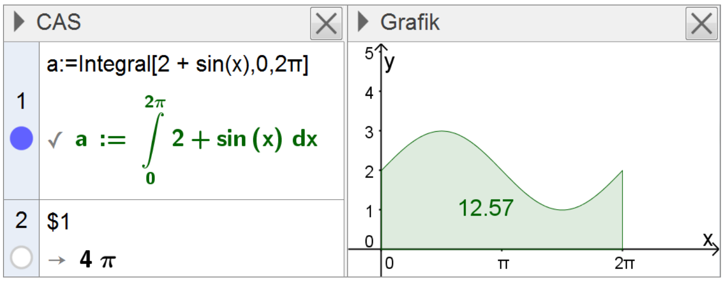
Voraussetzung bestimmtes Integral

Anmerkung Die Verwendung des CAS unterstützt generell durch die sofortige graphische Veranschaulichung die Interpretation des bestimmten Integrals.

Hinweise zur Bearbeitung

Bei Bedarf kann der exakte Wert ergänzend gerundet ausgegeben werden, um den gerundeten Wert in der Graphik nachzuvollziehen.

Die geforderte Interpretation kann, wie nebenstehend dargestellt, durch eine Skalierung der x-Achse in Vielfachen von π erleichtert werden.



Arbeitsauftrag 4

a) Berechnen Sie den Wert des Integrals $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)\,dt$. Geben Sie ohne weitere Rechnung anhand des Graphen der in IR definierten Funktion $x \mapsto \sin x$ die Werte der folgenden Integrale an und begründen Sie jeweils Ihre Angabe (z. B. anhand einer geeigneten Skizze):

$$\int_0^{\pi} \sin(t)\,dt \qquad \int_0^{\frac{3\pi}{2}} \sin(t)\,dt \qquad \int_0^{2\pi} \sin(t)\,dt \qquad \int_0^{-\frac{\pi}{2}} \sin(t)\,dt$$

b) Skizzieren Sie den Graphen der in IR definierten Integralfunktion $F: x \mapsto \int_0^{x} \sin(t)\,dt$ unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse für $x \in [-\pi; 3\pi]$ in ein geeignet skaliertes Koordinatensystem. Kontrollieren Sie Ihre Skizze anschließend mithilfe des CAS.

c) Wie geht der Graph der in IR definierten Funktion $H: x \mapsto \int_{\frac{\pi}{2}}^{x} \sin(t)\,dt$ aus dem Graphen von F hervor? Begründen Sie Ihre Antwort.

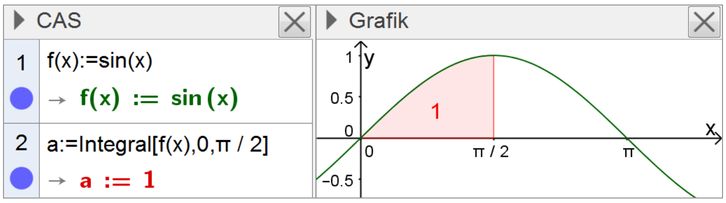
Zielsetzung Übung/Vertiefung

Voraussetzung bestimmtes Integral; Integralfunktion (Grundlagen)

Anregung Z. B. im Rahmen der Besprechung der Schülerlösungen zu dieser Aufgabe kann mithilfe des CAS ergänzend der Zusammenhang zwischen Integrandenfunktion und Integralfunktion vor dem Hintergrund der Interpretation des bestimmten Integrals als Flächenbilanz dynamisch veranschaulicht werden.

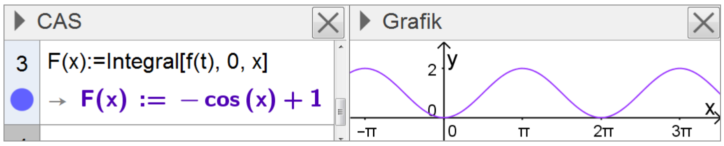
Hinweise zur Bearbeitung

Zu a)



Zu b)

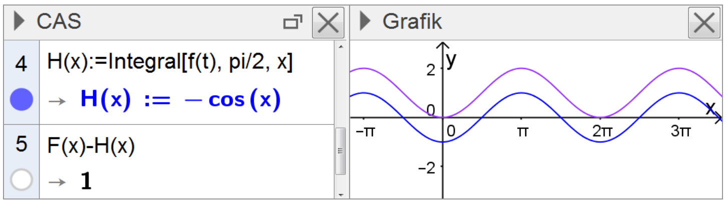
Die Schülerinnen und Schüler sollen in der Lage sein, den Graphen von F ohne Einsatz des CAS zu skizzieren. Entsprechend soll hier das CAS nur als Kontrollinstrument dienen.



Zu c)

Mit dem CAS können die Graphen der Funktionen F und H in einem gemeinsamen Koordinatensystem dargestellt und eine Vermutung entwickelt werden (Zeile 5). Die Begründung erfordert die allgemeine mathematische Kompetenz „Argumentieren“:

Für $x \in \mathbb{R}$ gilt: $F(x) = \int_0^x \sin(t)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^x \sin(t)dt = 1 + H(x)$, also $H(x) = F(x) - 1$. Daher geht der Graph von H aus dem Graphen von F durch verschieben um 1 in negative y-Richtung hervor.



Arbeitsauftrag 5

Skizzieren Sie den Graphen der in $\mathbb{R}$ definierten Integralfunktion $F: x \mapsto \int_{-1}^{x} \left(t^3 - 8t^2 + t + 10\right) dt$, ohne den Graphen von F mithilfe des CAS darzustellen. Betrachten Sie stattdessen den Graphen der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion $f: t \mapsto t^3 - 8t^2 + t + 10$ und ermitteln Sie anhand dieses Graphen, als Grundlage für Ihre Skizze, die Anzahl der Nullstellen von F, Näherungswerte für die Nullstellen von F sowie die Extremstellen von F.

Beurteilen Sie gemeinsam mit Ihrem Nachbarn Ihre jeweilige Skizze. Stellen Sie dazu die Funktion F nun auch mit dem CAS graphisch dar.

Zielsetzung Vor der Behandlung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung (HDI) kann anhand dieses Arbeitsauftrags das Verständnis der geometrischen Deutung der Integralfunktion gefördert werden.

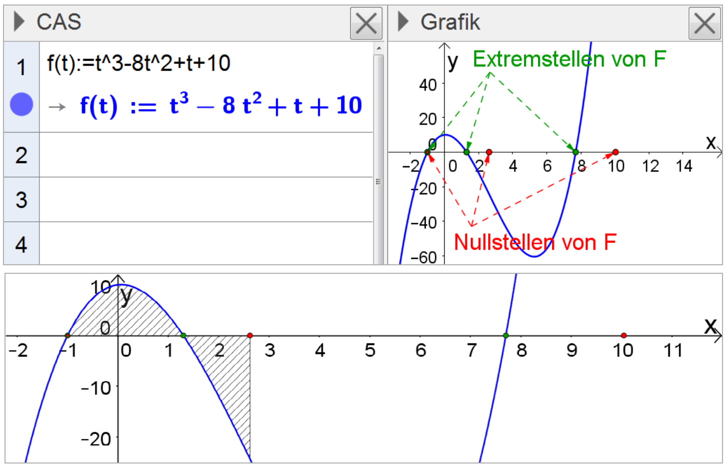
Voraussetzung bestimmtes Integral; Integralfunktion

Anregung Für die Bearbeitung bietet sich Partnerarbeit an; so können neben der allgemeinen mathematischen Kompetenz „Darstellungen verwenden“ auch die allgemeinen mathematischen Kompetenzen „Argumentieren“ und „Kommunizieren“ verstärkt gefördert werden.

Hinweise zur Bearbeitung

Im Rahmen der Bearbeitung dieses Arbeitsauftrags soll der Graph der Funktion f mit dem CAS erstellt werden; sodann soll damit (ohne zu rechnen) näherungsweise ermittelt werden, an welchen Stellen die Flächenbilanz null wird. (Dies ist in der zweiten Abbildung exemplarisch für die „zweite“ Nullstelle veranschaulicht.)

Die Extremstellen von F können als die Stellen, an denen sich das Wachstumsverhalten der Flächenbilanzfunktion „umkehrt“, anschaulich aus den Nullstellen von f ermittelt werden.



Arbeitsauftrag 6

Gegeben ist die in ℝ definierte Funktion $f: x \mapsto \left(x^2-1\right)\cdot(x-2)$. Der Graph von f wird mit G_f bezeichnet.

a) Geben Sie die Nullstellen von f an und bestimmen Sie die Koordinaten der Extrempunkte von G_f. Zeichnen Sie G_f für $-1{,}5 \le x \le 2{,}5$ in ein Koordinatensystem ein.

Betrachtet wird nun die in ℝ definierte Integralfunktion $F: x \mapsto \int_1^x f(t)\,dt$. Der Graph von F wird mit G_F bezeichnet.

b) Formulieren Sie die Aussage des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung für die Funktion F. Geben Sie ohne Rechnung die Extremstellen von F an.

c) Stellen Sie anhand des Graphen von f eine Vermutung dazu auf, ob die Extrempunkte von G_F oberhalb oder unterhalb der x-Achse liegen. Überprüfen Sie Ihre Vermutung, indem Sie die y-Koordinaten dieser Punkte mit dem CAS ermitteln.

d) Zeichnen Sie G_F unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse in das Koordinatensystem aus Aufgabe a ein. Kontrollieren Sie den Verlauf des Graphen anschließend mithilfe des CAS.

e) Eine Nullstelle von F ist $x = 1$. Veranschaulichen und beschreiben Sie die graphische Bedeutung der weiteren Nullstellen von F in Bezug auf den Graphen von f.

Zielsetzung Übung (Anwendung des HDI); Förderung des Verständnisses des HDI

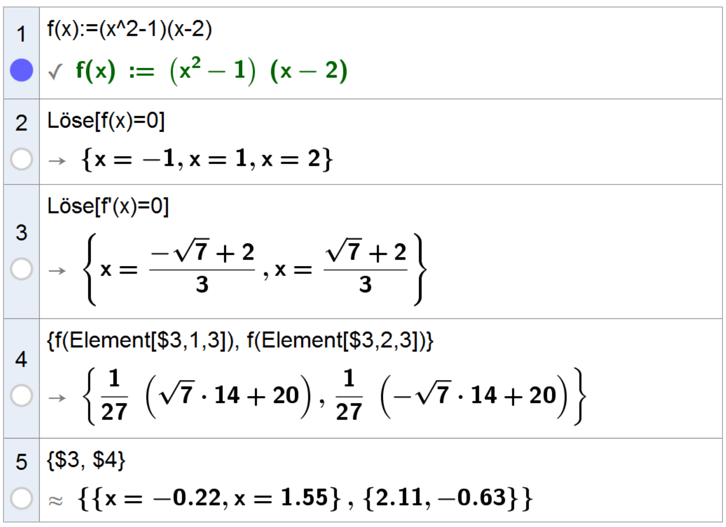
Voraussetzung HDI

Hinweise zur Bearbeitung

Zu a)

Zeile 4 zeigt exemplarisch, wie auf einzelne Einträge der in Zeile 3 ausgegebenen verschachtelten Liste zugegriffen werden kann. Alternativ können selbstverständlich auch schlicht die in Zeile 3 erhaltenen Ergebnisse per Copy-and-paste weiterverwendet werden.

Zeile 5: Ausgabe gerundeter Werte zur Erstellung der Zeichnung.



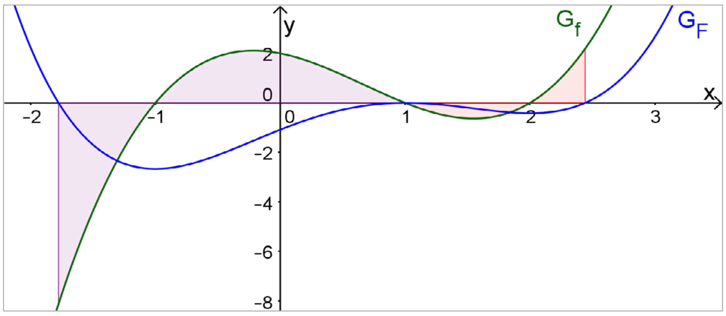
Zu c)

Zeilen 6, 7: Überprüfung der Vermutung

6	F(x):=Integral[f(t), t, 1, x] → $F(x) := \frac{1}{12}\left(3x^4 - 8x^3 - 6x^2 + 24x - 13\right)$
7	{F(-1),F(1),F(2)} → $\left\{-\frac{8}{3}, 0, -\frac{5}{12}\right\}$

Zu e)

Beschreibung z. B.: Der Wert des Integrals gibt eine Flächenbilanz an. Wenn dieser Wert gleich 0 ist für eine Nullstelle $x_0 \neq 1$ von F, dann sind die Inhalte der Flächenstücke, die von G_f und der x-Achse oberhalb bzw. unterhalb der x-Achse im Bereich $1 \leq x \leq x_0$ (bzw. im Bereich $x_0 \leq x \leq 1$, falls $x_0 < 1$) begrenzt werden, gleich.



3.1.3 Weitere Eigenschaften von Funktionen und deren Graphen

„Die neuen Begriffe und Verfahren werden bei verschiedenen Fragestellungen angewandt, insbesondere bei solchen, die eine geometrische Deutung der Integralfunktion erfordern. Dabei greifen die Schüler auch die bereits bekannten Zusammenhänge zwischen den Graphen von Funktion und Ableitungsfunktion wieder auf.
Beispielsweise beim Erschließen des Verlaufs des Graphen einer Integralfunktion aus dem der Integrandenfunktion und aus deren Ableitung lernen die Schüler neben der Monotonie nun auch die Krümmung als Eigenschaft von Graphen kennen. Sie untersuchen das Krümmungsverhalten an Beispielen bisher bekannter Funktionstypen." (Fachlehrplan 2004, M 12.1.2)

Der Einsatz des CAS vereinfacht den rechnerischen Umgang mit Funktionen und deren Graphen. So können sich die Schülerinnen und Schüler auf die Zusammenhänge zwischen Funktion, Ableitungsfunktion und Integralfunktion sowie auf die bewusste Auswahl mathematischer Verfahren konzentrieren – das Verständnis für die Eigenschaften von Graphen, hier insbesondere für deren Krümmung, wird gefördert. Veranschaulichende Darstellungen unterstützen die Schülerinnen und Schüler dabei, die genannten Zusammenhänge auch selbständig zu entdecken. Im Rahmen der Modellierung von Sachsituationen kann der CAS-Rechner zur Durchführung umfangreicher oder komplexer Rechnungen, insbesondere zur Lösung von Gleichungssystemen, genutzt werden. Eine Beschränkung auf einfache, häufig unrealistische Situationen ist unnötig.

Im Zusammenhang mit den beschriebenen Vorschlägen zur Unterrichtsgestaltung kommen insbesondere folgende CAS-Grundfertigkeiten zur Anwendung:

- Term definieren
- Termwert berechnen
- Ableitung bestimmen
- Term einer Stammfunktion bestimmen
- Wert eines bestimmten Integrals berechnen
- Gleichungssystem lösen
- Graph zeichnen, geeigneten Anzeigebereich wählen

Vorschläge zur Unterrichtsgestaltung

Arbeitsauftrag 1

Gegeben ist die in IR definierte Funktion $f: x \mapsto \frac{3}{4}x^2 - 2x - 2$. Der Graph von f wird mit G_f bezeichnet.

a) Zeichnen Sie G_f und den Graphen der Ableitungsfunktion f' von f in ein gemeinsames, geeignet skaliertes Koordinatensystem ein.

b) Untersuchen Sie das Monotonieverhalten von f.

Betrachtet wird nun die in IR definierte Integralfunktion $F: x \mapsto \int_0^x f(t)\,dt$. Der Graph von F wird mit G_F bezeichnet.

c) Zeichnen Sie G_F in das Koordinatensystem aus Aufgabe a ein.

d) Welche Bedeutung hat das Vorzeichen von f für den Verlauf von G_F? Beschreiben Sie mithilfe dieses Zusammenhangs den Verlauf von G_F.

e) Stellen Sie eine Vermutung dafür an, welche Bedeutung das Vorzeichen von f' für den Verlauf von G_F hat. Beschreiben Sie auf der Grundlage Ihrer Vermutung den Verlauf von G_F.

f) Wendepunkte sind Punkte maximaler oder minimaler Steigung des Graphen. Bestimmen Sie die Koordinaten des Wendepunkts von G_F.

g) Beschreiben Sie allgemein die Abhängigkeit des Krümmungsverhaltens eines Funktionsgraphen vom Vorzeichen der zugehörigen zweiten Ableitungsfunktion. Geben Sie eine hinreichende Bedingung für das Vorliegen eines Wendepunkts an.

Zielsetzung Übung/Vertiefung – flexible Anwendung der Grundkenntnisse der Differential- und Integralrechnung

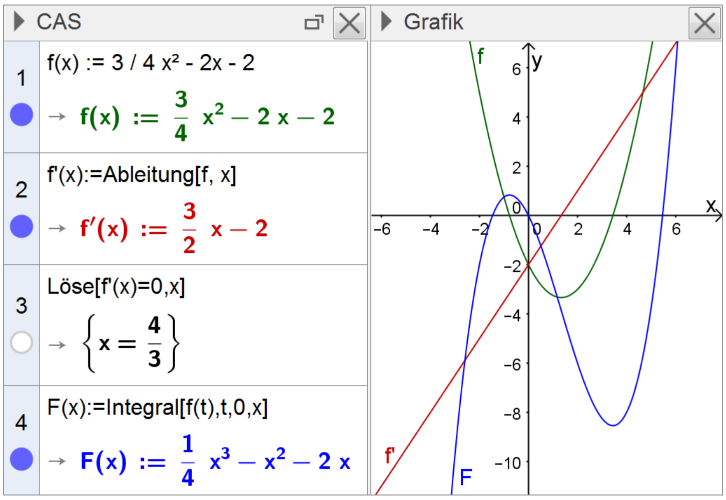
Voraussetzung Grundlagen der Differential- und Integralrechnung (inkl. Krümmungsverhalten und Wendepunkte)

Anmerkung Das CAS ermöglicht nicht nur bei dieser Aufgabe eine zügige und erwartungsgemäß fehlerfreie Darstellung der Graphen von Funktion, zugehöriger Ableitungs- und Integralfunktion, sodass die Analyse und Interpretation der Zusammenhänge in den Vordergrund treten kann.

Hinweise zur Bearbeitung

Zu a), b) und c)

Als Grundlage für die Anfertigung ihrer Lösungen können die Schülerinnen und Schüler mit dem CAS Berechnungen anstellen und Graphen plotten, etwa in der Art, wie dies nebenstehend dargestellt ist.



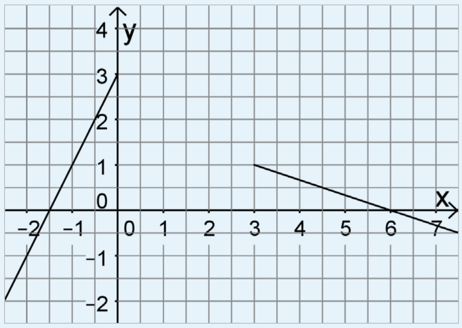
Zu f)

Zeilen 3, 5: Koordinaten des Wendepunkts von G_F.

Arbeitsauftrag 2

Die Abbildung zeigt modellhaft zwei Bahnstrecken, die sich durch folgende Funktionen beschreiben lassen:

- $g: x \mapsto 2x+3\,,\ x \in]-\infty;0]$
- $h: x \mapsto -\frac{1}{3}x+2\,,\ x \in [3;+\infty[$



Die Bahnstrecken sollen durch Schienen so verbunden werden, dass die Übergänge zwischen den bestehenden Strecken und dem neuen Streckenabschnitt an den Anschlussstellen jeweils möglichst glatt verlaufen.

a) Stellen Sie g und h mit dem CAS graphisch dar.

Der neue Streckenabschnitt soll im Modell durch den Graphen einer ganzrationalen Funktion s dargestellt werden.

b) Skizzieren Sie in der Abbildung, wie der neue Streckenabschnitt Ihrer Ansicht nach in etwa verlaufen könnte.

c) Geben Sie die Bedingungen an, die an die Funktion s gestellt werden müssen, und begründen Sie deren jeweilige Notwendigkeit. Welcher Grad bietet sich folglich für s an?

d) Ermitteln Sie den Term der Funktion s und zeichnen Sie den Graphen von s in die Abbildung ein. Vergleichen Sie diesen mit Ihrer Skizze aus Aufgabe b.

e) Auf dem neuen Streckenabschnitt gibt es einen Punkt P, in dem ein Zug momentan geradeaus fährt. Bestimmen Sie die Koordinaten von P.

Zielsetzung Anwendung (bezüglich der Komplexität des zu lösenden Gleichungssystems in Aufgabe d: Vertiefung im Sinne eines Exkurses)

Voraussetzung Grundlagen der Differentialrechnung (inkl. Krümmungsverhalten und Wendepunkte)

Anregung Denkbar ist, den Arbeitsauftrag gemeinsam mit Alternativen zu den vorgegebenen Bahnstrecken wie den folgenden arbeitsteilig in Gruppen bearbeiten zu lassen:

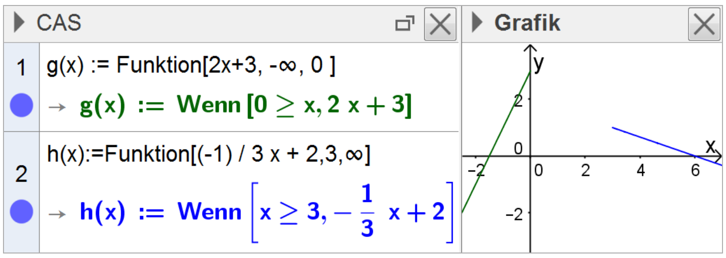
- zwei parallele Bahnstrecken mit festem Abstand
- zwei parallele Bahnstrecken mit dem Abstand $k \in \mathbb{R}$
- zwei Bahnstrecken, die sich durch nichtlineare Funktionen modellhaft beschreiben lassen

Stellen die einzelnen Gruppen ihre jeweiligen Ergebnisse übersichtlich auf jeweils einem Plakat zusammen, so können sie die Ergebnisse anschließend anhand der Plakate präsentieren.

Hinweise zur Bearbeitung

Zu a)

Bei dieser Aufgabe steht die Fertigkeit zur Einschränkung des Definitionsbereichs mit dem CAS im Vordergrund.



Zu c) und d)

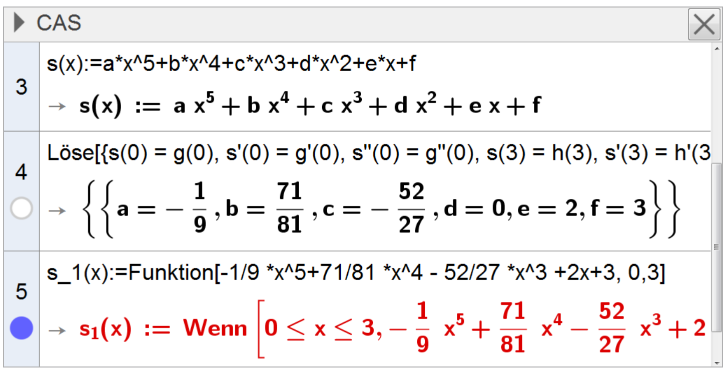
An die Funktion s sind folgende Bedingungen zu stellen:

$s(0)=g(0)\qquad s'(0)=g'(0)\qquad s''(0)=g''(0)$

$s(3)=h(3)\qquad s'(3)=h'(3)\qquad s''(3)=h''(3)$

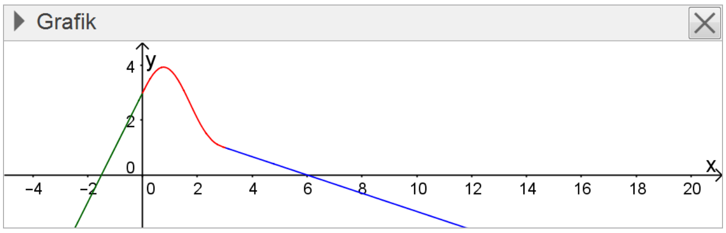
Für s bietet sich folglich eine Funktion fünften Grades an.

Das Gleichungssystem kann anschließend, wie nebenstehend dargestellt, nach Definition von s übersichtlich eingegeben und gelöst werden.



Zeile 4 (Forts.):), s''(3) = h''(3)},{a, b, c, d, e, f}]

Anregung: Z. B. im Rahmen der Besprechung der Aufgabe bietet es sich an, ergänzend einen Term von s zu ermitteln, ohne die Bedingungen für die zweite Ableitung zu beachten, und das Ergebnis mit dem Ergebnis aus Aufgabe c zu vergleichen.



Zu e)

Für die x-Koordinate des Wendepunkts ergeben sich rechnerisch drei Möglichkeiten, von denen aber nur $x = \frac{26}{15}$ im Definitionsbereich von s liegt (vgl. Aufgabenstellung).

Anmerkung: Bei dieser Aufgabe zeigt sich exemplarisch, dass die Interpretation von Lösungen im Kontext der Aufgabenstellung gerade auch bei CAS-Ausgaben notwendig ist und die Schülerinnen und Schüler dafür sensibilisiert werden müssen.

6 s_2(x):=-1/9 *x^5+71/81 *x^4 - 52/27 *x^3 +2x+3

$\rightarrow\ s_2(x) := -\frac{1}{9}x^5 + \frac{71}{81}x^4 - \frac{52}{27}x^3 + 2x + 3$

7 Löse[s_2''(x)=0, x]

$\rightarrow \left\{x = 0, x = \frac{26}{15}, x = 3\right\}$

8 s_2'''(26/15)

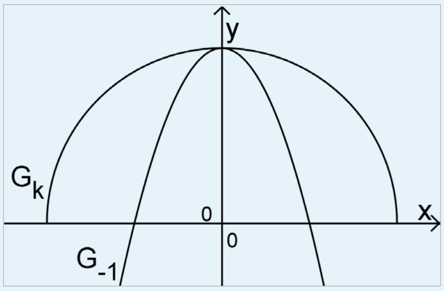
$\approx\ 4.88$

9 s_2(26/15)

$\rightarrow\ \frac{53530027}{20503125}$

Arbeitsauftrag 3

Gegeben sind die in $[-4;4]$ definierte Funktion $k: x \mapsto \sqrt{16-x^2}$ sowie die Schar der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen $p_a: x \mapsto ax^2 + 4$ mit $a \in \mathbb{R}$. Die Graphen von k und p_a werden mit G_k bzw. G_a bezeichnet. Die Abbildung zeigt G_k und G_{-1}.



a) Zeichnen Sie G_k und G_a in ein gemeinsames Koordinatensystem. Wählen Sie dabei den Wert des Parameters a mithilfe des CAS unter Verwendung eines geeigneten Werkzeugs so, dass G_a in der Umgebung von $x = 0$ möglichst nahe an G_k verläuft.

Von nun an werden ausschließlich die Funktionen k und p betrachtet; dabei ist p die Funktion der Schar für den von Ihnen gewählten Wert von a.

b) Treffen Sie ohne zu rechnen eine Aussage darüber, wie sich in der Umgebung von $x = 0$ die Werte der ersten und zweiten Ableitung von p zu den jeweils entsprechenden Werten der ersten und zweiten Ableitung von k verhalten. Begründen Sie Ihre Aussage.

c) Berechnen Sie die Terme der zweiten Ableitungsfunktionen von k und p; zeichnen Sie die zugehörigen Graphen in das Koordinatensystem aus Aufgabe a ein. Vergleichen Sie den Verlauf der beiden Graphen in der Umgebung von $x = 0$ und geben Sie eine notwendige Bedingung dafür an, dass G_k und G_a in der Umgebung von $x = 0$ nahezu übereinstimmen. Ermitteln Sie auf der Grundlage dieser Bedingung rechnerisch den idealen Wert von a.

d) Welche Bedeutung hat die zweite Ableitungsfunktion für den Verlauf eines Funktionsgraphen? Begründen Sie Ihre Antwort anhand der Graphen von k und p.

e) Untersuchen Sie auf der Grundlage der gewonnenen Erkenntnisse, ob sich anstelle von G_a auch der Graph einer ganzrationalen Funktion dritten Grades der Form $x \mapsto cx^3 + 4$ mit $c \in \mathbb{R}$ im ersten Quadranten dem Kreisbogen anpassen lässt.

Zielsetzung Übung/Vertiefung (tiefergehende Auseinandersetzung mit der Aussagekraft der 2. Ableitung)

Voraussetzung Grundlagen der Differentialrechnung (inkl. Krümmungsverhalten)

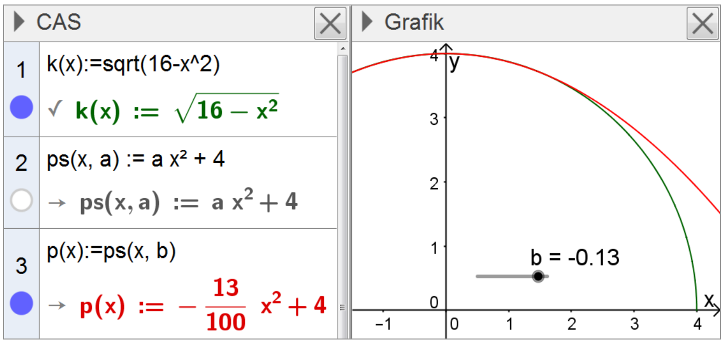
Anmerkung Bei Bedarf sollte vor der Bearbeitung des Arbeitsauftrags mit den Schülerinnen und Schülern besprochen werden, was im Aufgabenkontext unter dem Begriff „Umgebung“ zu verstehen ist.

Hinweise zur Bearbeitung

Zu a)

Unter Verwendung der vom CAS bereitgestellten Werkzeuge, mit deren Hilfe sich Parameterwerte auf einfache Weise variieren lassen, kann bei geeignet gewähltem Anzeigebereich als geeigneter Parameterwert z. B. $a = -0{,}13$ gefunden werden.

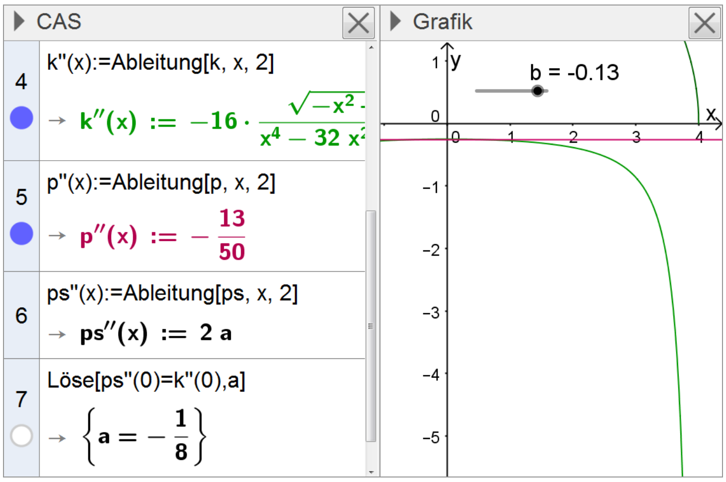
Anmerkung: Damit mit dem Parameter a weiter symbolisch gearbeitet werden kann, wird der Schieberegler wie üblich anders bezeichnet.



Zu b) und c)

Da die Graphen von k und p in der Umgebung von $x = 0$ nahezu übereinstimmen, muss dies auch für die Werte der ersten und zweiten Ableitungsfunktionen von k und p gelten.

Stellt man die zweiten Ableitungsfunktionen von k und p_a im Koordinatensystem von Aufgabe a graphisch dar und variiert den Wert von a, so liegt die Vermutung nahe, dass G_k und G_a in der Umgebung von $x = 0$ genau dann nahezu übereinstimmen, wenn dies auch für die Werte der zweiten Ableitungsfunktionen gilt. Die Gleichung $k''(0) = p_a''(0)$ liefert $a = -\frac{1}{8}$.

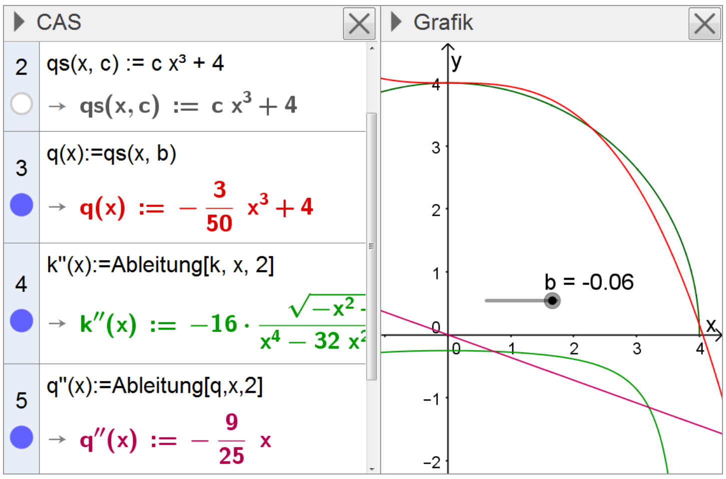


Zu d)

Die Aufgabe bietet Anlass und Gelegenheit zur Diskussion über die Aussagekraft der zweiten Ableitung: Im Beispiel sind der Wert der zweiten Ableitungsfunktion von p und damit die lokale Änderungsrate der Steigung des Graphen von p konstant negativ. Nimmt die Steigung des Graphen von p ab, so ist der Graph von p rechtsgekrümmt. Die Werte der zweiten Ableitungsfunktion ermöglichen folglich eine Aussage über die Art der Krümmung, nicht jedoch über deren Ausprägung. So ist der Wert der zweiten Ableitungsfunktion von p konstant, die Krümmung des Graphen von p jedoch offensichtlich nicht. Dagegen ist der Wert der zweiten Ableitungsfunktion von k nicht konstant – im Gegensatz zur Krümmung des Graphen von k.

Zu e)

Für die Schar der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen $q_c : x \mapsto cx^3 + 4$ mit $c \in \mathbb{R}$ ergibt sich analog zum Vorgehen für p_a graphisch z. B. $c = -0{,}06$. Stellt man jedoch die zweiten Ableitungsfunktionen von k und q_c graphisch dar und variiert den Wert von c unter Verwendung des geeigneten Werkzeugs, so zeigt sich, dass die Werte der zweiten Ableitungsfunktionen unabhängig von c in der Umgebung von $x = 0$ nicht nahezu übereinstimmen; der Graph einer Funktion des angegebenen Typs lässt sich dem Kreisbogen also weniger gut anpassen.



3.1.4 Anwendungen der Differential- und Integralrechnung

„Bei praxisnahen Fragestellungen, z. B. aus den Natur- oder Sozialwissenschaften, setzen die Schüler ihre Kenntnisse mathematischer Methoden vorteilhaft ein. Insbesondere Anwendungen der natürlichen Exponential- und Logarithmusfunktion verdeutlichen erneut deren Bedeutung für die Beschreibung von Vorgängen in der Natur und der Technik. Die Jugendlichen führen Flächenberechnungen durch und bearbeiten wiederum Extremwertaufgaben, wobei auch Bezüge zur Geometrie aufgezeigt werden. Bei der Untersuchung von Verknüpfungen bekannter Funktionen wird der Blick dafür geschärft, möglichst geschickt wesentliche Eigenschaften von Funktionsgraphen zu erkennen." (Fachlehrplan 2004, M 12.4)

Das CAS kann zur Durchführung umfangreicher oder komplexer Berechnungen sowie zur Erstellung graphischer Darstellungen genutzt werden. So können das bewusste Auswählen, Vergleichen und Reflektieren mathematischer Verfahren, das Modellieren von Sachsituationen sowie das Interpretieren von Ergebnissen stärker betont werden. Eine Beschränkung auf einfache, häufig unrealistische Daten ist unnötig.

Im Zusammenhang mit den beschriebenen Vorschlägen zur Unterrichtsgestaltung kommen insbesondere folgende CAS-Grundfertigkeiten zur Anwendung:

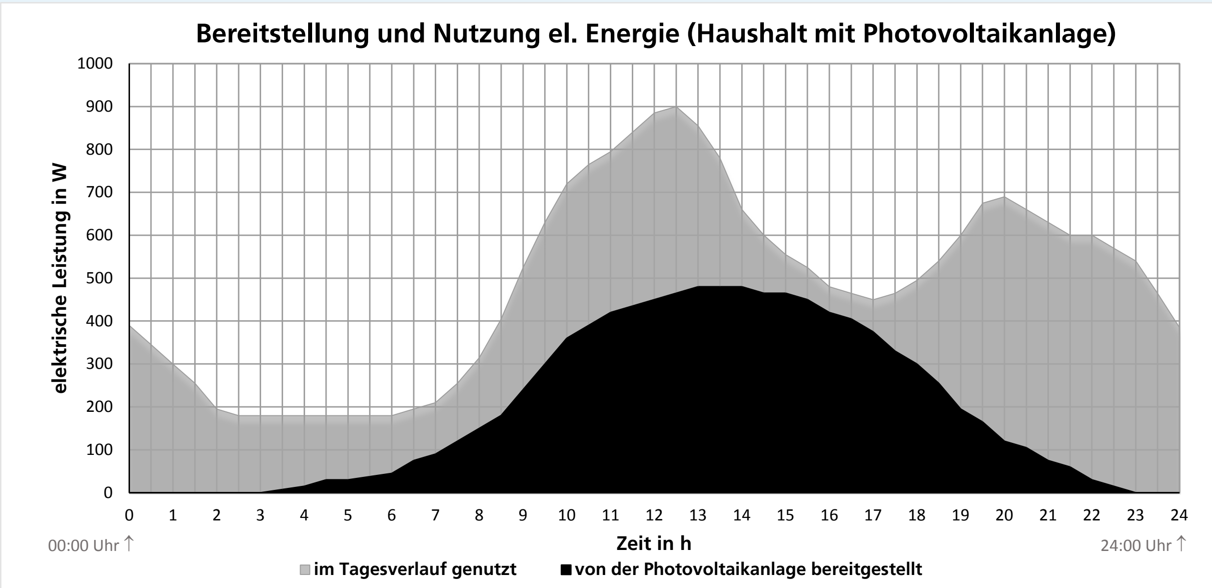
- Term definieren
- Termwert berechnen
- Ableitung bestimmen
- Berechnung mit Vektoren durchführen
- Wert eines bestimmten Integrals berechnen
- Gleichung lösen
- Graph zeichnen, geeigneten Anzeigebereich wählen
- Tabellenkalkulation durchführen

Vorschläge zur Unterrichtsgestaltung

Die folgenden Arbeitsaufträge eignen sich auch zur Bearbeitung in Gruppen. Der Einsatz des CAS trägt dabei zur Entwicklung unterschiedlicher Lösungswege bei, deren Vergleich Anlass für Kommunikation über mathematische Inhalte und Verfahren geben kann. Die Schülerinnen und Schüler können mithilfe des CAS Ergebnisse individuell kontrollieren und ihr Vorgehen sowie mögliche Fehlerquellen analysieren – selbständiges und eigenverantwortliches Lernen wird unterstützt.

Arbeitsauftrag 1

Die Abbildung zeigt für einen durchschnittlichen deutschen Haushalt an einem gewöhnlichen Sommertag – schematisch in Form eines Standardlastprofils – die Nutzung elektrischer Energie sowie die durch eine kleine Photovoltaikanlage bereitgestellte elektrische Energie, jeweils in Abhängigkeit von der Tageszeit.



a) Formulieren Sie wesentliche Aussagen, die der Abbildung entnommen werden können.

b) Ermitteln Sie eine Funktion f, die die dargestellte, durch die Photovoltaikanlage bereitgestellte elektrische Leistung in Abhängigkeit von der seit Beginn des Tages vergangenen Zeit t in Stunden möglichst gut modellhaft beschreibt.

c) Der dargestellte Graph der Funktion g, der die vom Haushalt im Verlauf des Tages genutzte elektrische Leistung in Abhängigkeit von der seit Beginn des Tages vergangenen Zeit t in Stunden modellhaft beschreibt, schließt mit der t-Achse sowie den Geraden mit den Gleichungen $t = 0$ bzw. $t = 24$ ein Flächenstück ein. Bestimmen Sie einen guten Näherungswert für den Inhalt dieses Flächenstücks und beschreiben Sie die Bedeutung dieses Inhalts im Sachzusammenhang.

d) Beschreiben Sie die Bedeutung der Funktion $g - f$ im Sachzusammenhang.

Die Photovoltaikanlage von Familie Meyer ist größer, sie stellt zu jedem Zeitpunkt 50 % mehr Leistung als die oben betrachtete Anlage bereit. Da Familie Meyer Wert auf energiebewusstes Verhalten legt, nutzt sie zudem pro Tag etwa 10 % weniger elektrische Energie als der oben betrachtete durchschnittliche Haushalt (bei gleicher Personenzahl!).

e) Stellen Sie die von der Solaranlage der Familie Meyer an einem gewöhnlichen Sommertag bereitgestellte elektrische Leistung in Abhängigkeit von der seit Beginn des Tages vergangenen Zeit t in Stunden graphisch dar.

f) Recherchieren Sie, welche Vergütung Familie Meyer derzeit in Deutschland in etwa pro Kilowattstunde elektrischer Energie erhält, die sie durch Photovoltaik erzeugt und in das Stromnetz einspeist. Wie hoch sind demgegenüber die entsprechenden Kosten für die Nutzung fremderzeugter elektrischer Energie?

g) Schätzen Sie die finanzielle Ersparnis ab, die Familie Meyer an einem gewöhnlichen Sommertag gegenüber einem durchschnittlichen deutschen Haushalt ohne Photovoltaikanlage erzielt.

Zielsetzung Übung/Vertiefung/Anwendung – im Vordergrund steht das Modellieren

Voraussetzung Grundlagen der Differential- und Integralrechnung; elementares Grundwissen aus der Physik (Energiebegriff, Leistung)

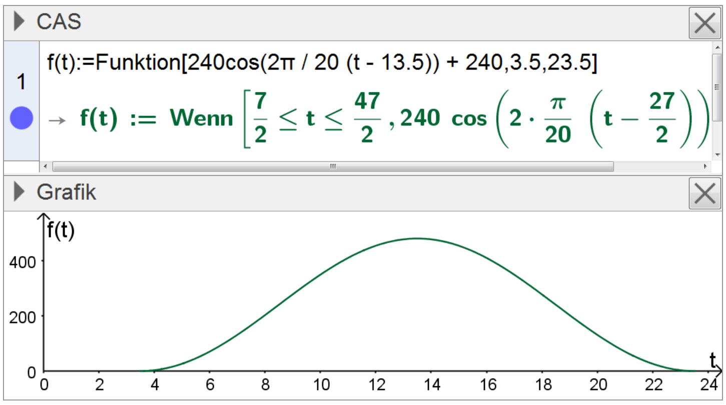
Anregungen Diese Aufgabenstellung ermöglicht sehr unterschiedliche Modellbildungen. Daher bietet es sich an, die von den Schülerinnen und Schülern gewählten Modellierungen und die damit jeweils erzielten Ergebnisse gewinnbringend miteinander zu vergleichen.

Durch Variation der zentralen Vorgaben (z. B. Leistung der Photovoltaikanlage, benötigte elektrische Leistung des betrachteten Haushalts) kann der Arbeitsauftrag erweitert werden. Darüber hinaus bietet es sich u. U. an, dass einzelne Schülerinnen und Schüler mithilfe von Datenloggern die Energieumwandlungen in ihrem Haushalt selbst aufzeichnen und durch Recherchieren zusätzlicher Informationen (z. B. Anschaffungspreise verschiedener Photovoltaikanlagen, Ertrag in Abhängigkeit von der Gesamtfläche der verbauten Solarmodule) Überlegungen dazu anstellen, welche Anlage sinnvoll ist.

Hinweise zur Bearbeitung

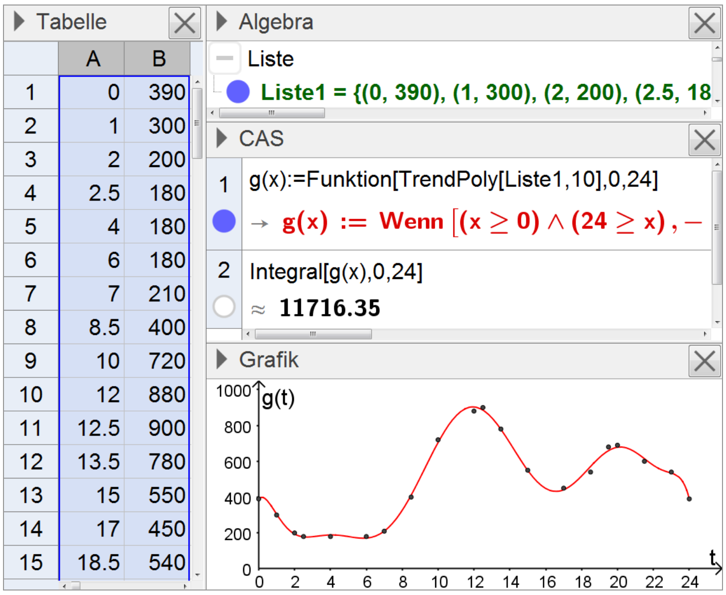
Zu b)

Zur Modellierung des nichttrivial verlaufenden Teils des Graphen von f eignen sich insbesondere eine ganzrationale Funktion oder eine Sinusfunktion. Zur Ermittlung eines passenden Funktionsterms kann das CAS je nach gewählter Strategie auf unterschiedliche Art und Weise beitragen, etwa durch das Lösen eines geeignet gewählten Gleichungssystems oder durch Ausführen einer Regression zu geeignet entnommenen Graphenpunkten. Nebenstehend wird das CAS lediglich zur Überprüfung des „per Hand und Verstand“ aus dem Ansatz $f(t) = a \cdot \cos(b \cdot (t - c)) + d$ für $3{,}5 \le t \le 23{,}5$ ermittelten Ergebnisses verwendet.



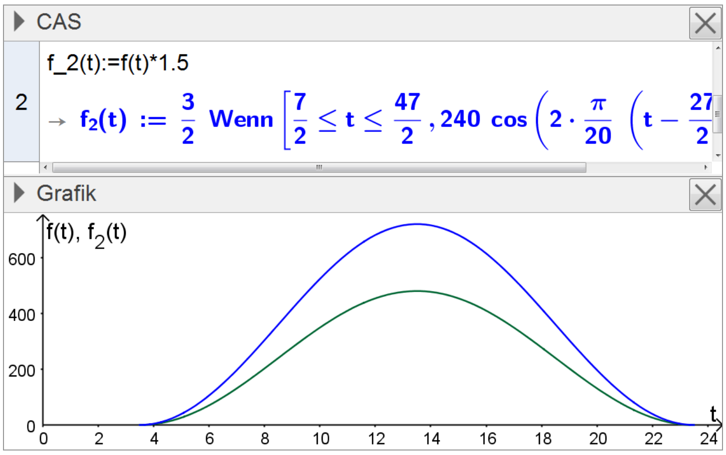
Zu c)

Entsprechend der Offenheit der Aufgabenstellung bestehen auch hier vielfältige Möglichkeiten der Bearbeitung (mit Potential zur Binnendifferenzierung), vom Kästchenzählen über eine abschnittsweise Betrachtung bis hin zu einer Beschreibung des Graphen von g mithilfe einer ganzrationalen Funktion, die sich, z. B. wie nebenstehend dargestellt, mithilfe eines CAS per Regression ermitteln lässt. Dazu wurden zunächst die Koordinaten von 20 Graphenpunkten aus dem Diagramm abgelesen und tabellarisch erfasst. Nach Erzeugung der zugehörigen Liste von Punkten (rechte Maustaste > „Erzeugen" > „Liste von Punkten") kann schließlich per Regression (Zeile 1) eine geeignete ganzrationale Funktion bestimmt werden; als geeigneter Grad des Funktionsterms erweist sich dabei zehn. Auf der Grundlage des Modells werden demnach insgesamt ca. 11,7 kWh elektrische Energie an einem gewöhnlichen Sommertag genutzt (Zeile 2).



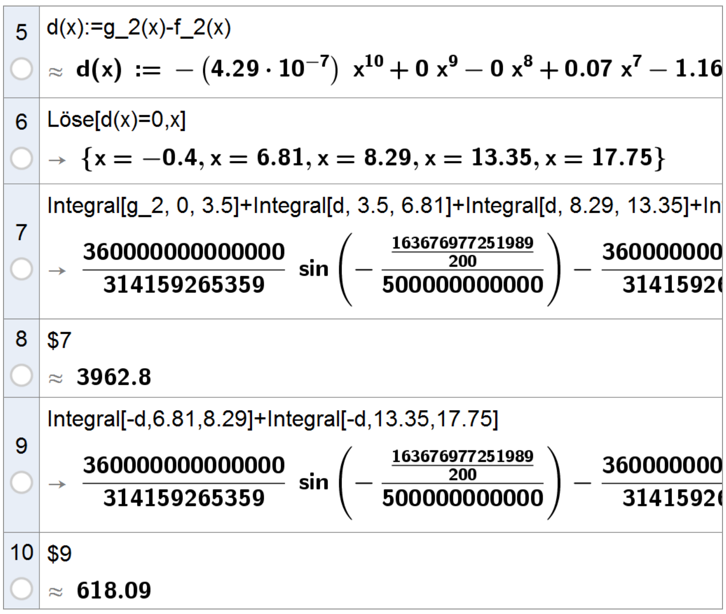
Zu e)

Darzustellen ist der Graph der im Bereich $0 \leq t \leq 24$ definierten Funktion mit dem Term $1{,}5 \cdot f(t)$. Die Ausgabe des CAS kann als Grundlage für die Erstellung der Zeichnung auf Papier dienen.



Zu f) und g)

Zur Bearbeitung der Aufgabe g sind diverse Vorüberlegungen anzustellen (z. B.: Verwenden die Meyers einen Energiespeicher? Erfolgt die Energieeinsparung von 10 % gleichmäßig über den Tag verteilt? Wie genau funktioniert die Erfassung und Abrechnung des Eigenverbrauchs mit dem Verteilnetzbetreiber? Wie genau soll die durchzuführende Abschätzung sein?) und entsprechende Annahmen zu treffen. Nebenstehend ist ein möglicher Rechenweg auf Basis vereinfachter Annahmen (z. B.: pauschale Stauchung von g mit dem Faktor 0,9) dargestellt: Nach Stauchung von g (Funktion g_2) werden zunächst die t-Koordinaten der Schnittpunkte der beiden Graphen mithilfe der Differenzfunktion bestimmt (Zeilen 5, 6), um anschließend die benötigten Flächeninhalte zu ermitteln, die der von Familie Meyer einzukau-



fenden bzw. verkauften Menge an elektrischer Energie entsprechen. Unter Verwendung der recherchierten Energiepreise (Stand 2016: für die Einspeisung etwa 12 ct/kWh, für die Nutzung fremderzeugter Energie im Mittel knapp 30 ct/kWh) ergibt sich schließlich die finanzielle Ersparnis der Familie Meyer an einem gewöhnlichen Sommertag zu etwa 2,4 €.

11	((11716.35 - $7) (0.3) + $9 (0.12)) / 1000
	≈ **2.4**

Arbeitsauftrag 2

Maßkrüge aus Glas sind industrielle Massenware. Daher ist es von wirtschaftlicher Bedeutung zu untersuchen, ob bei ihrer Herstellung der Materialverbrauch minimiert wird. Vom Henkel ist bei der Minimierung abzusehen: Seine Form und Größe sind durch den Nutzungskomfort vorgegeben.

Zunächst soll vereinfachend die Dicke des Glases vernachlässigt werden.

a) Ermitteln Sie die optimalen Abmessungen des Maßkrugs unter der Annahme, dass dieser genau einen Liter fasst, wenn er vollständig bis zur Oberkante gefüllt wird.

b) Die Eichmarke soll aus Gründen der Trinkergonomie genau 4,5 cm unterhalb der Oberkante des Maßkrugs liegen. Bestimmen Sie unter dieser Bedingung die optimalen Abmessungen.

Aus fertigungstechnischen Gründen und auch aus Gründen der Stabilität sind die Dicke der Wand und die Dicke des Bodens eines Maßkrugs vorgegeben.

c) Schätzen Sie die Dicke der Wand und die Dicke des Bodens eines Maßkrugs ab. Bestimmen Sie die optimalen Abmessungen unter Berücksichtigung der Dicke des Glases.

(nach Fokus 11, S. 263, Aufgabe 7a)

Zielsetzung Übung (typische Optimierungsaufgabe)

Voraussetzung rationale Funktionen, Grundlagen der Differentialrechnung

Hinweise zur Bearbeitung

Zu a)

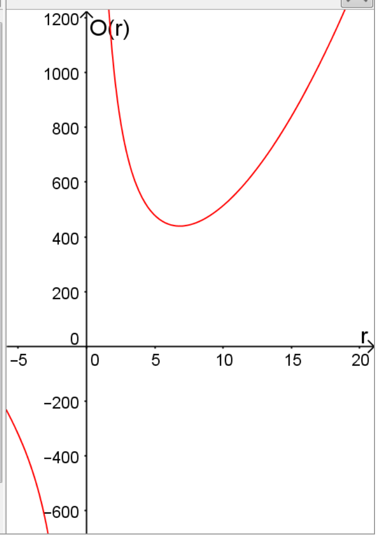
Zeilen 1-5: Ermittlung der optimalen Abmessungen des als zylinderförmig angenommenen Maßkrugs mithilfe der Differentialrechnung (nicht dargestellt: Begründung, dass der Graph von O an der Stelle, die in Zeile 3 ermittelt wird, einen Tiefpunkt besitzt)

Anmerkung zu Zeile 5: Beim Kopieren des Ergebnisses aus Zeile 3 übersetzt das System die dritte Wurzel (engl.: „cubic root") in den Befehl „cbrt()".

CAS

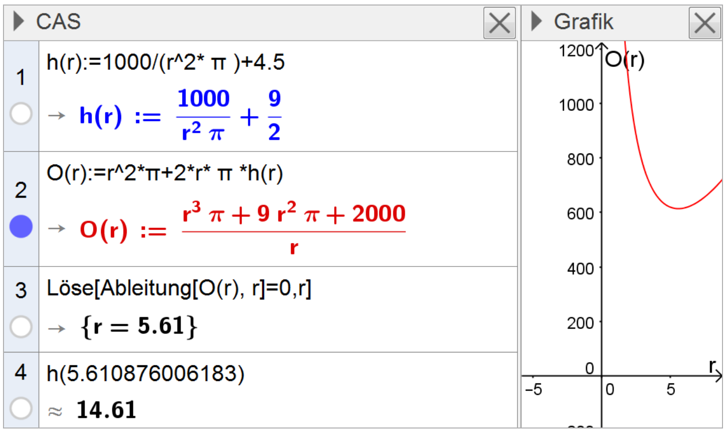
1	h(r):=1000/(r^2* π)
	→ $h(r) := \frac{1000}{r^2\,\pi}$
2	O(r):=r^2*π+2*r* π *h(r)
	→ $O(r) := \frac{r^3\,\pi + 2000}{r}$
3	Löse[Ableitung[O(r), r]=0,r]
	→ $\left\{ r = 10 \cdot \frac{\sqrt[3]{\pi}^2}{\pi} \right\}$
4	Löse[Ableitung[O(r), r]=0,r]
	≈ $\{r = 6.83\}$
5	h(10cbrt(π)² / π)
	≈ **6.83**

Grafik



Zu b)

Soll die Eichmarke genau 4,5 cm unterhalb der Oberkante des Maßkrugs liegen, so muss lediglich der Term für die Höhe geeignet angepasst werden.

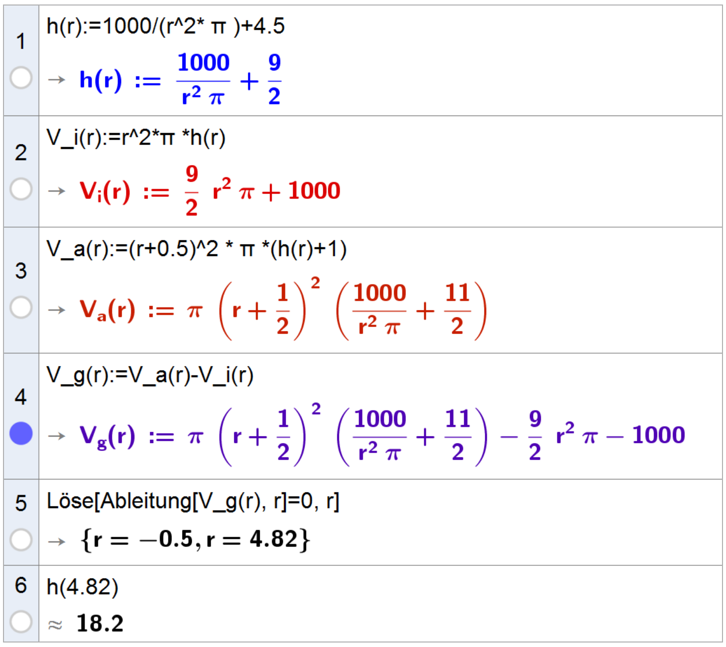


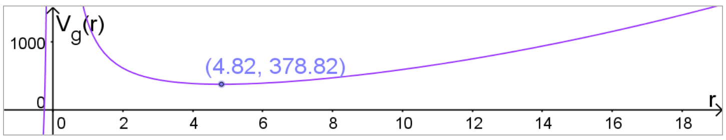
Zu c)

Zeilen 1-4: Unter Berücksichtigung einer Dicke der Wand von 0,5 cm und einer Dicke des Bodens von 1,0 cm kann im CAS-Rechner ein Term für das Volumen des Glases in Abhängigkeit vom Radius des Krugs definiert und graphisch dargestellt werden.

Zeilen 5, 6: Die Berücksichtigung der Dicke des Glases führt zu einer deutlichen Veränderung der optimalen Abmessungen. Dabei lässt sich z. B. mithilfe der graphischen Darstellung $r \approx 4{,}82$ als der zum gesuchten Minimum gehörende Wert identifizieren.

Mit einem Durchmesser von etwa 10,6 cm und einer Höhe von etwa 19,2 cm stimmen die resultierenden Außenmaße des Maßkrugs mit denen eines realen Maßkrugs recht gut überein.

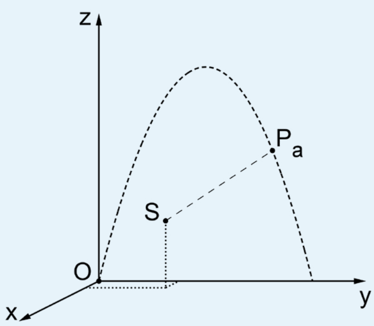




Arbeitsauftrag 3

Bewegt sich ein Flugzeug in geeigneter Weise auf einer zur Erdoberfläche hin geöffneten parabelförmigen Kurve, so wird dadurch im Flugzeug ein der Schwerelosigkeit ähnlicher Zustand erzeugt. Ein solcher Parabelflug soll mit einem Modellflugzeug, ferngesteuert von einem Berggipfel aus, simuliert werden.

Die Abbildung zeigt modellhaft die geplante Flugbahn des Flugzeugs (im Koordinatensystem entspricht eine Längeneinheit 100 m). Das Flugzeug soll den Parabelflug im Punkt $O(0|0|0)$ beginnen und sich anschließend in der vertikal verlaufenden yz-Ebene auf einer Kurve bewegen, die durch die Punkte $P_a\left(0\,|\,a\,|\,-a^2+8a\right)$ mit $a \in [0;8]$ beschrieben wird.



Die das Flugzeug mithilfe eines Senders steuernde Person befindet sich im Modell im Punkt $S(1|3|5)$; der Sender besitzt eine maximale Reichweite von 1,5 km.

a) Ermitteln Sie, ob der Flug wie geplant durchgeführt werden kann.

b) Bestimmen Sie die Größe des Winkels, unter dem der Blick der steuernden Person während des Flugs gegen die Horizontale maximal geneigt sein wird.

c) Man könnte annehmen, dass der Blick der steuernden Person genau dann maximal gegen die Horizontale geneigt sein wird, wenn das Flugzeug seine maximale Höhe erreicht. Erläutern Sie, warum diese Annahme falsch ist.

Zielsetzung Übung/Anwendung – Die Schülerinnen und Schüler sollen erkennen, dass sich bestimmte Probleme in der analytischen Geometrie auch mit Mitteln der Differentialrechnung lösen lassen.

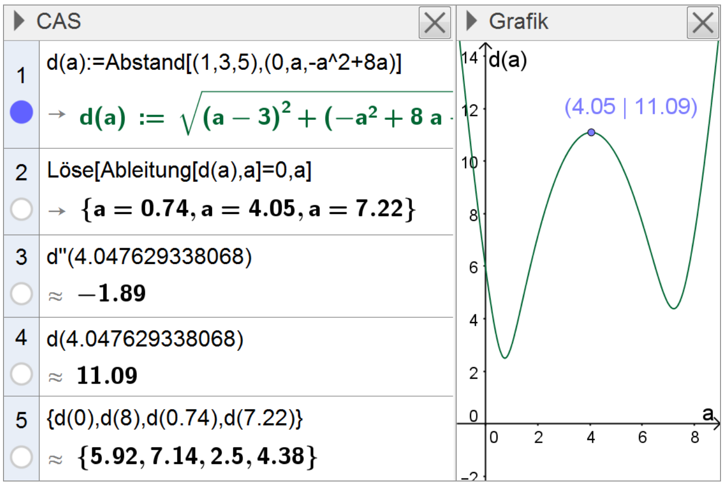
Voraussetzung Grundlagen der Differentialrechnung; Grundkenntnisse aus der Analytischen Geometrie (Skalarprodukt, Abstand zweier Punkte)

Hinweise zur Bearbeitung

Zu a)

Zeilen 3, 5: rechnerische Verifizierung, dass der in Zeile 4 ermittelte Wert im zu betrachtenden Bereich maximal ist

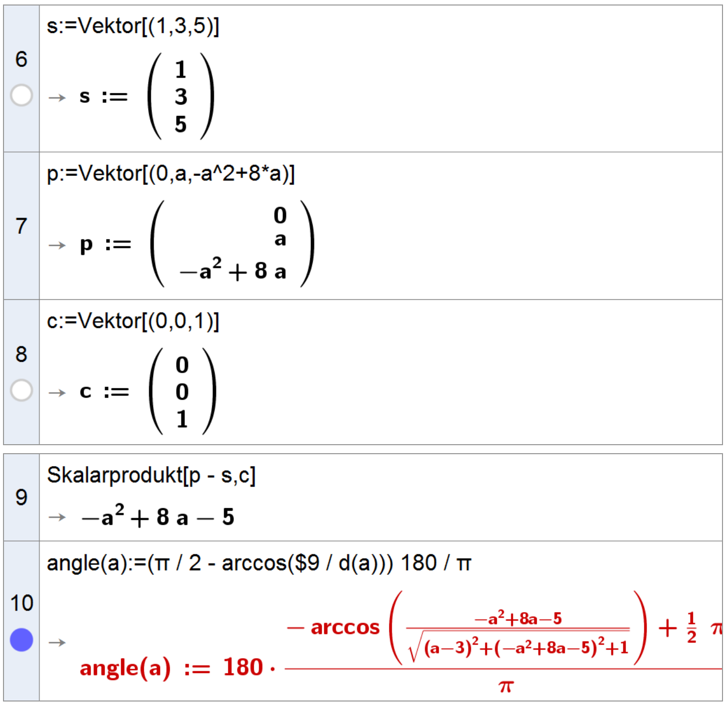
Der Flug kann also wie beschrieben durchgeführt werden, da der maximale Abstand zwischen Sender und Flugzeug etwa 1,109 km beträgt und damit (deutlich) unter 1,5 km bleibt.

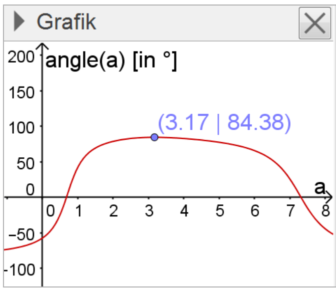


Zu b)

Zeilen 6-10: Mithilfe des Skalarprodukts kann die Größe des Winkels, unter dem der Blick der steuernden Person während des Fluges gegen die Horizontale geneigt sein wird, in Abhängigkeit von a bestimmt werden.

Stellt man die Größe des Winkels in Abhängigkeit von a graphisch dar, so können damit 84,38° als Näherungswert für die Größe des Winkels ermittelt werden, unter dem der Blick maximal geneigt sein wird. Dieser Wert kann auch mithilfe der Differentialrechnung ermittelt bzw. mit ihrer Hilfe bestätigt werden (Zeilen 11-13).





CAS

11	Löse[Ableitung[angle(a), a]=0, a]
	→ $\{a = 3.17\}$
12	angle''(3.166283518834)
	≈ -6.37
13	angle(3.166283518834)
	≈ 84.38

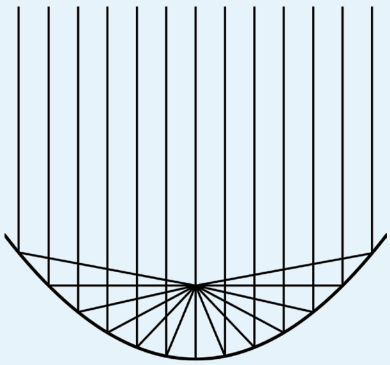
Zu c)

Um Ideen hinsichtlich der zu führenden Erläuterung zu entwickeln (z. B.: Steigungsdreiecke; Position von S relativ zur Parabel), können rechnerische Überprüfungen mithilfe des CAS hilfreich sein, z. B. Zeilen 14, 15: Im höchsten Punkt ist die Größe des Winkels tatsächlich kleiner!

14	Extremum[-a^2+8a, 0, 8]
	→ $(4, 16)$
15	angle(4)
	≈ 82.67

Arbeitsauftrag 4

Ein Hohlspiegel ist zur Vergrößerung weit entfernter Objekte genau dann gut geeignet, wenn parallel einfallende Lichtstrahlen nach ihrer Reflexion am Spiegel durch denselben Punkt verlaufen. Im Folgenden soll die Form eines idealen Hohlspiegels durch ein mathematisches Modell beschrieben werden.



Dabei kann vereinfachend davon ausgegangen werden, dass die Lichtstrahlen parallel zur Rotationsachse des Spiegels auf diesen auftreffen. Aufgrund der Rotationssymmetrie des Spiegels kann die Betrachtung zudem auf eine Schnittfläche beschränkt werden, die die Rotationsachse enthält (vgl. Abbildung).

Als Modell für die Form der Schnittfläche des Hohlspiegels kommen z. B. ein Kreisbogen, eine Sinuskurve und eine Parabel infrage:

- $k: x \mapsto -\sqrt{100 - x^2} + 10,\ x \in [-10; 10]$
- $s: x \mapsto -3\cos\left(\frac{1}{5}x\right) + 3,\ x \in [-10; 10]$
- $p: x \mapsto \frac{1}{20}x^2,\ x \in [-10; 10]$

a) Konstruieren Sie für jedes der drei Modelle mithilfe der dynamischen Geometriefunktion des CAS für einen einfallenden Lichtstrahl unter Verwendung eines variablen Graphenpunkts den Schnittpunkt des reflektierten Lichtstrahls mit der Rotationsachse. Entscheiden Sie damit, welches Modell zur Beschreibung eines idealen Hohlspiegels geeignet ist.

b) Versuchen Sie, Ihre Entscheidung rechnerisch zu begründen.

Zielsetzung Übung/Anwendung – Modellierung eines Hohlspiegels

Voraussetzung Grundlagen der Differentialrechnung; Grundwissen aus der Mittelstufe (Winkelzusammenhänge an Geradenkreuzungen); Grundwissen aus der Physik (Reflexionsgesetz)

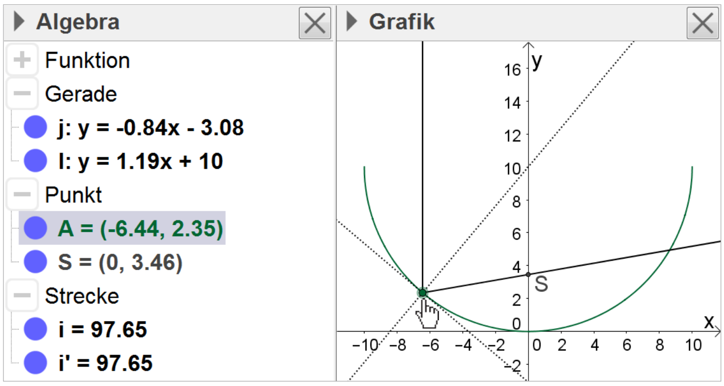
Hinweise zur Bearbeitung

Zu a)

Mithilfe der „Eingabezeile" sowie der Werkzeugleiste für das Graphikfenster lässt sich nach

1	k(x) := -sqrt(-x² + 100) + 10
	→ $k(x) := -\sqrt{-x^2 + 100} + 10$

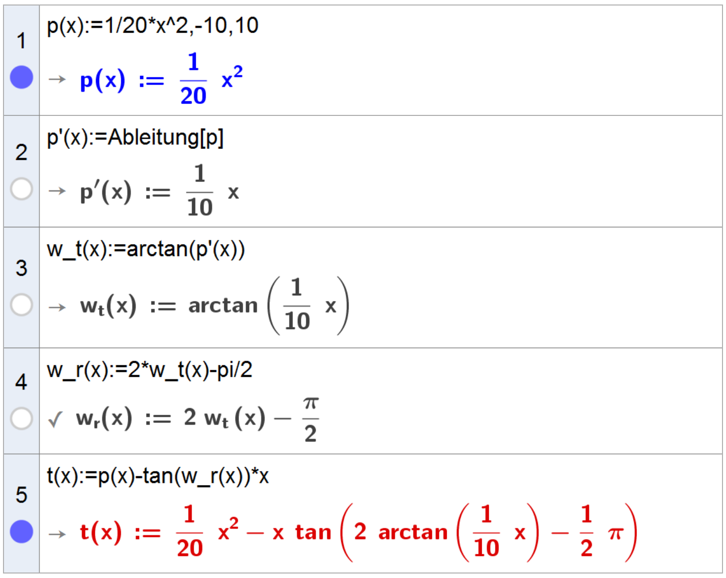
Definition der jeweiligen Funktion mit relativ wenigen Mausklicks die benötigte Grundkonstruktion erstellen. Nebenstehend ist dies exemplarisch für die Funktion k umgesetzt. Dabei sind A per Werkzeug als Punkt auf dem Graphen von k festgelegt, die Strecke i über die Eingabezeile definiert (Strecke[A,(x(A),100)]) und die beiden Geraden j und l sowie die Strecke i' jeweils per Werkzeug als Tangente an den Graphen von k im Punkt A bzw. als zugehöriges Lot bzw. als am Lot gespiegeltes Objekt erzeugt. Der Punkt S schließlich markiert den zu konstruierenden Schnittpunkt (hier per Werkzeug definiert als Schnittpunkt der Strecke i' mit der y-Achse).



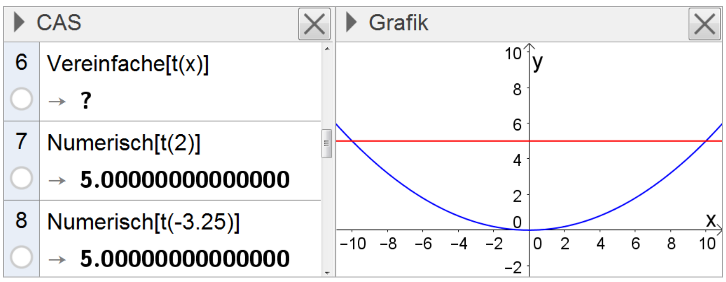
Anhand des anschließenden Ziehens des Punkts A sowie der entsprechenden Punkte auf den Graphen von s bzw. p können die Schülerinnen und Schüler erkennen, dass nur im Fall der Parabel der Schnittpunkt des reflektierten Lichtstrahls mit der Rotationsachse unabhängig vom x-Wert des variablen Graphenpunkts und damit vom Ort des Auftreffens des einfallenden Lichtstrahls ist.

Zu b)

Auf der Grundlage zuvor angestellter elementarer Überlegungen (insbes. zum Steigungswinkel w_r der Geraden, die den reflektierten Lichtstrahl enthält, vlg. Zeile 4) lässt sich mithilfe des CAS für die y-Koordinate des Schnittpunkts des reflektierten Strahls mit der y-Achse ein allgemeiner Term $t(x)$ herleiten; dabei ist x die x-Koordinate des Auftreffpunkts des Strahls auf dem mithilfe der Funktion p modellierten Spiegel (Zeilen 1-5).



Diesen Term können die Schülerinnen und Schüler zwar nicht weiter vereinfachen (Zeile 6), jedoch können sie anhand des Graphen sowie einzelner Werte bis auf eine hohe Nachkommastellenzahl exemplarisch verifizieren, dass alle Strahlen die y-Achse im Punkt $(0|5)$ schneiden.

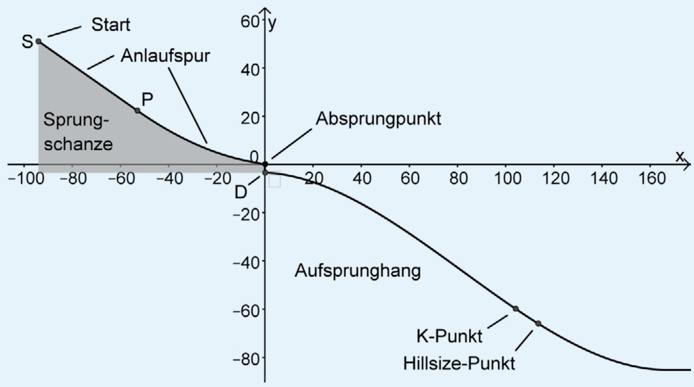


Arbeitsauftrag 5 – aus Abiturprüfung 2016, Mathematik, Analysis, Aufgabengruppe 1

BE

Prüfungsteil B (CAS)

Die Abbildung zeigt modellhaft die Profillinie einer Skisprunganlage, die aus der Sprungschanze und dem Aufsprunghang besteht. Das kartesische Koordinatensystem ist so gewählt, dass die x-Achse die Horizontale beschreibt und der Koordinatenursprung mit dem Ende der Anlaufspur, dem sogenannten Absprungpunkt, zusammenfällt; eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht dabei einem Meter in der Realität.



1 Der höchste Punkt der Anlaufspur wird durch den Punkt $S(-94\,|\,51)$ dargestellt. Die Anlaufspur verläuft im Modell zwischen den Punkten S und P entlang einer Geraden, die gegenüber der x-Achse um $-35°$ geneigt ist.

3 **a)** Bestimmen Sie eine Gleichung der Geraden durch S und P. Runden Sie im Ergebnis auf eine Nachkommastelle.

4 **b)** Die Punkte S und P liegen in der Realität 50 m voneinander entfernt. Berechnen Sie die Koordinaten von P auf eine Nachkommastelle genau.

Der Aufsprunghang beginnt im Modell im Punkt D, der sich vertikal unterhalb des Absprungpunkts befindet. Die Profillinie des Aufsprunghangs lässt sich im Bereich $[0; 160]$ durch die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion

$$h: x \mapsto 3{,}36\cdot 10^{-5}x^3 - 0{,}00827x^2 - 0{,}0455x - 3{,}38$$

beschreiben.

2 **2 a)** Geben Sie die Höhe des Absprungpunkts über dem Beginn des Aufsprunghangs sowie die Steigung des Aufsprunghangs in seinem Beginn an.

8 **b)** Derjenige Punkt, in dem die Profillinie im unteren Bereich des Aufsprunghangs einen Neigungswinkel von $-32°$ gegenüber der Horizontalen aufweist, wird als Hillsize-Punkt bezeichnet (vgl. Abbildung). Die Größe einer Skisprunganlage wird durch die Länge der Strecke zwischen dem Absprungpunkt und dem Hillsize-Punkt festgelegt und als Hillsize bezeichnet.
Bestimmen Sie auf der Grundlage des Modells die Hillsize auf Meter genau und berechnen Sie deren prozentuale Abweichung von der tatsächlichen Hillsize dieser Skisprunganlage, die 132 m beträgt.

3 Zur Beschreibung der Flugkurve eines Skispringers wird die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $s: x \mapsto -4{,}2\cdot 10^{-3}x^2 - 0{,}1x$ verwendet. Dabei ist die Sprungweite die Länge der Profillinie des Aufsprunghangs zwischen dem Punkt D und dem Punkt L, der den Landepunkt des Skispringers auf dem Aufsprunghang beschreibt.

2 **a)** Bestimmen Sie die Koordinaten des Punkts L auf eine Nachkommastelle genau.

(Teilergebnis: x-Koordinate des Punkts L: 114,6)

Die als Kurvenlänge ℓ bezeichnete Länge des Graphen der Funktion h zwischen den Punkten $(a\,|\,h(a))$ und $(b\,|\,h(b))$ mit $a < b$ kann mithilfe der Formel $\ell = \int_a^b \sqrt{1 + [h'(x)]^2}\,dx$ berechnet werden.

Hinweis: Führen Sie die Berechnungen in den Aufgaben 3b und 3c mit dem CAS jeweils näherungsweise durch!

3 **b)** Bestimmen Sie die Sprungweite des Skispringers; berücksichtigen Sie dabei, dass beim Skispringen Sprungweiten nur auf halbe Meter genau angegeben werden.

(Ergebnis: 132,5 m)

Der K-Punkt (kritischer Punkt) der hier betrachteten Skisprunganlage liegt so auf der Profillinie, dass die Kurvenlänge zwischen ihm und dem Beginn des Aufsprunghangs, die sogenannte K-Punkt-Weite, 120 m beträgt.

4 **c)** Ermitteln Sie die Koordinaten des K-Punkts auf eine Nachkommastelle genau.

Zielsetzung Übung

Voraussetzung Grundlagen der Differential- und Integralrechnung

Hinweise zur Bearbeitung

Zu 1a)

Zeilen 1, 2: Ermittlung der Steigung bzw. des y-Achsenabschnitts der Geraden

1	m:=tan(-35°)
	$\approx$ $\mathbf{m := -0.7}$
2	Löse[51 = m (-94) + t,t]
	$\approx$ $\mathbf{\{t = -14.82\}}$

Zu b)

Zeilen 3-6: Ermittlung der Koordinaten von P

3	a := -14.81950859171
	$\approx$ $\mathbf{a := -14.82}$
4	g(x):=m x + a
	✓ $\mathbf{g(x) := -0.7\,x - 14.82}$
5	Löse[50 = sqrt((x + 94)² + (51 - g(x))²),x]
	$\approx$ $\mathbf{\{x = -134.96, x = -53.04\}}$
6	g(-53.04239778555)
	$\approx$ $\mathbf{22.32}$

Zu 2a)

Beide Werte können direkt aus dem gegebenen Funktionsterm abgelesen werden. Die Verwendung des CAS ist entsprechend nicht erforderlich, aber möglich (Zeilen 1-3).

1	h(x):=3.36*10^(-5)*x^3-0.00827*x^2-0.0455*x-3.38
	✓ $\mathbf{h(x) := 3.36 \cdot 10^{-5}\,x^3 - 0.00827\,x^2 - 0.0455\,x - 3.38}$
2	h(0)
	$\to$ $\mathbf{-\frac{169}{50}}$
3	h'(0)
	$\to$ $\mathbf{-\frac{91}{2000}}$

Zu 2b)

Auf der Grundlage angestellter Vorüberlegungen ist mithilfe des CAS eine schnelle Berechnung möglich (Zeilen 4-6).

4	Löse[h'(x)=tan(-32°)]
	$\approx$ $\mathbf{\{x = 50.68366, x = 113.40364\}}$
5	sqrt((113.4036382148)^2+(h(113.4036382148))^2)
	$\approx$ $\mathbf{131.1572}$
6	(132-131)/132*100
	$\approx$ $\mathbf{0.75758}$

Zu 3a)

Zeilen 7-9: Bestimmung der Koordinaten von L

7	s(x) := -4.2 (10^(-3)) x^2 - 0.1x
	✓ $\mathbf{s(x) := -4.2 \cdot 10^{-3}\,x^2 - 0.1\,x}$
8	Löse[h(x)=s(x)]
	$\to$ $\mathbf{\{x = 114.63643\}}$
9	s(114.6364342974)
	$\approx$ $\mathbf{-66.65799}$

Zu 3b)

10	Integral[sqrt(1+h'(x)^2), x, 0, 114.6364342974]
	≈ **132.48653**

Zu 3c)

Zeile 12: Bei einigen CAS dauert die Bestimmung der exakten Lösung dieser Gleichung so lange, dass die Berechnung abbricht; wie in der Aufgabenstellung gefordert wurde die Berechnung deshalb näherungsweise durchgeführt.

11	Integral[sqrt(1+h'(x)^2), x, 0, b]=120
	✓ $\int_0^b \sqrt{1+h'(x)^2}\,dx = 120$
12	NLöse[$11,b]
	→ $\{b = 104.15673\}$
13	h(104.1567282397)
	≈ **−59.87069**

Die Abiturprüfungen der letzten Jahre sowie die zugelassenen Lehrbücher bieten noch eine Vielzahl weiterer Aufgaben, die an dieser Stelle zur Übung herangezogen werden können, etwa zu Anwendungen der natürlichen Exponential- und Logarithmusfunktion (z. B. Abiturprüfung 2015, Prüfungsteil B CAS, Analysis, Aufgabengruppe 1) oder zu Verknüpfungen bekannter Funktionen (z. B. Abiturprüfung 2014, Prüfungsteil B CAS, Analysis, Aufgabengruppe 2).

3.2 Stochastik

3.2.1 Schnelleinstieg – grundlegende Einsatzmöglichkeiten des CAS

Im Folgenden wird ein kurzer Überblick gegeben, welche Funktionen eines CAS sich insbesondere in der Stochastik der Jahrgangsstufe 12 anbieten. Dieser Überblick ist nicht als vollständig zu verstehen, er vermittelt vielmehr einen kurzen Eindruck der Einsatzmöglichkeiten.

Werte der (kumulat.) Binomialverteilung

Werte der Binomialverteilung und der kumulativen Binomialverteilung können mit dem CAS direkt über Befehle oder über Dialoge ausgegeben werden. Dies gilt auch für die Werte von Binomialkoeffizienten.

Zeile 1: $\binom{20}{5}$

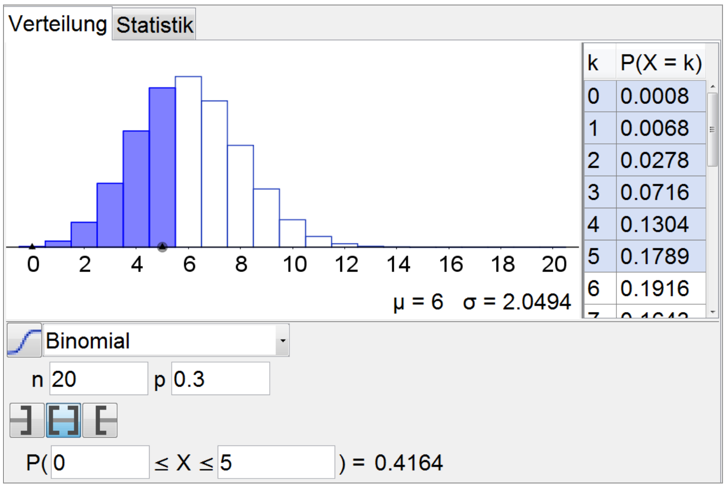
Zeilen 2, 3, 4: $P_{0,3}^{20}(X=5)$ bzw. $P_{0,3}^{20}(X \leq 5)$

Beim hier verwendeten CAS besteht zudem die Möglichkeit der Nutzung des „Wahrscheinlichkeitsrechners“ zur Ausgabe von Werten (s. u.).

1	BinomialKoeffizient[20, 5]
	→ **15504**
2	Binomial[20, 0.3, 5, false]
	→ $\frac{1117894066061748381}{6250000000000000000}$
3	Numerisch[$2]
	→ **0.1789**
4	Numerisch[Binomial[20, 0.3, 5, true]]
	→ **0.4164**

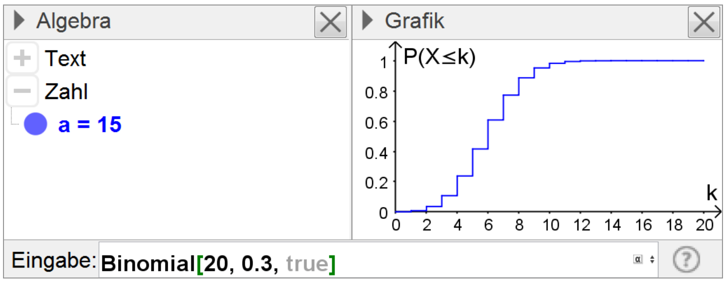
Binomialverteilung graphisch darstellen

Unter Nutzung der Tabellenkalkulation lassen sich mithilfe von CAS Binomialverteilungen und kumulative Binomialverteilungen problemlos graphisch darstellen. Beim hier verwendeten CAS besteht zudem die Möglichkeit der Nutzung des Moduls „Wahrscheinlichkeitsrechner“ (vgl. Screenshot rechts), das über „Ansicht“ aufgerufen werden kann und diverse Optionen zur Analyse von Verteilungen bereitstellt.



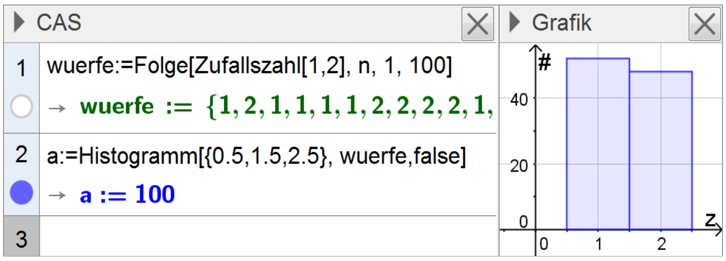
Kumulative Verteilung graphisch darstellen

Auch hierzu bietet sich die Nutzung der Tabellenkalkulation oder ggf. bereitstehender Befehle (siehe rechts) an. Setzt man beim nebenstehend verwendeten Befehl den Wahrheitswert auf „false“, so erhält man die graphische Darstellung der zugehörigen Binomialverteilung (ohne Kumulation).



Simulation von Bernoulli-Experimenten

Unter Verwendung des CAS lassen sich auch Bernoulli-Ketten simulieren, z. B. 100 Münzwürfe. Das Ergebnis der Simulation lässt sich z. B. graphisch in einem Histogramm auswerten (vgl. dazu auch Kapitel 2.2).



3.2.2 Binomialverteilung und ihre Anwendung in der beurteilenden Statistik

„Die Jugendlichen erkennen, dass im Alltag vielfach Zufallsexperimente von Bedeutung sind, für deren Versuchsausgang es lediglich zwei Alternativen gibt. Bei der Beschreibung solcher Zufallsexperimente lernen sie den Binomialkoeffizienten als sinnvolle Abkürzung kennen und werden mit der Binomialverteilung vertraut. Insbesondere an dieser Wahrscheinlichkeitsverteilung gewinnen die Schüler auch Einsicht in die Bedeutung und Definition der Begriffe Zufallsvariable, Erwartungswert und Standardabweichung. Ihnen wird bewusst, dass sich Bernoulli-Experimente mit dem Urnenmodell „Ziehen mit Zurücklegen“ veranschaulichen lassen; zudem arbeiten sie die Unterschiede zum Urnenmodell „Ziehen ohne Zurücklegen“ heraus. Die Visualisierung von Verteilungen, z. B. mithilfe von Tabellenkalkulationsprogrammen, unterstützt die Bearbeitung verschiedenster Sachprobleme und die Beantwortung von Fragestellungen, die typische Überlegungen zu Fehlerwahrscheinlichkeiten im Zusammenhang mit Tests vorbereiten.
Am Beispiel des einseitigen Signifikanztests erhalten die Schüler einen Einblick in die beurteilende Statistik. Sie lernen einzuschätzen, wie sich Änderungen von Stichprobenlänge, Ablehnungsbereich oder Signifikanzniveau auf die Aussage des Tests auswirken.“ (Fachlehrplan 2004, M 12.2)

Das CAS stellt Werkzeuge bereit, mit deren Hilfe sich Wahrscheinlichkeitsverteilungen auf einfache Weise graphisch darstellen lassen; dazu können Wertetabellen oder die Tabellenkalkulationsfunktion verwendet werden. Besonders gewinnbringend ist die Möglichkeit, dabei einzelne Parameterwerte zu variieren, um den Einfluss der Änderung von Parametern auf die Verteilung zu untersuchen. Darüber hinaus können Werte von Wahrscheinlichkeitsverteilungen direkt über Befehle oder über Dialoge ausgegeben werden; dies gilt auch für Werte von Binomialkoeffizienten. Im Unterschied zu den bei Leistungsnachweisen auch in herkömmlichen Klassen bzw. Kursen zugelassenen wissenschaftlichen Taschenrechnern (WTR) stellt ein CAS auch Funktionen eigens zum Ermitteln von Differenzwerten im Zusammenhang mit Wahrscheinlichkeitsverteilungen bereit.

Im Zusammenhang mit den beschriebenen Vorschlägen zur Unterrichtsgestaltung kommen insbesondere folgende CAS-Grundfertigkeiten zur Anwendung:
- Taschenrechner verwenden
- Term definieren
- Termwert berechnen
- Gleichung lösen
- Graph zeichnen, geeigneten Anzeigebereich wählen
- Tabellenkalkulation durchführen
- Punktdiagramm zeichnen
- Histogramm zeichnen
- Binomialverteilung anwenden

Vorschläge zur Unterrichtsgestaltung

→ Wahrscheinlichkeitsverteilung (Zufallsgröße, Erwartungswert, Standardabweichung)

Arbeitsauftrag 1

In einer Spezialklinik hält sich jeder Patient (unabhängig von anderen Patienten) mindestens drei Tage, höchstens aber fünf Tage auf. Die Verwaltung legt für die Aufenthaltsdauer X eines Patienten in Tagen folgende Wahrscheinlichkeitsverteilung zugrunde:

k	3	4	5
$P(X=k)$	60 %	10 %	30 %

Jeder Patient bezahlt für die Aufnahme 110 Euro Verwaltungsgebühr sowie 450 Euro pro Aufenthaltstag.

a) Stellen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung $k \mapsto P(X=k)$ graphisch in einem Histogramm dar.

b) Bestimmen Sie den Erwartungswert und die Standardabweichung der Zufallsgröße Y: Einnahmen pro Patient (in €).

c) Ermitteln Sie den Betrag, den jeder Patient pro Aufenthaltstag bezahlen müsste, damit im Mittel pro Patient Einnahmen in Höhe von 2000 Euro zu erwarten wären.

(nach Leistungskurs-Abiturprüfung 2007, Aufgabengruppe III, Aufgabe 5a)

Zielsetzung Übung (grundlegende Konzepte von Wahrscheinlichkeitsverteilungen)

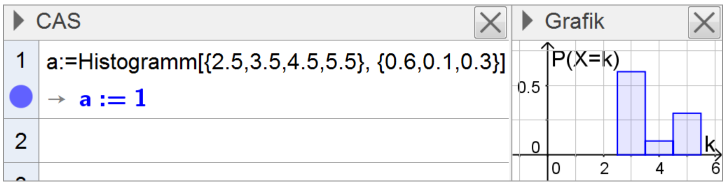
Voraussetzung Zufallsgröße, Erwartungswert, Standardabweichung

Anmerkung In den Hinweisen zur Bearbeitung nicht nur dieses Arbeitsauftrags werden Listen verwendet und miteinander multipliziert, um das Potential des CAS aufzuzeigen und auszuschöpfen. Selbstverständlich kann im Rahmen des Unterrichts auf die Verwendung von Listen ganz oder teilweise verzichtet und das CAS zur Durchführung der Berechnungen wie ein herkömmlicher wissenschaftlicher Taschenrechner eingesetzt werden, bei Bedarf unter Einbeziehung der Tabellenkalkulation des CAS.

Hinweise zur Bearbeitung

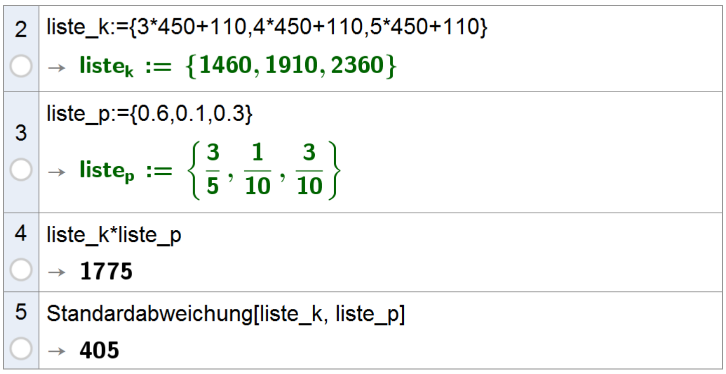
Zu a)

Das Histogramm kann mithilfe des CAS dargestellt werden, zum Zeichnen des Histogramms auf Papier ist dies jedoch nicht zwingend nötig.



Zu b)

Anschließend können die Werte der Zufallsgröße Y (Zeile 2) sowie deren Erwartungswert (Zeile 4) und Standardabweichung (Zeile 5) berechnet werden.



Anmerkung: Mit einem CAS können Listen multipliziert werden, und zwar so, dass im Prinzip eine Skalarmultiplikation von Vektoren erfolgt. Dieser Tatsache müssen die Schülerinnen und Schülern anhand einiger Beispiele gewahr werden, damit die Verknüpfung von ihnen sicher angewendet werden kann. Für das Beispiel in Zeile 3 bedeutet dies:

$$\text{liste\_k} * \text{liste\_p} = 1460 \cdot \tfrac{3}{5} + 1910 \cdot \tfrac{1}{10} + 2360 \cdot \tfrac{3}{10}$$

Zu c)

6	liste_m := {3x + 110, 4x + 110, 5x + 110}
	→ $\text{liste}_m := \{3\,x + 110, 4\,x + 110, 5\,x + 110\}$
7	liste_m*liste_p
	→ $\frac{37}{10}\,x + 110$
8	Löse[$7 = 2000,x]
	→ $\left\{x = \frac{18900}{37}\right\}$
9	Numerisch[$8]
	→ $\{x = 510.81\}$

→ Bernoulli-Kette und Binomialverteilung

Arbeitsauftrag 2

Schafkopf ist eines der beliebtesten Kartenspiele Bayerns. Das Blatt besteht aus 32 Karten (vier „Farben" Eichel, Grün, Herz und Schellen, jeweils mit den Karten 7, 8, 9, 10, Unter, Ober, König und Ass). Alle Ober, alle Unter sowie alle Herz-Karten sind die Trümpfe. Jeder der vier Spieler erhält zu Beginn eines Spiels acht Karten.

a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass einer der vier Spieler vier Ober und vier Unter erhält.

b) Die Zufallsgröße X beschreibt die Anzahl der Ober, die ein Spieler erhält. Geben Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X an und berechnen Sie den Erwartungswert von X.

c) Die Zufallsgröße Y beschreibt die Anzahl der Trümpfe, die ein Spieler zu Beginn eines Spiels erhält. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung von Y und interpretieren Sie das Ergebnis im Sachzusammenhang. Erstellen Sie ein Histogramm zur Verteilung und berechnen Sie Erwartungswert und Standardabweichung von Y.

(nach bsv 12, S. 95, Aufgabe 11)

Zielsetzung Übung – Festigung grundlegender Kompetenzen im Bereich Wahrscheinlichkeitsverteilung

Voraussetzung Zufallsgröße, Erwartungswert, Standardabweichung; Binomialverteilung

Hinweise zur Bearbeitung

Zu a)

Zeile 1: ein bestimmter Spieler

Zeile 2: ein beliebiger Spieler

1	1/BinomialKoeffizient[32, 8]
	→ $\frac{1}{10518300}$
2	Numerisch[BinomialKoeffizient[4,1] $1]
	→ $3.8 \cdot 10^{-7}$

Zu b)

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße X lässt sich mithilfe der Tabellenkalkulationsfunktion des CAS wesentlich einfacher ermitteln als mit einem herkömmlichen Taschenrechner. Zudem kann (über die Aufgabenstellung hinausgehend) die Wahrscheinlichkeitsverteilung graphisch dargestellt werden.

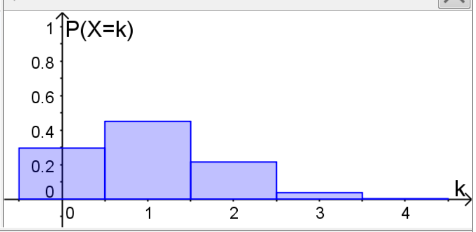
An dieser Stelle wird sichtbar, welch großes Potential im CAS als Lern- und Lehrwerkzeug liegt, da sich verschiedene Darstellungsformen leicht miteinander verknüpfen lassen.

Eintrag Zelle B1: *=(BinomialKoeffizient[4, A1] * BinomialKoeffizient[28, 8 - A1]) / BinomialKoeffizient[32, 8]*

Tabelle

	A	B
1	0	0.2955
2	1	0.4503
3	2	0.2149
4	3	0.0374
5	4	0.0019

Grafik



CAS

1	w:={B1,B2,B3,B4,B5}
	→ $w := \left\{\frac{5313}{17980}, \frac{2024}{4495}, \frac{966}{4495}, \frac{168}{4495}, \frac{7}{3596}\right\}$
2	a:=Histogramm[{(-0.5), 0.5, 1.5, 2.5, 3.5, 4.5},w]
	→ $a := 1$

Zeile 3: Erwartungswert

3	w*{A1,A2,A3,A4,A5}
	→ **1**

Zu c)

Die Bearbeitung von Aufgabe c wird durch das CAS in gleicher Weise unterstützt.

Eintrag Zelle B1: *=BinomialKoeffizient[14, A1] * BinomialKoeffizient[18, 8 - A1] / BinomialKoeffizient[32, 8]*

Auch anhand des Histogramms können die Schülerinnen und Schüler erkennen, dass (nur) die Wahrscheinlichkeiten, keinen, sieben bzw. acht Trümpfe zu erhalten, jeweils sehr gering sind, wohingegen die Wahrscheinlichkeiten, drei bzw. vier Trümpfe zu erhalten (d. h. „rund um den Erwartungswert"), jeweils relativ groß sind. Es ist davon auszugehen, dass man vergleichsweise häufig zwischen zwei und fünf Trümpfen erhält.

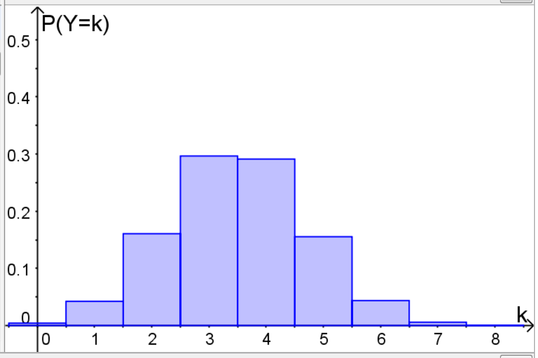
Zeile 4: Erwartungswert

Zeile 5: Standardabweichung

Tabelle

	A	B
1	0	0.0042
2	1	0.0424
3	2	0.1606
4	3	0.2965
5	4	0.2912
6	5	0.1553
7	6	0.0437
8	7	0.0059
9	8	0.0003

Grafik



CAS

1	w:={B1,B2,B3,B4,B5,B6,B7,B8,B9}
	→ **w** := $\left\{\frac{187}{44950}, \frac{952}{22475}, \frac{10829}{67425}, \frac{6664}{22475}, \frac{1309}{4495}, \frac{10472}{67425}, \ldots\right.$
2	a:=Histogramm[{(-0.5), 0.5, 1.5, 2.5, 3.5, 4.5, 5.5, 6.5, 7.5, 8.5},w]
	→ **a := 1**
3	p:={A1,A2,A3,A4,A5,A6,A7,A8,A9}
	→ **p** := {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}
4	p*w
	→ $\frac{7}{2}$
5	Standardabweichung[p, w]
	→ **1.2346**

Arbeitsauftrag 3

Ein in die Jahre gekommenes Fotokopiergerät liefert brauchbare und unbrauchbare Kopien. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Kopie unbrauchbar ist, beträgt 15 % (Ausschussquote). Das Fertigen von Kopien soll als Bernoulli-Kette angesehen werden.

Es werden 20 Kopien gefertigt. Ermitteln Sie für jedes der angegebenen Ereignisse die Wahrscheinlichkeit.

A: „Es sind mehr als drei Viertel der Kopien brauchbar."

B: „Es ist genau eine Kopie unbrauchbar und diese befindet sich unter den letzten fünf."

Geben Sie einen möglichen Grund dafür an, dass die modellhafte Annahme, das Anfertigen von Kopien sei eine Bernoulli-Kette, in der Realität unzutreffend sein kann.

(nach Grundkurs-Abiturprüfung 2006, Aufgabengruppe III, Aufgaben 1, 7)

Zielsetzung Übung

Voraussetzung Bernoulli-Kette, Binomialverteilung

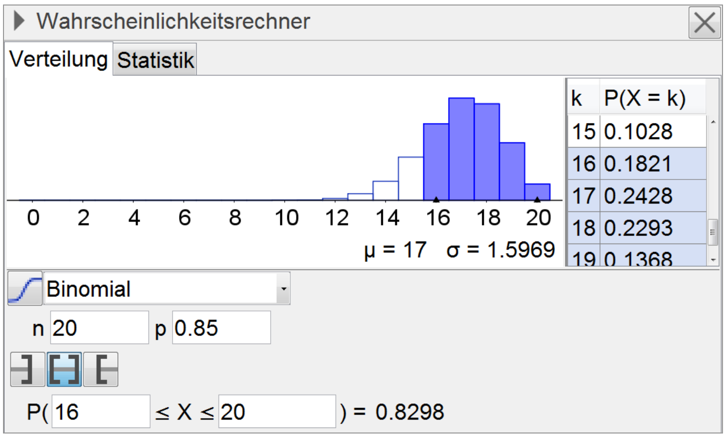
Hinweise zur Bearbeitung

Werte der Binomialverteilung können mit dem CAS direkt über Befehle ausgegeben werden (Zeilen 1, 2). Beim hier verwendeten CAS können einzelne Werte alternativ auch mithilfe des

1	Binomial[20, 0.85, 16..20]
	≈ **0.8298**
2	Binomial[15,0.15,0,false]*Binomial[5,0.15,1,false]
	≈ **0.0342**

„Wahrscheinlichkeitsrechners“ ermittelt werden (vgl. nebenstehend unten sowie Kapitel 3.2.1), der zusätzlich eine graphische Veranschaulichung der Verteilung bietet.

Ein möglicher Grund dafür, dass die Annahme in der Realität unzutreffend sein kann, besteht z. B. darin, dass technische Defekte die Ausschusswahrscheinlichkeit p plötzlich erhöhen können.



Arbeitsauftrag 4

Es ist bekannt, dass 25 % aller Unternehmen bei Neueinstellungen ein graphologisches Gutachten, d. h. eine Analyse der Handschrift des Bewerbers, zu Rate ziehen. Ein Stellensuchender bewirbt sich bei 20 Firmen.

a) Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass genau fünf dieser Unternehmen ein graphologisches Gutachten einholen.

b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Anzahl der Unternehmen, die ein graphologisches Gutachten einholen, kleiner als der zugehörige Erwartungswert ist.

c) Begründen oder widerlegen Sie folgende Aussage: „Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Zufallsvariable einen Wert annimmt, der kleiner als ihr Erwartungswert ist, beträgt höchstens 50 %.“

(aus HR Abitur G8, S. 37, Aufgabe 3)

Zielsetzung Übung/Vertiefung

Voraussetzung Bernoulli-Kette, Binomialverteilung, Zufallsvariable, Erwartungswert

Hinweise zur Bearbeitung

Zu a)

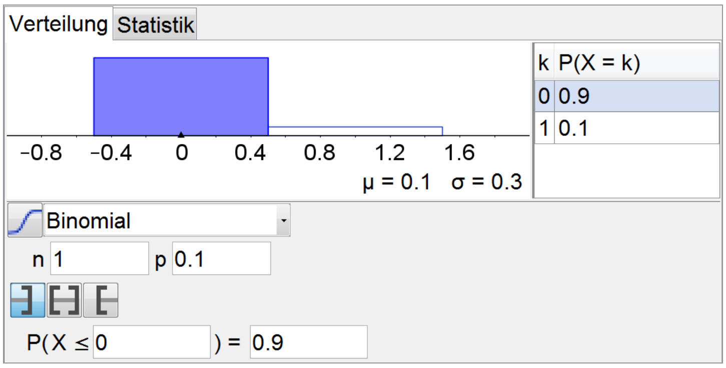
1	Binomial[20, 0.25, 5, false]
	≈ **0.2023**

Zu b)

2	μ:=20*0.25
	→ μ := **5**
3	Binomial[20, 0.25, μ-1, true]
	≈ **0.4148**

Zu c)

CAS ermöglichen es, schnell Zugriff auf Wahrscheinlichkeitsverteilungen und deren Werte zu erhalten. Dies unterstützt auch individuelle Vorgehensweisen der Schülerinnen und Schüler, wie hier etwa bei der Suche nach einem Gegenbeispiel. Ein solches ist in der Abbildung dargestellt: Ist X nach $B(1; 0{,}1)$ verteilt, dann ist $\mu = 0{,}1$, aber $P(X = 0) = 0{,}9$.



→ Einfluss von Änderungen der Werte von Parametern auf die Binomialverteilung

Mithilfe des CAS können verhältnismäßig einfach verschiedene Binomialverteilungen graphisch veranschaulicht werden. Dadurch kann das Verständnis für die zugrunde liegenden mathematischen Inhalte und Zusammenhänge gefördert werden, forschend experimentelle Herangehensweisen an die Fragestellungen werden erleichtert. So können die Schülerinnen und Schüler z. B. die Anzahl der Versuche oder die Trefferwahrscheinlichkeit einer Verteilung systematisch variieren. Anhand der beiden folgenden Arbeitsaufträge können sie den Einfluss der Änderung der Werte von Parametern auf die Binomialverteilung sowie die kumulative Binomialverteilung untersuchen. Eine Bearbeitung in Gruppen – arbeitsgleich oder arbeitsteilig – bietet sich an; stellen die einzelnen Gruppen ihre jeweiligen Ergebnisse übersichtlich auf jeweils einem Plakat zusammen, so können sie die Ergebnisse anschließend anhand der Plakate präsentieren.

Arbeitsauftrag 5

Zwei Basketballspieler trainieren Freiwürfe. Anton trifft bei jedem Versuch mit einer Wahrscheinlichkeit von 70 %.

a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Anton bei 20 Versuchen

i) genau 12-mal **ii)** genau 13-mal **iii)** genau 14-mal **iv)** genau 15-mal

trifft.

Stellen Sie eine Vermutung für die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass Anton bei 20 Versuchen genau 16-mal trifft; überprüfen Sie Ihre Vermutung mithilfe des CAS.

b) Die Zufallsgröße A beschreibt die Anzahl der von Anton bei 20 Versuchen erzielten Treffer. Stellen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung von A graphisch dar und beschreiben Sie den Einfluss der Anzahl der Treffer auf die Wahrscheinlichkeit.

c) Geben Sie einen Term für die Berechnung der Wahrscheinlichkeit dafür an, dass Anton bei 20 Versuchen

i) mindestens 13-mal und höchstens 15-mal **ii)** mindestens 12-mal und höchstens 16-mal

trifft; berechnen Sie den Wert des Terms mithilfe des CAS.

d) Bestimmen Sie mithilfe des CAS-Rechners die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Anton bei 20 Versuchen

i) mindestens 12-mal **ii)** mindestens 13-mal **iii)** mindestens 14-mal **iv)** mindestens 15-mal

trifft.

Machen Sie ohne Rechnung plausibel, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Anton bei 20 Versuchen mindestens 16-mal trifft, größer ist als diejenige, dass er höchstens 4-mal nicht trifft.

Brian trifft bei jedem Versuch mit einer Wahrscheinlichkeit von 80 %. Die Zufallsgröße B beschreibt die Anzahl der von ihm bei 20 Versuchen erzielten Treffer.

e) Stellen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung von B graphisch dar. Beschreiben Sie – durch Vergleich mit der graphischen Darstellung der Wahrscheinlichkeitsverteilung von A – den Einfluss der Trefferwahrscheinlichkeit auf die Verteilung.

f) Der Trainer der beiden Spieler behauptet, es sei zu erwarten, dass Brian bei 20 Versuchen genau 16-mal trifft. Nehmen Sie zu dieser Behauptung Stellung.

Zielsetzung Erarbeitung und/oder Übung/Vertiefung – insbesondere: Einfluss der Änderung der Werte von Parametern auf die Binomialverteilung/kumulative Binomialverteilung (auch: Tätigen von Beobachtungen; Verwendung des CAS als Werkzeug zum Erforschen von Zusammenhängen)

Voraussetzung Bernoulli-Kette, Binomialverteilung, Zufallsvariable, Erwartungswert

Anregung s. o. (Gruppenarbeit mit Posterpräsentation)

Hinweise zur Bearbeitung

Zu a)

Zur Lösung bietet sich neben der hier vorgeschlagenen Definition einer passenden Funktion (Zeile 1) u. a. auch die Verwendung der im CAS integrierten Tabellenkalkulation an. Die anzu-

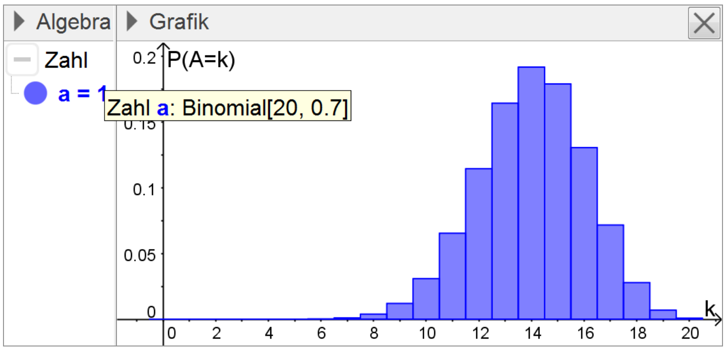
1	t(k):=Binomial[20, 0.7, k,false]
	✓ **t(k) := Binomial[20, 0.7, k, false]**
2	{t(12),t(13),t(14),t(15)}
	≈ **{0.1144, 0.1643, 0.1916, 0.1789}**

stellende Vermutung soll den Schülerinnen und Schülern bewusst machen, dass aufgrund der bereits berechneten Werte in Verbindung mit ihrem Wissen über Binomialverteilungen $t(16) < t(15)$ gelten muss.

3	t(16)
	≈ **0.1304**

Zu b)

Die graphische Darstellung (nebenstehend mithilfe des Algebra-Fensters erzeugt) unterstützt die Beschreibung des Einflusses der Anzahl der Treffer auf die Wahrscheinlichkeit. Die Schülerinnen und Schüler erkennen, dass die Wahrscheinlichkeit zunächst mit steigender Trefferzahl zunimmt, jedoch ab einer gewissen Trefferzahl wieder abnimmt, die nicht „in der Mitte" der möglichen Trefferzahlen liegt.



Beim schriftlichen Fixieren der Verteilung auf Papier können die Anforderungen an die Exaktheit hoch sein, denn es ist leicht möglich, ausreichend viele Werte zur Unterstützung der Zeichnung zu ermitteln.

Zu c)

Möglicher Term zu i (analog zu ii):

$$\binom{20}{13}\cdot 0{,}7^{13}\cdot 0{,}3^{7}+\binom{20}{14}\cdot 0{,}7^{14}\cdot 0{,}3^{6}+\binom{20}{15}\cdot 0{,}7^{15}\cdot 0{,}3^{5}$$

Nebenstehend sind zwei unterschiedliche Möglichkeiten zur Berechnung der Werte dargestellt.

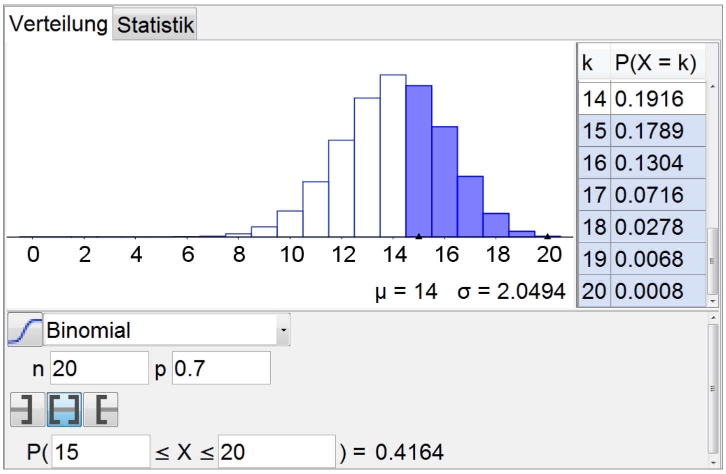
4	t(13)+t(14)+t(15)
	≈ **0.5348**
5	Binomial[20, 0.7, 12..16]
	≈ **0.7796**

Zu d)

Analog zu Aufgabe a stehen unterschiedliche Möglichkeiten zur Verfügung, die Berechnungen mit dem CAS durchzuführen (z. B. Zeilen 6, 7).

6	P(k):=Binomial[20, 0.7, k..20]
	√ **P(k) := Binomial[20, 0.7, k...20]**
7	{P(12),P(13),P(14),P(15)}
	≈ **{0.8867, 0.7723, 0.608, 0.4164}**

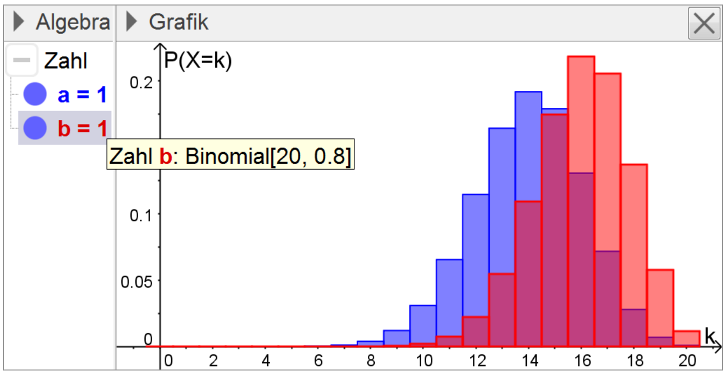
Von besonderem Gewinn ist, dass es mit dem CAS möglich ist (z. B. mithilfe des Moduls „Wahrscheinlichkeitsrechner"), zusätzlich die graphische Darstellung der Verteilung zu erhalten, sodass die Terme und Zahlenwerte mit einer entsprechenden Anschauung hinterlegt werden können, die auch bei der zu führenden Argumentation hilfreich sein kann.



Zu e)

Anhand der graphischen Darstellung können die Schülerinnen und Schüler erkennen, dass sich die Verteilung „nach rechts verschiebt“ und dass sie „enger wird“. Das Maximum der Wahrscheinlichkeiten erhöht sich ebenfalls.

Bei Interesse können weitere Verteilungen mit dem CAS leicht erzeugt werden, um diese Beobachtung auszubauen bzw. zu untermauern und (z. B. per Schieberegler) den Einfluss der Trefferwahrscheinlichkeit allgemein zu untersuchen.



Zu f)

Diese Aufgabe kann zur Diskussion über eine weit verbreitete Fehlvorstellung hinsichtlich der Interpretation des Erwartungswerts anregen. So beträgt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Brian bei 20 Versuchen genau 16-mal trifft, „nur“ etwa 21,8 %; folglich ist nicht zu „erwarten“, dass er bei 20 Versuchen genau 16-mal trifft – wenngleich der Erwartungswert 16 der zugehörigen Zufallsgröße dies bei falscher Interpretation suggeriert. Der Erwartungswert trifft jedoch eine Aussage darüber, welche Trefferzahl im Mittel zu erwarten ist, wenn man das Experiment sehr häufig durchführen würde.

Arbeitsauftrag 6

Basketballspielerin Antonia trainiert Freiwürfe. Sie trifft bei jedem Versuch mit einer Wahrscheinlichkeit von 70 %.

a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Antonia bei 20 Versuchen genau
i) 12-mal **ii)** 13-mal **iii)** 14-mal **iv)** 15-mal **v)** 16-mal
trifft.

b) Stellen Sie eine Vermutung für die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass Antonia bei 40 Versuchen genau
i) 24-mal **ii)** 26-mal **iii)** 28-mal **iv)** 30-mal **v)** 32-mal
trifft; überprüfen Sie Ihre Vermutung mithilfe des CAS. Erklären Sie das Ergebnis.

c) Die Zufallsgröße A_k beschreibt die Anzahl der von Antonia bei k Versuchen erzielten Treffer. Stellen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung von A_k für k = 20, 40 und 60 jeweils graphisch dar und beschreiben Sie den Einfluss der Anzahl der Versuche auf die Verteilung.

d) Bestimmen Sie rechnerisch die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Antonia
i) bei 20 Versuchen mindestens 15-mal **ii)** bei 40 Versuchen mindestens 30-mal
trifft. Was stellen Sie fest?

e) Stellen Sie eine Vermutung für das Verhältnis der Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse an:
A: „Antonia trifft bei 39 Versuchen genau 27-mal.“
B: „Antonia trifft bei 39 Versuchen genau 28-mal.“
Überprüfen Sie Ihre Vermutung mithilfe des CAS und begründen Sie das Ergebnis rechnerisch.

f) Antonia tritt an, um nacheinander 20 Freiwürfe auszuführen. Erläutern Sie, dass die modellhafte Beschreibung durch eine Bernoulli-Kette der Realität unter Umständen nicht gerecht wird.

Zielsetzung Erarbeitung und/oder Übung/Vertiefung – insbesondere: Einfluss der Änderung der Werte von Parametern auf die Binomialverteilung/kumulative Binomialverteilung (auch: Tätigen von Beobachtungen; Verwendung des CAS als Werkzeug zum Erforschen von Zusammenhängen)

Voraussetzung Bernoulli-Kette, Binomialverteilung, Zufallsvariable, Erwartungswert

Anregung s. o. (Gruppenarbeit mit Posterpräsentation)

Hinweise zur Bearbeitung

Zu a)

Wie zu Arbeitsauftrag 5 ausgeführt, stellen CAS unterschiedliche Möglichkeiten bereit, die geforderten Wahrscheinlichkeiten zu berechnen. Nebenstehend wurde die integrierte Tabellenkalkulation verwendet.

B5 =Binomial[20, 0.7, A5, false]

	A	B	C	D	E	F
1	12	0.1144				
2	13	0.1643				
3	14	0.1916				
4	15	0.1789				
5	16	0.1304				
6						

Zu b)

Bei dieser Aufgabe ist mit falschen Vermutungen wie „Die Wahrscheinlichkeiten ändern sich nicht." zu rechnen. Anhand einer genauen Betrachtung der zugehörigen Terme können die Schülerinnen und Schüler jedoch erkennen, dass derartige Zusammenhänge nicht bestehen.

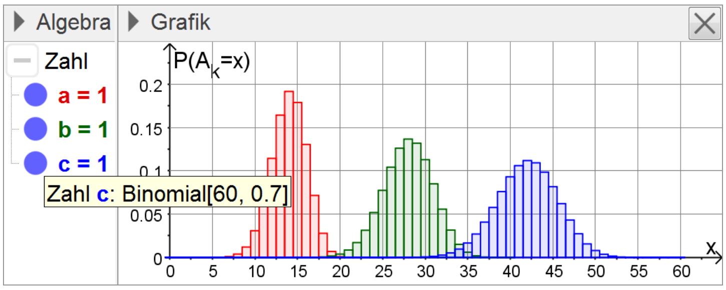
C5 =Binomial[40, 0.7, 2A5, false]

	A	B	C	D	E	F
1	12	0.1144	0.0518			
2	13	0.1643	0.1042			
3	14	0.1916	0.1366			
4	15	0.1789	0.1128			
5	16	0.1304	0.0557			
6						

Zu c)

Mit einigen CAS lassen sich alternativ zu einer Dynamisierung mithilfe eines Schiebereglers auch mehrere Verteilungen in einem gemeinsamen Diagramm darstellen, sodass ein direkter Vergleich leichter fällt (vgl. Abbildung).

Mit wachsender Anzahl an Versuchen „verschiebt sich" die Verteilung „nach rechts", „flacht ab" und „verbreitert sich".



Zu d)

Ein Blick auf die bei c dargestellten Verteilungen hilft beim Verständnis des Ergebnisses.

1 Binomial[20, 0.7, 15..20]
≈ **0.4164**

2 Binomial[40, 0.7, 30..40]
≈ **0.3087**

Zu e)

Das Ergebnis überrascht u. U. zunächst, jedoch können die Schülerinnen und Schüler durch Rechnung erkennen:

3 Binomial[39, 0.7, 27, false]/Binomial[39, 0.7, 28, false]
→ **1**

$$\frac{\binom{39}{27}\cdot 0{,}7^{27}\cdot 0{,}3^{12}}{\binom{39}{28}\cdot 0{,}7^{28}\cdot 0{,}3^{11}}=\frac{\frac{1}{12}\cdot 0{,}3}{\frac{1}{28}\cdot 0{,}7}=\frac{28\cdot 3}{12\cdot 7}=1\,.$$

Zu f)

Diese Aufgabe kann zur Diskussion über die Grenzen der hier getroffenen Modellierung anregen. So ist es z. B. möglich, dass Antonia, trifft sie etwa bei keinem der ersten fünf Würfe, aufgrund zunehmender Nervosität beim sechsten Wurf eine geringere Trefferwahrscheinlichkeit hat.

→ Anwendung der Binomialverteilung am Beispiel des einseitigen Signifikanztests

Arbeitsauftrag 7

Eine Fluggesellschaft beabsichtigt, ihren Passagieren neben dem Standardmenü gegen Zuzahlung ein Premiummenü anzubieten, möchte diesen Service jedoch nur dann einrichten, wenn er von mehr als 15 % der Passagiere gewünscht wird. Die Nullhypothese „Höchstens 15 % der Passagiere wünschen das Angebot eines Premiummenüs." soll auf der Basis einer Stichprobe von 200 Passagieren auf einem Signifikanzniveau von 5 % getestet werden.

a) Bestimmen Sie die zugehörige Entscheidungsregel.

b) Sei p der unbekannte Anteil der Passagiere, die das Angebot eines Premiummenüs wünschen. Untersuchen Sie den Einfluss von p auf die Wahrscheinlichkeit dafür, das Premiummenü irrtümlich nicht anzubieten.

c) Die Fluggesellschaft hätte für den Test – bei gleichem Signifikanzniveau – anstelle der Nullhypothese

„Höchstens 15 % der Passagiere wünschen das Angebot eines Premiummenüs."

auch die Nullhypothese

„Mehr als 15 % der Passagiere wünschen das Angebot eines Premiummenüs."

wählen können. Bei der Wahl der Nullhypothese stand für die Fluggesellschaft eine der beiden folgenden Überlegungen im Vordergrund:

- Der irrtümliche Verzicht auf das Angebot des Premiummenüs wäre mit einem Imageverlust verbunden.
- Das irrtümliche Angebot des Premiummenüs wäre mit einem finanziellen Verlust verbunden.

Entscheiden Sie, welche der beiden Überlegungen für die Fluggesellschaft bei der Wahl der Nullhypothese im Vordergrund stand. Erläutern Sie Ihre Entscheidung.

d) Untersuchen Sie, wie sich eine Änderung des Ablehnungsbereichs der Nullhypothese auf das kleinstmögliche Signifikanzniveau auswirkt, das dem Test dann zugrunde gelegt werden kann.

(nach Abiturprüfung Mathematik 2011 (G8), Themengebiet Stochastik, Aufgabengruppe II, Aufgabe 2)

Zielsetzung Übung/Vertiefung

Voraussetzung Binomialverteilung, einseitiger Signifikanztest

Anmerkungen Das CAS kann den Schülerinnen und Schülern im Zusammenhang mit Aufgaben zum einseitigen Signifikanztest einerseits als Werkzeug zur Beschaffung der benötigten Werte der Wahrscheinlichkeitsverteilung dienen, unterstützt sie aber auch bei der Untersuchung von Auswirkungen, die Änderungen von Kenngrößen des Tests auf dessen Aussage haben.

Aufgabe b ist vergleichsweise offen formuliert. Bei Bedarf können Zusätze der folgenden Art die Bearbeitung erleichtern: „Stellen Sie dazu diesen Zusammenhang graphisch dar und geben Sie an, ab welchem Wert von p die Wahrscheinlichkeit dafür, das Premiummenü irrtümlich nicht anzubieten, kleiner als 50 % (25 %, 10 %) ist." Analog kann auch **Aufgabe d** enger gefasst werden durch Ergänzungen wie die folgende: „Stellen Sie Ihr Ergebnis graphisch dar und ermitteln Sie, bei welchen Ablehnungsbereichen das Signifikanzniveau 1 %, 10 % bzw. 20 % beträgt." Der Vereinfachung kann ferner ein Zusatz wie „der unteren Grenze" vor „des Ablehnungsbereichs" in der Aufgabenstellung dienen.

Hinweise zur Bearbeitung

Zu a)

Die (kleinste ganzzahlige) Lösung $k = 39$ der aufgestellten Ungleichung $P_{0{,}15}^{200}(X \geq k) \leq 0{,}05$ zur Nullhypothese $H_0: p \leq 0{,}15$ und dem Ablehnungsbereich $\{k,\ldots,200\}$ können die Schülerinnen und Schüler mithilfe des CAS z. B. durch systematisches Probieren finden (Zeilen 1-5) oder durch Erstellung einer Wertetabelle.

Eintrag Zelle B7: *=Binomial[200, 0.15, A7..200]*

CAS

1	B(k):=Binomial[200, 0.15, k..200]
	✓ **B(k) := Binomial [200, 0.15, k . . . 200]**
2	B(30)
	≈ **0.5303**
3	B(40)
	≈ **0.0335**
4	B(38)
	≈ **0.072**
5	B(39)
	≈ **0.0498**

Tabelle

	A	B
1	33	0.3042
2	34	0.2404
3	35	0.185
4	36	0.1387
5	37	0.1013
6	38	0.072
7	39	0.0498
8	40	0.0335
9	41	0.022
10	42	0.014
11	43	0.0087

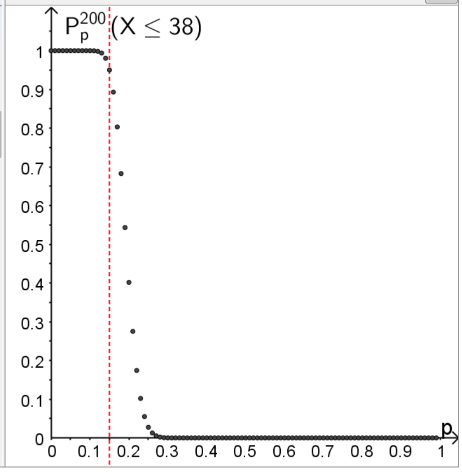
Zu b)

Das Premiummenü wird nicht angeboten, wenn die Nullhypothese nicht abgelehnt wird. Zu untersuchen ist entsprechend der Zusammenhang zwischen p und $P_p^{200}(X \leq 38)$, die sog. Operationscharakteristik des Tests, wobei gemäß Aufgabenstellung („irrtümlich“) nur der Bereich $0{,}15 < p \leq 1$ zu betrachten ist. Das CAS bietet unterschiedliche Möglichkeiten, diesen Zusammenhang zwischen der tatsächlichen (unbekannten) Größe von p und der Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 2. Art zu untersuchen. Nebenstehend ist eine tabellarische Untersuchung in Verbindung mit einer graphischen Darstellung der erhaltenen Wertepaare $\left(p \mid P_p^{200}(X \leq 38)\right)$ vorgeschlagen; die Graphik lässt sich dabei nach Markierung der Spalten A und B mithilfe der rechten Maustaste generieren („Erzeugen“ > „Liste von Punkten“).

Tabelle

	A	B
16	0.15	0.9502
17	0.16	0.8931
18	0.17	0.8032
19	0.18	0.6828
20	0.19	0.5432
21	0.2	0.4019
22	0.21	0.2753
23	0.22	0.1743
24	0.23	0.102
25	0.24	0.0551
26	0.25	0.0276
27	0.26	0.0128

Grafik



Zu c)

z. B.: Bei Durchführung des Tests mit der von der Fluggesellschaft gewählten Nullhypothese beträgt die Wahrscheinlichkeit, das Premiummenü irrtümlich anzubieten, höchstens 5 %; die Wahrscheinlichkeit, das Premiummenü irrtümlich nicht anzubieten, kann dagegen wesentlich größer (im Extremfall etwa 95 %) sein. Somit stand für die Fluggesellschaft bei der Wahl der Nullhypothese die zweite Überlegung im Vordergrund.

Zu d)

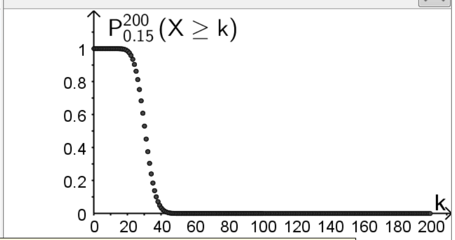
Mithilfe der entsprechenden Werkzeuge des CAS können die Schülerinnen und Schüler in Abhängigkeit von der unteren Grenze des Ablehnungsbereichs das dazu passende kleinstmögliche Signifikanzniveau als obere Schranke für die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 1. Art ermitteln. Z. B. anhand der Graphik können sie erkennen, dass eine größere untere Grenze des Ablehnungsbereichs wie zu erwarten (bei unveränderter Nullhypothese) mit einem geringeren Signifikanzniveau einhergeht. Daran kann sich eine Diskussion darüber anschließen, welche Auswirkungen dies wiederum auf die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 2. Art hat.

Tabelle

	A	B
32	31	0.4515
33	32	0.3753
34	33	0.3042
35	34	0.2404
36	35	0.185
37	36	0.1387
38	37	0.1

Zahl **B37**: Binomial[200, 0.15, A37...200]

Grafik



3.3 Geometrie

3.3.1 Schnelleinstieg – grundlegende Einsatzmöglichkeiten des CAS

Im Folgenden wird ein kurzer Überblick gegeben, welche Funktionen eines CAS sich insbesondere in der Geometrie der Jahrgangsstufe 12 anbieten. Dieser Überblick ist nicht als vollständig zu verstehen, er vermittelt vielmehr einen kurzen Eindruck der Einsatzmöglichkeiten.

Ebenengleichung in Koordinatenform

Häufig muss die Gleichung einer Ebene, die durch drei vorgegebene Punkte festgelegt ist, in Koordinatenform ermittelt werden.

Zeilen 1-3: Eingabe der Punkte als Ortsvektoren

Zeile 4: Definition des Ortsvektors eines allgemeinen Punkts

Zeile 5: Koordinatenform berechnen

Zeile 6: Manche CAS stellen zur Bestimmung der Ebenengleichung einen eigenen Befehl bereit. (Dieser lässt sich auch selbst im CAS erzeugen: Dazu kann z. B. der Befehl in Zeile 5 als Funktion definiert werden.)

1	a:=(1,3,5) $\rightarrow\ \mathbf{a} := \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$
2	b:=(1,1,0) $\rightarrow\ \mathbf{b} := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
3	c:=(-2,0,3) $\rightarrow\ \mathbf{c} := \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$
4	d:=(x_1,x_2,x_3) $\rightarrow\ \mathbf{d} := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$
5	Skalarprodukt[Kreuzprodukt[b-a, c-a], d-a]=0 $\rightarrow\ -11\,x_1 + 15\,x_2 - 6\,x_3 - 4 = 0$

6	Ebene[(1,3,5), (1, 1,0),(-2,0,3)] $\rightarrow\ -11x + 15y - 6z = 4$

Lagebeziehungen

Zeilen 1-6: Bestimmung des Schnittpunkts zweier Geraden (durch Lösen des zugehörigen Gleichungssystems) sowie der Größe des eingeschlossenen (spitzen) Winkels

Bei den weiteren typischen Untersuchungen zu Lagebeziehungen geometrischer Objekte können die ggf. auftretenden Gleichungssysteme jeweils mithilfe des CAS gelöst werden, eine ausführliche Darstellung findet sich im folgenden Kapitel 3.3.2.

1	g(λ):=(1,0,2)+λ*(-1,2,7) $\checkmark\ \mathbf{g(\lambda)} := (1,0,2) + \lambda\ (-1,2,7)$
2	h(μ):=(-2,2,-15)+μ*(1,0,12) $\checkmark\ \mathbf{h(\mu)} := (-2,2,-15) + \mu\ (1,0,12)$
3	Löse[g(λ)=h(μ),{λ,μ}] $\rightarrow\ \{\{\lambda = 1, \mu = 2\}\}$
4	g(1) $\rightarrow\ (0,2,9)$
5	Winkel[(-1,2,7), (1,0,12)] $\approx$ 0.35
6	$5 / (2π) 360 $\approx$ 20.28

3.3.2 Geraden und Ebenen im Raum

„Aufbauend auf dem ihnen bereits bekannten Rechnen mit Vektoren lernen die Schüler zur analytischen Beschreibung von Geraden und Ebenen im Raum Gleichungen in Parameterform kennen und deuten die lineare Abhängigkeit bzw. lineare Unabhängigkeit von Vektoren anschaulich. Sie arbeiten mit der Ebenengleichung in Normalenform, die sich bei Abstandsberechnungen und Lagebetrachtungen als vorteilhaft erweist. Bei Schnittproblemen vertiefen sie ihr Wissen über

lineare Gleichungssysteme aus der Mittelstufe. Die Schüler veranschaulichen in Schrägbildern die Lage von Geraden und Ebenen und untersuchen Eigenschaften von Körpern. Dabei wird ihnen erneut bewusst, dass manche Aufgabenstellungen sowohl mit Methoden der analytischen Geometrie als auch mit den aus der Mittelstufe bekannten Verfahren gelöst werden können.“ (Fachlehrplan 2004, M 11.2)

Das CAS vereinfacht insbesondere das Berechnen von Skalar- und Kreuzprodukten sowie das Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen, sodass ein stärkeres Augenmerk auf die Entwicklung individueller Lösungsstrategien sowie deren Analyse und Vergleich gelegt werden kann.

Im Zusammenhang mit den beschriebenen Vorschlägen zur Unterrichtsgestaltung kommen insbesondere folgende CAS-Grundfertigkeiten zur Anwendung:

- Winkelmaß einstellen/interpretieren
- Term definieren
- Ableitung bestimmen
- Berechnung mit Vektoren durchführen
- Gleichung lösen
- Gleichungssystem lösen

Auf die Verwendung einer 3D-Darstellung (vgl. Kapitel 3.3.3) wird in den folgenden Vorschlägen zur Unterrichtsgestaltung verzichtet, einerseits, damit die Schülerinnen und Schüler zunächst Grundfertigkeiten im Umgang mit einem CAS erwerben können, andererseits, da CAS mit 3D-Funktionalität bzw. Module von CAS mit 3D-Funktionalität (derzeit) in Prüfungen nicht zugelassen sind.

Vorschläge zur Unterrichtsgestaltung

Arbeitsauftrag 1

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte $A(2|-3|5)$, $B(1|1|3)$, $P(5|-15|11)$ und $Q(4|11|9)$ gegeben.

a) Bestimmen Sie eine Gleichung der Geraden g, die durch die Punkte A und B verläuft. Prüfen Sie, ob die Punkte P und Q auf g liegen.

b) Bestimmen Sie eine Gleichung der Geraden h, die g senkrecht schneidet und den Punkt Q enthält.

Zielsetzung Übung (Festigung von Grundfertigkeiten im Umgang mit Geradengleichungen)

Voraussetzung Geradengleichung, Skalarprodukt

Hinweise zur Bearbeitung

Zu a)

Zeilen 1-3: Definition der Geraden als Funktion

Zeilen 4-7: Prüfung der Lagebeziehungen, jeweils mithilfe einer Vektorgleichung
(Ob die Punkte auf g liegen, kann alternativ auch mithilfe der entsprechenden Gleichungssysteme geprüft werden.)

1	A:=(2,-3,5) $\rightarrow$ $A := (2, -3, 5)$
2	B:=(1,1,3) $\rightarrow$ $B := (1, 1, 3)$
3	g(λ):=A+λ*(B-A) $\rightarrow$ $g(\lambda) := (2-\lambda, -3+4\lambda, 5-2\lambda)$
4	P:=(5,-15,11) $\rightarrow$ $P := (5, -15, 11)$
5	Q:=(4,11,9) $\rightarrow$ $Q := (4, 11, 9)$
6	Löse[g(λ)=P] $\rightarrow$ $\{\lambda = -3\}$
7	Löse[g(λ)=Q] $\rightarrow$ $\{\}$

Zu b)

Zeilen 8-10: Bestimmung eines Richtungsvektors von h

8	qf(λ):=g(λ)-Q $\rightarrow$ $\mathbf{qf(\lambda) := (-\lambda - 2, 4\,\lambda - 14, -2\,\lambda - 4)}$
9	Löse[Skalarprodukt[qf(λ), B-A]=0,λ] $\rightarrow$ $\left\{\lambda = \frac{46}{21}\right\}$
10	qf(46/21) $\rightarrow$ $\left(-\frac{88}{21}, -\frac{110}{21}, -\frac{176}{21}\right)$

Arbeitsauftrag 2

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte $A(1|3|5)$, $B(1|1|0)$ und $C(-2|0|3)$ gegeben. Bestimmen Sie jeweils eine Gleichung der Ebene E, die durch die Punkte A, B und C bestimmt wird, in Parameterform und in Koordinatenform. Prüfen Sie, ob der Punkt $P(19|15|2)$ in E liegt.

Zielsetzung Übung (Festigung von Grundfertigkeiten im Umgang mit Ebenengleichungen in Parameter- und Koordinatenform)

Voraussetzung Ebenengleichung in Parameter- und Koordinatenform

Hinweise zur Bearbeitung

Zu a)

Zeilen 1-4: Eingabe der drei Punkte und Bestimmung der Gleichung in Parameterform

Zeilen 5-6: Bestimmung der Gleichung in Koordinatenform

Zeile 7: Alternative zu den Zeilen 5-6 (vgl. Kapitel 3.3.1; nicht bei allen CAS möglich)

Zeilen 8-9: Nachweis, dass P in E liegt (anhand einer von mehreren naheliegenden Strategien)

3	C:=(-2,0,3) $\rightarrow$ $\mathbf{C := (-2, 0, 3)}$
4	e(λ,μ):=A+λ*(B-A)+μ*(C-A) $\rightarrow$ $\mathbf{e(\lambda, \mu) := (1 - 3\,\mu, 3 - 2\,\lambda - 3\,\mu, 5 - 5\,\lambda - 2\,\mu)}$
5	n:=Kreuzprodukt[B-A, C-A] $\rightarrow$ $\mathbf{n := \begin{pmatrix} -11 \\ 15 \\ -6 \end{pmatrix}}$
6	Skalarprodukt[n, (x_1,x_2,x_3)-A]=0 $\rightarrow$ $\mathbf{-11\,x_1 + 15\,x_2 - 6\,x_3 - 4 = 0}$
7	Ebene[A, B, C] $\rightarrow$ $\mathbf{-11x + 15y - 6z = 4}$
8	P:=(19,15,2) $\rightarrow$ $\mathbf{P := (19, 15, 2)}$
9	Löse[e(λ, μ)=P,{λ,μ}] $\rightarrow$ $\mathbf{\{\{\lambda = 3, \mu = -6\}\}}$

Arbeitsauftrag 3

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Gerade $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, und der Punkt $P(-2|1|a)$ mit $a \in \mathbb{R}$ gegeben. Bestimmen Sie a so, dass P von g den Abstand 10 hat.

Zielsetzung Übung/Vertiefung (Bearbeitung eines typischen Abstandsproblems mit Parameter)

Voraussetzung Geradengleichung, Länge eines Vektors, Abstand Punkt-Gerade

Hinweise zur Bearbeitung

Zeilen 3, 4: Bestimmung des Schnittpunkts des Lots von P auf g mit g (Lotfußpunkt F)

Zeile 5: Die möglichen Werte von a ergeben sich als Lösungen der Gleichung $\left|\vec{F}-\vec{P}\right| = 10$.

1	g(λ):=(6,7,2)+λ*(-2,5,4) $\rightarrow\ \mathbf{g(\lambda) := (6-2\lambda, 7+5\lambda, 2+4\lambda)}$
2	P(a):=(-2,1,a) $\rightarrow\ \mathbf{P(a) := (-2, 1, a)}$
3	Löse[Skalarprodukt[(-2,5,4), g(λ)-P(a)]=0,λ] $\rightarrow\ \left\{\lambda = \frac{4}{45}a - \frac{22}{45}\right\}$
4	F(a):=g(4 / 45 a - 22 / 45) $\rightarrow\ \mathbf{F(a) := \left(-\frac{8}{45}a + \frac{314}{45}, \frac{4}{9}a + \frac{41}{9}, \frac{16}{45}a + \frac{2}{45}\right)}$
5	Löse[Länge[F(a)-P(a)] = 10,a] $\rightarrow\ \left\{a = \frac{-42\sqrt{5}+2}{29}, a = \frac{42\sqrt{5}+2}{29}\right\}$

Lösungsvariante

Alternativ kann mithilfe des CAS der Abstand von P zu g auch mithilfe der Differentialrechnung ermittelt werden. (Die nebenstehenden Zeilen 3 und 4 ersetzen Zeile 3 oben.)

3	d(λ):=Abstand[g(λ), P(a)] $\rightarrow\ \mathbf{d(\lambda) := \sqrt{(2\lambda-8)^2+(-5\lambda-6)^2+(a-4\lambda-2)^2}}$
4	Löse[Ableitung[d(λ)]=0,λ] $\rightarrow\ \left\{\lambda = \frac{4}{45}a - \frac{22}{45}\right\}$

Weitere Lösungsvariante

Zeile 3: Definition einer von a abhängigen Ebene E, die den Punkt P enthält und senkrecht zu g steht.

Zeilen 4,5: Bestimmung des Schnittpunkts von E und g (Auf die explizite Ausgabe des Schnittpunkts F kann verzichtet werden.)

Zeile 6: Die möglichen Werte von a ergeben sich als Lösungen der Gleichung $\left|\vec{F}-\vec{P}\right| = 10$.

3	E:=Skalarprodukt[(x,y,z)-P(a), (-2,5,4)]=0 $\rightarrow\ \mathbf{E: -4a-2x+5y+4z-9=0}$
4	Ersetze[E, {x=6-2λ,y=7+5λ,z=2+4λ}] $\rightarrow\ \mathbf{-4a+45\lambda+22=0}$
5	Löse[$4,λ] $\rightarrow\ \left\{\lambda = \frac{4}{45}a - \frac{22}{45}\right\}$
6	Löse[Abstand[P(a),g(4 / 45 a - 22 / 45)] = 10,a] $\rightarrow\ \left\{a = \frac{-42\sqrt{5}+2}{29}, a = \frac{42\sqrt{5}+2}{29}\right\}$

→ Gegenseitige Lage von Geraden, von Ebenen sowie von Geraden und Ebenen

Anhand der folgenden Arbeitsaufträge 4 bis 9 können die Schülerinnen und Schüler mögliche Fälle der gegenseitigen Lage von Geraden und Ebenen untersuchen. Es bietet sich eine Bearbeitung in unterschiedlichen Sozialformen an, z. B. in Form eines vereinfachten Expertenpuzzles: Zunächst bearbeiten die Schülerinnen und Schüler in fünf Expertengruppen jeweils eine der folgenden Aufgabenstellungen. Im Anschluss daran werden neue Gruppen gebildet, in denen zu jeder Aufgabe jeweils mindestens ein Experte vertreten ist, der dann den restlichen Gruppenmitgliedern seine Aufgabenstellung mit Lösung erläutert. Detaillierte Hinweise zur Methode „Expertenpuzzle“ stehen unter *www.LehrplanPLUS.bayern.de* > *Gymnasium* > *Fachprofile* > *Mathematik* > *2.4 Förderung von Kompetenzen im Unterricht* > *Materialien* zum Download bereit.

Arbeitsauftrag 4

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Geraden g: $\vec{X}=\begin{pmatrix}8\\1\\7\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}$, $\lambda\in\mathbb{R}$, und h: $\vec{X}=\begin{pmatrix}-1\\5\\-9\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}1\\-2\\4\end{pmatrix}$, $\mu\in\mathbb{R}$, gegeben. Zeigen Sie, dass sich g und h schneiden. Bestimmen Sie die Koordinaten des Schnittpunkts sowie die Größe des Schnittwinkels der beiden Geraden.

Zielsetzung Übung (Untersuchung der gegenseitigen Lage zweier Geraden)

Voraussetzung Geradengleichung, Winkel zwischen Vektoren, Gleichungssysteme

Hinweise zur Bearbeitung

Der Nachweis, dass sich die Geraden schneiden, kann z. B. dadurch erfolgen, dass die Lösbarkeit der entsprechenden Vektorgleichung (Zeile 3) dokumentiert wird.

1	g(λ):=(8,1,7)+λ*(3,1,2) $\rightarrow$ $\mathbf{g(\lambda) := (3\,\lambda + 8, \lambda + 1, 2\,\lambda + 7)}$
2	h(μ):=(-1,5,-9)+μ*(1,-2,4) $\rightarrow$ $\mathbf{h(\mu) := (\mu - 1, -2\,\mu + 5, 4\,\mu - 9)}$
3	Löse[g(λ)=h(μ)] $\rightarrow$ $\mathbf{\{\{\lambda = -2, \mu = 3\}\}}$
4	g(-2) $\rightarrow$ $\mathbf{(2, -1, 3)}$
5	Winkel[(3,1,2),(1,-2,4)]*180/ π $\approx$ **58.34**

Arbeitsauftrag 5

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Geraden $g:\vec{X}=\begin{pmatrix}-9\\1\\-1\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}11\\1\\2\end{pmatrix}$, $\lambda\in\mathbb{R}$, und $h:\vec{X}=\begin{pmatrix}-10\\3\\-2\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}5\\-1\\3\end{pmatrix}$, $\mu\in\mathbb{R}$, gegeben. Zeigen Sie, dass g und h windschief zueinander sind, und bestimmen Sie den Abstand der beiden Geraden.

Zielsetzung Übung (Untersuchung der gegenseitigen Lage zweier Geraden)

Voraussetzung Geradengleichung, Winkel zwischen Vektoren, Abstand Punkt-Gerade, Abstand Punkt-Ebene

Hinweise zur Bearbeitung

Zeilen 1-6: Eingabe der gegebenen Objekte

1	A := (-9, 1, -1) $\rightarrow$ $\mathbf{A := (-9, 1, -1)}$
2	u:=(11,1,2) $\rightarrow$ $\mathbf{u := \begin{pmatrix}11\\1\\2\end{pmatrix}}$
3	B:=(-10,3,-2) $\rightarrow$ $\mathbf{B := (-10, 3, -2)}$
4	v:=(5,-1,3) $\rightarrow$ $\mathbf{v := \begin{pmatrix}5\\-1\\3\end{pmatrix}}$
5	g(λ):=A+λ*u $\rightarrow$ $\mathbf{g(\lambda) := (11\,\lambda - 9, \lambda + 1, 2\,\lambda - 1)}$

Zeilen 7, 8: Nachweis, dass g und h nicht parallel sind und keinen gemeinsamen Punkt haben

Zeilen 9, 10: Um den Abstand von g und h zu bestimmen, kann zunächst eine Gleichung der Ebene ermittelt werden, die g enthält und parallel zu h verläuft; das Vektorprodukt der Richtungsvektoren von g und h liefert einen passenden Normalenvektor (Zeile 9). Mithilfe der Hesse'schen Normalenform der Ebenengleichung und des Aufpunkts von h kann der gesuchte Abstand ermittelt werden (Zeile 10).

6	h(μ):=B+μ*v $\rightarrow\ \mathbf{h(\mu)\ :=\ (5\,\mu - 10, -\mu + 3, 3\,\mu - 2)}$
7	Löse[u=k*v,k] $\rightarrow\ \{\}$
8	Löse[g(λ)=h(μ),{λ,μ}] $\rightarrow\ \{\}$
9	n:=Kreuzprodukt[u, v] $\rightarrow\ \mathbf{n\ :=\ \begin{pmatrix} 5 \\ -23 \\ -16 \end{pmatrix}}$
10	|Skalarprodukt[Einheitsvektor[n], B-A]| $\rightarrow\ \mathbf{7\,\sqrt{10} \cdot \frac{1}{18}}$

Lösungsvariante

Bestimmung der gemeinsamen Lotstrecke der beiden Geraden: Mithilfe des CAS können die beiden Lotfußpunkte durch Lösen des Gleichungssystems

$$\vec{u} \circ \left(\vec{X}_h - \vec{X}_g\right) = 0 \quad \text{und} \quad \vec{v} \circ \left(\vec{X}_h - \vec{X}_g\right) = 0$$

verhältnismäßig einfach ermittelt werden, wobei $\vec{u}$ und $\vec{v}$ Richtungsvektoren und X_g und X_h die allgemeinen Geradenpunkte von g bzw. h bezeichnen.

9	Löse[{u*(h(μ)-g(λ))=0,v*(h(μ)-g(λ))=0},{λ,μ}] $\rightarrow\ \left\{\left\{\lambda = \frac{43}{162}, \mu = \frac{20}{27}\right\}\right\}$
10	Länge[Ersetze[h(μ) - g(λ),$9]] $\rightarrow\ \mathbf{\sqrt{10} \cdot 63 \cdot \frac{1}{162}}$
11	Vereinfache[$10] $\rightarrow\ \mathbf{7 \cdot \frac{\sqrt{10}}{18}}$

Arbeitsauftrag 6

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Ebene $E: \vec{X} = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 2{,}5 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -0{,}5 \\ 1 \\ -0{,}5 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -0{,}5 \\ 1{,}5 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, und die Gerade $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} -2 \\ -13 \\ -6 \end{pmatrix} + \rho \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\rho \in \mathbb{R}$, gegeben. Zeigen Sie, dass sich E und g schneiden. Bestimmen Sie die Koordinaten des Schnittpunkts sowie die Größe des Winkels, unter dem die Gerade die Ebene schneidet.

Zielsetzung Übung (Untersuchung der gegenseitigen Lage einer Geraden und einer Ebene)

Voraussetzung Ebenengleichung in Parameter- und Koordinatenform, Winkel zwischen Vektoren, Gleichungssysteme

Hinweise zur Bearbeitung

1	e(λ,μ):=(0.5,2.5,2)+λ*(-0.5,1,-0.5)+μ*(-0.5,1.5,0) $\rightarrow\ \mathbf{e(\lambda, \mu)\ :=\ \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\,\lambda - \frac{1}{2}\,\mu, \frac{5}{2} + \lambda + \frac{3}{2}\,\mu, 2 - \frac{1}{2}\,\lambda\right)}$
2	g(ρ):=(-2,-13,-6)+ρ*(-1,3,2) $\rightarrow\ \mathbf{g(\rho)\ :=\ (-\rho - 2, 3\,\rho - 13, 2\,\rho - 6)}$
3	Löse[e(λ,μ)=g(ρ)] $\rightarrow\ \left\{\left\{\lambda = 46, \mu = -56, \rho = -\frac{15}{2}\right\}\right\}$

Zeile 3: Nachweis, dass sich E und g schneiden

Zeilen 4-7: Bestimmung der Koordinaten des Schnittpunkts sowie der Größe des eingeschlossenen Winkels

4	g(-15/2) $\rightarrow \left(\frac{11}{2}, -\frac{71}{2}, -21\right)$
5	Winkel[(-1,3,2),Kreuzprodukt[(-0.5,1,-0.5),(-0.5,1.5,0)]] $\rightarrow \frac{1}{2}\pi + \arcsin\left(\frac{\sqrt{154}}{77}\right)$
6	$5 / π 180 $\approx$ **99.27**
7	$6 - 90 $\approx$ **9.27**

Lösungsvariante

Ausgehend von einem Normalenvektor $\vec{n}$ von E lässt sich ein möglicher Schnittpunkt von E und g auch durch Lösen der Gleichung $\vec{n} \circ \left(\vec{X}_g - \vec{A}\right) = 0$ bestimmen, wobei A ein Punkt der Ebene E ist und X_g den allgemeinen Geradenpunkt von g bezeichnet.

Liefert das CAS wie in diesem Fall eine eindeutige Lösung für die Variable (Zeile 4), so schneiden sich E und g in einem Punkt. (Hinweis: Läge g in E, dann würde das CAS $\{\rho = \rho\}$ ausgeben.)

3	n:=Kreuzprodukt[(-0.5,1,-0.5), (-0.5,1.5,0)] $\rightarrow \mathbf{n} := \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$
4	Löse[Skalarprodukt[n, g(ρ)-(0.5,2.5,2)]=0] $\rightarrow \left\{\rho = -\frac{15}{2}\right\}$

Arbeitsauftrag 7

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Ebene $E: \vec{X} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, und die Gerade $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \rho \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\rho \in \mathbb{R}$, gegeben. Zeigen Sie, dass g parallel zu E, jedoch nicht in E verläuft. Bestimmen Sie den Abstand von E und g.

Zielsetzung Übung (Untersuchung der gegenseitigen Lage einer Geraden und einer Ebene)

Voraussetzung Ebenengleichung in Parameter- und Koordinatenform, Hesse'sche Normalenform, Gleichungssysteme

Hinweise zur Bearbeitung

Zeile 3: Nachweis der Lagebeziehung

Zeilen 4-6: Bestimmung des Abstands mithilfe der Hesse'schen Normalenform

1	e(λ,μ):=(-1,3,0)+λ*(-1,2,1)+μ*(-1,2,0) $\rightarrow \mathbf{e(\lambda,\mu) := (-\lambda-\mu-1, 2\lambda+2\mu+3, \lambda)}$
2	g(ρ):=(0,0,0)+ρ*(-1,2,3) $\rightarrow \mathbf{g(\rho) := (-\rho, 2\rho, 3\rho)}$
3	Löse[e(λ, μ)=g(ρ),{λ,μ,ρ}] $\rightarrow \{\}$
4	n:=Kreuzprodukt[(-1,2,1),(-1,2,0)] $\rightarrow \mathbf{n} := \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

5	Skalarprodukt[Einheitsvektor[n], g(ρ)-(-1,3,0)] $\rightarrow\ -\frac{(2\rho-3)}{\sqrt{5}}-2\cdot\frac{-\rho+1}{\sqrt{5}}$
6	Vereinfache[$5] $\rightarrow\ \frac{\sqrt{5}}{5}$

Arbeitsauftrag 8

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Ebenen $E:\vec{X}=\begin{pmatrix}0{,}5\\2{,}5\\2\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}-0{,}5\\1\\-0{,}5\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}-0{,}5\\1{,}5\\0\end{pmatrix}$, $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$, und $F:\vec{X}=\begin{pmatrix}5\\0\\2\end{pmatrix}+\sigma\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}+\tau\cdot\begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix}$, $\sigma,\tau\in\mathbb{R}$, gegeben. Zeigen Sie, dass sich E und F schneiden, und bestimmen Sie eine Gleichung der Schnittgeraden.

Zielsetzung Übung (Untersuchung der gegenseitigen Lage zweier Ebenen)

Voraussetzung Ebenengleichung in Parameterform, Gleichungssysteme

Hinweise zur Bearbeitung

Zeile 3: Nachweis der Lagebeziehung

Zeile 4: Bestimmung des allgemeinen Geradenpunkts der Schnittgeraden

1	E(λ,μ):=(0.5,2.5,2)+λ*(-0.5,1,-0.5)+μ*(-0.5,1.5,0) $\rightarrow\ E(\lambda,\mu):=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\lambda-\frac{1}{2}\mu,\frac{5}{2}+\lambda+\frac{3}{2}\mu,2-\frac{1}{2}\lambda\right)$
2	F(σ,τ):=(5,0,2)+σ*(1,1,2)+τ*(-1,3,1) $\rightarrow\ F(\sigma,\tau):=(\sigma-\tau+5,\sigma+3\tau,2\sigma+\tau+2)$
3	Löse[E(λ,μ)=F(σ,τ)] $\rightarrow\ \left\{\left\{\lambda=-4\tau+22,\mu=5\tau-20,\sigma=\frac{1}{2}\tau-\frac{11}{2}\right\}\right\}$
4	F(1 / 2 τ - 11 / 2,τ) $\rightarrow\ \left(-\frac{1}{2}\tau-\frac{1}{2},\frac{7}{2}\tau-\frac{11}{2},2\tau-9\right)$

Lösungsvariante

Ausgehend von einem Normalenvektor $\vec{n}$ von E lässt sich der allgemeine Geradenpunkt der Schnittgeraden von E und F auch durch Lösen der Gleichung $\vec{n}\circ\left(\vec{X}_F-\vec{A}\right)=0$ bestimmen, wobei A ein Punkt der Ebene E ist und X_F den allgemeinen Ebenenpunkt von F bezeichnet.

3	n:=Kreuzprodukt[(-0.5,1,-0.5), (-0.5,1.5,0)] $\rightarrow\ n:=\begin{pmatrix}\frac{3}{4}\\\frac{1}{4}\\-\frac{1}{4}\end{pmatrix}$
4	Löse[Skalarprodukt[n, F(σ,τ)-(0.5,2.5,2)]=0,τ] $\rightarrow\ \{\tau=2\sigma+11\}$
5	Ersetze[F(σ, τ),$4] $\rightarrow\ (-\sigma-6,7\sigma+33,4\sigma+13)$

Arbeitsauftrag 9

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Ebenen $E: \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1{,}5 \end{pmatrix}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, und $F: \vec{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1{,}5 \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} 4 \\ 0{,}5 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\sigma, \tau \in \mathbb{R}$, gegeben. Zeigen Sie, dass E und F zueinander parallel, jedoch nicht identisch sind, und bestimmen Sie den Abstand der beiden Ebenen.

Zielsetzung Übung (Untersuchung der gegenseitigen Lage zweier Ebenen)

Voraussetzung Ebenengleichung in Parameterform, Hesse'sche Normalenform, Gleichungssysteme

Hinweise zur Bearbeitung

Zeile 3: Nachweis der Lagebeziehung

Zeilen 4, 5: Abstandsbestimmung mithilfe der Hesse'schen Normalenform der Ebene E

1	E(λ,μ):=(1,-4,2)+λ*(4,0,-3)+μ*(-2,3,1.5) √ $E(\lambda,\mu) := (1,-4,2) + \lambda\ (4,0,-3) + \mu\ (-2,3,1.5)$
2	F(σ,τ):=(3,-2,0)+σ*(2,-2,-1.5)+τ*(4,0.5,-3) √ $F(\sigma,\tau) := (3,-2,0) + \sigma\ (2,-2,-1.5) + \tau\ (4,0.5,-3)$
3	Löse[E(λ,μ)=F(σ,τ)] → {}
4	n:=Kreuzprodukt[(4,0,-3), (-2,3,1.5)] → $n := \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix}$
5	|Skalarprodukt[Einheitsvektor[n], (3,-2,0)-(1,-4,2)]| → $\frac{2}{5}$

Die Abiturprüfungsaufgaben sowie die zugelassenen Lehrbücher bieten zahlreiche weitere Aufgaben zur Untersuchung von Lagebeziehungen und unterstützen durch vielfältige Sachzusammenhänge insbesondere auch die Weiterentwicklung der allgemeinen mathematischen Kompetenz „Modellieren".

3.3.3 Ausblick: CAS und 3D

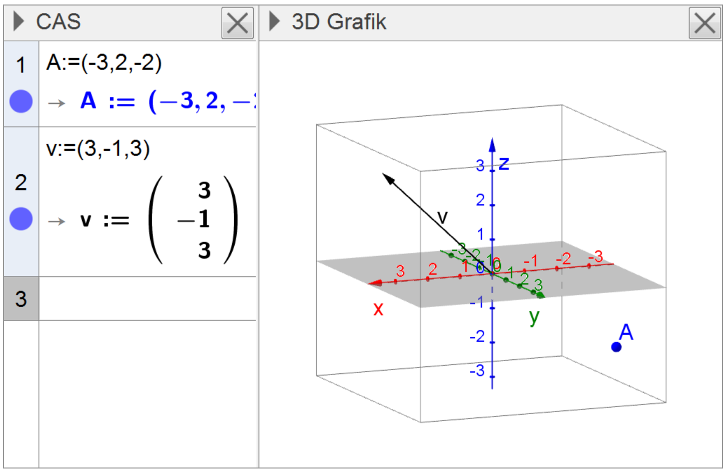
Foto: Christian Ratzka

Nach derzeitigem Stand sind graphische Module eines CAS, welche Geometrie im dreidimensionalen Raum betreffen, nicht in Prüfungen zugelassen. Im Rahmen des Unterrichts kann die Anschauung und die Entwicklung des räumlichen Vorstellungsvermögens durch solche „3D-Geometrie" jedoch äußerst gewinnbringend unterstützt werden. Im Folgenden wird deshalb ein kurzer Überblick über das 3D-Geometriemodul der hier verwendeten Software gegeben.

Punkte und Vektoren

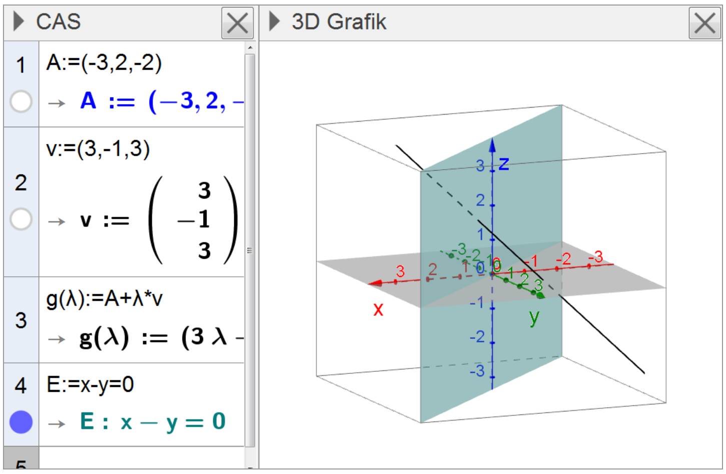
Eine einzeilige Matrix wird als Vektor interpretiert, wenn der Variablenbezeichner mit einem Kleinbuchstaben beginnt, andernfalls (Beginn mit einem Großbuchstaben) als Punkt (vgl. Kapitel 2.3.1). Dementsprechend erfolgen die Formatierungen bei der Ausgabe im CAS- bzw. Algebra-Fenster und die Zeichnung im 3D-Graphikfenster.

Punkte und Vektoren werden unmittelbar nach der Eingabe im 3D-Graphikfenster gezeichnet. Dabei werden Vektoren stets als Ortsvektoren des entsprechenden Punkts interpretiert und ausgehend vom Ursprung eingezeichnet.



Geraden und Ebenen

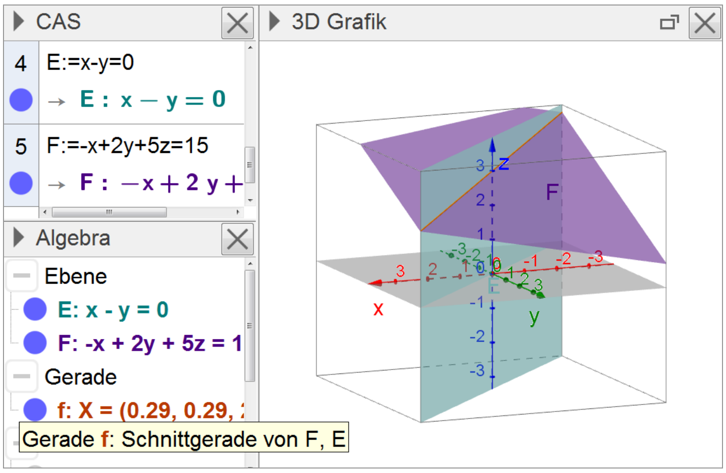
Auch Geraden und Ebenen werden unmittelbar nach der Eingabe im 3D-Graphikfenster dargestellt.



Lagebeziehungen von Ebenen

Lagebeziehungen können im 3D-Graphikfenster unmittelbar visualisiert werden.

Mithilfe des in der Werkzeugleiste zur Verfügung stehenden Geometriewerkzeugs „Schneide zwei Flächen" lässt sich mit wenigen Mausklicks (Anklicken der beiden Ebenen) die Schnittgerade der beiden Ebenen ermitteln, deren näherungsweise Gleichung unmittelbar im Algebra-Fenster angezeigt wird; im Beispiel: f: X = (0.29, 0.29, 0.29) + λ (5, 5, -1).

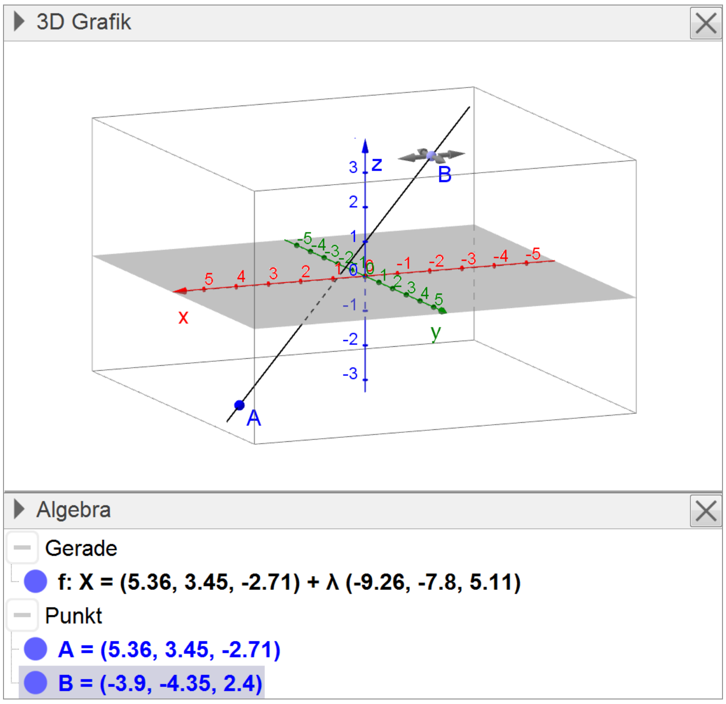


Dynamische Geometrie in 3D

Aus der ebenen Geometrie sind dynamische Geometriesysteme als Hilfsmittel seit vielen Jahren vertraut. Insbesondere ist hinreichend bekannt, dass sich damit geometrische Objekte graphisch erzeugen und dynamisch verändern lassen.

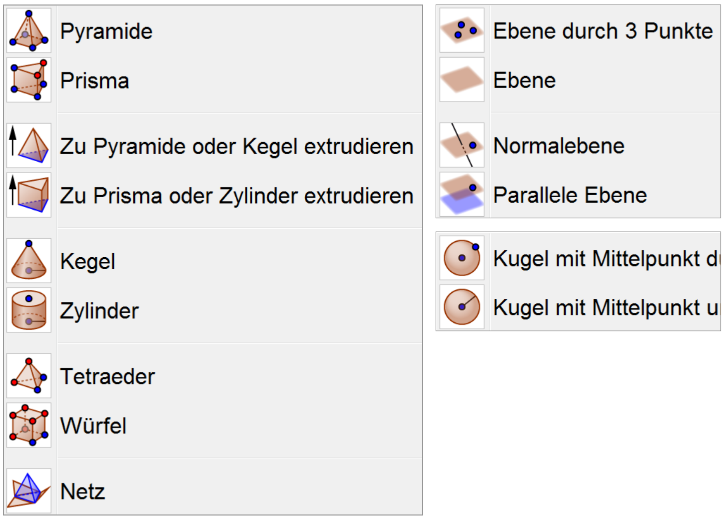
Dies ist auch in der 3D-Darstellung möglich – so können auch hier z. B. Geraden eingezeichnet und deren Schnittpunkte bestimmt oder Punkte auf Geraden gesetzt und anschließend verschoben werden. Zu Objekten, die direkt im 3D-Fenster erzeugt werden, errechnet das System unmittelbar deren analytische Darstellungen (ggf. näherungsweise) und zeigt diese an.

Exemplarisch ist nebenstehend eine direkt im 3D-Fenster erzeugte Gerade AB sichtbar – das Pfeilkreuz beim Punkt B deutet an, dass nun mit der Maus der Punkt B in einer Ebene parallel zur xy-Ebene verschoben werden kann.



Erzeugen geometrischer Objekte

Wie aus der 2D-Geometrie vertraut stehen auch in drei Dimensionen diverse Werkzeuge zur Verfügung, um geometrische Objekte zu erzeugen, so z. B. Ebenen, Prismen, Kegel, Zylinder, Kugeln etc.

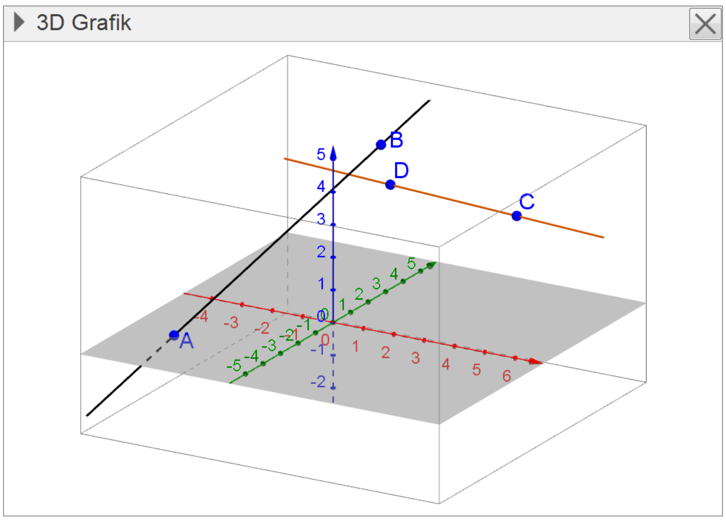


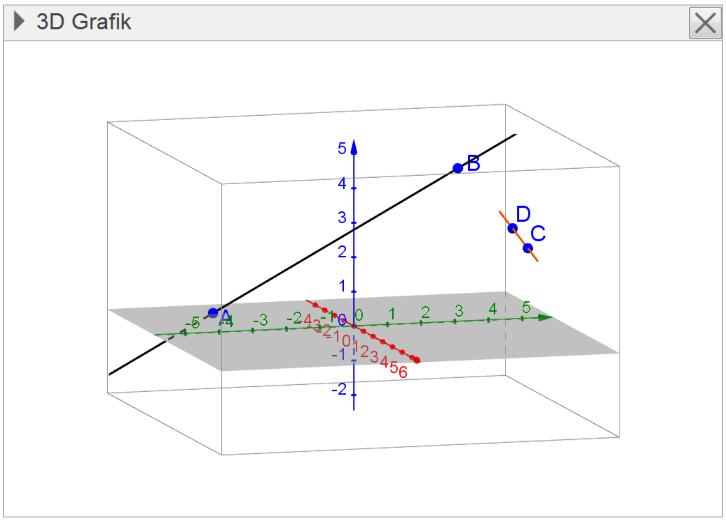
Räumliche Darstellung

Die Ansicht des 3D-Fensters kann komfortabel mithilfe der Maus in alle Richtungen rotiert werden. Auf diese Weise ist es möglich, die Lage verschiedener Objekte zueinander zu erforschen bzw. aussagekräftig darzustellen.

Nebenstehend wird dies anhand der Lage zueinander windschiefer Geraden gezeigt, zunächst in der Standardansicht, dann in einer gedrehten Ansicht.

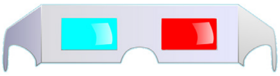
Das die Anschauung enorm unterstützende Potential der 3D-Graphik entfaltet sich jedoch erst durch ein dynamisches Drehen der Ansicht, welches hier im Papierdruck selbstverständlich nicht adäquat dargestellt werden kann.



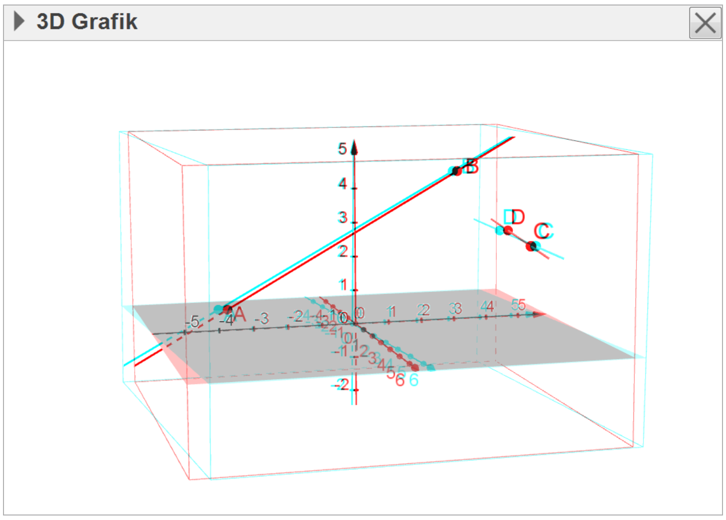


Rot-cyan-Ansicht

Durch Auswahl einer entsprechenden Option kann das 3D-Fenster in ein Rot-cyan-Bild verändert werden. Betrachtet man dieses mithilfe einer handelsüblichen Rot-cyan-Brille, so entsteht vor dem Auge des Betrachters eine verblüffend plastische dreidimensionale Darstellung der Situation.



Dies kann im Unterricht gewinnbringend genutzt werden – zur Unterstützung der Anschauung wie auch zur Steigerung der Motivation.

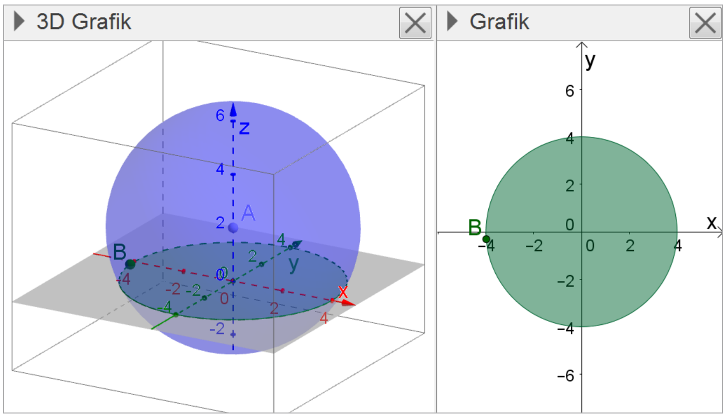


Verbindung von 2D-Fenster und 3D-Fenster

Die xy-Ebene des 2D-Fensters ist dynamisch mit der xy-Ebene des 3D-Fensters verknüpft.

Alle Objekte, die in der xy-Ebene liegen, sind auch im 2D-Fenster zu erkennen (insbesondere Schnittfiguren, wenn man diese mithilfe des Schnittwerkzeuges erzeugt).

Rechts ist exemplarisch eine Kugel (mit Mittelpunkt (0|0|2)) dargestellt, die die xy-Ebene schneidet. Im 2D-Fenster ist die entsprechende Schnittfigur sichtbar. Auch der Punkt B, der zum Erzeugen der Kugel verwendet wurde und in der xy-Ebene liegt, ist zu erkennen.



Es sei an dieser Stelle abschließend darauf hingewiesen, dass Werkzeuge zur Konstruktion und zum Messen auch in der dreidimensionalen Darstellung zur Verfügung stehen. Es ist lohnenswert, sich damit vertraut zu machen, denn diese Werkzeuge lassen sich hervorragend einsetzen, um die Begriffsbildung zu unterstützen und Lösungsverfahren und -wege zu veranschaulichen bzw. zu entdecken.

4 Lösungsdokumentation

Wesentliche Aspekte rund um den Einsatz von CAS im Rahmen mündlicher und schriftlicher Leistungsnachweise sind bereits im Kapitel 3 der ISB-Handreichung „Computeralgebrasysteme (CAS) im Mathematikunterricht des Gymnasiums, Jahrgangsstufe 10“ dargestellt (vgl. HR 10, S. 78 ff.). Im Folgenden sollen daraus zunächst zentrale Aussagen für die Dokumentation von Schülerlösungen bei schriftlichen Leistungsnachweisen zitiert und eingeordnet werden, ehe darauf basierend exemplarisch anhand einer Abiturprüfungsaufgabe aufgezeigt wird, wie die Dokumentation der Lösung im Rahmen der Bearbeitung eines schriftlichen Leistungsnachweises durch die Schülerinnen und Schüler erfolgen kann.

4.1 Allgemeines zur Dokumentation von Lösungen bei schriftlichen Leistungsnachweisen

„Auch wenn bei einem schriftlichen Leistungsnachweis ein CAS […] verwendet werden darf, müssen alle Lösungen auf Papier dokumentiert werden. Was dabei von den Schülerinnen und Schülern erwartet wird, muss rechtzeitig vor der Durchführung des ersten derartigen Leistungsnachweises im Unterricht geklärt werden.

Exakte, allgemeingültige Regeln dazu, wie ein bestimmtes CAS-Verfahren zu dokumentieren ist, lassen sich zwar nicht festlegen, es können jedoch grundlegende Anforderungen an die Dokumentation einer Lösung genannt werden.

- *Die Dokumentation einer Lösung muss diese nachvollziehbar darstellen. Insbesondere muss deutlich werden, bei welchen Lösungsschritten und in welcher Weise […] [das CAS] verwendet wurde.*
- *Die Dokumentation einer Lösung beschreibt mathematische Vorgehensweisen und beschränkt sich dabei nicht auf die Wiedergabe produktspezifischer Rechnersprache.*
- *Die Dokumentation einer Lösung zu einer bestimmten Aufgabe sollte nicht aufwändiger oder umfangreicher sein als die Darstellung einer Lösung zu dieser Aufgabe, die ohne den Einsatz eines CAS […] erarbeitet werden müsste.“*

(Handreichung 10, Seite 79)

Hierzu ist es sinnvoll, dass die Schülerinnen und Schüler zwar im Laufe der Arbeit mit dem CAS im Unterricht einen mathematischen Ansatz mit dem dazu jeweils hilfreichen Befehl verknüpfen, aber in der Lösungsdokumentation nur den mathematischen Ansatz bzw. die mathematische Fachsprache verwenden. So finden sich in Schülerdokumentationen häufig symbolische Darstellungen wie „ $\xrightarrow{\text{CAS}}$ “, um anzuzeigen, dass das Werkzeug verwendet wurde. Der Informationsgehalt dieser Dokumentation ist jedoch relativ gering, denn es wird nur vermittelt, dass das Werkzeug verwendet wurde, nicht aber, wie. Insofern ist es nicht notwendig, dies überhaupt zu dokumentieren, wenn klar ist, dass ein CAS als Hilfsmittel zugelassen ist. Bei Berechnungen mit einem wissenschaftlichen Taschenrechner (WTR) erfolgt schließlich auch keine entsprechende Kenntlichmachung, etwa in der Form $\cos(\alpha) = 0{,}5 \xrightarrow{\text{WTR}} \alpha = 60°$.

4.2 Exemplarische Dokumentation der Lösung einer Abiturprüfungsaufgabe (CAS)

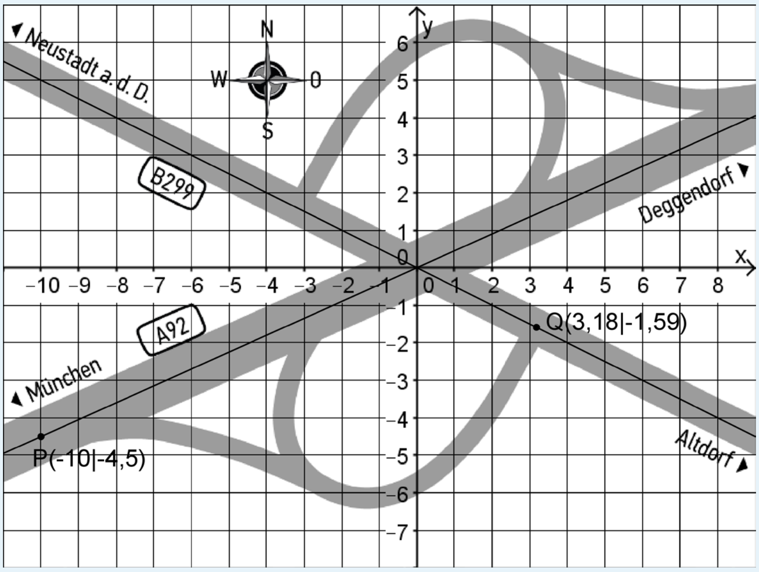
Im Folgenden werden exemplarisch Dokumentationen zur schriftlichen Abiturprüfung 2014, Prüfungsteil B (CAS), Analysis, Aufgabengruppe 1, präsentiert und gegebenenfalls kommentiert. Jeder Schülerlösung werden die entsprechenden Ein- und Ausgaben des CAS gegenübergestellt.

→ Aufgabenstellung

Abiturprüfung 2014, Mathematik, Analysis, Aufgabengruppe 1

BE **Prüfungsteil B (CAS)**

Die Abbildung zeigt schematisch die Anschlussstelle Altdorf bei Landshut, die die Autobahn A92 mit der Bundesstraße B299 verbindet. Im eingezeichneten Koordinatensystem entspricht eine Längeneinheit 20 m, d. h. die Abbildung stellt einen Bereich dar, der in West-Ost-Richtung eine Länge von 400 m hat. Im Folgenden soll die Breite der Straßen unberücksichtigt bleiben. Bei Verwendung des eingezeichneten Koordinatensystems kann die A92 im betrachteten Bereich modellhaft durch die Gerade mit der Gleichung $y = 0{,}45x$ beschrieben werden, die B299 durch die Gerade mit der Gleichung $y = -0{,}5x$.



3 **a)** Bestimmen Sie auf der Grundlage des Modells die Größe des Winkels, unter dem sich die A92 und die B299 kreuzen.

Fährt man aus München kommend von der A92 auf die B299 ab, so befährt man die südliche Ausfahrt, die im Modell im Punkt P anfängt und im Punkt Q endet. Der Verlauf dieser Ausfahrt soll im Modell durch eine ganzrationale Funktion s dritten Grades beschrieben werden, deren Graph durch die Punkte P und Q verläuft. Das Modell soll dabei in den Punkten P und Q den Forderungen gerecht werden, dass die Ausfahrt ohne Knick aus der A92 herausführt beziehungsweise senkrecht auf die B299 stößt.

6 **b)** Stellen Sie ein Gleichungssystem auf, mit dem sich die Koeffizienten des Funktionsterms von s ermitteln lassen. Geben Sie für jede Gleichung an, welche Forderung an den Straßenverlauf damit berücksichtigt wird.

Im Folgenden soll für die Funktion s der Term

$$s(x) = 0{,}01156x^3 + 0{,}1771x^2 + 0{,}5230x - 5{,}416$$

verwendet werden.

2 **c)** Ein Pkw befährt von der A92 kommend die südliche Ausfahrt. Bestimmen Sie im Modell die Koordinaten des Punkts, in dem die Rechtskurve der Ausfahrt in eine Linkskurve übergeht.

2 **d)** Zeichnen Sie den Graphen der Funktion s zwischen den Punkten P und Q in die Abbildung ein. Berücksichtigen Sie insbesondere den Wendepunkt des Graphen und seinen Schnittpunkt mit der y-Achse.

2 **e)** Untersuchen Sie auf der Grundlage des Modells rechnerisch, ob es auf der südlichen Ausfahrt einen Punkt gibt, in dem die Fahrtrichtung parallel zur B299 ist.

6 **f)** Berechnen Sie auf der Grundlage des Modells den Inhalt des Flächenstücks in Quadratmetern, das von der A92, der B299 und der südlichen Ausfahrt eingeschlossen wird.

(Fortsetzung nächste Seite)

Die Lage eines geplanten Mobilfunk-Sendemasts wird im Modell durch den Punkt $T(6\,|\,-8)$ beschrieben.

3 **g)** Begründen Sie, dass der Term $\sqrt{(x-6)^2+(s(x)+8)^2}$ den Abstand des Punkts T von einem Punkt des Graphen von s angibt.

4 **h)** Einer der Punkte der südlichen Ausfahrt hat vom Mobilfunk-Sendemast den geringsten Abstand. Berechnen Sie diesen Abstand auf der Grundlage des Modells.

5 **i)** Ist ein Kurvenstück Graph einer in $[a;b]$ mit $a,b \in \mathbb{R}$ definierten Funktion f, so gilt für die Länge d dieses Kurvenstücks $d=\int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$.

Da die B299 unter der A92 hindurchführt, liegt der Endpunkt der südlichen Ausfahrt in der Realität 4,7 Meter tiefer als ihr Anfangspunkt. Bestimmen Sie mithilfe des Modells das mittlere Gefälle der südlichen Ausfahrt in Prozent.

3 **j)** Die nördliche Ausfahrt soll im Modell durch eine Funktion t beschrieben werden, deren Graph aus dem Graphen der Funktion s durch Spiegelung am Koordinatenursprung hervorgeht, d. h. durch Spiegelung an der x- und an der y-Achse. Bestimmen Sie den Term von t.

4 **k)** Ein Pkw fährt mit einer konstanten Geschwindigkeit von $120\,\frac{km}{h}$ auf der A92. Bestimmen Sie auf der Grundlage des Modells die Zeit in Sekunden, die der Pkw auf dem abgebildeten Abschnitt der A92 unterwegs ist.

40

→ Lösungsdokumentation

3 **a)** Bestimmen Sie auf der Grundlage des Modells die Größe des Winkels, unter dem sich die A92 und die B299 kreuzen.

Lösungsidee 1: „Vektoren“

$\vec{p} := \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} -10 \\ -4{,}5 \end{pmatrix}$

$\vec{q} := \overrightarrow{OQ} = \begin{pmatrix} 3{,}18 \\ -1{,}59 \end{pmatrix}$

$\cos\alpha = \dfrac{\vec{p}\circ\vec{q}}{|\vec{p}|\cdot|\vec{q}|} = \dfrac{-31}{\sqrt{2405}}$

$\Rightarrow \alpha \approx 129{,}2°$

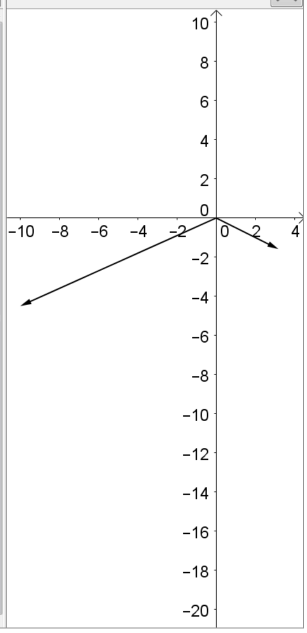
$\Rightarrow$ Größe des ges. Winkels:

$180° - \alpha \approx \underline{\underline{50{,}8°}}$

CAS

1	p := (-10, -4.5)
	$\rightarrow$ **p :=** $\begin{pmatrix} -10 \\ -\frac{9}{2} \end{pmatrix}$
2	q := (3.18, -1.59)
	$\rightarrow$ **q :=** $\begin{pmatrix} \frac{159}{50} \\ -\frac{159}{100} \end{pmatrix}$
3	Skalarprodukt[p,q] / ((abs(p) abs(q)))
	$\rightarrow -\frac{31}{\sqrt{2405}}$
4	arccos($3)
	≈ **2.255**
5	$4 (180 / π)
	≈ **129.207**
6	180 - $5
	≈ **50.793**

Grafik



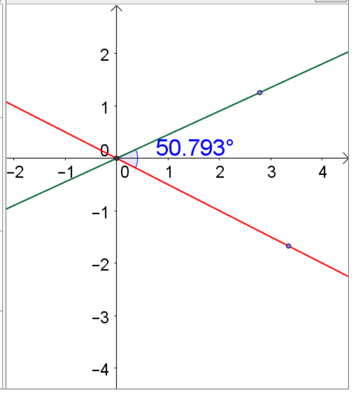
Lösungsidee 2: „Winkelmessung“

Zeichnen der beiden Geraden mit den Gleichungen $y = 0{,}45x$ und $y = -0{,}5x$.
Messen des von ihnen eingeschlossenen spitzen Winkels α liefert $\underline{\underline{\alpha \approx 50{,}8°}}$.

CAS

1	f(x):=0.45x → $f(x) := \frac{9}{20}x$
2	g(x):=-0.5*x → $g(x) := -\frac{1}{2}x$
3	Winkel[f(x), g(x)] ≈ **0.887**
4	$3 (180 / π) ≈ **50.793**

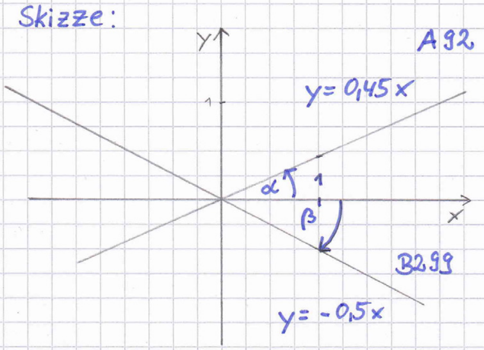
Grafik



Anmerkung: Da in der Aufgabenstellung der Operator „bestimme“ verwendet wird, ist diese Lösung als vollständig zu betrachten. Das Messen des eingeschlossenen Winkels kann dabei mithilfe der CAS-Eingabezeile (Zeilen 3, 4) oder im Graphikfenster per entsprechendem Werkzeug erfolgen.

Lösungsidee 3: „Steigung“

Skizze:



$\tan\alpha = 0{,}45 \Rightarrow \alpha \approx 0{,}423$

$\tan\beta = -0{,}5 \Rightarrow \beta \approx -0{,}464$

Gesuchter Winkel: $\alpha - \beta \approx 0{,}887$
$\underline{\underline{\approx 50{,}8°}}$

1	arctan(0.45) ≈ **0.423**
2	arctan(-0.5) ≈ **−0.464**
3	$1 - $2 ≈ **0.887**
4	$3 (180 / π) ≈ **50.793**

6	**b)** Stellen Sie ein Gleichungssystem auf, mit dem sich die Koeffizienten des Funktionsterms von s ermitteln lassen. Geben Sie für jede Gleichung an, welche Forderung an den Straßenverlauf damit berücksichtigt wird.

Zur Bearbeitung von Aufgabe b ist das CAS nicht erforderlich

2	**c)** Ein Pkw befährt von der A92 kommend die südliche Ausfahrt. Bestimmen Sie im Modell die Koordinaten des Punkts, in dem die Rechtskurve der Ausfahrt in eine Linkskurve übergeht.

Lösungsidee 1: „Ableitung“

Gesucht ist der Wendepunkt $W(x_W \mid y_W)$ des Graphen von s.
$s''(x_W) = 0$ gilt für
$\underline{x_W} = -\frac{8855}{1734} \underline{\approx -5{,}1}$;
$\underline{y_W} = s(x_W) \underline{\approx -5{,}0}$.

1 s(x):=0.01156x^3+0.1771x^2+0.5230x-5.416
✓ $s(x) := 0.01156\,x^3 + 0.1771\,x^2 + 0.523\,x - 5.416$

2 Löse[s''(x)=0]
→ $\left\{x = -\frac{8855}{1734}\right\}$

3 $2
≈ $\{x = -5.10669\}$

4 s(-8855 / 1734)
≈ -5.00782

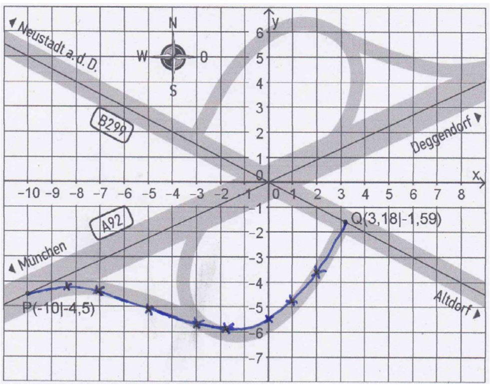
Lösungsidee 2: „Werkzeug Wendepunkt“

Der gesuchte Punkt ist der Wendepunkt W des Graphen von s. Seine Koordinaten sind etwa $\underline{(-5{,}107 \mid -5{,}008)}$.

1 s(x):=0.01156x^3+0.1771x^2+0.5230x-5.416
✓ $s(x) := 0.01156\,x^3 + 0.1771\,x^2 + 0.523\,x - 5.416$

2 Wendepunkt[s(x)]
≈ $\{(-5.10669, -5.00782)\}$

2	**d)** Zeichnen Sie den Graphen der Funktion s zwischen den Punkten P und Q in die Abbildung ein. Berücksichtigen Sie insbesondere den Wendepunkt des Graphen und seinen Schnittpunkt mit der y-Achse.



Anmerkung: Neben der Bestimmung der in der Aufgabenstellung verlangten Koordinaten besonderer Punkte des Graphen kann eine geeignete Wertetabelle erstellt werden; auch eine Hinterlegung des Graphen mit einem Koordinatengitter kann zur Erstellung der Zeichnung hilfreich sein.

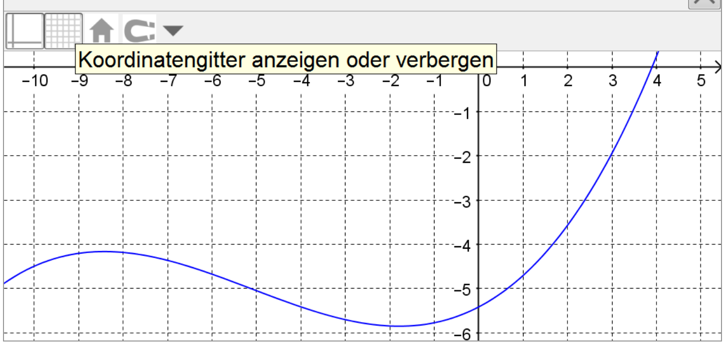
CAS

3 Extremum[s(x)]
≈ $\{(-8.42, -4.16), (-1.79, -5.85)\}$

4 s(0)
≈ -5.42

5 s({-7,-5,-3,-1,1,2})
≈ $\{-4.36, -5.05, -5.7, -5.77, -4.7, -3.57\}$

Grafik



2	**e)** Untersuchen Sie auf der Grundlage des Modells rechnerisch, ob es auf der südlichen Ausfahrt einen Punkt gibt, in dem die Fahrtrichtung parallel zur B299 ist.

Da die Gleichung $s'(x) = -0{,}5$ keine Lösung besitzt, gibt es diesen Punkt nicht.

6	Löse[s'(x)=-0.5]
	→ {}

6	**f)** Berechnen Sie auf der Grundlage des Modells den Inhalt des Flächenstücks in Quadratmetern, das von der A92, der B299 und der südlichen Ausfahrt eingeschlossen wird.

$$F := \int_{-10}^{0} (0{,}45x - s(x))\,dx + \int_{0}^{3{,}18} (-0{,}5x - s(x))\,dx$$

$$\approx 37{,}53$$

gesuchter Flächeninhalt:

$$F \cdot 20m \cdot 20m \approx \underline{\underline{15013\,m^2}}$$

7	IntegralZwischen[0.45x, s(x), -10, 0]
	→ $\frac{8303}{300}$
8	Integral[-0.5x-s(x), 0, 3.18]
	→ $\frac{6160308603771}{625000000000}$
9	$7 + $8
	≈ 37.53
10	($7 + $8) (400)
	≈ 15013.26

3	**g)** Begründen Sie, dass der Term $\sqrt{(x-6)^2 + (s(x)+8)^2}$ den Abstand des Punkts T von einem Punkt des Graphen von s angibt.

Zur Bearbeitung von Aufgabe g ist das CAS nicht erforderlich

4	**h)** Einer der Punkte der südlichen Ausfahrt hat vom Mobilfunk-Sendemast den geringsten Abstand. Berechnen Sie diesen Abstand auf der Grundlage des Modells.

$a(x) := \sqrt{(x-6)^2 + (s(x)+8)^2}$

$a'(x) = 0$ gilt nur für

$x = 1{,}546\ldots =: x_0$

Wegen $a''(x_0) \approx 0{,}7 > 0$

ist $(x_0 \mid a(x_0))$ Tiefpunkt

des Graphen von a.

Gesuchter Abstand:

$a(x_0) \cdot 20\,\text{m} \approx \underline{\underline{117{,}9\,\text{m}}}$

11	a(x):=sqrt((x-6)^2+(s(x)+8)^2)
	✓ $a(x) := \sqrt{(x-6)^2 + (s(x)+8)^2}$
12	Löse[a'(x)=0, x]
	→ $\{x = 1.55\}$
13	a''(1.54678197639)
	≈ **0.7**
14	a(1.54678197639)*20
	≈ **117.86**

5	**i)** Ist ein Kurvenstück Graph einer in $[a;b]$ mit $a,b \in \mathbb{R}$ definierten Funktion f, so gilt für die Länge d dieses Kurvenstücks $d = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$. Da die B299 unter der A92 hindurchführt, liegt der Endpunkt der südlichen Ausfahrt in der Realität 4,7 Meter tiefer als ihr Anfangspunkt. Bestimmen Sie mithilfe des Modells das mittlere Gefälle der südlichen Ausfahrt in Prozent.

Länge der südl. Ausfahrt:

$\ell := 20\,\text{m} \cdot \int_{-10}^{3{,}18} \sqrt{1+(s'(x))^2}\,dx$

mittleres Gefälle:

$\frac{4{,}7\,\text{m}}{\ell} \approx 0{,}015 = \underline{\underline{1{,}5\,\%}}$

15	Integral[sqrt(1+s'(x)^2), -10, 3.18]
	✓ $\int_{-10}^{3.18} \sqrt{1+s'(x)^2}\,dx$
16	$15
	≈ **15.421**
17	4.7 / ($16 (20))
	≈ **0.015**

3	**j)** Die nördliche Ausfahrt soll im Modell durch eine Funktion t beschrieben werden, deren Graph aus dem Graphen der Funktion s durch Spiegelung am Koordinatenursprung hervorgeht, d. h. durch Spiegelung an der x- und an der y-Achse. Bestimmen Sie den Term von t.

Es gilt $t(x) = -s(-x)$, also

$\underline{\underline{t(x) = 0{,}01156\,x^3 - 0{,}1771\,x^2}}$

$\underline{\underline{+\,0{,}523\,x + 5{,}416}}$

18	t(x):=-s(-x)
	→ $t(x) := \frac{289}{25000}x^3 - \frac{1771}{10000}x^2 + \frac{523}{1000}x + \frac{677}{125}$
19	t(x)
	≈ $0.01156\,x^3 - 0.1771\,x^2 + 0.523\,x + 5.416$

4	**k)** Ein Pkw fährt mit einer konstanten Geschwindigkeit von $120\frac{\text{km}}{\text{h}}$ auf der A92. Bestimmen Sie auf der Grundlage des Modells die Zeit in Sekunden, die der Pkw auf dem abgebildeten Abschnitt der A92 unterwegs ist.

$v := 120\,\frac{km}{h} = 120 \cdot \frac{1000\,m}{3600\,s} = \frac{100}{3}\,\frac{m}{s}$

Fahrtstrecke:

$s := \sqrt{(20\cdot 20)^2 + (9\cdot 20)^2}\ m$

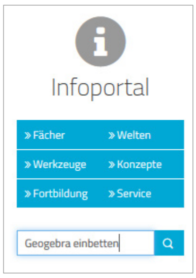
Fahrzeit: $\frac{s}{v} \approx \underline{\underline{13{,}2\ s}}$

20	v:=120*1000/3600
	$\rightarrow\ \mathbf{v := \frac{100}{3}}$
21	strecke := sqrt((20*20)^2+(9*20)^2)
	$\checkmark\ \mathbf{strecke\ := \sqrt{(20\cdot 20)^2 + (9\cdot 20)^2}}$
22	strecke/v
	$\rightarrow\ \mathbf{\frac{3}{5}\sqrt{481}}$
23	$22
	$\approx\ \mathbf{13.15903}$

5 Integration in mebis

Das Bayerische Staatsministerium für Bildung und Kultus, Wissenschaft und Kunst hat zur Förderung des Einsatzes von digitalen Medien im Unterricht das Online-Angebot „mebis – Landesmedienzentrum Bayern“ etabliert (*https://www.mebis.bayern.de/*).

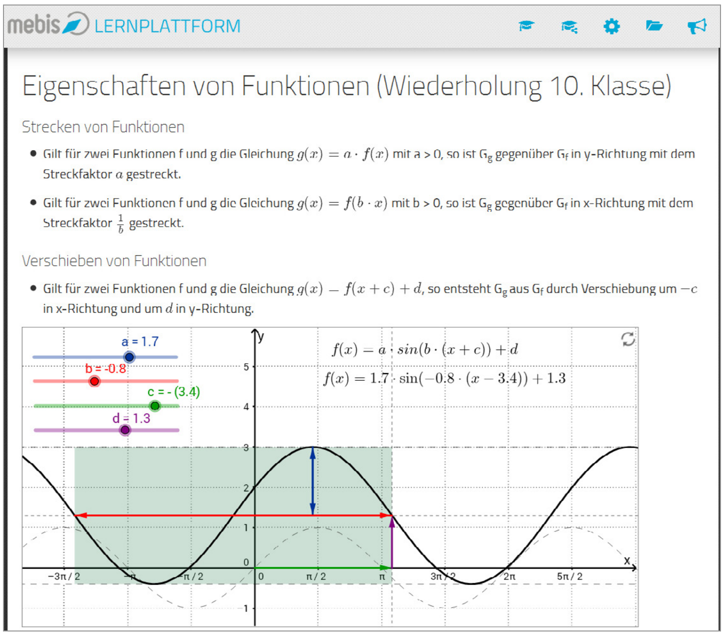
Dabei dient die in mebis integrierte **mebis-Lernplattform** Lehrkräften zur Gestaltung von digital gestütztem Unterricht und zur Organisation von Lernvorgängen. Sie gewährleistet sichere Kommunikation, personalisiertes Feedback und ermöglicht den Einsatz einer Vielzahl an Materialien und vorgefertigten Modulen. Gerade der Lernplattform in mebis wohnt dabei ein großes Potential inne, z. B. im Hinblick auf Binnendifferenzierung, individuelles Lerntempo und Feedback. Zudem verspricht sie letztlich, insbesondere aufgrund wiederverwendbarer bzw. über teachSHARE (s. u.) bereitgestellter Lernumgebungen mit integrierten automatisierten Auswertungselementen, mittelfristig auch eine Arbeitsentlastung für die Lehrkräfte.



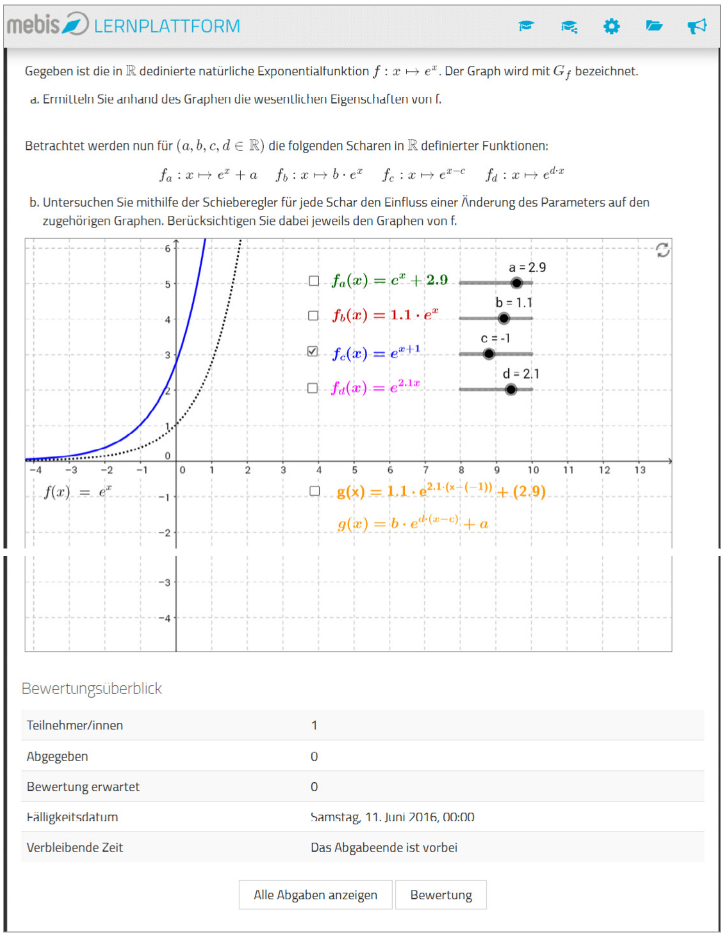
Dabei lässt sich auch das CAS „GeoGebra“ auf unterschiedliche Art und Weise unkompliziert direkt integrieren, ohne z. B. Dateien an die Schülerinnen und Schüler verschicken oder gar die Software auf den Schülerendgeräten installieren zu müssen.

Im Folgenden werden einige dieser Möglichkeiten kurz vorgestellt. Wie diese jeweils technisch umgesetzt werden können, erläutern einzelne Schritt-für-Schritt-Anleitungen, die im **mebis-Infoportal** zu finden sind. Hierzu können z. B. Suchbegriffe wie „GeoGebra“ auf der mebis-Startseite *https://www.mebis.bayern.de/* eingetragen werden.

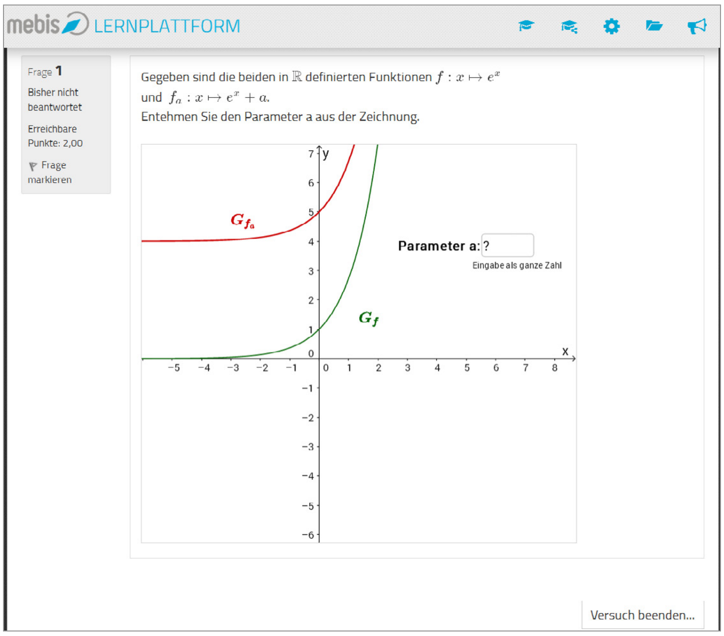
Die einfachste Möglichkeit, GeoGebra in mebis zu nutzen, ist die Einbindung einer GeoGebra-Datei in eine **„Textseite“** oder in ein **„Textfeld“** (vgl. nebenstehendes Beispiel).



Eine vorgefertigte GeoGebra-Datei kann ebenso innerhalb der **mebis-Aktivitäten „Aufgabe“** oder **„Workshop“** verwendet werden. In der nebenstehenden Abbildung ist der Arbeitsauftrag 4 des Kapitels 2.1.7 in mebis dargestellt. Die Schülerinnen und Schüler bearbeiten den Arbeitsauftrag dabei direkt in mebis. Je nach Aktivitätstyp kann zusätzlich zur Texteingabe auch eine bearbeitete GeoGebra-Datei innerhalb der mebis-Lernplattform mit abgegeben werden. Die eingereichten Lösungen können anschließend entweder nur von der Lehrkraft oder zusätzlich auch von den Mitschülerinnen und Mitschülern korrigiert werden. Des Weiteren ist es möglich, in der mebis-Aktivität „Aufgabe" gestufte Hilfen für die Bearbeitung anzubieten. Nach der Abgabe einer Lösung kann der Schülerin bzw. dem Schüler zusätzlich ein Lösungsvorschlag präsentiert werden.



Insbesondere nach der Bearbeitung eines Arbeitsauftrags kann z. B. mit kurzen Fragen im Rahmen der **mebis-Aktivität „Test“** der Lernfortschritt überprüft werden. Dabei ist es auch möglich, mithilfe von Zufallszahlen ganze Serien von Aufgaben bereitzustellen. Die Antwort wird von den Schülerinnen und Schülern jeweils in der GeoGebra-Datei eingegeben und mebis zur automatischen Auswertung übergeben. Die nebenstehende Abbildung zeigt eine mögliche Verständnisfrage zum obigen Auftrag.

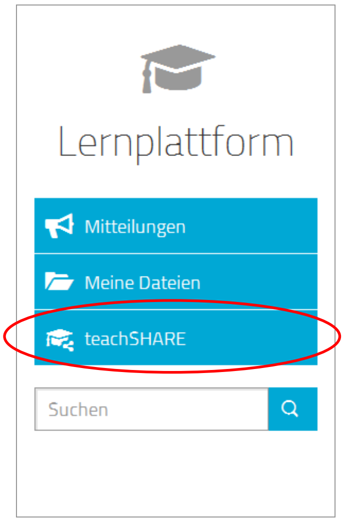


Die vorgestellten Möglichkeiten können darüber hinaus z. B. auch in der **mebis-Aktivität „Lektion“** verwendet werden, die die Erstellung kompetenzorientierter Lernumgebungen mit individuellen Lernpfaden (z. B. auf der Grundlage vorgeschalteter mebis-Tests) besonders gut unterstützt.

GeoGebra ermöglicht und begünstigt dabei u. a. die Veranschaulichung von Sachverhalten, die Integration von dynamischen Aufgabenstellungen sowie generell die Entwicklung von Fragestellungen.

Ausgearbeitete Bespiele für den Unterrichtseinsatz finden sich in der mebis-Lernplattform in der mebis-App **„teachSHARE“**, der Austauschplattform für Lehrkräfte. Damit haben Lehrkräfte die Möglichkeit, eigene Kurse innerhalb von mebis mit anderen Lehrkräften zu teilen sowie freigegebene Kurse zu suchen und unkompliziert in den eigenen Kursbereich zu kopieren.

Künftig werden sich in teachSHARE dabei auch einzelne passgenau zum neuen **LehrplanPLUS** entwickelte kompetenzorientierte Musterkurse befinden. Diese Musterkurse werden vom ISB sukzessive erarbeitet werden und von der jeweiligen Kompetenzerwartung im Fachlehrplan (*http://www.lehrplanplus.bayern.de*) aus verlinkt sein.



Anhang

A1 Schnelleinstiege – TI-Nspire CX CAS (Texas Instruments)

A1.1 Analysis Jgst. 11

Im Folgenden wird ein kurzer Überblick gegeben, welche Funktionen eines CAS sich insbesondere in der Analysis der Jahrgangsstufe 11 anbieten. Dieser Überblick ist nicht als vollständig zu verstehen, er vermittelt vielmehr einen kurzen Eindruck der Einsatzmöglichkeiten.

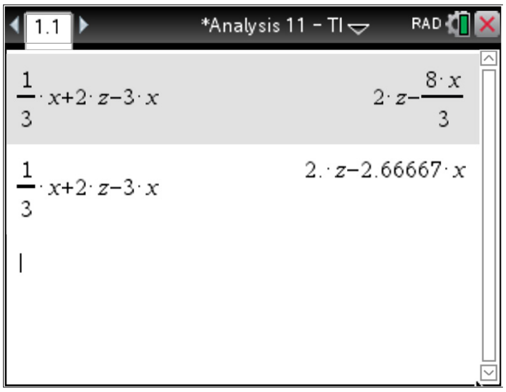
Um Probleme im Umgang mit bereits definierten Variablen zu vermeiden, bietet es sich bei dem vorliegenden CAS an, für eine neue Aufgabe ein neues „Problem“ zu öffnen (doc → 4: Einfügen → 1:Problem).

Exakte und näherungsweise Ausgabe von Eingaben bzw. Ergebnissen

Viele CAS bieten Einstellungen an, um Eingaben bzw. Ergebnisse exakt oder näherungsweise ausgeben zu lassen. Das vorliegend verwendete CAS verfügt dazu über entsprechende Eingabemöglichkeiten:

Zeile 1: Abschluss der Eingabe mit enter

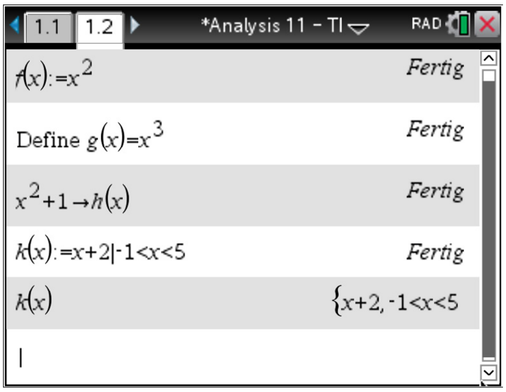
Zeile 2: Abschluss der Eingabe mit ctrl + enter



Funktion definieren

Beim hier verwendeten CAS werden ergänzend zur mathematisch üblichen Notation „:=“ (Zeile 1) Befehle wie z. B. „Define“ (Zeile 2) und „→“ (Zeile 3, aufzurufen über ctrl + var) angeboten. Dabei legt das CAS standardmäßig den maximal möglichen Definitionsbereich zugrunde, der bei Bedarf eingeschränkt werden kann (Zeile 4).

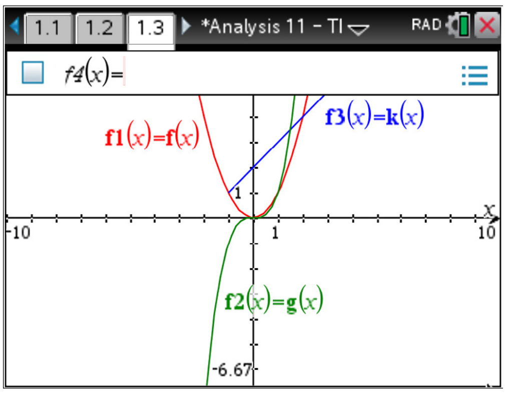
Hinweis: Das neue Eingabefenster „1.2“ wurde mit ctrl + doc + enter erzeugt.



Funktionsgraph zeichnen

Über ctrl + doc → „2: Graphs hinzufügen“ kann ein Graphikfenster erstellt werden. In der sich parallel öffnenden Eingabezeile können die gewünschten Funktionsterme eingegeben werden (Wiederaufruf der Eingabezeile mit tab).

Eigenschaften der graphischen Darstellung wie Strichdicke, Farbe, Anzeigeausschnitt, Achsenskalierung, Koordinatengitter etc. können per Menü bedarfsgerecht angepasst werden. Per Doppelklick auf die Maßzahl bei der Achsenskalierung kann das Fenster sehr schnell angepasst werden.



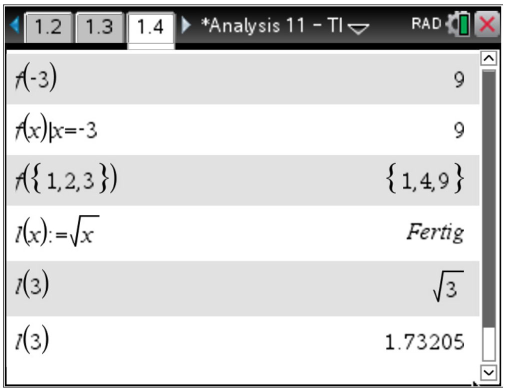
Hinweis: Beim hier verwendeten CAS wird der Funktionsgraph entgegen der üblichen Notation mit dem Funktionsnamen bezeichnet. Die Nummerierung erfolgt dabei entsprechend der Eingabe. Ein Doppelklick auf die Bezeichnung ermöglicht bei Bedarf eine Umbenennung.

Funktionswerte berechnen

Für die Berechnung von Funktionswerten bietet auch das hier verwendete CAS mehrere Optionen (Zeilen 1 bis 3).

Die Ausgabe eines Näherungswerts erfolgt über ctrl + enter (Zeile 6).

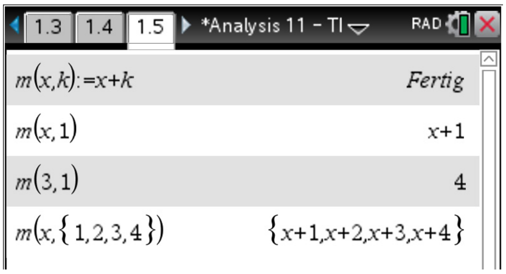
Hinweis: Der in einer vorangehenden Zeile befindliche mathematische Ausdruck kann nach Markierung durch enter direkt in die aktuelle Zeile kopiert werden.



Parameter im Funktionsterm

Enthält ein Funktionsterm einen Parameter, so empfiehlt es sich, bei Verwendung eines CAS den Parameter als zweite Variable festzulegen. Damit ist im weiteren Verlauf ein flexibler Zugriff auf Funktionsterme und -werte möglich.

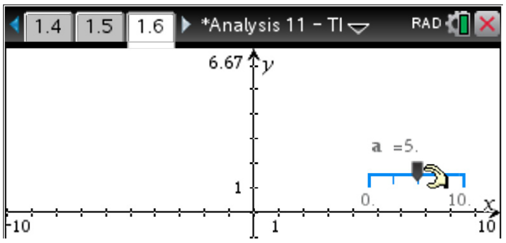
Zeile 4: Ausgabe mehrerer Funktionsterme der Schar

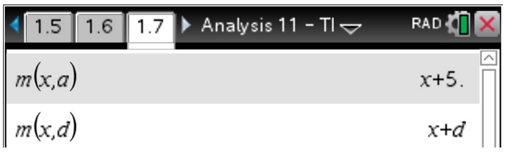


Schieberegler

Mithilfe eines Schiebereglers, der im Graphikfenster z. B. über menu → „1: Aktionen“ → „B: Schieberegler einfügen“ erstellt werden kann, lässt sich der Wert einer Variablen im jeweils definierten Bereich in jeweils definierter Schrittweite verändern; die Variable ist sodann in allen Kontexten mit diesem Wert belegt.

Zur Verwendung eines Schiebereglers empfiehlt es sich häufig, eine neue Variable festzulegen. Nebenstehend ist „a“ per Schieberegler aktuell mit dem Wert „5“ belegt, „k“ dagegen nicht.

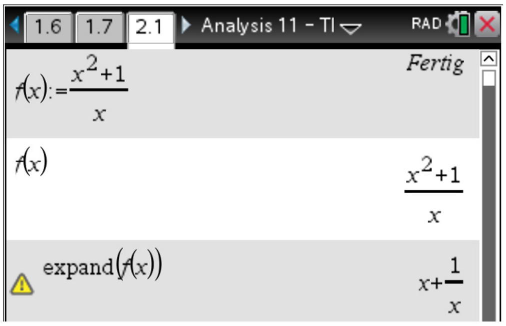




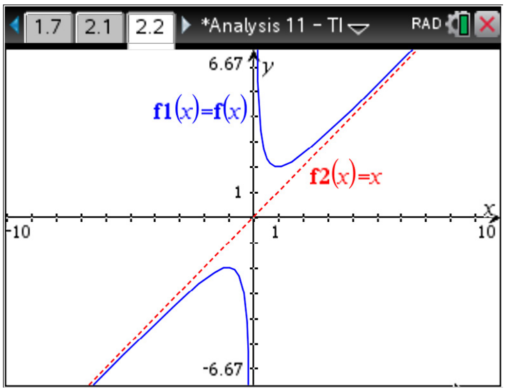
Asymptoten

Der Divisions-Befehl umfasst in der Regel auch die Möglichkeit zur Division von Polynomen.

Das hier verwendete CAS stellt einen eigenen Befehl zur Umformung des Terms in eine Summe aus ganzrationalem und echt gebrochenrationalem Anteil bereit; der angezeigte Warnhinweis lautet: „Definitionsbereich des Ergebnisses kann größer sein als der der Eingabe“



Zur Visualisierung von Asymptoten sind entsprechende Funktionen zu definieren.

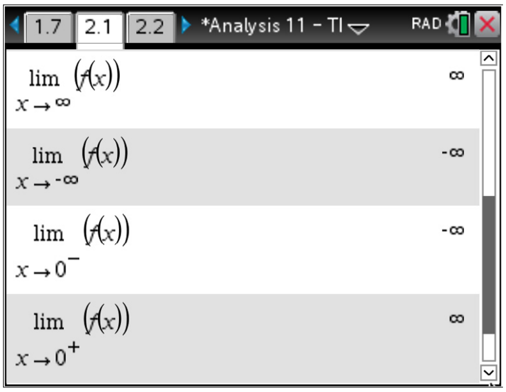


Grenzwerte

Zeilen 1, 2: Verhalten im Unendlichen

Zeilen 3, 4: Verhalten an der Definitionslücke

Hinweis: Der Aufruf des Befehls ist z. B. über menu → „4: Analysis“ → „4: Limes“ möglich.



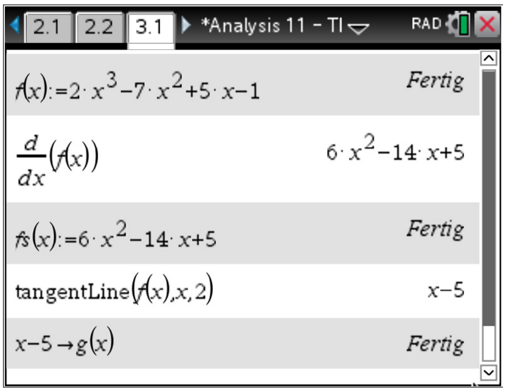
Erste Ableitung / Tangente

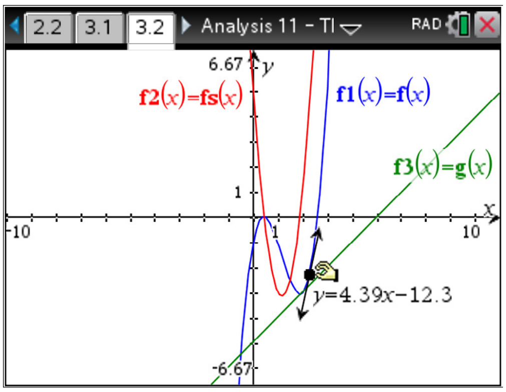
Es empfiehlt sich, zunächst den Term der Ableitungsfunktion zu berechnen und erst in einem zweiten Schritt eine neue Funktion (hier: „fs“) zu definieren (Grund s. u.).

Hinweis: Das hier verwendete CAS erlaubt die Verwendung von Hochkommata für die Bezeichnung von Objekten nicht; deshalb wird die Verwendung „sprechender“ Alternativen wie z. B f1 oder fs (und für höhere Ableitungen entsprechend f2, f3, … bzw. fss, fsss, …) empfohlen.

Zeile 4: Die Gleichung der Tangente an den Graphen in einem Punkt des Graphen kann mithilfe des Befehls „tangentLine“ direkt ausgegeben werden.

Besonders interessant für den Lehr-Lern-Prozess kann es sein, die Graphen von Funktion (blau) und Ableitungsfunktion (rot) in einem Koordinatensystem darzustellen. In der Abbildung wurde zudem die Tangente an den Graphen von f im Punkt (2|f(2)) eingezeichnet (grün). Die Tangente kann alternativ auch im Graphikfenster über das Menü erstellt (menu → „8: Geometry“ → „1: Punkte und Geraden“ → „7: Tangente“) und anschließend entlang des Graphen dynamisch verschoben werden.



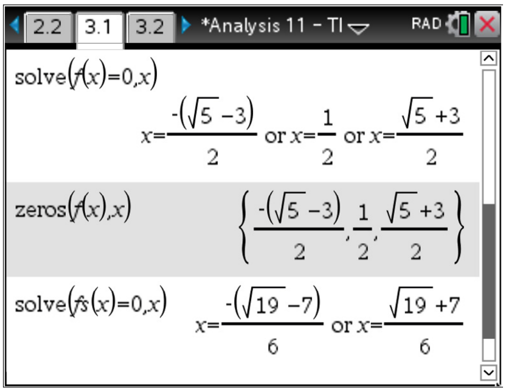


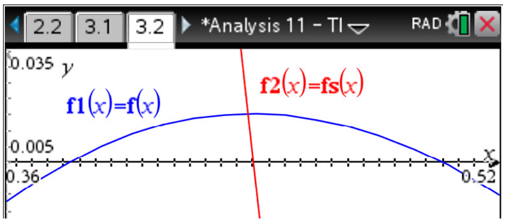
Nullstellen / mögliche Extremstellen

Das mit Blick allein auf den obigen Graphen u. U. überraschende Ergebnis *dreier* Nullstellen (Zeile 1) kann zum Anlass genommen werden, die Notwendigkeit eines stets kritischen Umgangs mit den Ausgaben des CAS zu thematisieren. In diesem Fall bietet es sich an, den Graphen anschließend zu „vergrößern“ („zoom in“).

Zeile 2: Manche CAS stellen für die Bestimmung von Nullstellen einen eigenen Befehl bereit.

Zeile 3: Nullstellen der ersten Ableitung als Kandidaten für Extremstellen



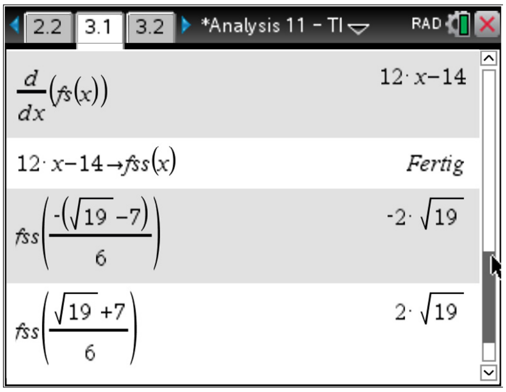


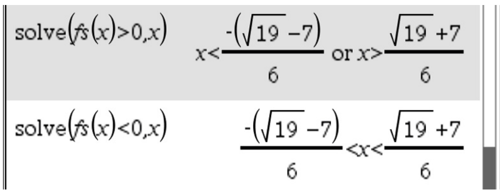
Art der Extrema / zweite Ableitung

Hinweis: Die zweite Ableitung wird an dieser Stelle aufgrund des passenden Zusammenhangs, unabhängig von der Verortung im Lehrplan, angeführt.

Zeilen 3, 4: Identifizieren der Extrema über die zweite Ableitung (im Beispiel möglich)

Zeilen 5, 6: Identifizieren der Extrema über das Vorzeichenverhalten der ersten Ableitung

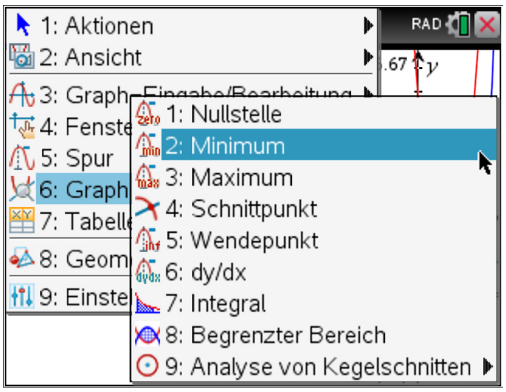




Graphisches Untersuchen einer Funktion

Im Gegensatz zur Arbeit ohne CAS steht eine graphische Darstellung der Funktion sofort zur Verfügung. In vielen Situationen (z. B.: Entwickeln von Vermutungen, Lösen bestimmter Aufgabenstellungen, Überprüfen von Ergebnissen auf Plausibilität) kann es didaktisch oder strategisch von Interesse sein, sich mithilfe des CAS diverse Näherungswerte zu verschaffen.

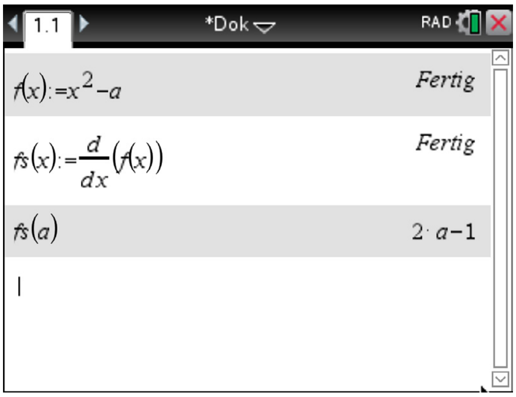
Alle CAS stellen Werkzeuge zur Verfügung, um graphische Untersuchungen durchzuführen, wie z. B. die näherungsweise Bestimmung der Koordinaten besonderer Graphenpunkte oder von Steigungen.



→ Hinweis zur Vorgehensweise beim Definieren der Ableitungsfunktion mit dem CAS

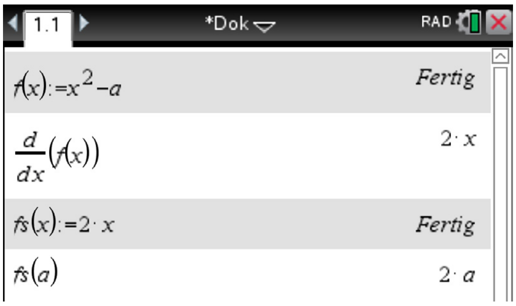
Bei einigen CAS empfiehlt es sich, zunächst jeweils den Term der Ableitungsfunktion zu berechnen und diesen erst danach, in einem zweiten Schritt, einer neuen Variablen zuzuweisen (und damit eine neue Funktion zu definieren). Verknüpft man die Zuweisung direkt mit dem Ableitungsoperator, so kann das bei diesen CAS zu unerwünschten Interpretationen führen.

Als Beispiel wird die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $f: x \mapsto x^2 - a$ betrachtet. Der Funktionsterm der ersten Ableitung ist $f'(x) = 2x$, es ist also $f'(a) = 2a$.



Nebenstehend ist der Ableitungsoperator Bestandteil der Definition von „$fs(x)$“. Die Anweisung „$fs(a)$“ führt in diesem Fall dazu, dass zunächst a in $f(x)$ eingesetzt wird (was $a^2 - a$ liefert) und anschließend (definitionsgemäß) nach a differenziert wird: $\frac{d}{da}\left(a^2 - a\right) = 2a - 1$.

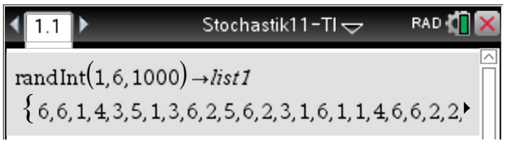
Definiert man die Ableitungsfunktion dagegen nicht in Verbindung mit dem Operator, befindet man sich stets „auf der sicheren Seite“.



A1.2 Stochastik Jgst. 11

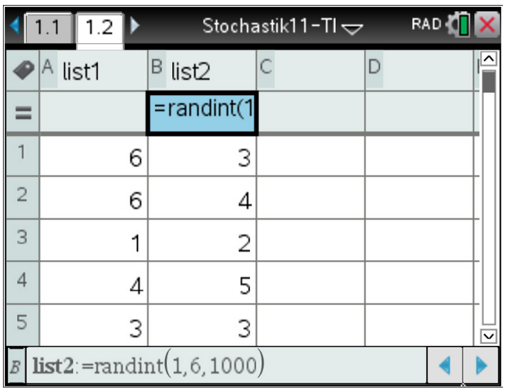
Im Folgenden wird anhand einer typischen Sachsituation ein kurzer Überblick gegeben, welche Funktionen eines CAS sich insbesondere in der Stochastik der Jahrgangsstufe 11 anbieten. Dabei werden **Zufallszahlen** sowie **Histogramme** erzeugt. Dieser Überblick ist nicht als vollständig zu verstehen, sondern gibt nur einen kurzen Eindruck der Einsatzmöglichkeiten.

Unter Nutzung der CAS-Eingabezeile kann z. B. das 1000-malige Werfen eines Laplace-Würfels simuliert werden. Im Beispiel wird dazu eine Folge von eintausend ganzzahligen Zufallszahlen erzeugt, welche jeweils zwischen 1 und 6 liegen, und in der Variablen „list1“ gespeichert.



Die erzeugte Liste kann anschließend bei Bedarf tabellarisch ($\boxed{\text{ctrl}}$ + $\boxed{\text{doc}}$ → „4: Lists & Spreadsheet hinzufügen“) betrachtet werden (Spalte A).

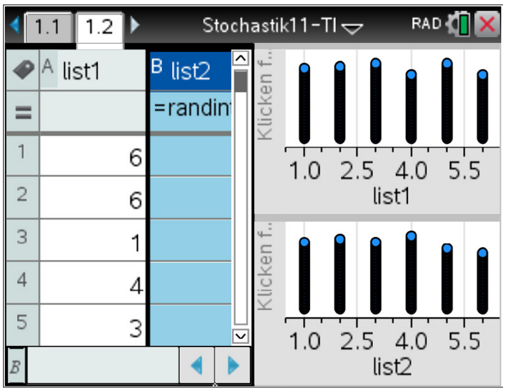
Eine Folge von 1000 Zufallszahlen lässt sich auch direkt in einer Tabelle erzeugen; dazu wird der Befehl in der zweiten Zeile eingegeben (Spalte B). Auch eine so erzeugte Liste lässt sich in einer Variablen speichern (hier: „list2“).

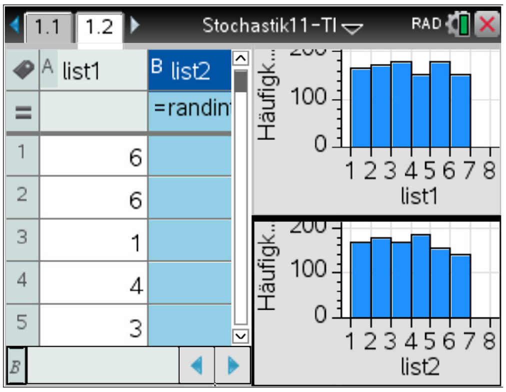


Zu den Listen kann zur schnellen Visualisierung mit dem CAS jeweils ein „Punktdiagramm“ der absoluten Häufigkeiten der enthaltenen Zahlen erzeugt werden. Dazu wird zunächst die jeweilige Spalte markiert und anschließend über menu → „3: Daten“ → „9: SchnellGraph“ das zugehörige Diagramm erzeugt.

Die „Punktdiagramme“ können anschließend bei Bedarf u. a. in Histogramme umgewandelt werden (z. B. über menu → „1: Plot-Typ“ → „3: Histogramm“).

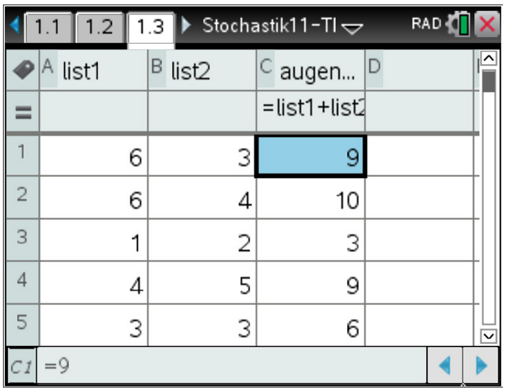
Hinweis: Einzelne absolute Häufigkeiten erhält man im Beispiel, etwa zur Zahl 1 in list1, mithilfe des Befehls „countif(*list1*, 1)“.

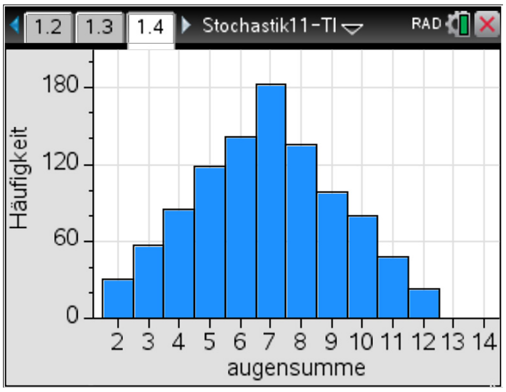




Durch Addition der Listenvariablen „list1“ und „list2“, welche komponentenweise vorgenommen wird, kann eine Variable „augensumme“ erzeugt werden; jeder Eintrag stellt die Augensumme je zweier Würfelwürfe dar.

In einem geeigneten Fenster (ctrl + doc → „5: Data & Statistics hinzufügen“) kann die Liste „augensumme“ weiter analysiert werden; ein Histogramm (absolute Häufigkeiten) zeigt unmittelbar die Verteilung der Augensummen; dabei wurde nebenstehend – im Unterschied zu oben – die Ausrichtung der Säulen so angepasst, dass diese mittig über der jeweiligen Zahl stehen (Kontextmenü „Säuleneinstellungen“ → „Gleiche Säulenbreite“ → „Ausrichtung“ = 0.5).





A1.3 Geometrie Jgst. 11

Im Folgenden wird ein kurzer Überblick gegeben, welche Funktionen eines CAS sich insbesondere in der Geometrie der Jahrgangsstufe 11 anbieten. Dieser Überblick ist nicht als vollständig zu verstehen, er vermittelt vielmehr einen kurzen Eindruck der Einsatzmöglichkeiten.

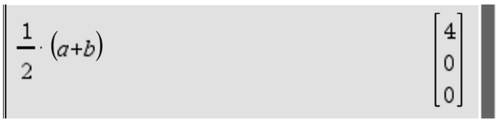
Vektoren eingeben

Vektoren werden im CAS einer Variablen als Wert zugewiesen, sodass bei Rechnungen leicht auf diese zurückgegriffen werden kann; der Vektor kann dabei über menu → „7: Matrix und Vektor“ erstellt werden. Viele CAS formatieren Vektoren dabei so, dass sie der gewohnten Darstellung ähneln.

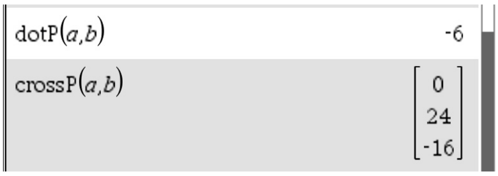
Hinweis: Alternativ kann ein Vektor auch direkt über die Tastenfolge ctrl + (+ ↵ … eingegeben werden.

Skalarmultiplikation, Vektoraddition

z. B. zur Bestimmung der Koordinaten des Mittelpunkts einer Strecke



Skalarprodukt, Vektorprodukt



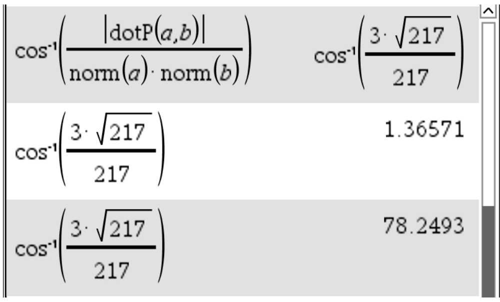
Länge eines Vektors

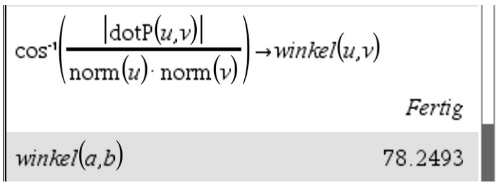
Winkel zwischen Vektoren

Die Größe des von zwei Vektoren eingeschlossenen Winkels lässt sich mithilfe der bekannten Formel berechnen. (Eingabe von $\cos^{-1}$ z. B. über „arccos“ möglich, Eingabe der Betragsstriche z. B. über „abs(…)“ oder das Sonderzeichenmenü)

Zeile 3: Eine Umrechnung ins Gradmaß muss bei Bedarf noch erfolgen; dieses lässt sich auf der „home“-Seite über die Tastenkombination 5 + 2 einstellen.

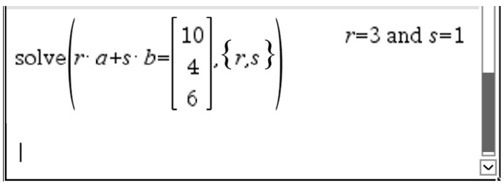
Hinweis (Zeilen 4, 5): Mithilfe zweier Variablen lässt sich leicht eine Funktion definieren, die die Größe des Winkels zwischen zwei Vektoren berechnet.





Vektorgleichung

Gleichungen mit Vektoren sind im CAS komfortabel zu lösen, da sie als Vektorgleichungen eingegeben werden können, so hier z. B. die Gleichung $r\cdot\vec{a}+s\cdot\vec{b}=\begin{pmatrix}10\\4\\6\end{pmatrix},\ r,s\in\mathbb{R}$.

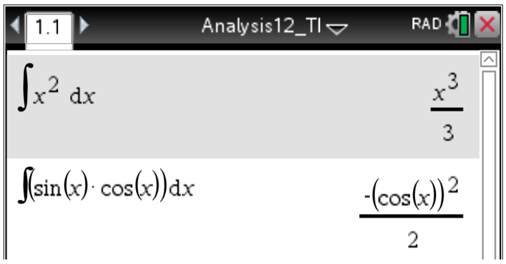


A1.4 Analysis Jgst. 12

Im Folgenden wird ein kurzer Überblick gegeben, welche Funktionen eines CAS sich insbesondere in der Analysis der Jahrgangsstufe 12 anbieten. Dieser Überblick ist nicht als vollständig zu verstehen, er vermittelt vielmehr einen kurzen Eindruck der Einsatzmöglichkeiten.

Unbestimmtes Integral

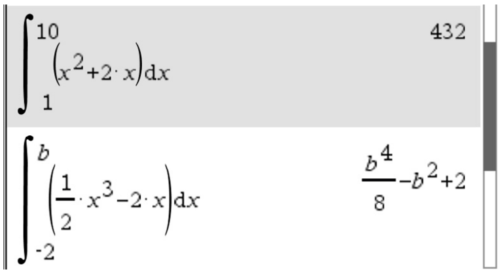
Die Terme von Stammfunktionen bzw. unbestimmte Integrale können mithilfe des CAS direkt bestimmt werden (über die Taste oder per Befehl „Integral()“). Das hier verwendete CAS gibt die entsprechende allgemeine Form ohne eine Konstante aus, die insofern bei Bedarf ergänzt werden muss.

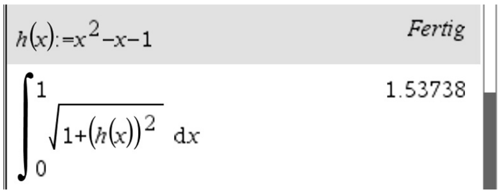


Bestimmtes Integral

Zeilen 1, 2: ohne bzw. mit Parameter

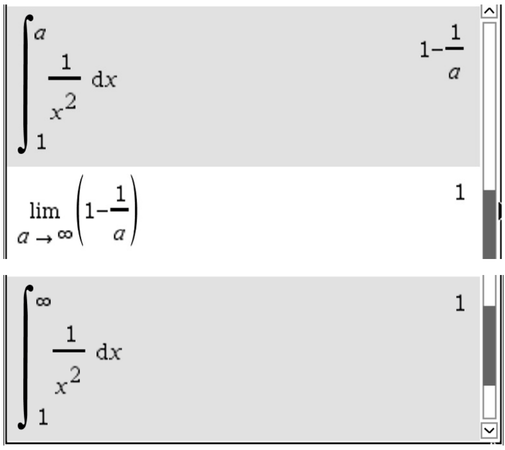
Zeilen 3, 4: Das hier verwendete CAS berechnet automatisch einen Näherungswert für das bestimmte Integral, wenn es über das „exakte“ Verfahren kein Ergebnis ermitteln kann.





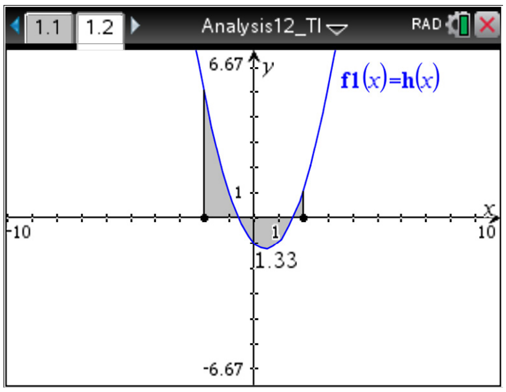
Uneigentliches Integral

Die Betrachtung uneigentlicher Integrale kann auf unterschiedliche Art und Weise erfolgen (siehe Zeilen 1 und 2 bzw. Zeile 3).



Bestimmtes Integral – graphische Darstellung

Das bestimmte Integral lässt sich auch beim hier verwendeten CAS als Flächenbilanz visualisieren (im Kontextmenü zum Funktionsgraphen über „8: Graph analysieren“ → „7: Integral“) und durch Verschieben der beiden Ränder dynamisch untersuchen.



A1.5 Stochastik Jgst. 12

Im Folgenden wird ein kurzer Überblick gegeben, welche Funktionen eines CAS sich insbesondere in der Stochastik der Jahrgangsstufe 12 anbieten. Dieser Überblick ist nicht als vollständig zu verstehen, er vermittelt vielmehr einen kurzen Eindruck der Einsatzmöglichkeiten.

Werte der (kumulat.) Binomialverteilung

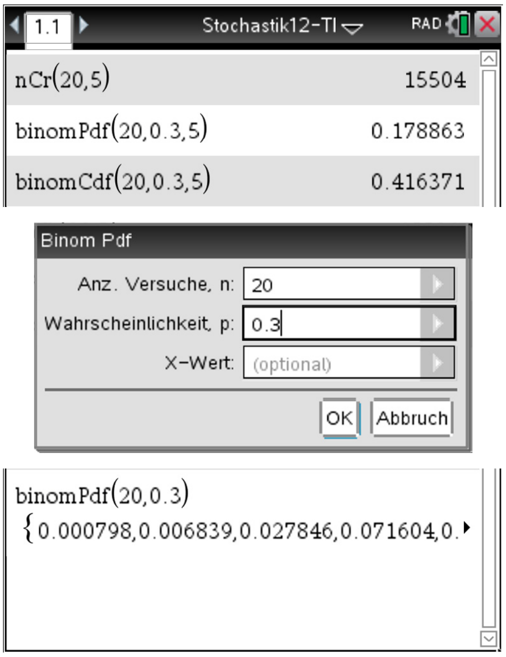
Werte der Binomialverteilung und der kumulativen Binomialverteilung können mit dem CAS direkt über Befehle ausgegeben werden. Dies gilt auch für die Werte von Binomialkoeffizienten.

Zeile 1: $\binom{20}{5}$

Zeilen 2, 3: $P_{0,3}^{20}(X=5)$ bzw. $P_{0,3}^{20}(X \le 5)$

Alternativ besteht die Möglichkeit, einen Dialog zu nutzen (Aufruf über $\boxed{\text{menu}}$ → „5: Wahrscheinlichkeit“ → „5 Verteilungen“).

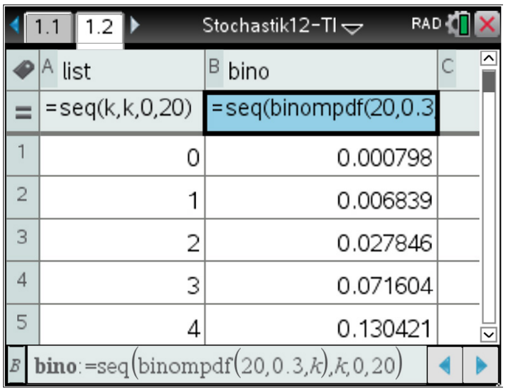
Auch dabei kann durch einen Verzicht auf die Angabe eines konkreten „X-Werts“ eine Liste der Wahrscheinlichkeitswerte der gesamten Verteilung erhalten werden (siehe rechts).

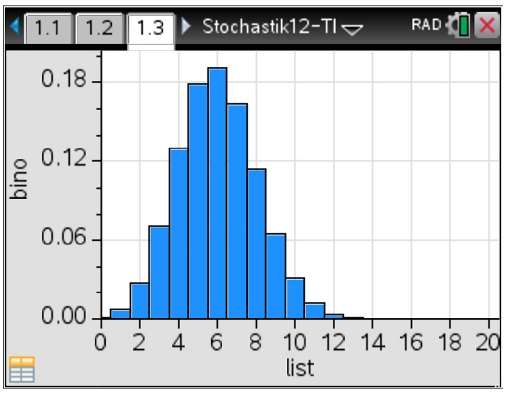


Binomialverteilung graphisch darstellen

Unter Nutzung der Tabellenkalkulation lassen sich mithilfe von CAS Binomialverteilungen und kumulative Binomialverteilungen problemlos graphisch darstellen.

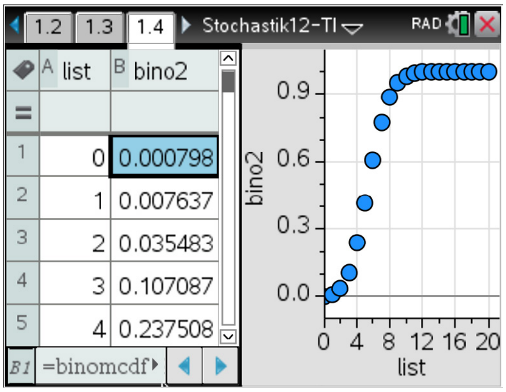
Nebenstehend wurden in einer neuen Registerkarte „Lists & Spreadsheet“ zunächst mithilfe des „seq“-Befehls die benötigten Folgen von Zahlen zur Wahrscheinlichkeitsverteilung erstellt (Alternative: Nutzung der Tabellenkalkulation wie gewohnt mit Zellenbezügen, s. u.). Anschließend wurde, nach Markierung der beiden Spalten, über $\boxed{\text{menu}}$ → „3: Daten“ → „8: Ergebnisdiagramm“ ein Balkendiagramm generiert, das nach Anpassung der Säuleneinstellungen (gleiche Breite 1, Ausrichtung 0.5) in nebenstehendes Histogramm verwandelt wurde.





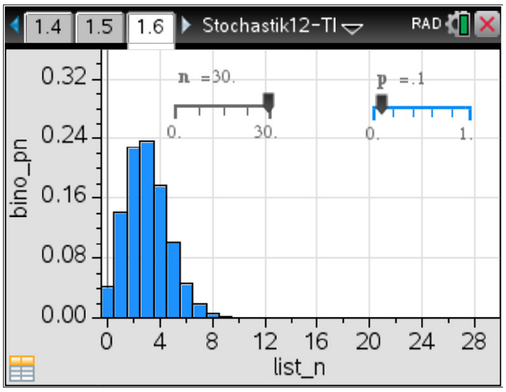
Kumulative Verteilung graphisch darstellen

Auch dazu bietet sich die Nutzung der Tabellenkalkulation an, die nebenstehend wie gewohnt verwendet wurde (Eintrag in Zelle B1: „=binomcdf(20,0.3,A1)“). Das Diagramm wurde über menu → „3: Daten“ → „9: Schnell-Graph“ erstellt und anschließend geeignet angepasst.



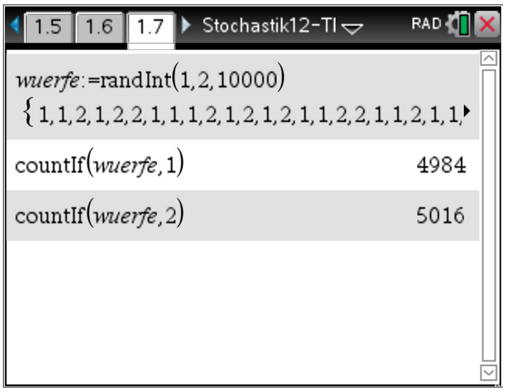
Dynamische Untersuchung der Binomialverteilung

Durch die Definition zweier Schieberegler lässt sich die Binomialverteilung dynamisch untersuchen. Dabei kann zunächst in „Lists & Spreadsheet“ mit Variablen „n“ und „p“ gearbeitet werden, die zugehörigen Schieberegler können auch nachträglich noch im Graphikfenster (hier: Ergebnisdiagramm, s. o.) erzeugt und mit „n“ bzw. „p“ bezeichnet werden (Erzeugung über menu → „3: Aktionen“ → „4: Schieberegler einfügen“).



Simulation von Bernoulli-Experimenten

Unter Verwendung des CAS lassen sich auch Bernoulli-Ketten simulieren, z. B. 10 000 Münzwürfe (vgl. dazu auch Kapitel A1.2).



A1.6 Geometrie Jgst. 12

Im Folgenden wird ein kurzer Überblick gegeben, welche Funktionen eines CAS sich insbesondere in der Geometrie der Jahrgangsstufe 12 anbieten. Dieser Überblick ist nicht als vollständig zu verstehen, er vermittelt vielmehr einen kurzen Eindruck der Einsatzmöglichkeiten.

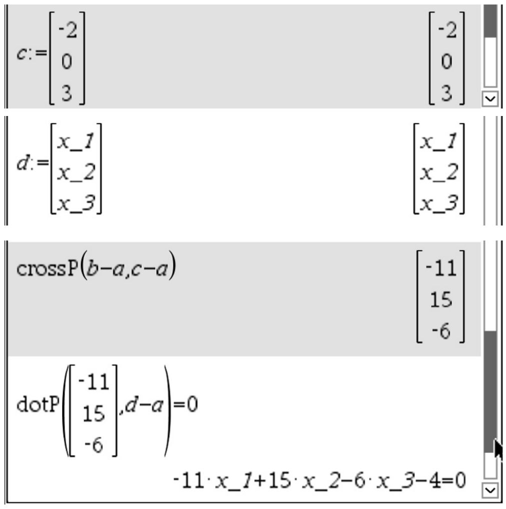
Ebenengleichung in Koordinatenform

Häufig muss die Gleichung einer Ebene, die durch drei vorgegebene Punkte festgelegt ist, in Koordinatenform ermittelt werden.

Zeilen 1-3: Eingabe der Punkte als Ortsvektoren

Zeile 4: Definition des Ortsvektors eines allgemeinen Punkts

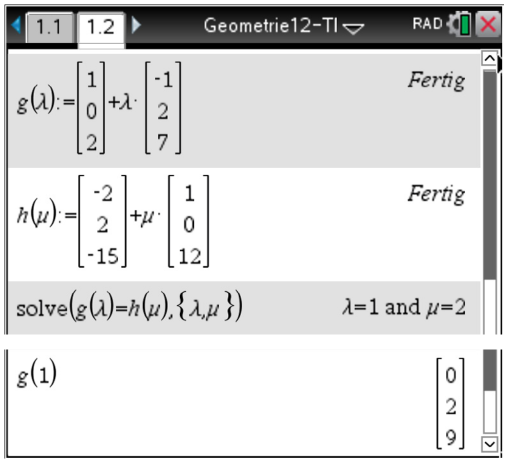
Zeilen 5, 6: Koordinatenform berechnen



Lagebeziehungen

Zeilen 1-4: Bestimmung des Schnittpunkts zweier Geraden (durch Lösen des zugehörigen Gleichungssystems). (Zur Bestimmung der Größe des eingeschlossenen Winkels siehe Kapitel A1.3)

Bei den weiteren typischen Untersuchungen zu Lagebeziehungen geometrischer Objekte können die ggf. auftretenden Gleichungssysteme jeweils mithilfe des CAS gelöst werden; eine ausführliche Darstellung findet sich im Kapitel 3.3.2.



A2 Schnelleinstiege – ClassPad II FX-CP400 (Casio)

A2.1 Analysis Jgst. 11

Im Folgenden wird ein kurzer Überblick gegeben, welche Funktionen eines CAS sich insbesondere in der Analysis der Jahrgangsstufe 11 anbieten. Dieser Überblick ist nicht als vollständig zu verstehen, er vermittelt vielmehr einen kurzen Eindruck der Einsatzmöglichkeiten.

Exakte und näherungsweise Ausgabe von Eingaben bzw. Ergebnissen

Viele CAS bieten Einstellungen an, um Eingaben bzw. Ergebnisse exakt oder näherungsweise ausgeben zu lassen. Das vorliegend verwendete CAS verfügt dazu über entsprechende Eingabemöglichkeiten, einen Button sowie Befehle (Zeile 3), mithilfe derer auch die (in der Regel standardmäßige) automatische Vereinfachung eigegebener Terme deaktiviert werden kann. Damit können Schülerinnen und Schüler beispielsweise ihre Eingaben überprüfen.

Einstellung Zeilen 1 und 3:

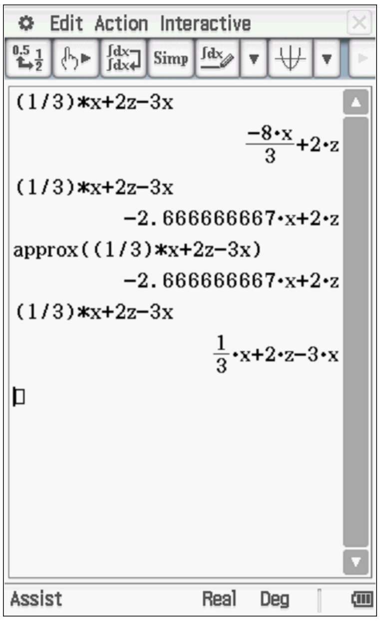
Alg Standard Real Rad

Einstellung Zeile 2:

Alg Decimal Real Rad

Einstellung Zeile 4:

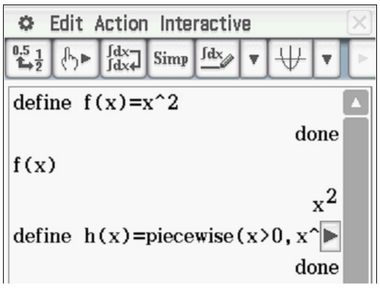
Assist Real Rad



Funktion definieren

Beim hier verwendeten CAS kann die Definition über den Befehl „define“ (Zeile 1) erfolgen. Dabei legt das CAS standardmäßig den maximal möglichen Definitionsbereich zugrunde.

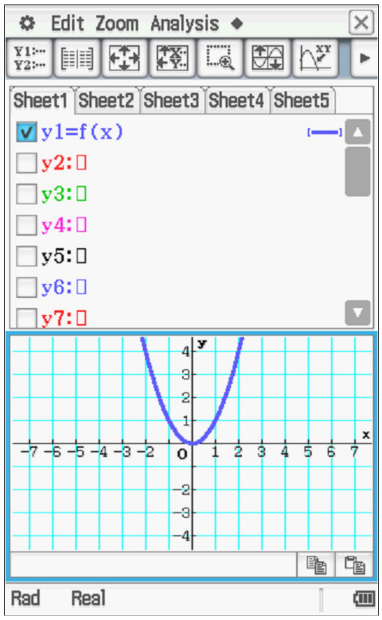
Zeile 3: Mithilfe von „piecewise“ kann eine Funktion abschnittsweise definiert werden (alternativ möglich über Keyboard → „Math3“ →).



Funktionsgraph zeichnen

Über kann das Graphikfenster geöffnet werden; über können Funktionsterme definiert und ausgewählt werden, die im Graphikfenster angezeigt werden sollen. (Ausblenden des Graphikfensters über die Rückkehr zum Hauptfenster mittels Main)

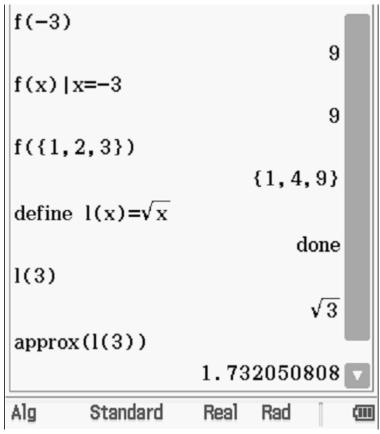
Eigenschaften der graphischen Darstellung wie Strichdicke, Farbe, Anzeigeausschnitt, Achsenskalierung, Koordinatengitter etc. können per Menü bedarfsgerecht angepasst werden.



Funktionswerte berechnen

Für die Berechnung von Funktionswerten bietet auch das hier verwendete CAS mehrere Optionen (Zeilen 2 bis 4).

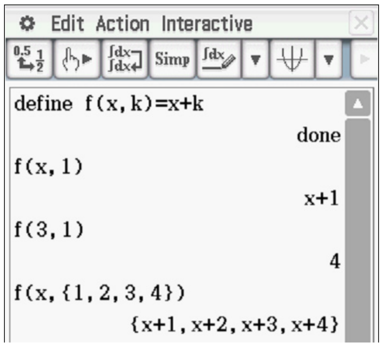
Hinweis: Der in der vorangehenden Zeile befindliche markierte Ausdruck kann durch EXE direkt in die aktuelle Zeile kopiert werden. Mithilfe des Stifts kann zudem ein beliebiger Bereich eines Ausdrucks markiert und sodann in die aktuelle Zeile durch „Ziehen“ hineinkopiert werden.



Parameter im Funktionsterm

Enthält ein Funktionsterm einen Parameter, so empfiehlt es sich, bei Verwendung eines CAS den Parameter als zweite Variable festzulegen. Damit ist im weiteren Verlauf ein flexibler Zugriff auf Funktionsterme und -werte möglich.

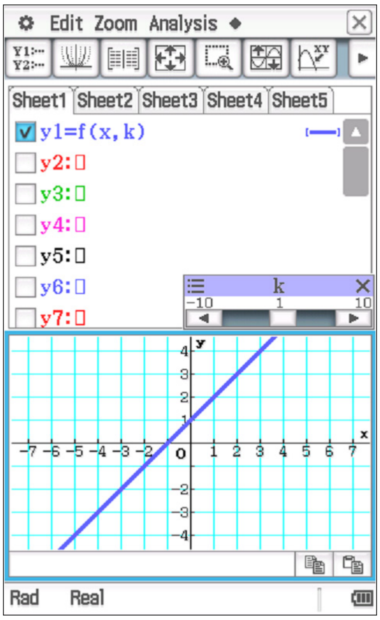
Zeile 4: Ausgabe mehrerer Funktionsterme der Schar



Schieberegler

Mithilfe eines Schiebereglers, der im Graphikfenster nach Auswahl der Funktion über ♦ → „Dynamic Graph“ erstellt werden kann, lässt sich der Wert einer Variablen im jeweils definierten Bereich in jeweils definierter Schrittweite verändern.

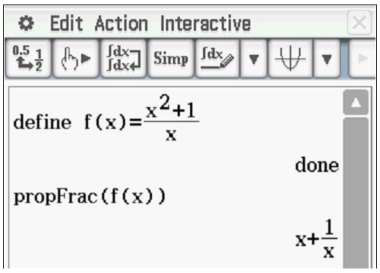
Die Variable ist sodann in allen Kontexten mit diesem Wert belegt (vgl. nebenstehend unten, Eingabe von f(x, k) im Hauptfenster). Soll die weitere Rechnung wieder allgemein in Abhängigkeit vom Parameter durchgeführt werden, so muss dieser zunächst wieder freigegeben werden („delvar“).



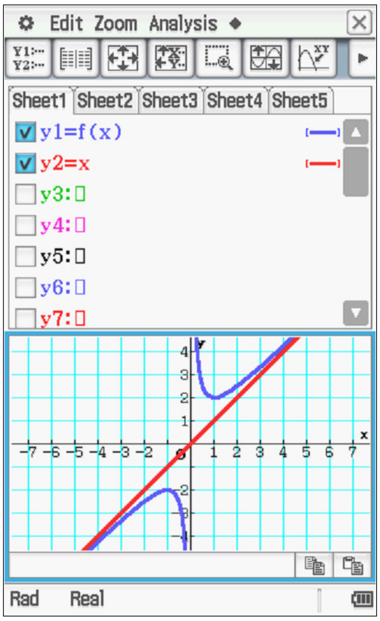
Asymptoten

Der Divisions-Befehl umfasst in der Regel auch die Möglichkeit zur Division von Polynomen.

Das hier verwendete CAS stellt einen eigenen Befehl zur Umformung des Terms in eine Summe aus ganzrationalem und echt gebrochen-rationalem Anteil bereit.



Zur Visualisierung von Asymptoten sind entsprechende Funktionen zu definieren.

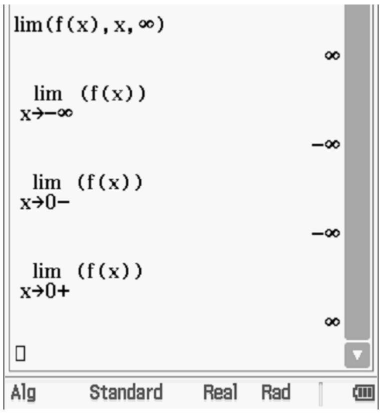


Grenzwerte

Zeilen 1, 2: Verhalten im Unendlichen

Zeilen 3, 4: Verhalten an der Definitionslücke

Hinweis: Die Eingaben ab Zeile 2 erfolgten über $\boxed{\text{Keyboard}}$ → Math2 → $\boxed{\lim_{\square\to\square}}$.

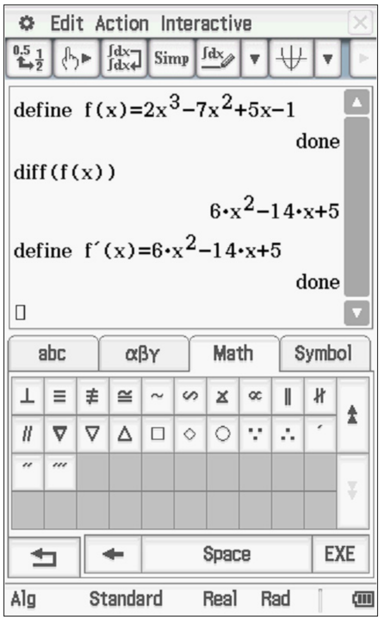


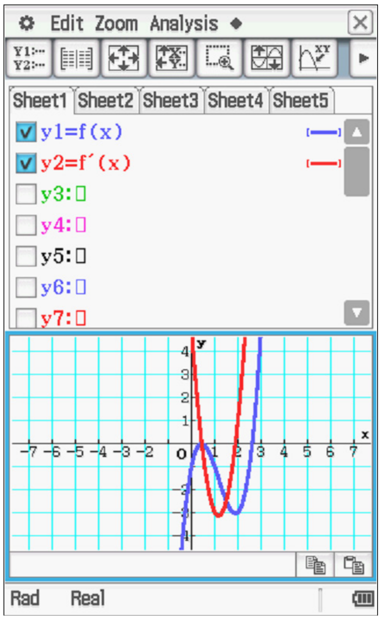
Erste Ableitung

Es empfiehlt sich, zunächst den Term der Ableitungsfunktion zu berechnen und erst in einem zweiten Schritt eine neue Funktion (hier: „f‘ “) zu definieren (Grund siehe Kapitel 2.1.1).

Hinweis: Nicht alle CAS erlauben die Verwendung von Hochkommata für die Bezeichnung von Objekten; in solchen Fällen ist die Verwendung „sprechender“ Alternativen wie z. B f1 oder fs (und für höhere Ableitungen entsprechend f2, f3, … bzw. fss, fsss, …) zu empfehlen.

Besonders interessant für den Lehr-Lern-Prozess kann es sein, die Graphen von Funktion (blau) und Ableitungsfunktion (rot) in einem Koordinatensystem darzustellen.

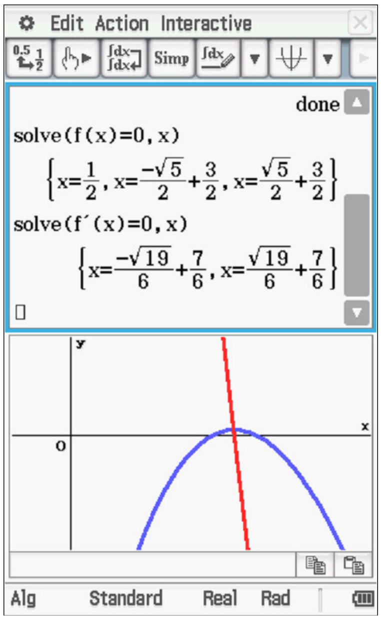




Nullstellen / mögliche Extremstellen

Das mit Blick allein auf den obigen Graphen u. U. überraschende Ergebnis *dreier* Nullstellen (Zeile 1) kann zum Anlass genommen werden, die Notwendigkeit eines stets kritischen Umgangs mit den Ausgaben des CAS zu thematisieren. In diesem Fall bietet es sich an, den Graphen anschließend zu „vergrößern" („Zoom In").

Zeile 2: Nullstellen der ersten Ableitung als Kandidaten für Extremstellen

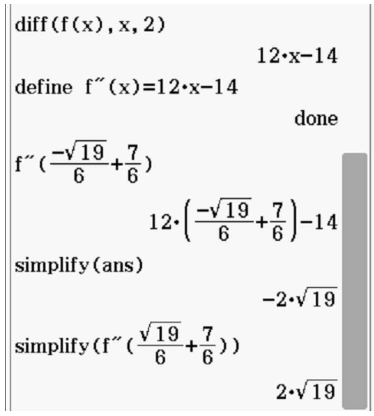


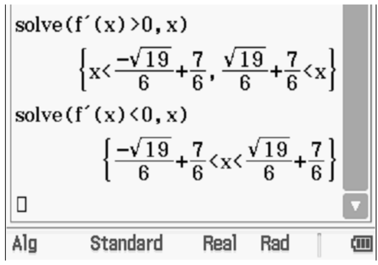
Art der Extrema / zweite Ableitung

Hinweis: Die zweite Ableitung wird an dieser Stelle aufgrund des passenden Zusammenhangs, unabhängig von der Verortung im Lehrplan, angeführt.

Zeilen 3-5: Identifizieren der Extrema über die zweite Ableitung (im Beispiel möglich)

Zeilen 6, 7: Identifizieren der Extrema über das Vorzeichenverhalten der ersten Ableitung



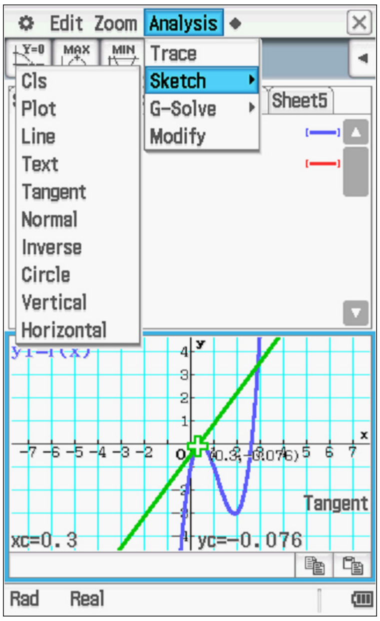


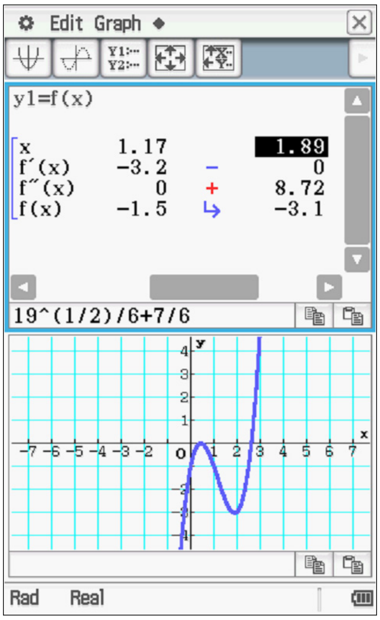
Graphisches Untersuchen einer Funktion

Im Gegensatz zur Arbeit ohne CAS steht eine graphische Darstellung der Funktion sofort zur Verfügung. In vielen Situationen (z. B.: Entwickeln von Vermutungen, Lösen bestimmter Aufgabenstellungen, Überprüfen von Ergebnissen auf Plausibilität) kann es didaktisch oder strategisch von Interesse sein, sich mithilfe des CAS diverse Näherungswerte zu verschaffen.

Alle CAS stellen Werkzeuge zur Verfügung, um graphische Untersuchungen durchzuführen, wie z. B. die näherungsweise Bestimmung der Koordinaten besonderer Graphenpunkte oder von Steigungen.

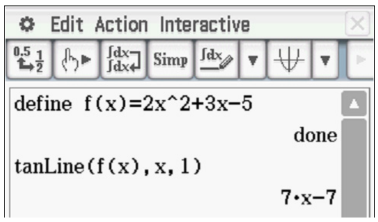
Das hier verwendete CAS verfügt z. B. über ein Werkzeug zur Ermittlung von Extrem- und Wendepunkten (vgl. nebenstehend, unten; die Vorzeichentabelle lässt sich über den Button aufrufen).





Tangente

Neben der oben aufgeführten dynamischen Darstellungsvariante einer Tangente gibt es bei den meisten CAS auch die Möglichkeit, die Gleichung einer Tangente mithilfe eines speziell dafür zu Verfügung stehenden Befehls zu ermitteln.

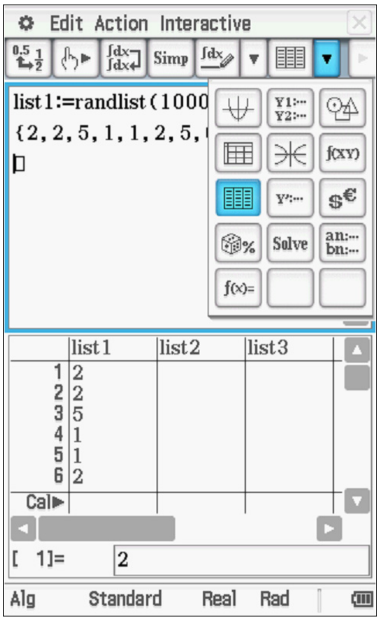


A2.2 Stochastik Jgst. 11

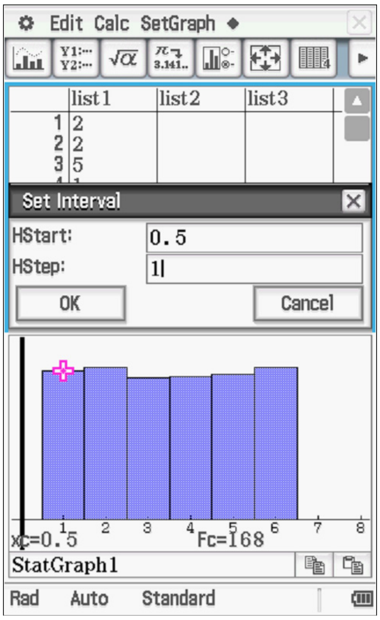
Im Folgenden wird anhand einer typischen Sachsituation ein kurzer Überblick gegeben, welche Funktionen eines CAS sich insbesondere in der Stochastik der Jahrgangsstufe 11 anbieten. Dabei werden **Zufallszahlen** sowie **Histogramme** erzeugt. Dieser Überblick ist nicht als vollständig zu verstehen, sondern gibt nur einen kurzen Eindruck der Einsatzmöglichkeiten.

Unter Nutzung der CAS-Eingabezeile kann z. B. das 1000-malige Werfen eines Laplace-Würfels simuliert werden. Im Beispiel wird dazu mittels „list1:=randlist(1000,1,6)“ eine Folge von eintausend ganzzahligen Zufallszahlen erzeugt, welche jeweils zwischen 1 und 6 liegen, und in der Variablen „list1“ gespeichert.

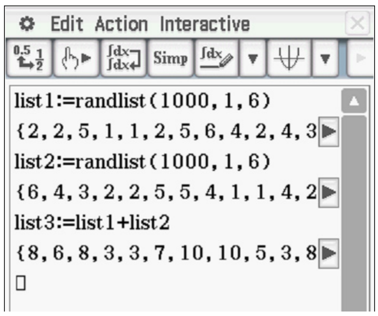
Die erzeugte Liste kann anschließend bei Bedarf im Statistik-Bereich tabellarisch betrachtet werden.



Zur Liste kann zur schnellen Visualisierung mit dem CAS ein Histogramm der absoluten Häufigkeiten der enthaltenen Zahlen erzeugt werden. Dazu werden zunächst über „Menu“ → „Statistics“ der Statistic-Bereich geöffnet, anschließend über  ein Histogramm als „StatGraph“ für „list1“ zur Zeichnung ausgewählt und dieses Histogramm zuletzt über  unter geeigneter Wahl der Werte zweier Parameter (siehe rechts) erzeugt.

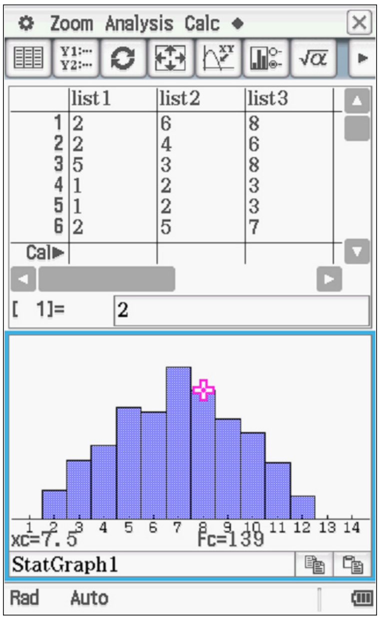


Durch Addition der Listenvariablen „list1“ und „list2“, welche komponentenweise vorgenommen wird, kann eine Variable „list3“ erzeugt werden; jeder Eintrag stellt die Augensumme je zweier Würfelwürfe dar.



Wie oben beschrieben kann analog auch zu „list3“ ein Histogramm (der absoluten Häufigkeiten) erstellt werden, das unmittelbar die Verteilung der Augensummen zeigt.

Hinweis: Das hier verwendete CAS verfügt darüber hinaus über einen speziellen Würfelsimulator, der die Häufigkeitsverteilungen zu diversen Zufallsexperimenten mit einem oder zwei Spielwürfeln (bei frei wählbarer Seitenflächenanzahl) ausgeben kann.



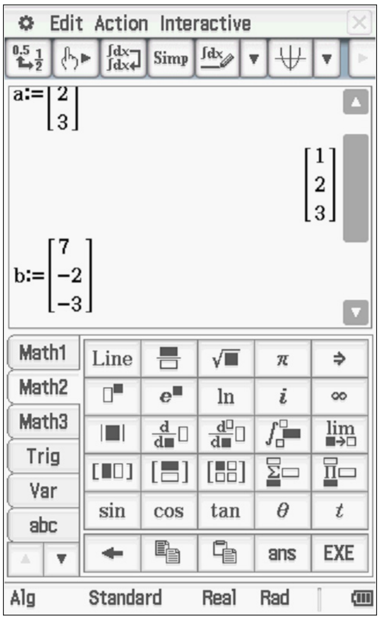
A2.3 Geometrie Jgst. 11

Im Folgenden wird ein kurzer Überblick gegeben, welche Funktionen eines CAS sich insbesondere in der Geometrie der Jahrgangsstufe 11 anbieten. Dieser Überblick ist nicht als vollständig zu verstehen, er vermittelt vielmehr einen kurzen Eindruck der Einsatzmöglichkeiten.

Vektoren eingeben

Vektoren werden im CAS einer Variablen als Wert zugewiesen, sodass bei Rechnungen leicht auf diese zurückgegriffen werden kann. Viele CAS formatieren Vektoren dabei so, dass sie der gewohnten Darstellung ähneln.

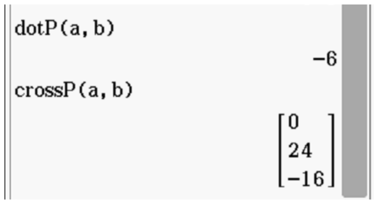
Hinweis: Das hier verwendete CAS unterscheidet zwischen Zeilen- und Spaltendarstellung. Die Zeilendarstellung ist am Handheld ggf. übersichtlicher, die Spaltenschreibweise jedoch näher an der unterrichtlichen Praxis.



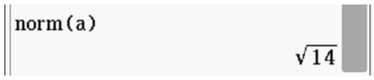
Skalarmultiplikation, Vektoraddition

z. B. zur Bestimmung der Koordinaten des Mittelpunkts einer Strecke

Skalarprodukt, Vektorprodukt

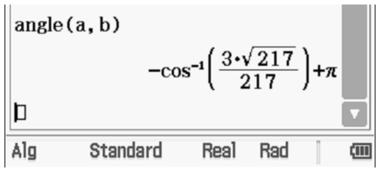


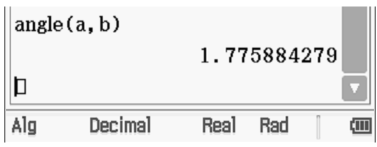
Länge eines Vektors

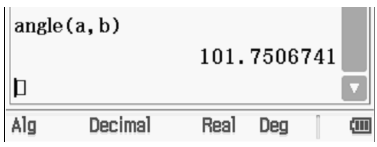


Winkel zwischen Vektoren

Die Größe des von zwei Vektoren eingeschlossenen Winkels lässt sich mithilfe der bekannten Formel berechnen. Einige CAS, so auch das hier verwendete, stellen dafür einen eigenen Befehl bereit. Je nach aktueller Grundeinstellung erfolgt die Ausgabe dabei exakt oder näherungsweise bzw. im Bogen- oder Gradmaß. Der Befehl liefert dabei nicht zwangsläufig die ggf. kleinere der beiden Größen der eingeschlossenen Winkel (siehe rechts).

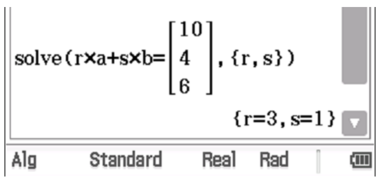






Vektorgleichung

Gleichungen mit Vektoren sind im CAS komfortabel zu lösen, da sie als Vektorgleichungen eingegeben werden können, so hier z. B. die Gleichung $r\cdot\vec{a}+s\cdot\vec{b}=\begin{pmatrix}10\\4\\6\end{pmatrix}$, $r, s \in \mathbb{R}$.

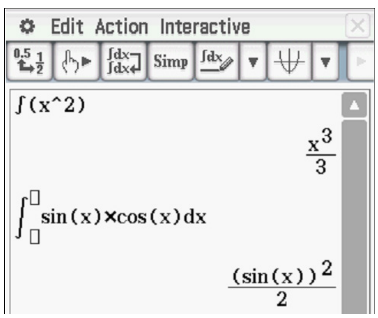


A2.4 Analysis Jgst. 12

Im Folgenden wird ein kurzer Überblick gegeben, welche Funktionen eines CAS sich insbesondere in der Analysis der Jahrgangsstufe 12 anbieten. Dieser Überblick ist nicht als vollständig zu verstehen, er vermittelt vielmehr einen kurzen Eindruck der Einsatzmöglichkeiten.

Unbestimmtes Integral

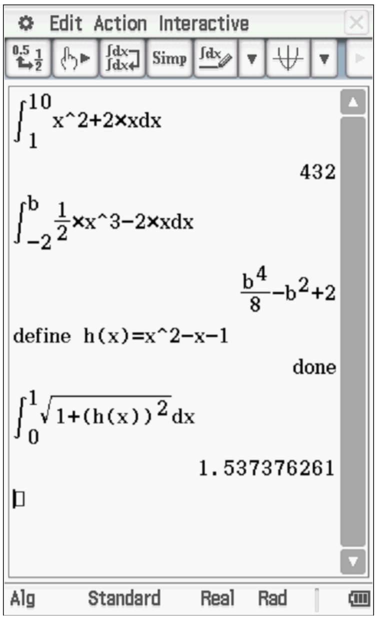
Die Terme von Stammfunktionen bzw. unbestimmte Integrale können mithilfe des CAS direkt bestimmt werden; dazu werden verschiedene Wege der Eingabe angeboten (z. B. über das $\boxed{\text{Keyboard}}$ oder die Menüs „Action“ und „Interactive“). Das hier verwendete CAS gibt die entsprechende allgemeine Form ohne eine Konstante aus, die insofern bei Bedarf ergänzt werden muss.



Bestimmtes Integral

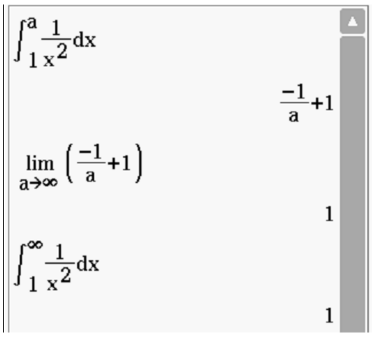
Zeilen 1, 2: ohne bzw. mit Parameter

Zeilen 3-4: Das hier verwendete CAS berechnet automatisch einen Näherungswert für das bestimmte Integral, wenn es über das „exakte“ Verfahren kein Ergebnis ermitteln kann.



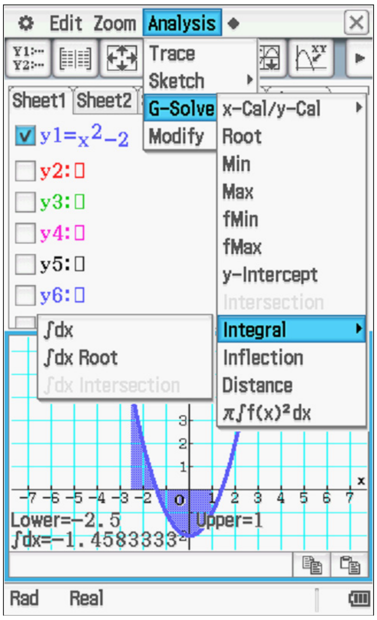
Uneigentliches Integral

Die Betrachtung uneigentlicher Integrale kann auf unterschiedliche Art und Weise erfolgen (siehe Zeilen 1 und 2 bzw. Zeile 3).



Bestimmtes Integral – graphische Darstellung

Das bestimmte Integral lässt sich auch beim hier verwendeten CAS als Flächenbilanz visualisieren.



A2.5 Stochastik Jgst. 12

Im Folgenden wird ein kurzer Überblick gegeben, welche Funktionen eines CAS sich insbesondere in der Stochastik der Jahrgangsstufe 12 anbieten. Dieser Überblick ist nicht als vollständig zu verstehen, er vermittelt vielmehr einen kurzen Eindruck der Einsatzmöglichkeiten.

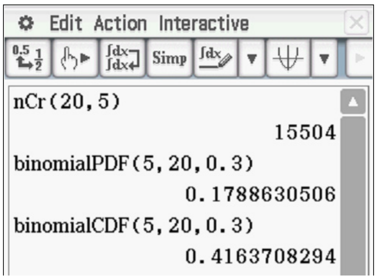
Werte der (kumulat.) Binomialverteilung

Werte der Binomialverteilung und der kumulativen Binomialverteilung können mit dem CAS direkt über Befehle ausgegeben werden. Dies gilt auch für die Werte von Binomialkoeffizienten.

Zeile 1: $\binom{20}{5}$

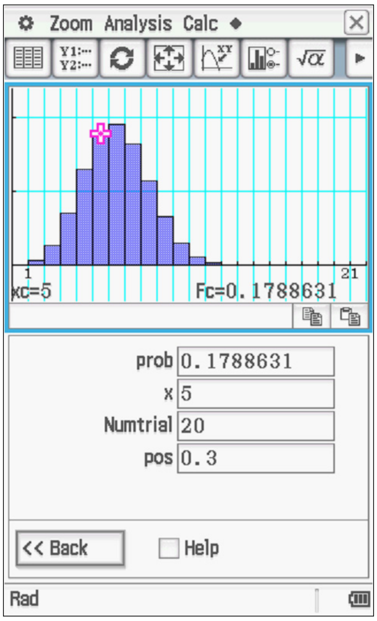
Zeilen 2, 3: $P_{0,3}^{20}(X=5)$ bzw. $P_{0,3}^{20}(X \leq 5)$

Alternativ besteht die Möglichkeit, einen Dialog (Aufruf über „Interactive“ → „Distribution/Inv. Dist“) oder Werkzeuge innerhalb der graphischen Darstellung einer Verteilung zu nutzen (s. u.).



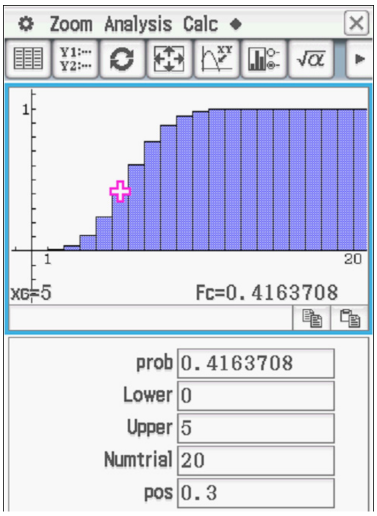
Binomialverteilung graphisch darstellen

Unter Nutzung der Tabellenkalkulation oder, wie nebenstehend dargestellt, mithilfe eines integrierten Werkzeugs zur Darstellung von Verteilungen (aufrufbar über „Menu“ → „Statistics“, sodann Auswahl und Konkretisierung der gewünschten Verteilung über „Calc“ → „Distribution“ und schließlich Darstellung mittels) lassen sich mithilfe des CAS Binomialverteilungen und kumulative Binomialverteilungen problemlos graphisch darstellen und untersuchen.



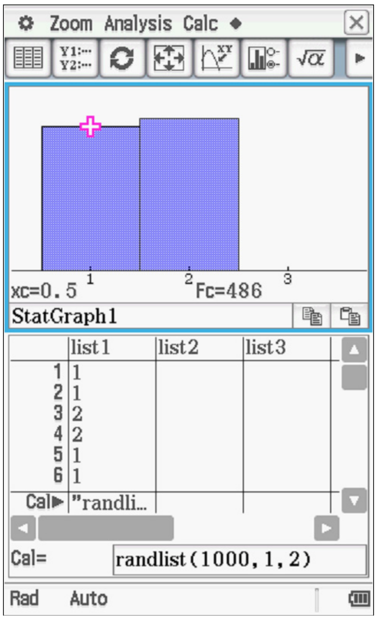
Kumulative Verteilung graphisch darstellen

Auch hierzu bietet sich bei diesem CAS die Nutzung des integrierten Werkzeugs an.



Simulation von Bernoulli-Experimenten

Unter Verwendung des CAS lassen sich auch Bernoulli-Ketten simulieren, z. B. 1 000 Münzwürfe (vgl. dazu auch Kapitel A2.2; Einblenden des Auswertungs-Kreuzes über).



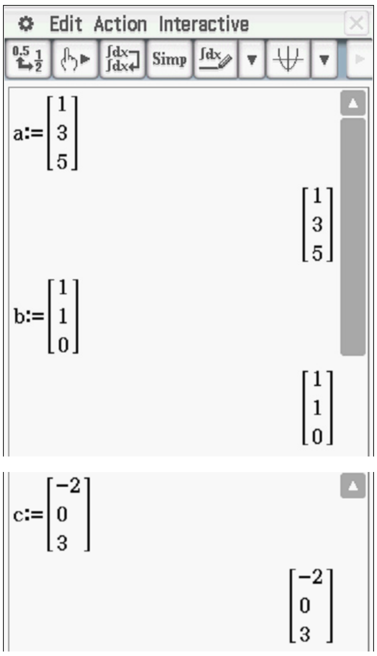
A2.6 Geometrie Jgst. 12

Im Folgenden wird ein kurzer Überblick gegeben, welche Funktionen eines CAS sich insbesondere in der Geometrie der Jahrgangsstufe 12 anbieten. Dieser Überblick ist nicht als vollständig zu verstehen, er vermittelt vielmehr einen kurzen Eindruck der Einsatzmöglichkeiten.

Ebenengleichung in Koordinatenform

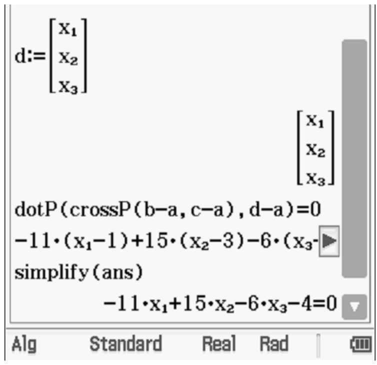
Häufig muss die Gleichung einer Ebene, die durch drei vorgegebene Punkte festgelegt ist, in Koordinatenform ermittelt werden (zur Eingabe von Vektoren bei diesem CAS vgl. Kapitel A2.3).

Zeilen 1-3: Eingabe der Punkte als Ortsvektoren



Zeile 4: Definition des Ortsvektors eines allgemeinen Punkts (Hinweis: Eingabe von Indizes über Keyboard → „abc“ → „Math“)

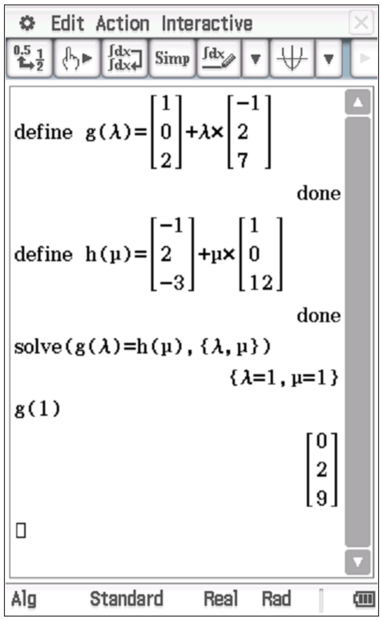
Zeilen 5, 6: Koordinatenform berechnen



Lagebeziehungen

Zeilen 1-4: Bestimmung des Schnittpunkts zweier Geraden (durch Lösen des zugehörigen Gleichungssystems). (Zur Bestimmung der Größe des eingeschlossenen Winkels siehe Kapitel A2.3)

Bei den weiteren typischen Untersuchungen zu Lagebeziehungen geometrischer Objekte können die ggf. auftretenden Gleichungssysteme jeweils mithilfe des CAS gelöst werden, eine ausführliche Darstellung findet sich im Kapitel 3.3.2.



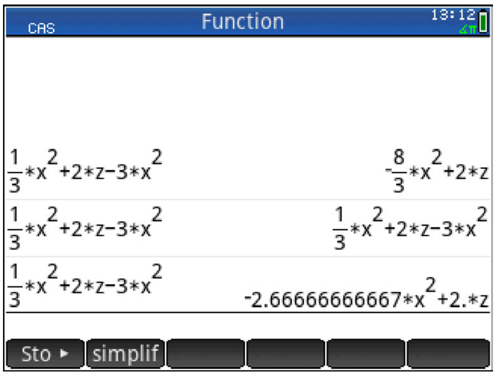
A3 Schnelleinstiege – Prime Graphing Calculator (Hewlett Packard)

A3.1 Analysis Jgst. 11

Im Folgenden wird ein kurzer Überblick gegeben, welche Funktionen eines CAS sich insbesondere in der Analysis der Jahrgangsstufe 11 anbieten. Dieser Überblick ist nicht als vollständig zu verstehen, er vermittelt vielmehr einen kurzen Eindruck der Einsatzmöglichkeiten.

Exakte und näherungsweise Ausgabe von Eingaben bzw. Ergebnissen

Viele CAS bieten Einstellungen an, um Eingaben bzw. Ergebnisse exakt oder näherungsweise ausgeben zu lassen. Das vorliegend verwendete CAS verfügt dazu über entsprechende Einstellungsmöglichkeiten (aufrufbar über Shift → CAS), mithilfe derer auch die (in der Regel standardmäßige) automatische Vereinfachung eigegebener Terme (Zeile 1) deaktiviert werden kann (Zeile 2). Damit können Schülerinnen und Schüler beispielsweise ihre Eingaben überprüfen.



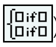
CAS-Settings Zeile 1:
Simplify: Minimum; Exact: ☑

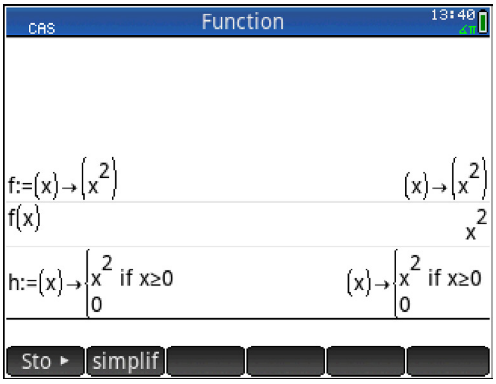
CAS-Settings Zeile 2:
Simplify: None; Exact: ☑

CAS-Settings Zeile 3:
Simplify: Minimum; Exact: ☐

Funktion definieren

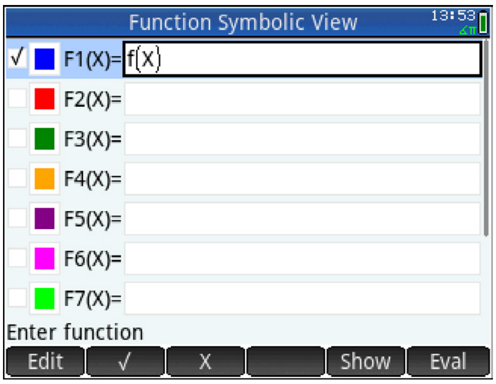
Beim hier verwendeten CAS kann die Definition mithilfe der übliche Eingabe „f(x):=x^2" erfolgen, die nach Abschluss der Eingabe jedoch leicht verändert dargestellt wird (Zeile 1). Dabei legt das CAS standardmäßig den maximal möglichen Definitionsbereich zugrunde.

Zeile 3: Mithilfe von „piecewise" kann eine Funktion abschnittsweise definiert werden (alternativ möglich über  → ).



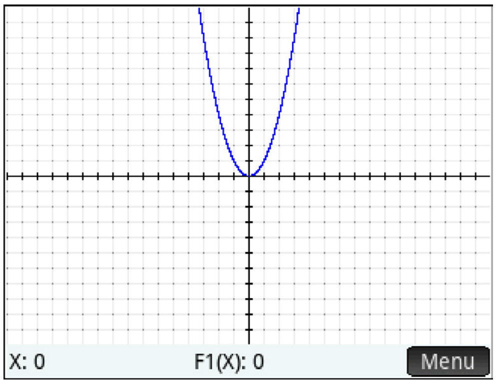
Funktionsgraph zeichnen

Über  können Funktionsterme definiert und ausgewählt werden (Achtung: Hier ist die Eingabe der Variablen „X" in Form eines Großbuchstabens obligatorisch!).



Die zugehörigen Graphen können anschließend im Graphikfenster (Öffnen über Plot Setup) angezeigt werden.

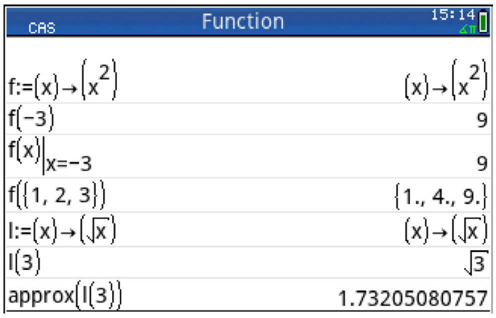
Eigenschaften der graphischen Darstellung wie Strichdicke, Farbe, Anzeigeausschnitt, Achsenskalierung, Koordinatengitter etc. können per Menü bedarfsgerecht angepasst werden.



Funktionswerte berechnen

Für die Berechnung von Funktionswerten bietet auch das hier verwendete CAS mehrere Optionen (Zeilen 2 bis 4).

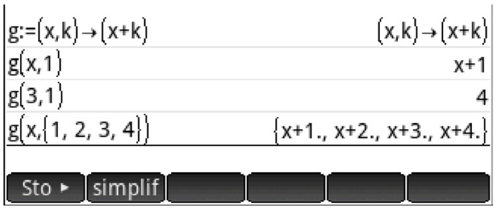
Hinweis: Vorausgehende Ein- oder Ausgaben können markiert und anschließend per „Copy“ in die aktuelle Eingabezeile kopiert werden.



Parameter im Funktionsterm

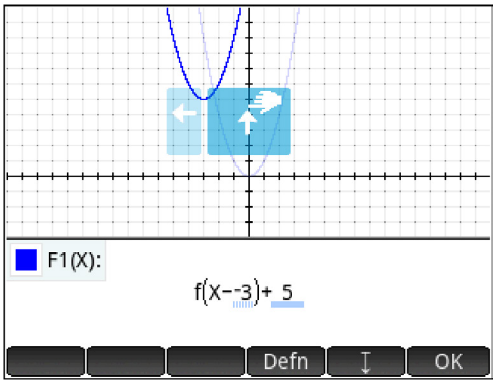
Enthält ein Funktionsterm einen Parameter, so empfiehlt es sich, bei Verwendung eines CAS den Parameter als zweite Variable festzulegen. Damit ist im weiteren Verlauf ein flexibler Zugriff auf Funktionsterme und -werte möglich.

Zeile 4: Ausgabe mehrerer Funktionsterme der Schar



Dynamische Untersuchung von Graphen

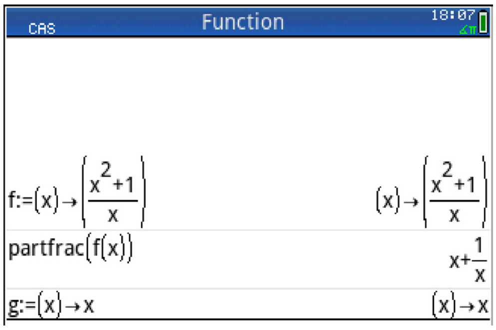
Schieberegler stehen bei diesem CAS nur innerhalb der Geometrie-App zur Verfügung. Zur dynamischen Untersuchung von Funktionsgraphen wird man deshalb vorzugsweise auf die Möglichkeit zurückgreifen, Graphen „per Hand“ verschieben zu können, was im Graphikfenster nach Aktivierung von „Menu“ → „Fcn“ → „Transform“ möglich ist; der zugehörige Funktionsterms des verschobenen Graphen wird dabei simultan angezeigt (vgl. rechts).



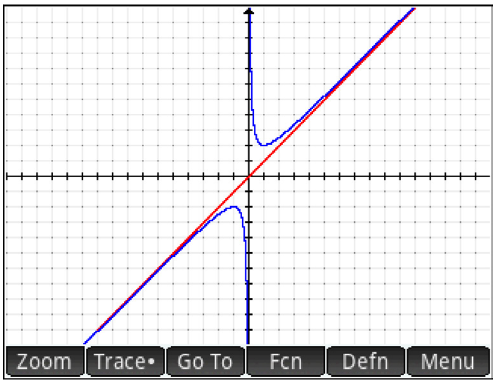
Asymptoten

Der Divisions-Befehl umfasst in der Regel auch die Möglichkeit zur Division von Polynomen.

Das hier verwendete CAS stellt einen eigenen Befehl zur Umformung des Terms in eine Summe aus ganzrationalem und echt gebrochen-rationalem Anteil bereit.



Zur Visualisierung von Asymptoten sind entsprechende Funktionen zu definieren.

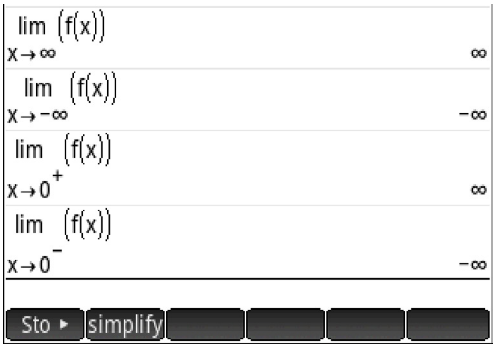


Grenzwerte

Zeilen 1, 2: Verhalten im Unendlichen

Zeilen 3, 4: Verhalten an der Definitionslücke

Hinweis: Der Aufruf des Befehls ist z. B. über → „CAS“ → „Calculus“ → „Limit“ möglich.

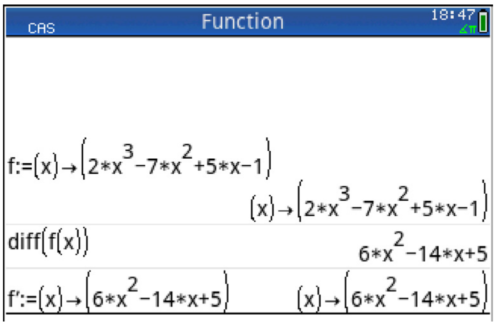


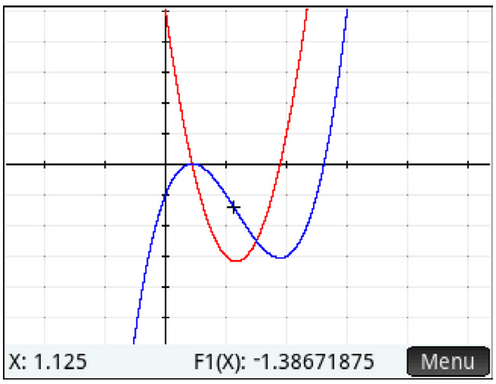
Erste Ableitung

Es empfiehlt sich, zunächst den Term der Ableitungsfunktion zu berechnen und erst in einem zweiten Schritt eine neue Funktion (hier: „f‘ “) zu definieren (Grund siehe Kapitel 2.1.1).

Hinweis: Nicht alle CAS erlauben die Verwendung von Hochkommata für die Bezeichnung von Objekten; in solchen Fällen ist die Verwendung „sprechender“ Alternativen wie z. B f1 oder fs (und für höhere Ableitungen entsprechend f2, f3, … bzw. fss, fsss, …) zu empfehlen.

Besonders interessant für den Lehr-Lern-Prozess kann es sein, die Graphen von Funktion (blau) und Ableitungsfunktion (rot) in einem Koordinatensystem darzustellen.

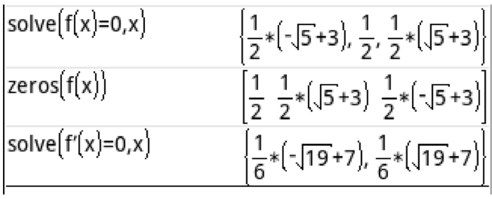


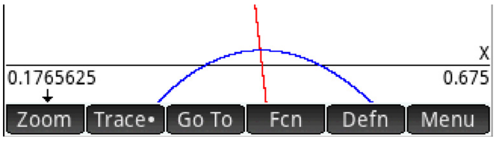


Nullstellen / mögliche Extremstellen

Das mit Blick allein auf den obigen Graphen u. U. überraschende Ergebnis *dreier* Nullstellen (Zeilen 1, 2) kann zum Anlass genommen werden, die Notwendigkeit eines stets kritischen Umgangs mit den Ausgaben des CAS zu thematisieren. Es bietet sich an, den Graphen anschließend zu „vergrößern“ („Zoom In“).

Zeile 3: Nullstellen der ersten Ableitung als Kandidaten für Extremstellen



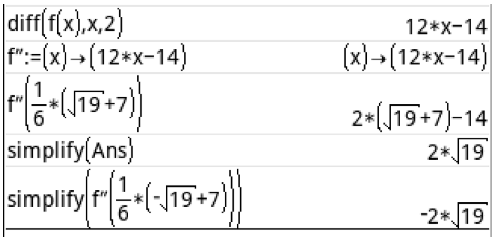


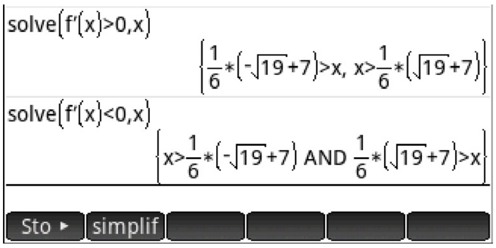
Art der Extrema / zweite Ableitung

Hinweis: Die zweite Ableitung wird an dieser Stelle aufgrund des passenden Zusammenhangs, unabhängig von der Verortung im Lehrplan, angeführt.

Zeilen 3-5: Identifizieren der Extrema über die zweite Ableitung (im Beispiel möglich)

Zeilen 6, 7: Identifizieren der Extrema über das Vorzeichenverhalten der ersten Ableitung

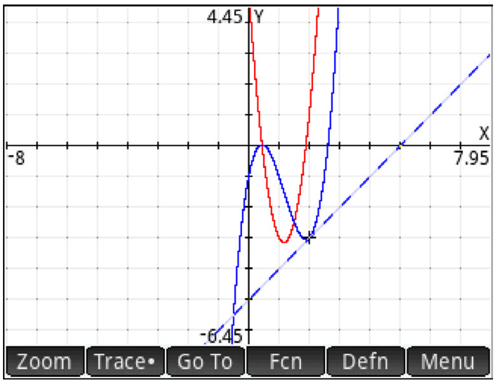




Graphisches Untersuchen einer Funktion

Im Gegensatz zur Arbeit ohne CAS steht eine graphische Darstellung der Funktion sofort zur Verfügung. In vielen Situationen (z. B.: Entwickeln von Vermutungen, Lösen bestimmter Aufgabenstellungen, Überprüfen von Ergebnissen auf Plausibilität) kann es didaktisch oder strategisch von Interesse sein, sich mithilfe des CAS diverse Näherungswerte zu verschaffen.

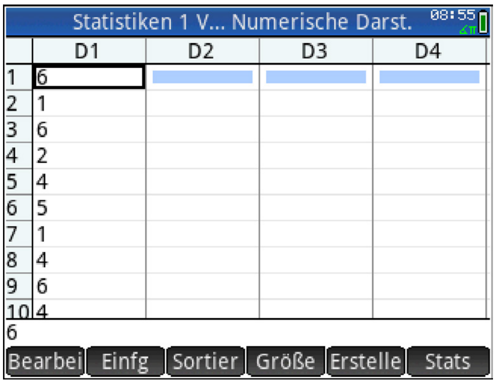
Alle CAS stellen Werkzeuge zur Verfügung, um graphische Untersuchungen durchzuführen, wie z. B. die näherungsweise Bestimmung der Koordinaten besonderer Graphenpunkte oder von Steigungen. Beim hier verwendeten CAS können diese Werkzeuge etwa über „Menu“ → „Fcn“ innerhalb des Graphikfensters aufgerufen werden. So ist es z. B. möglich, durch „Verschieben“ eines ausgewählten Graphenpunkts die in diesem Punkt eingeblendete Tangente an den Graphen dynamisch mitzubewegen (vgl. Screenshot). Das Einblenden der Tangente war bei der neuesten vorliegenden Version der Gerätesoftware jedoch nur möglich, wenn der Funktionsterm von f unter  erneut explizit eingegeben wurde.



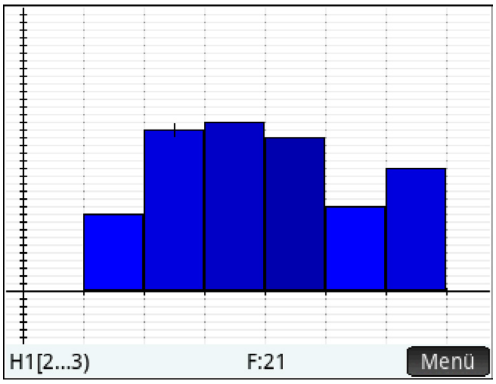
A3.2 Stochastik Jgst. 11

Im Folgenden wird anhand einer typischen Sachsituation ein kurzer Überblick gegeben, welche Funktionen eines CAS sich insbesondere in der Stochastik der Jahrgangsstufe 11 anbieten. Dabei werden **Zufallszahlen** sowie **Histogramme** erzeugt. Dieser Überblick ist nicht als vollständig zu verstehen, sondern gibt nur einen kurzen Eindruck der Einsatzmöglichkeiten.

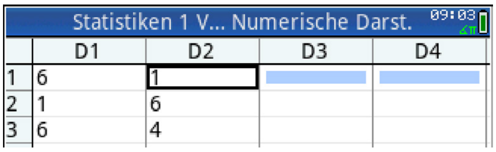
Unter Nutzung der App „Statistiken 1 Var“ lässt sich bei diesem CAS innerhalb des Tabellenbereichs Num Setup z. B. das 100-malige Werfen eines Laplace-Würfels simulieren. Dazu werden über „Erstelle“ mithilfe des Ausdrucks „RANDINT(1,6)“ 100 ganzzahlige Zufallszahlen erzeugt und in die Zellen D1:1 bis D1:100 geschrieben.

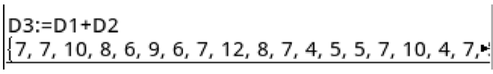


Zur Liste kann zur schnellen Visualisierung mit dem CAS ein Histogramm der absoluten Häufigkeiten der enthaltenen Zahlen erzeugt werden. Dazu ist bei diesem CAS nach Erstellung der Zufallszahlen lediglich der Button Plot Setup zu betätigen und anschließend über „Menü“ der Anzeigebereich anzupassen.

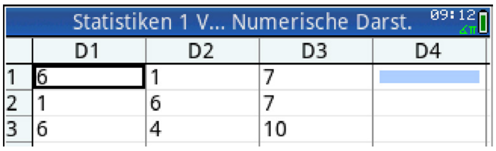


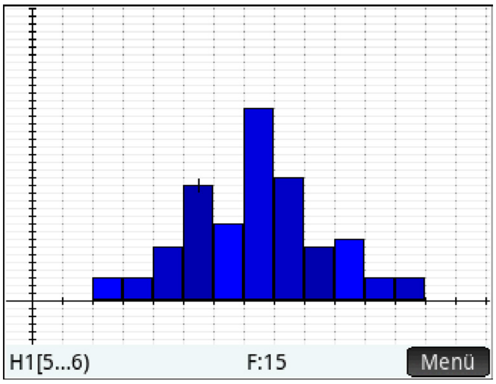
Nach Erstellung einer zweiten Spalte D2 von 100 ganzzahligen Zufallszahlen zwischen 1 und 6 können die beiden Spalteneinträge als Listen elementweise im CAS-Fenster addiert und in der Listenvariablen D3 gespeichert werden, die der dritten Spalte in der Tabelle zugeordnet ist; jeder Eintrag stellt die Augensumme je zweier Würfelwürfe dar.





Wie oben beschrieben kann analog auch zur Spalte D3 – nach Auswahl der Spalte unter Symb Setup – ein Histogramm (der absoluten Häufigkeiten) erstellt werden, das unmittelbar die Verteilung der Augensummen zeigt.





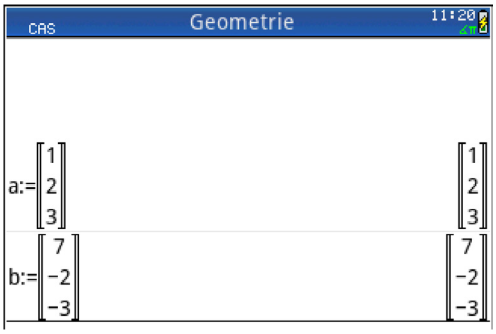
A3.3 Geometrie Jgst. 11

Im Folgenden wird ein kurzer Überblick gegeben, welche Funktionen eines CAS sich insbesondere in der Geometrie der Jahrgangsstufe 11 anbieten. Dieser Überblick ist nicht als vollständig zu verstehen, er vermittelt vielmehr einen kurzen Eindruck der Einsatzmöglichkeiten.

Vektoren eingeben

Vektoren (erzeugt über) werden im CAS einer Variablen als Wert zugewiesen, sodass bei Rechnungen leicht auf diese zurückgegriffen werden kann. Viele CAS formatieren Vektoren dabei so, dass sie der gewohnten Darstellung ähneln.

Hinweis: Beim hier verwendeten CAS muss der Bezeichner eines Vektors mit einem Kleinbuchstaben beginnen.

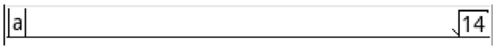


Skalarmultiplikation, Vektoraddition

z. B. zur Bestimmung der Koordinaten des Mittelpunkts einer Strecke

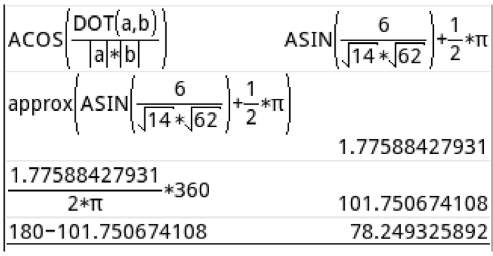
Skalarprodukt, Vektorprodukt

Länge eines Vektors



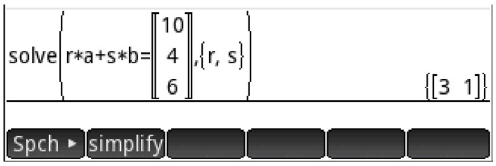
Winkel zwischen Vektoren

Die Größe des von zwei Vektoren eingeschlossenen (spitzen) Winkels lässt sich mithilfe der bekannten Formel berechnen. Je nach aktueller Grundeinstellung erfolgt die Ausgabe dabei exakt oder näherungsweise bzw. im Bogen- oder Gradmaß.



Vektorgleichung

Gleichungen mit Vektoren sind im CAS komfortabel zu lösen, da sie als Vektorgleichungen eingegeben werden können, so hier z. B. die Gleichung $r\cdot\vec{a}+s\cdot\vec{b}=\begin{pmatrix}10\\4\\6\end{pmatrix}$, $r,s\in\mathbb{R}$.

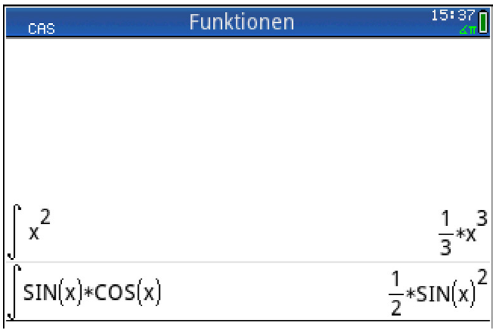


A3.4 Analysis Jgst. 12

Im Folgenden wird ein kurzer Überblick gegeben, welche Funktionen eines CAS sich insbesondere in der Analysis der Jahrgangsstufe 12 anbieten. Dieser Überblick ist nicht als vollständig zu verstehen, er vermittelt vielmehr einen kurzen Eindruck der Einsatzmöglichkeiten.

Unbestimmtes Integral

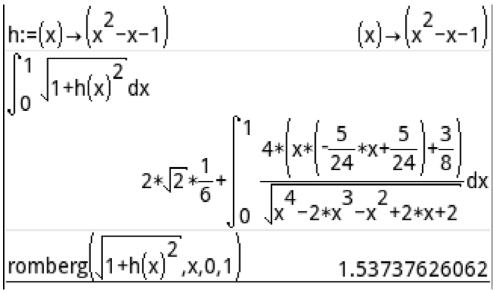
Die Terme von Stammfunktionen bzw. unbestimmte Integrale können mithilfe des CAS direkt bestimmt werden; dazu werden verschiedene Wege der Eingabe angeboten (z. B. über oder mithilfe des Befehls „int()“). Das hier verwendete CAS gibt die entsprechende allgemeine Form ohne eine Konstante aus, die insofern bei Bedarf ergänzt werden muss.



Bestimmtes Integral

Zeilen 1, 2: ohne bzw. mit Parameter

Zeilen 3-5: Befindet sich das hier verwendete CAS im Modus „Exact“ (vgl. Kapitel A3.1), so berechnet es nicht automatisch einen Näherungswert für das bestimmte Integral, wenn es über das „exakte“ Verfahren kein Ergebnis ermitteln kann (Zeile 4); in solchen Fällen kann z. B. mithilfe von „romberg()“ eine näherungsweise Integration erzwungen werden (Zeile 5) oder alternativ mittels „approx()“ ein Näherungswert für das Ergebnis in Zeile 4 ermittelt werden (nebenstehend nicht dargestellt).

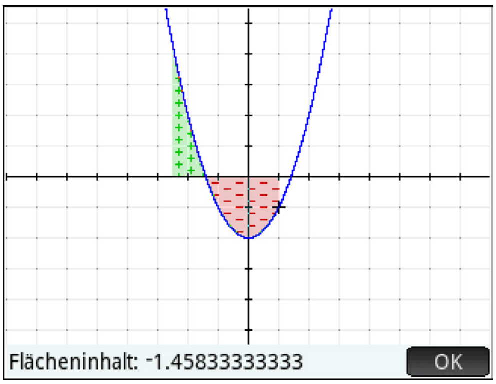


Uneigentliches Integral

Die Betrachtung uneigentlicher Integrale kann auf unterschiedliche Art und Weise erfolgen (siehe Zeilen 1 und 2 bzw. Zeile 3).

Bestimmtes Integral – graphische Darstellung

Das bestimmte Integral lässt sich auch beim hier verwendeten CAS als Flächenbilanz visualisieren. Dazu sind im Graphikfenster nach Aufruf von „Menü“ → „Fkt“ → „Flächeninhalt …“ eine untere und eine obere Integrationsgrenze festzulegen.



A3.5 Stochastik Jgst. 12

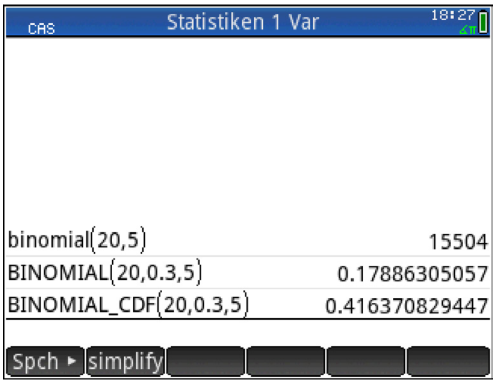
Im Folgenden wird ein kurzer Überblick gegeben, welche Funktionen eines CAS sich insbesondere in der Stochastik der Jahrgangsstufe 12 anbieten. Dieser Überblick ist nicht als vollständig zu verstehen, er vermittelt vielmehr einen kurzen Eindruck der Einsatzmöglichkeiten.

Werte der (kumulat.) Binomialverteilung

Werte der Binomialverteilung und der kumulativen Binomialverteilung können mit dem CAS direkt über Befehle ausgegeben werden. Dies gilt auch für die Werte von Binomialkoeffizienten.

Zeile 1: $\binom{20}{5}$

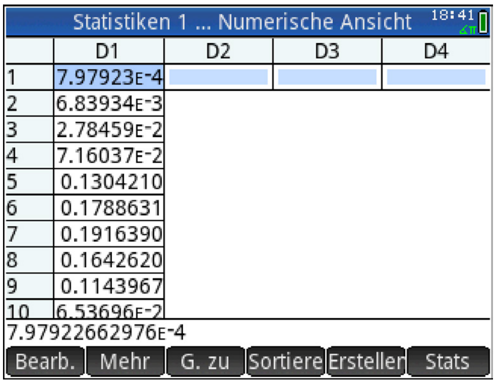
Zeilen 2, 3: $P_{0,3}^{20}(X=5)$ bzw. $P_{0,3}^{20}(X \le 5)$

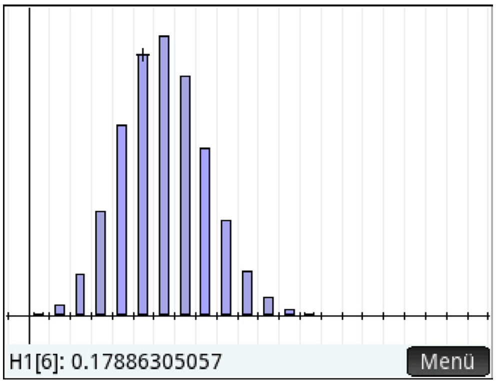


Binomialverteilung graphisch darstellen

Unter Nutzung der Tabellenkalkulation (Num Setup), z. B. in der App „Statistiken 1 Var“, lassen sich mithilfe des CAS Binomialverteilungen und kumulative Binomialverteilungen graphisch darstellen und untersuchen.

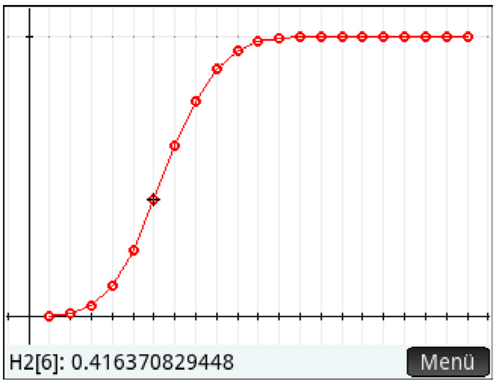
Im Beispiel wurde zunächst mittels „Erstellen“ die Spalte D1 mithilfe des Ausdrucks „BINOMIAL(20,0.3,X)“ befüllt, anschließend unter Symb Setup diese Spalte ausgewählt (unter Zuordnung des Diagrammtyps „Balkendiagramm“) und schließlich mittels Plot Setup dargestellt und geeignet skaliert.





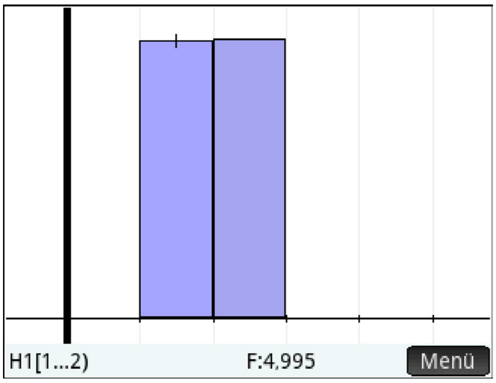
Kumulative Verteilung graphisch darstellen

Nebenstehendes Diagramm wurde analog erzeugt (Ausdruck „BINOMIAL_CDF(20,0.3,X)“, Diagrammtyp „Linie“).



Simulation von Bernoulli-Experimenten

Unter Verwendung des CAS lassen sich auch Bernoulli-Ketten simulieren, z. B. 10 000 Münzwürfe (vgl. dazu auch Kapitel A3.2).



A3.6 Geometrie Jgst. 12

Im Folgenden wird ein kurzer Überblick gegeben, welche Funktionen eines CAS sich insbesondere in der Geometrie der Jahrgangsstufe 12 anbieten. Dieser Überblick ist nicht als vollständig zu verstehen, er vermittelt vielmehr einen kurzen Eindruck der Einsatzmöglichkeiten.

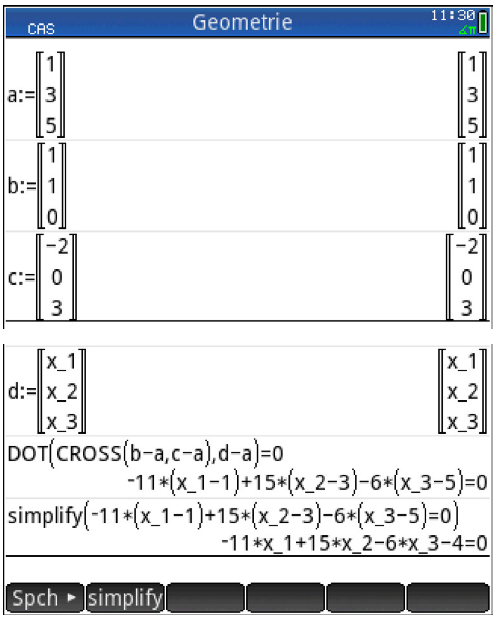
Ebenengleichung in Koordinatenform

Häufig muss die Gleichung einer Ebene, die durch drei vorgegebene Punkte festgelegt ist, in Koordinatenform ermittelt werden (zur Eingabe von Vektoren bei diesem CAS vgl. Kapitel A3.3).

Zeilen 1-3: Eingabe der Punkte als Ortsvektoren

Zeile 4: Definition des Ortsvektors eines allgemeinen Punkts

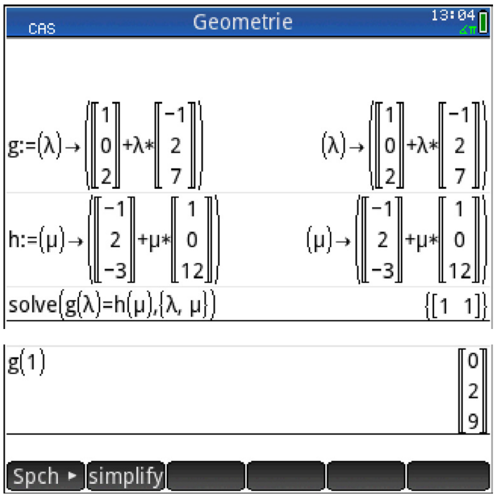
Zeilen 5, 6: Koordinatenform berechnen



Lagebeziehungen

Zeilen 1-4: Bestimmung des Schnittpunkts zweier Geraden (durch Lösen des zugehörigen Gleichungssystems). (Zur Bestimmung der Größe des eingeschlossenen Winkels siehe Kapitel A3.3)

Bei den weiteren typischen Untersuchungen zu Lagebeziehungen geometrischer Objekte können die ggf. auftretenden Gleichungssysteme jeweils mithilfe des CAS gelöst werden, eine ausführliche Darstellung findet sich im Kapitel 3.3.2.



A4 Literatur

Lehrbücher (zugelassen für die Verwendung an bayerischen Gymnasien)

- Distel B., Feuerlein R., Mathematik 11. Unterrichtswerk für das G8, München 2009. [bsv 11]
- Distel B., Feuerlein R., Mathematik 12. Unterrichtswerk für das G8, München 2010. [bsv 12]
- Jahnke T., Scholz D. (Hrsg.), Fokus Mathematik 11. Gymnasium Bayern, Berlin 2009. [Fokus 11]
- Jahnke T., Scholz D. (Hrsg.), Fokus Mathematik 12. Gymnasium Bayern, Berlin 2010. [Fokus 12]
- Schätz U., Eisentraut F. (Hrsg.), delta 11. Mathematik für Gymnasien, Bamberg 2009. [delta 11]
- Schätz U., Eisentraut F. (Hrsg.), delta 12. Mathematik für Gymnasien, Bamberg 2010. [delta 12]
- Schmid A., Weidig I. (Hrsg.), Lambacher Schweizer 11. Mathematik für Gymnasien, Stuttgart 2009. [Lambacher Schweizer 11]
- Schmid A., Weidig I. (Hrsg.), Lambacher Schweizer 12. Mathematik für Gymnasien, Stuttgart 2010. [Lambacher Schweizer 12]

Handreichungen des Staatsinstituts für Schulqualität und Bildungsforschung

- Das Abitur im Fach Mathematik am achtjährigen Gymnasium, München 2008. [HR Abitur G8]
- Computeralgebrasysteme (CAS) im Mathematikunterricht des Gymnasiums – Jahrgangsstufe 10, München 2011. [HR CAS 10]

Lehrplan

- Lehrplan für das achtjährige Gymnasium in Bayern, Ebene 4, Fach-/Jahrgangsstufenlehrplan Mathematik, München 2004 (letzte Änderung 2009) [Fachlehrplan 2004]

Weitere gedruckte Publikationen

- Arnold E., Bichler E., Fritsche F., Seidel K., Sinzinger M., Fokus Mathematik. Gymnasium Bayern. Mathematik mit CAS – Arbeitsheft für Schülerinnen und Schüler. Bände 1-3, Berlin 2010, 2011 bzw. 2013.
- Barzel B., Computeralgebra im Mathematikunterricht: Ein Mehrwert – aber wann? Münster 2012.
- Barzel B., Pallack A. (Hrsg.), ... aller Anfang ist leicht. Aufgaben mit TI-Nspire/TI-Nspire CAS, Münster 2008.
- Barzel B., Pallack A. (Hrsg.), Aufgaben mit TI-Nspire/TI-Nspire CAS, Münster 2007.
- Baumann R., Analysis I. Ein Arbeitsbuch mit Derive, Stuttgart 2002.
- Bergmann D., Braun M., Fischer F., Kessler S., Weishaupt J., delta – neu / CAS-Arbeitsheft 12. Mathematik für Gymnasien / Mathematik mit CAS, Bamberg 2013.
- Bichler E., Explorative Studie zum langfristigen Taschencomputereinsatz im Mathematikunterricht. Der Modellversuch Medienintegration im Mathematikunterricht (M³) am Gymnasium, Hamburg 2010.
- Böhm J., Optimierungsaufgaben grafisch, analytisch und numerisch lösen mit dem TI-92, Hagenberg 2005.
- Brandt D., Reinelt G., Lambacher Schweizer. Mathematik für Gymnasien. Gesamtband Oberstufe mit CAS, Stuttgart 2007.
- Braun M., Grunick C., Kessler S., Weishaupt J., delta – neu / CAS-Arbeitsheft 10 bzw. 11. Mathematik für Gymnasien / Mathematik mit CAS, Bamberg 2011 bzw. 2012.
- Bruder R. (Hrsg.), Aufgaben mit CAS-Einsatz. Modellversuch 2004/2005 Hessen, Freising 2006.
- Bruder R., Weiskirch W. (Hrsg.), CALiMERO. Computer-Algebra im Mathematikunterricht: Entdecken, Rechnen, Organisieren. Bände 1 - 5, Münster 2007 - 2009.
- Demana F., Waits B., Foley G., Kennedy, D., Precalculus. Functions and Graphs, Boston 2004.
- Deschauer S. (Hrsg.), Der Mathematikunterricht (MU) – Schwerpunkt Computer-Algebra-Systeme. Jahrgang 60, Heft 1, Seelze 2014.
- Deschauer S. (Hrsg.), Der Mathematikunterricht (MU) – Schwerpunkt Didaktisches Potential von GeoGebra. Jahrgang 60, Heft 4, Seelze 2014.
- Dopfer G., Reimer R., Funktionen mit Parametern, Kurvenscharen. Arbeitsmaterialien unter Einsatz eines GTR/CAS. Lehrermaterialien und Lösungshinweise, Stuttgart 2003.
- Edwards C. H., Penney D. E., Single Variable Calculus, Athens 2002.
- Fulge R., Röttger A., Neue Ideen für den Mathematikunterricht. Einsatz moderner Technologien im Vorkurs der Jahrgangsstufe 11, Hannover 1999.
- Greefrath G., Oldenburg R., Siller H.-S., Ulm V., Weigand H.-G., Didaktik der Analysis – Aspekte und Grundvorstellungen zentraler Begriffe, Heidelberg u. Berlin 2016.
- Greefrath G., Mühlenfeld U. (Hrsg.), Realitätsbezogene Aufgaben für die Sekundarstufe II. Mit Ausarbeitungen für den ClassPad 300 Plus. Entwickelt im Rahmen des Modellversuchs SINUS-Transfer NRW, Troisdorf 2007.

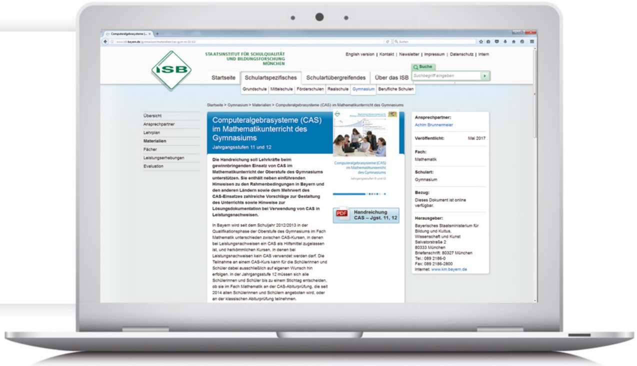
- Heintz G., Pinkernell G., Schacht F. (Hrsg.), Digitale Werkzeuge für den Mathematikunterricht. Festschrift für Hans-Jürgen Elschenbroich, Neuss 2016.
- Heugl H., Mathematikunterricht mit Technologie. Ein didaktisches Handbuch mit einer Vielzahl an Aufgaben, Linz 2014.
- Heugl H., Klinger W., Lechner J., Mathematikunterricht mit Computeralgebra-Systemen. Ein didaktisches Lehrbuch mit Erfahrungen aus dem österreichischen Derive-Projekt, Bonn 1996.
- Hischer H., Mathematikunterricht und neue Medien. Hintergründe und Begründungen in fachdidaktischer und fachübergreifender Sicht, Hildesheim 2002.
- Kaenders R., Schmidt R. (Hrsg.), Mit GeoGebra mehr Mathematik verstehen. Beispiele für die Förderung eines tieferen Mathematikverständnisses aus dem GeoGebra Institut Köln/Bonn, Wiesbaden 2011, 2014.
- KMK-Sekretariat (Hrsg.), Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife, Bonn und Berlin 2015. [BS M Allg. HSR]
- Knechtel H., Kramer H., Krüger U.-H., Weiskirch W., Materialien für den Einsatz von Grafikrechnern und Computeralgebra. Teil 1, Braunschweig 2003.
- Moldenhauer W. (Hrsg.), Der Einsatz des TI-89 in der Jahrgangsstufe 10 an Thüringer Gymnasien, Freising 2003.
- Landesinstitut für Schulentwicklung Baden-Württemberg (Hrsg.), Unterrichtspraxis mit dem grafikfähigen Taschenrechner in der Klassenstufe 7/8. Erfahrungsberichte und Unterrichtsmaterialien zur Leitidee funktionaler Zusammenhang, Heimsheim 2007.
- Lokar M., Robutti O., Sinclair N., Weigand H.-G., Introduction to the papers of TWG 16: Students learning mathematics with resources and technology. Proceedings of the CERME 2015 in Prague. 2390-2393, 2016.
- Pallack A. (Hrsg.), mathematik lehren – Digitale Medien nutzen. Heft 189, Seelze, 2015
- Pallack A., Mit CAS zum Abitur. TI-89 Titanium und Voyage 200 in Unterricht und Prüfung, Braunschweig 2006.
- Prugger E., Rauniak C., Schneider E., Wachstums- und Abnahmeprozesse mit dem TI-92. Ein Lehrgang zur Behandlung von Exponential- und Logarithmusfunktionen, Hagenberg 2002.
- Ralle B. (Hrsg.), MNU Journal – Schwerpunkt Digitale Werkzeuge. Jahrgang 69, Heft 6, Neuss 2016.
- Ruppert M., Wörler J. (Hrsg.), Technologien im Mathematikunterricht: Eine Sammlung von Trends und Ideen, Wiesbaden 2013.
- Schmid A. (Hrsg.), Lambacher Schweizer. Mathematik – Oberstufe mit CAS-Einsatz, Stuttgart 2016.
- Schneider G., Girlinger H., Paul M., Tinhof F., Mathematik II HLW/HLT/HLM/ALM/HLK, Linz 2007.
- Sächsisches Staatsinstitut für Bildung und Schulentwicklung (Hrsg.), Einsatz von Computer-Algebra-Systemen im Mathematikunterricht. Handreichung, Lapertswalde 2006.
- Weigand H.-G., Weth T., Computer im Mathematikunterricht. Neue Wege zu alten Zielen, Heidelberg 2002, 2010.

Publikationen im Internet

- www.mebis.bayern.de → Lernplattform → teachSHARE (abgerufen am 20.12.2016)
  „TeachSHARE", die Austauschplattform für Lehrkräfte innerhalb der passwortgeschützten Lernplattform des Portals „mebis" des Bayerischen Staatsministeriums für Bildung und Kultus, Wissenschaft und Kunst, bietet ausgearbeitete Bespiele für den Unterrichtseinsatz zur unmittelbaren Integration in den eigenen Bereich der Lernplattform.
- www.geogebra.org/materials/ (abgerufen am 20.12.2026)
  Die Internetseiten der „GeoGebra Community" weisen eine Vielzahl von Materialien auf, welche sich nach Stichworten durchsuchen lassen. Sie stehen zum Download zur Verfügung, lassen sich aber auch online im Browser nutzen.
- www.t3deutschland.de (abgerufen am 20.12.2016)
  Die Internetseiten des Lehrerfortbildungsprojekts „Teachers Teaching with Technology" (T^3) enthalten eine umfangreiche Datenbank mit Literaturangaben zum Einsatz von CAS.
- www.acdca.ac.at (abgerufen am 20.12.2016)
  Die Internetseiten des „Austrian Center for Didactics of Computer Algebra" bieten eine umfangreiche Sammlung von Materialien zum Einsatz von CAS im Unterricht.
- wiki.zum.de/Mathematik-digital (abgerufen am 20.12.2016)
  Das Wiki „Mathematik Digital" enthält eine Sammlung von Unterrichtsmaterialien sowie eine Sammlung von Links zu digitalen Materialien für den Mathematikunterricht, insbesondere digitalen Lernpfaden (als interaktive Unterrichtseinheiten).
- www.nctm.org (abgerufen am 20.12.2016)
  Die Internetseiten des „National Council of Teachers of Mathematics", des größten Verbandes von Mathematiklehrkräften der USA, bieten eine umfangreiche Sammlung von Materialien, die teilweise ohne Abschluss einer (kostenpflichtigen) Mitgliedschaft verfügbar sind.

Weitere Informationen

▶ www.isb.bayern.de/gymnasium/materialien/cas-gym-m-11-12/



Herausgeber
Bayerisches Staatsministerium für Bildung und Kultus, Wissenschaft und Kunst, Salvatorstraße 2, 80333 München

Diese Broschüre wurde im Auftrag des Bayerischen Staatsministeriums für Bildung und Kultus, Wissenschaft und Kunst von einem Arbeitskreis am Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung (ISB) erarbeitet.

Leitung des Arbeitskreises

Achim Brunnermeier	ISB

Mitglieder des Arbeitskreises

Dr. Ewald Bichler	Gymnasium Ergolding
Gunnar Leuner	Gymnasium Veitshöchheim
Christian Ratzka	Gymnasium Untergriesbach
Tina Wefers	Gymnasium Kirchheim

Wissenschaftliche Beratung

Prof. Dr. H.-G. Weigand	Julius-Maximilians-Universität Würzburg
Johannes Beck	Julius-Maximilians-Universität Würzburg

Vormaliger Arbeitskreis

Vasco Lorber	ISB (Leitung)
Elisabeth Arnold	H.-Leinberger-Gym. Landshut
Dr. Ewald Bichler	H.-Leinberger-Gym. Landshut
Frank Fritsche	Rupprecht-Gym. München
Martin Heß	W.-v.-Siemens-Gym. Regensburg
Korbinian Seidel	Ludwig-Thoma-Gym. Prien

Anschrift
Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung
Abteilung Gymnasium – Referat Mathematik
Schellingstraße 155 · 80797 München
Tel.: 089 2170 2138 · Fax: 089 2170 2115
E-Mail: *achim.brunnermeier@isb.bayern.de*
Internet: *www.isb.bayern.de*

Coverfoto
Berit Holzner

Satz
PrePress-Salumae.com, Kaisheim

Druck
Appel & Klinger Druck und Medien GmbH, Schneckenlohe