STAATSINSTITUT FÜR SCHULQUALITÄT
UND BILDUNGSFORSCHUNG
MÜNCHEN

GYMNASIUM

HANDREICHUNG

Computeralgebrasysteme (CAS) im Mathematikunterricht des Gymnasiums

Jahrgangsstufe 10

Mathematik

STAATSINSTITUT FÜR SCHULQUALITÄT
UND BILDUNGSFORSCHUNG
MÜNCHEN

Computeralgebrasysteme (CAS) im Mathematikunterricht des Gymnasiums

Jahrgangsstufe 10

München 2011

Die Publikation wurde im Auftrag des Bayerischen Staatsministeriums für Unterricht und Kultus von einem Arbeitskreis am Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung erarbeitet.

Leitung des Arbeitskreises

Christian Scheungrab	Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung
Vasco Lorber	Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung

Mitglieder des Arbeitskreises

Elisabeth Arnold	Hans-Leinberger-Gymnasium Landshut
Dr. Ewald Bichler	Hans-Leinberger-Gymnasium Landshut
Frank Fritsche	Rupprecht-Gymnasium München
Martin Heß	Werner-von-Siemens-Gymnasium Regensburg
Korbinian Seidel	Ludwig-Thoma-Gymnasium Prien

Herausgeber Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung

Kontakt

Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung
Abteilung Gymnasium – Referat Mathematik
Schellingstraße 155
80797 München
Tel. 089 2170-2138
Fax 089 2170-2125
vasco.lorber@isb.bayern.de
www.isb.bayern.de

Inhalt

Vorwort

Zum Schuljahr 2003/2004 initiierte das Bayerische Staatsministerium für Unterricht und Kultus den Schulversuch „Medienintegration im Mathematikunterricht“, an dem gegenwärtig etwa 20 Gymnasien teilnehmen. Gegenstand des Schulversuchs ist der Einsatz von Computeralgebrasystemen (CAS) im Mathematikunterricht ab der Jahrgangsstufe 10. Der Schulversuch wird durch den Lehrstuhl für Didaktik der Mathematik der Universität Würzburg wissenschaftlich begleitet und evaluiert.

Zu den Standardfunktionen eines Taschencomputers mit integriertem CAS (im Folgenden als CAS-Rechner bezeichnet) gehören neben den Funktionen eines herkömmlichen Taschenrechners z. B. das Differenzieren und Integrieren von Funktionen, das Zeichnen von Graphen oder Tabellenkalkulation. CAS-Rechner eröffnen damit im Vergleich zu herkömmlichen Taschenrechnern wesentlich größere didaktische Möglichkeiten. Sie unterstützen Schülerinnen und Schüler bei einem selbsttätigen, dynamischen und anschaulichen Zugang zu mathematischen Inhalten. Auch ist es beispielsweise möglich, realitätsnahe Fragestellungen im Unterricht zu behandeln, die häufig mit einem hohen rechnerischen Aufwand verbunden und damit mit herkömmlichen Methoden in der Bearbeitung zu zeitaufwändig sind.

In anderen Bundesländern ist der Einsatz von CAS bereits verbreitet; so werden beispielsweise in Baden-Württemberg, Sachsen und Thüringen schon heute Abituraufgaben gestellt, die unter Verwendung eines CAS-Rechners bearbeitet werden dürfen. Für die am bayerischen Schulversuch beteiligten Gymnasien wird im Schuljahr 2011/2012 erstmals eine Abiturprüfung im Fach Mathematik angeboten, bei der ein CAS-Rechner als Hilfsmittel zugelassen ist. Mit Ablauf des Schuljahres 2012/2013 endet der Schulversuch.

Es ist vorgesehen, beginnend mit der Abiturprüfung 2014 den Schülerinnen und Schülern aller bayerischen Gymnasien die Möglichkeit einzuräumen, im Fach Mathematik an einer CAS-Abiturprüfung teilzunehmen, bei der ein CAS-Rechner als Hilfsmittel zugelassen ist. Diese Abiturprüfung unterscheidet sich von der – auch in Zukunft weiterhin angebotenen – herkömmlichen Abiturprüfung, deren Aufgaben ohne CAS-Einsatz zu bearbeiten sind, hinsichtlich der Aufgabenstellung und der Anzahl der erreichbaren Bewertungseinheiten insbesondere dann, wenn typische Funktionen eines CAS-Rechners genutzt werden können.

Damit die Schülerinnen und Schüler bereits in der Jahrgangsstufe 10 in das Arbeiten mit CAS eingeführt werden können, erhalten alle Gymnasien die Möglichkeit, ab der Jahrgangsstufe 10 CAS-Klassen einzurichten, in denen CAS-Rechner im Fach Mathematik – sowie in den Fächern Physik und Informatik – auch bei Leistungsnachweisen verwendet werden dürfen; im Schuljahr 2011/2012 ist dies erstmals in der Jahrgangsstufe 10 möglich.

Die vorliegende Handreichung soll Lehrkräfte beim gewinnbringenden Einsatz von CAS im Mathematikunterricht der Jahrgangsstufe 10 unterstützen. Sie geht zunächst einleitend auf die Vorteile eines CAS-Rechners, auf häufig gestellte Fragen zum CAS-Einsatz und auf die Grundfertigkeiten in der Anwendung von CAS ein, die in der Jahrgangsstufe 10 erworben werden sollen; außerdem wird ein möglicher Einstieg in die Arbeit mit CAS-Rechnern beschrieben. Im Anschluss daran liefern zahlreiche Vorschläge zur Gestaltung des Unterrichts exemplarisch Anregungen für eine Umsetzung des Lehrplans unter Verwendung von CAS; auch die Auswahl geeigneter Aufgaben aus dem vielfältigen Angebot der zugelassenen Lehrbücher wird unterstützt. Abschließend werden Hinweise zum Einsatz von CAS bei Leistungsnachweisen gegeben.

Um die Arbeit mit der Handreichung zu erleichtern, werden die Inhalte durch Screenshots der beiden im Rahmen des Schulversuchs „Medienintegration im Mathematikunterricht“ verwendeten CAS-Rechner veranschaulicht. Dabei ist stets jeweils links ein Screenshot des TI-Nspire CAS (Texas Instruments) und rechts ein entsprechender Screenshot des ClassPad 330 (Casio) abgebildet. Zu beachten ist, dass die Abbildungen die Ausgabe des jeweiligen CAS-Rechners technisch bedingt nicht immer vollständig darstellen können.

Die Handreichung steht auf den Internetseiten des Staatsinstituts für Schulqualität und Bildungsforschung (www.isb.bayern.de) zum Download bereit.

Im Auftrag des Bayerischen Staatsministeriums für Unterricht und Kultus wird am Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung derzeit an der Erstellung einer Handreichung zum Einsatz von CAS im Mathematikunterricht der Jahrgangsstufen 11 und 12 sowie in der Abiturprüfung gearbeitet; diese Handreichung wird auch eine beispielhafte CAS-Abiturprüfung enthalten. Die Akademie für Lehrerfortbildung und Personalführung (ALP) in Dillingen bietet Fortbildungsveranstaltungen zum Einsatz von CAS im Mathematikunterricht an.

Den Mitgliedern des für die Erarbeitung dieser Handreichung verantwortlichen Arbeitskreises gilt besonderer Dank für sehr wertvolle Anregungen und Beiträge.

Vasco Lorber

Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung
Abteilung Gymnasium – Referat Mathematik

1 Vorbemerkungen

1.1 Computeralgebrasysteme (CAS)

Zur Unterstützung des Mathematikunterrichts wird eine Vielzahl digitaler Medien angeboten, von Lernumgebungen zum Erarbeiten, Festigen oder Vertiefen ausgewählter mathematischer Inhalte bis hin zu Programmen, die vielfältige Möglichkeiten im Sinne mathematischer Werkzeuge bieten. Zu diesen Werkzeugen gehören CAS, deren Entwicklung in den Sechzigerjahren begann. Mittlerweile gibt es zahlreiche CAS für Personal Computer; das für den Einsatz im Unterricht empfehlenswerte Programm GeoGebra wird gegenwärtig um eine CAS-Komponente erweitert.

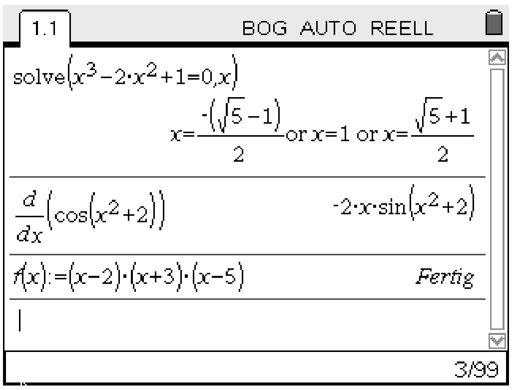
Seit Mitte der Neunzigerjahre werden Taschencomputer mit integriertem CAS (im Folgenden als CAS-Rechner bezeichnet) angeboten. Für den Einsatz im Mathematikunterricht geeignete CAS-Rechner besitzen folgende Standardfunktionen:

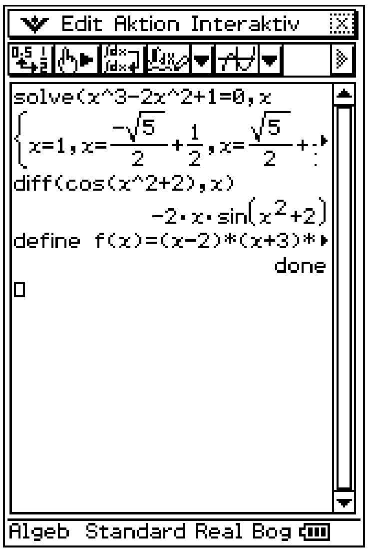
- Symbolisches Rechnen
- Zeichnen von Funktionsgraphen
- Dynamische Geometrie
- Tabellenkalkulation
- Statistik
- Programmieren

Aufgrund dieser Funktionalität sind CAS-Rechner vielseitige Werkzeuge, die das Lehren und Lernen von Mathematik wirkungsvoll unterstützen können.

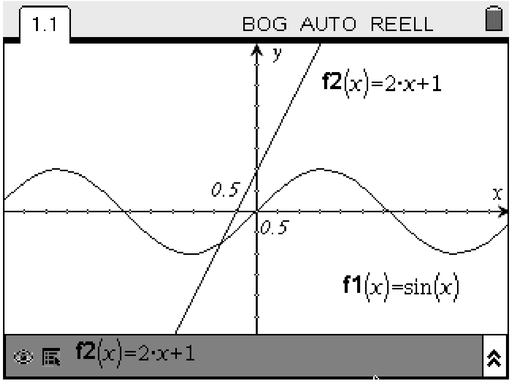
Folgende Abbildungen veranschaulichen die Standardfunktionen exemplarisch.

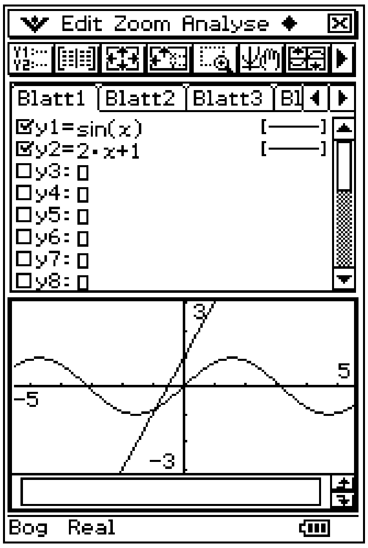
- Symbolisches Rechnen



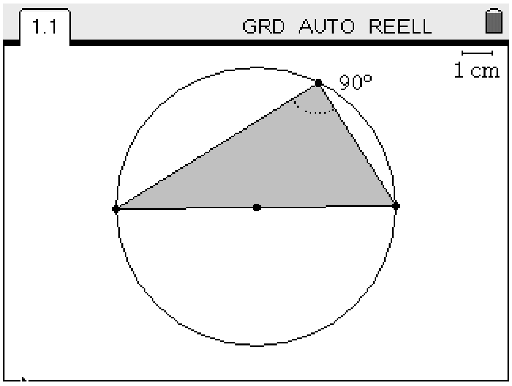


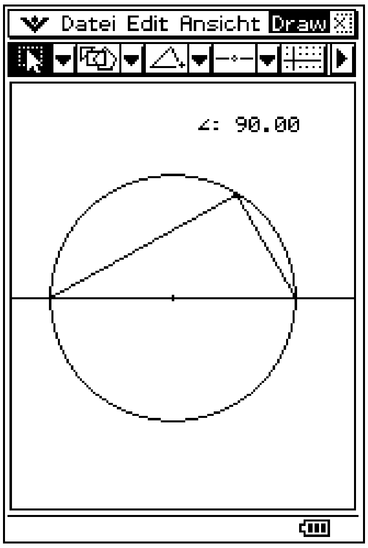
- Zeichnen von Funktionsgraphen



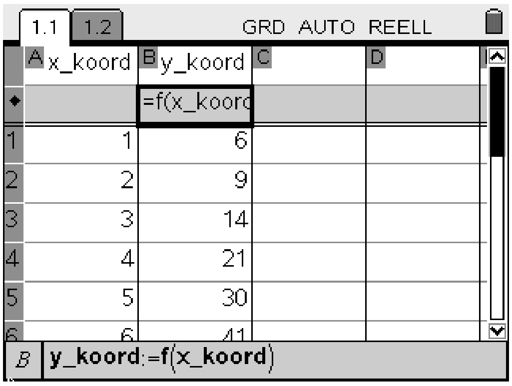


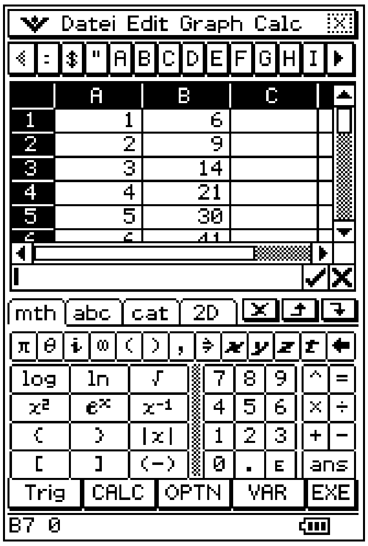
- Dynamische Geometrie



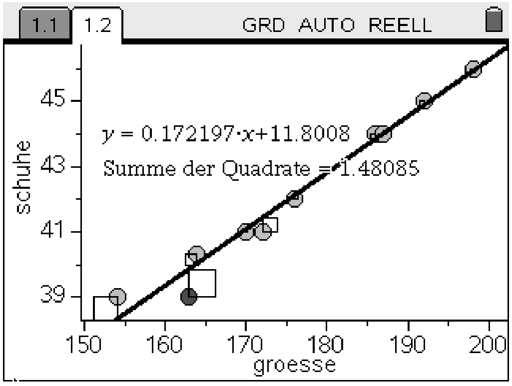


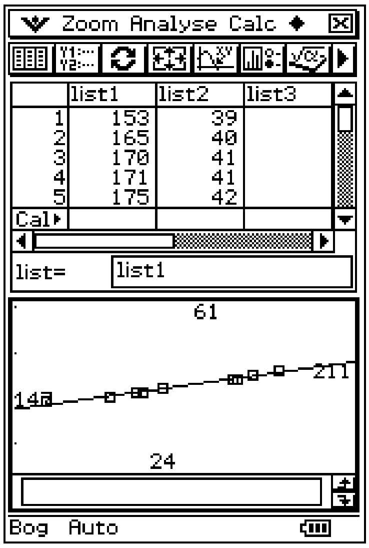
- Tabellenkalkulation



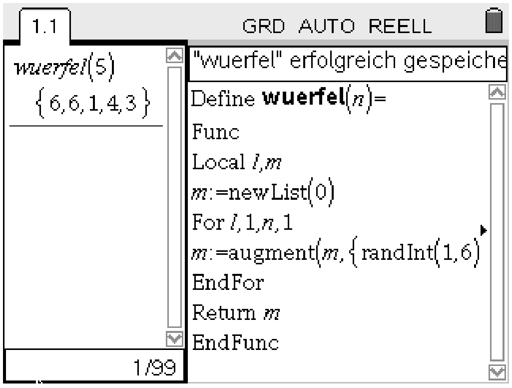


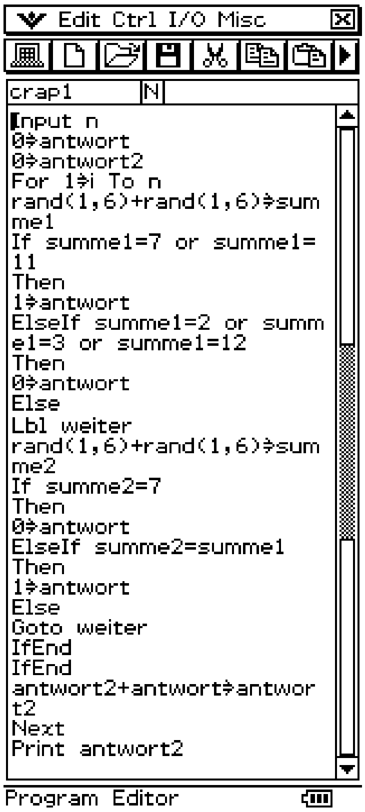
♦ Statistik





♦ Programmieren





1.2 Vorteile eines CAS-Rechners

Aufgrund seiner im Vergleich zu einem herkömmlichen Taschenrechner wesentlich umfangreicheren Funktionalität bietet ein CAS-Rechner vielfältige Einsatzmöglichkeiten als individuell einsetzbares Lernwerkzeug und didaktisches Hilfsmittel. Wissenschaftliche Untersuchungen und Erfahrungen aus dem Schulversuch „Medienintegration im Mathematikunterricht“, die dieser Handreichung zugrunde liegen, zeigen, dass diese Möglichkeiten für die Arbeit mit den Schülerinnen und Schülern gewinnbringend genutzt werden können.

Die Vorteile der Verwendung eines CAS-Rechners liegen im Vergleich zu einem herkömmlichen Taschenrechner insbesondere in folgenden Möglichkeiten:

- **Schnelles Rechnen und Zeichnen**
  Elementare algebraische und geometrische Arbeitsschritte lassen sich mit verhältnismäßig geringem Zeitaufwand ausführen. So unterstützt der Einsatz eines CAS-Rechners das Lösen von Aufgaben, deren rein manuelle Bearbeitung deutlich mehr Zeit in Anspruch nehmen würde.

- **Veranschaulichung mathematischer Inhalte und Zusammenhänge**
  Mithilfe eines CAS-Rechners lassen sich mathematische Inhalte auf unterschiedliche Weise veranschaulichen und Zusammenhänge zwischen verschiedenen Darstellungsformen verdeutlichen.

- **Konzentration auf Wesentliches**
  Die Aufmerksamkeit der Schülerinnen und Schüler ist im Rahmen der Beschäftigung mit einer Aufgabe häufig durch Rechenarbeiten gebunden. Der Einsatz eines CAS-Rechners kann diese Arbeiten vereinfachen. So können sich die Schülerinnen und Schüler auf mathematische Inhalte und Zusammenhänge, die bewusste Auswahl mathematischer Verfahren, die Modellierung von Sachsituationen sowie die Interpretation von Ergebnissen konzentrieren – das Verständnis wird gefördert.

- **Flexible Anwendung mathematischer Verfahren**
  Aufgaben lassen sich mithilfe eines CAS-Rechners flexibel unter Anwendung unterschiedlicher mathematischer Verfahren bearbeiten:
  - symbolisch-algebraisch (z. B. algebraische Begründungen für beobachtete geometrische Eigenschaften)
  - graphisch (z. B. graphische Näherungslösung von Aufgaben, die keine algebraische Lösung zulassen)
  - tabellarisch-numerisch (Tabellenkalkulation)

- **Unterstützung zeitgemäßer Aufgabenkultur**
  Die Verwendung von CAS unterstützt insbesondere im Zusammenhang mit der Bearbeitung von Aufgaben in vielfältiger Weise eine Verschiebung der Schwerpunkte mathematischen Arbeitens im Unterricht. CAS-Rechner entlasten vom Ausführen bloßer Routinen; das bewusste Auswählen mathematischer Verfahren, das Modellieren von Sachsituationen sowie das Interpretieren von Ergebnissen können stärker betont werden. Auch offene Aufgabenstellungen lassen sich mithilfe eines CAS-Rechners effektiv bearbeiten. Dessen Einsatz trägt zur Entwicklung unterschiedlicher Lösungswege bei, deren Vergleich Schülerinnen und Schülern Anlass für Kommunikation über mathematische Inhalte und Verfahren geben kann.

- **Arbeit mit realistischen Daten**
  Im Rahmen der Modellierung von Sachsituationen kann ein CAS-Rechner zur Durchführung umfangreicher oder komplexer Rechnungen sowie zur Erstellung aufwändiger Zeichnungen genutzt werden. Eine Beschränkung auf einfache, häufig unrealistische Daten ist unnötig.

- **Experimentelles, forschendes Arbeiten**
  Der Einsatz eines CAS-Rechners unterstützt experimentelles, forschendes Arbeiten. Die Erleichterung der Darstellung, Strukturierung und Analyse komplexer mathematischer Objekte (z. B. Funktionenscharen) erweitert die Möglichkeiten zur Bearbeitung von Problemstellungen.

- **Selbständiges und eigenverantwortliches Lernen**
  Insbesondere im Rahmen schülerzentrierter Unterrichtsformen oder von Hausaufgaben können die Schülerinnen und Schüler mithilfe eines CAS-Rechners Ergebnisse individuell kontrollieren und ihr Vorgehen sowie mögliche Fehlerquellen analysieren – selbständiges und eigenverantwortliches Lernen wird unterstützt. Dabei sollte den Schülerinnen und Schülern die Einsicht vermittelt werden, dass die Übung manueller Fertigkeiten trotz Verfügbarkeit eines CAS-Rechners unbedingt erforderlich ist. In schülerzentrierten Unterrichtsformen unterstützt die Lehrkraft die Selbsttätigkeit der Schülerinnen und Schüler, führt sie jedoch weniger stark als im Frontalunterricht. Sie übernimmt die Aufgabe der Moderation und steht für die Anliegen der Schülerinnen und Schüler zur Verfügung.

- **Förderung der Medienkompetenz**
  Die Empfehlung der Kultusministerkonferenz zur Stärkung der mathematisch-naturwissenschaftlich-technischen Bildung sieht vor, „Computerprogramme (z. B. Tabellenkalkulation, dynamische Geometrie, Computer-Algebra) sowie Taschenrechner (z. B. mit Graphikfunktion oder CAS) in allen MINT-Fächern verbindlich [zu] nutzen“[1]. Durch die Verwendung von CAS lernen Schülerinnen und Schüler, ein zeitgemäßes Hilfsmittel sinnvoll einzusetzen, das insbesondere in naturwissenschaftlichen und technischen Studiengängen sowie in der beruflichen Praxis zunehmend an Bedeutung gewinnt. Damit kann der Mathematikunterricht zur Entwicklung von Medienkompetenz beitragen.

1.3 Antworten auf häufig gestellte Fragen

Im Folgenden werden Fragen beantwortet, die im Rahmen des Schulversuchs „Medienintegration im Mathematikunterricht“ häufig gestellt wurden.

- **Müssen Lehrkräfte über vertiefte Computerkenntnisse verfügen oder gar eine Programmiersprache erlernen?**
  Die Bedienung eines modernen CAS-Rechners ist über intuitiv verwendbare Menüs möglich, die Rechnersprache orientiert sich an der üblichen mathematischen Notation. So ist etwa zur Berechnung der Ableitung einer vorher definierten Funktion f lediglich die Eingabe $\frac{d}{dx}f(x)$ oder $\mathrm{diff}(f(x),x)$ nötig; die CAS-Rechner bieten dafür entsprechende Formatvorlagen. Grundlegende Fertigkeiten im Umgang mit Taschenrechnern sind für einen Einstieg in die Arbeit mit CAS-Rechnern also ausreichend.

- **Ist für den Einsatz von CAS ein gesonderter Lehrplan erforderlich?**
  Der CAS-Einsatz bereichert die Unterrichtsmethodik, unterstützt das Vermitteln und Erlernen mathematischer Kenntnisse, Fähigkeiten und Fertigkeiten und fördert das Verständnis. Er ändert jedoch nicht die Lernziele und Lerninhalte des Mathematikunterrichts; ein gesonderter Lehrplan ist deshalb nicht erforderlich.

- **Geht durch den Einsatz von CAS-Rechnern Zeit verloren, die dann zur Erfüllung des Lehrplans fehlt?**
  In einem CAS-gestützten Unterricht sind die Behandlung der verbindlichen Lerninhalte, das für nachhaltiges Lernen erforderliche intensive Üben, Wiederholen und Vertiefen sowie die Durchführung fächerverknüpfender und fächerübergreifender Vorhaben uneingeschränkt möglich.

- **Wie lange dauert die Einführung des CAS-Rechners im Unterricht und wie kann diese organisiert werden?**
  Einige grundlegende Fertigkeiten im Umgang mit dem CAS-Rechner müssen zwar zu Beginn des Schuljahres vermittelt werden (vgl. 2.1.3), können anschließend jedoch sofort für die Arbeit mit den Schülerinnen und Schülern genutzt werden. Besonders effektiv lässt sich die Einführung in die Arbeit mit dem CAS-Rechner gestalten, wenn die Schülerinnen und Schüler ihre Hausaufgaben von Beginn an mithilfe des

[1] Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 07.05.2009, S. 5 (vgl. www.kmk.org → Dokumentation / Beschlüsse → Veröffentlichungen / Beschlüsse → Bildung / Schule → Allgemeine Bildung → Fächer und Unterrichtsinhalte → Mathematik, Naturwissenschaften, Technik; abgerufen am 15.07.2011)

CAS-Rechners kontrollieren. Die weiteren CAS-Grundfertigkeiten (vgl. 2.1.1) können dann anwendungsbezogen geschult werden. Längere Vorführungen zur Bedienung des CAS-Rechners sind grundsätzlich nicht im Sinne eines gewinnbringenden CAS-Einsatzes. Ziel muss es vielmehr sein, das Gerät als Werkzeug zu etablieren, das von den Schülerinnen und Schülern individuell genutzt werden kann.

- **Können Lehrkräfte ihre bisherigen Unterrichtskonzepte weiterhin verwenden?**
  Für Unterricht ohne CAS-Einsatz geeignete Konzepte können grundsätzlich auch für CAS-gestützten Unterricht verwendet werden. Der unkomplizierte Einsatz des CAS-Rechners im Rahmen des Unterrichts eröffnet jedoch vielfältige zusätzliche Möglichkeiten, die eine Weiterentwicklung des eigenen Unterrichts erleichtern.

- **Welchen Anteil an der Unterrichtszeit nimmt der Einsatz von CAS ein?**
  Erfahrungen aus dem Schulversuch zeigen, dass der CAS-Rechner im Mittel in etwa der Hälfte der Unterrichtsstunden zum Einsatz kommt, wobei manchmal auch nur für kurze Zeit mit dem Gerät gearbeitet wird. Gerade die ständige Verfügbarkeit des CAS-Rechners sehen die Lehrkräfte als wertvoll an.

- **Sind für den Einsatz von CAS gesonderte Lehrbücher erforderlich?**
  Die zugelassenen Lehrbücher berücksichtigen den möglichen Einsatz von CAS und enthalten speziell darauf zugeschnittene Aufgaben und Projektvorschläge, die eine Vertiefung der Lerninhalte mithilfe von CAS-Rechnern unterstützen. Darüber hinaus bieten sie vielfältige Anregungen und Aufgaben, die häufig unverändert auch mithilfe von CAS-Rechnern bearbeitet werden können. Gesonderte Lehrbücher sind deshalb nicht erforderlich.

- **Sind für den CAS-Einsatz spezielle Aufgaben nötig?**
  Für die Arbeit mit CAS-Rechnern sind herkömmliche Aufgaben grundsätzlich geeignet. Allerdings erweitert der Einsatz des CAS-Rechners insbesondere durch die Graphikfähigkeit die Möglichkeiten zur Bearbeitung von Problemstellungen; Aufgaben können offener formuliert werden. Besonders im Zusammenhang mit Leistungsnachweisen ist zu beachten, dass die Verwendung eines CAS-Rechners die Bearbeitung herkömmlicher Aufgaben wesentlich vereinfachen kann, wenn typische Funktionen des CAS-Rechners genutzt werden können.

- **Wie werden Leistungsnachweise durchgeführt, bei denen ein CAS-Rechner als Hilfsmittel zugelassen ist?**
  Bei mündlichen Leistungsnachweisen ist der Einsatz eines CAS-Rechners auf der Grundlage eines CAS-gestützten Unterrichts unproblematisch. Dabei ist es sinnvoll, den Bildschirminhalt des CAS-Rechners mithilfe eines Overheadprojektors oder eines Beamers für alle Schülerinnen und Schüler sichtbar zu projizieren.

  Für die Durchführung von Schulaufgaben gibt es folgende Möglichkeiten:
  - Der CAS-Rechner darf erst nach Abschluss eines ohne Benutzung des Geräts zu bearbeitenden Prüfungsteils verwendet werden.
  - Der CAS-Rechner ist während der gesamten Prüfungszeit als Hilfsmittel zugelassen. Auch dann lassen sich durch geeignete Formulierung der Aufgabenstellung manuelle Fertigkeiten prüfen (z. B. „Bestimmen Sie schrittweise und nachvollziehbar …“).

  Bei Stegreifaufgaben empfiehlt es sich aufgrund der zeitlichen Rahmenbedingungen, den Einsatz des CAS-Rechners abhängig von der Zielsetzung entweder durchgehend zuzulassen oder durchgehend auszuschließen. Unbedingt muss vor dem ersten schriftlichen Leistungsnachweis, bei dem ein CAS-Rechner verwendet werden darf, festgelegt werden, in welcher Form die Verwendung des CAS-Rechners bei der Bearbeitung der Aufgaben zu dokumentieren ist.

  Im Hinblick auf eine mögliche Teilnahme der Schülerinnen und Schüler an einer CAS-Abiturprüfung im Fach Mathematik sollte die Benutzung eines CAS-Rechners bei Leistungsnachweisen nicht grundsätzlich ausgeschlossen werden.

- **Entscheidet bei Leistungsnachweisen, bei denen ein CAS-Rechner als Hilfsmittel zugelassen ist, die Bedienerfertigkeit über den Erfolg?**
  Die Bedienung eines CAS-Rechners kann aufgrund einer durchdachten Menüführung weitgehend intuitiv erfolgen und ist entsprechend verhältnismäßig leicht zu erlernen. Dennoch empfinden die Schülerinnen und Schüler die Bedienung des Geräts teilweise als kompliziert, insbesondere dann, wenn neue Operationen oder Ausdrücke verwendet werden. Wird entsprechenden Problemen im Unterricht jedoch genügend Aufmerksamkeit geschenkt, kann sich die rein technische Bedienung des CAS-Rechners zu einer Selbstverständlichkeit entwickeln. So entscheidet die – wie beim Einsatz eines herkömmlichen Taschenrechners erforderliche – Bedienerfertigkeit bei Leistungsnachweisen nicht über den Erfolg. Schließlich werden wie bei Leistungsnachweisen, die ohne CAS-Einsatz zu bearbeiten sind, mathematische Kenntnisse, Fähigkeiten und Fertigkeiten sowie deren Anwendung mit mathematischem Verständnis geprüft, nicht die bloße Fähigkeit, einem CAS-Rechner die Lösung einer Aufgabe zu entnehmen.

- **Nimmt die Fähigkeit der Schülerinnen und Schüler, manuell zu rechnen, durch den Einsatz von CAS-Rechnern ab?**
  Im Rahmen einer den Schulversuch begleitenden wissenschaftlichen Untersuchung wurden in Klassen, die ohne CAS-Einsatz, und in solchen, die mit CAS-Einsatz unterrichtet wurden, übereinstimmende Tests durchgeführt, die ohne Verwendung eines CAS-Rechners zu bearbeiten waren. Die Ergebnisse zeigten keine signifikanten Abweichungen.

- **Erkennen die Schülerinnen und Schüler trotz des CAS-Einsatzes die Notwendigkeit, manuelle Rechenfertigkeiten zu erlernen und einzuüben?**
  Die Bereitschaft der Schülerinnen und Schüler zur manuellen Bearbeitung von Aufgaben ändert sich durch den Einsatz von CAS-Rechnern nicht. Entsprechend bleibt es Aufgabe der Lehrkraft, manuelle Rechenfertigkeiten zu schulen und Sicherheit im Umgang mit Zahlen, Termen und Gleichungen nachhaltig zu vermitteln. Entsprechende Übungsphasen dürfen nicht vernachlässigt werden; auf eine Verwendung des CAS-Rechners sollte auch bei Leistungsnachweisen immer wieder gezielt verzichtet werden.

- **Ist die Arbeit mit CAS nur für leistungsstärkere Schülerinnen und Schüler gewinnbringend?**
  Eine den Schulversuch begleitende wissenschaftliche Untersuchung zeigte, dass leistungsstärkere und leistungsschwächere Schülerinnen und Schüler gleichermaßen vom CAS-Einsatz profitieren können. Leistungsschwächere Schülerinnen und Schüler betonten in Interviews, die Verwendung des CAS-Rechners fördere insbesondere durch graphische Veranschaulichung das Verständnis und helfe bei der Kontrolle eigener Rechnungen.

- **Verstärkt der Einsatz von CAS Leistungsunterschiede bei Schülerinnen und Schülern?**
  Im Schulversuch konnte keine signifikante Veränderung der Leistungsunterschiede festgestellt werden.

- **Gibt es signifikante geschlechtsspezifische Unterschiede im Umgang mit CAS-Rechnern?**
  Laut einer den Schulversuch begleitenden wissenschaftlichen Untersuchung schätzen Jungen den Einsatz des CAS-Rechners etwas mehr als Mädchen. Letztere betonten jedoch in Interviews, eine mögliche Verwendung des Geräts im Rahmen der Abiturprüfung würde ihre Einstellung zu einem langfristigen Einsatz maßgeblich positiv beeinflussen.

- **Welche Erfahrungen machen die am Schulversuch beteiligten Lehrkräfte mit dem Einsatz von CAS-Rechnern?**
  Aufgrund der im Vergleich zu einem herkömmlichen Taschenrechner wesentlich umfangreicheren Einsatzmöglichkeiten möchten die meisten der am Schulversuch beteiligten Lehrkräfte auf die Verwendung des CAS-Rechners als Lernwerkzeug und didaktisches Hilfsmittel nicht mehr verzichten.

- **Wie sehen Schülerinnen und Schüler den Einsatz von CAS?**
  Gemäß einer den Schulversuch begleitenden wissenschaftlichen Untersuchung empfinden Schülerinnen und Schüler CAS-gestützten Unterricht als abwechslungsreicher und stehen diesem deshalb überwiegend positiv gegenüber. Als vorteilhaft sehen sie insbesondere die Möglichkeit an, eigenes Vorgehen mithilfe des CAS-Rechners jederzeit überprüfen zu können – während des Unterrichts, bei der Bearbeitung von

Hausaufgaben sowie bei der Anfertigung von Leistungsnachweisen. Um die Rechnersprache, die sowohl für die Eingabe als auch für die Interpretation der Ausgabe von großer Bedeutung ist, zu erlernen, benötigen sie allerdings die Unterstützung der Lehrkraft.

- **Worauf sollte bei der Zusammenarbeit mit Eltern geachtet werden?**
  Im Rahmen des Schulversuchs standen die Eltern der beteiligten Schülerinnen und Schüler dem Projekt aufgeschlossen gegenüber. Als hilfreich erwies sich die Durchführung von Informationsveranstaltungen für Eltern, um den möglichen Nutzen des Einsatzes der CAS-Rechner zu erläutern und möglichen Bedenken entgegenzuwirken.

- **Treten Probleme mit Software oder Hardware auf?**
  Im Schulversuch traten keine Software-Probleme auf, die die Arbeit mit den CAS-Rechnern beeinträchtigt hätten. Systemabstürze, die man von Personal Computern kennt, wurden nicht beobachtet. Die verwendeten CAS-Rechner arbeiten stabil und verkraften den täglichen Transport in den Schultaschen problemlos. Eine zuverlässige Stromversorgung ist durch Verwendung handelsüblicher Batterien gewährleistet.

- **Warum werden nicht Laptops oder Netbooks verwendet?**
  Für einen gewinnbringenden Einsatz von CAS sind CAS-Rechner ausreichend. Im Zusammenhang mit der Verwendung von Laptops oder Netbooks, die zweifellos breitere Einsatzmöglichkeiten bieten, sind derzeit noch Probleme im Zusammenhang mit der Vermeidung von Unterschleif zu lösen.

- **Können CAS-Rechner nur im Mathematikunterricht verwendet werden?**
  Insbesondere die Tabellenkalkulationsfunktion der CAS-Rechner lässt sich beispielsweise auch im Fach Wirtschaftsinformatik oder in den naturwissenschaftlichen Fächern zur Bearbeitung von Aufgaben sinnvoll nutzen (z. B. zur Auswertung von Messergebnissen).

2 Einsatz von CAS in der Jahrgangsstufe 10

Der CAS-Rechner kann im Mathematikunterricht einerseits als unterstützendes Hilfsmittel zum Rechnen und Zeichnen genutzt werden, um sich wiederholende Aufgaben mit verhältnismäßig geringem Zeitaufwand zu bearbeiten. Andererseits dient das Gerät als vielseitiges methodisch-didaktisches Hilfsmittel, das die Möglichkeiten des Lehrens und Lernens mathematischer Inhalte erweitert. So kann der CAS-Einsatz eine ausgewogene Förderung der allgemeinen mathematischen Kompetenzen der Bildungsstandards im Sinne eines zeitgemäßen Unterrichts unterstützen. Dabei werden die Schwerpunkte – insbesondere bei der Auswahl von Aufgaben – anders als in der Vergangenheit gesetzt; die Kompetenzen „Mathematisch argumentieren“, „Probleme mathematisch lösen“, „Mathematisch modellieren“ und „Kommunizieren“ werden stärker gefördert.

2.1 Einführende Hinweise

Mithilfe des CAS-Rechners lassen sich mathematische Inhalte und Zusammenhänge auf unterschiedliche Weise darstellen sowie Rechenarbeiten wesentlich vereinfachen; Lösungsideen, Rechenwege und Ergebnisse können unmittelbar kontrolliert werden. So unterstützt der CAS-Einsatz beispielsweise die Bearbeitung von Problemstellungen oder realitätsnahen Anwendungsaufgaben, die häufig mit einem hohen rechnerischen Aufwand verbunden sind. Die Verwendung des CAS-Rechners darf jedoch nicht zu Abhängigkeit von einem technischen Gerät führen – manuelle Grundfertigkeiten sowie Kopfrechnen sind trotz Verfügbarkeit eines CAS-Rechners unverzichtbar. Gerade in der Jahrgangsstufe 10, in der Schülerinnen und Schüler in das Arbeiten mit CAS-Rechnern eingeführt werden, sollten die Geräte zwar kontinuierlich eingesetzt werden, es ist aber unbedingt erforderlich, auf deren Einsatz immer wieder gezielt zu verzichten. Erfahrungen aus dem bayerischen Schulversuch und aus anderen Bundesländern belegen, dass Lehrkräfte schnell ein Gefühl für einen gewinnbringenden Einsatz des CAS-Rechners entwickeln; so wird Medienkompetenz geschult und nicht Medienabhängigkeit verursacht.

2.1.1 CAS-Grundfertigkeiten

Die folgende Tabelle enthält die Grundfertigkeiten im Umgang mit CAS, die in der Jahrgangsstufe 10 erworben werden sollen und für eine Abiturprüfung im Fach Mathematik, bei der ein CAS-Rechner verwendet werden darf, zur Verfügung stehen müssen.

Kategorie	CAS-Grundfertigkeit
Einstellungen	Winkelmaß einstellen
Term	Taschenrechner verwenden
	Term definieren (z. B. Festlegen des Terms einer Funktion, die hinsichtlich unterschiedlicher Kriterien untersucht werden soll)
	Termwert berechnen
	Term vereinfachen
	Term faktorisieren
	Term ausmultiplizieren

	Terme vergleichen (z. B. Untersuchen eines Funktionsgraphen auf Symmetrie)
	Wertetabelle erstellen
	Grenzwert berechnen
Gleichung	Gleichung lösen
	Gleichungssystem lösen
Graph	Graph zeichnen, geeigneten Anzeigebereich wählen
	Graphen von Scharfunktionen zeichnen
Daten	Punktdiagramm zeichnen (z. B. Veranschaulichen einer Messreihe)

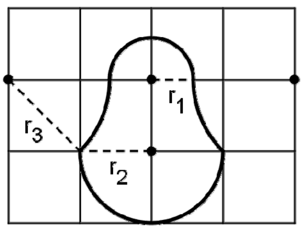
2.1.2 Beispielaufgaben

Im Folgenden wird anhand einiger grundlegender Aufgaben exemplarisch gezeigt, wie der CAS-Rechner zur Unterstützung der Bearbeitung von Aufgaben eingesetzt werden kann.

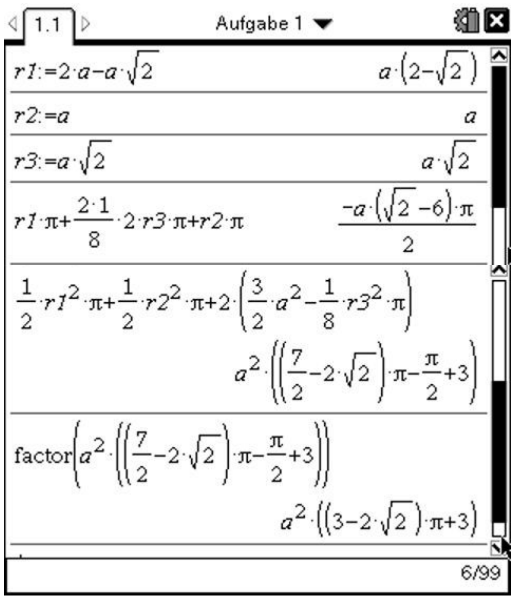
Beispielaufgabe 1 Berechnung des Umfangs und des Flächeninhalts einer Figur	
CAS-Grundfertigkeiten	Term definieren, Term vereinfachen, Term ausmultiplizieren

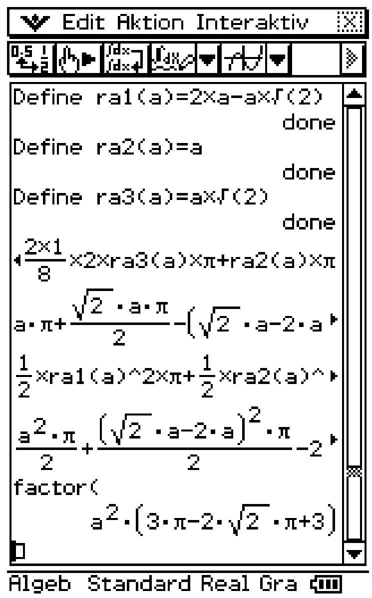
Die Abbildung zeigt eine glockenförmige Figur; alle dargestellten Bögen sind Kreisbögen, die hervorgehobenen Punkte deren Mittelpunkte. Die zugrunde liegenden Quadrate haben die Seitenlänge a.

Ermitteln Sie in Abhängigkeit von a jeweils einen Term für den Umfang und den Flächeninhalt der Figur; vereinfachen Sie beide Terme so weit wie möglich.



Zunächst werden die Terme für die Kreisradien, anschließend damit die Terme für den Umfang und den Flächeninhalt der Figur in Abhängigkeit von a aufgestellt und falls möglich vereinfacht.

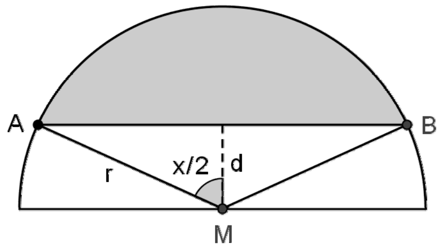




Beispielaufgabe 2
Berechnungen an einer Figur, die elementare Kreisteile enthält

CAS-Grundfertigkeiten	Winkelmaß einstellen, Taschenrechner verwenden, Gleichung lösen

Für welchen Abstand d (in Abhängigkeit von r) halbiert die Strecke $[AB]$ den Flächeninhalt des Halbkreises?



Zunächst muss der Term für den Flächeninhalt des grau markierten Kreissegments manuell hergeleitet werden.

Mit $\frac{1}{2}\overline{AB} = r \cdot \sin\left(\frac{x}{2}\right)$ und $d = r \cdot \cos\left(\frac{x}{2}\right)$ ergibt sich:

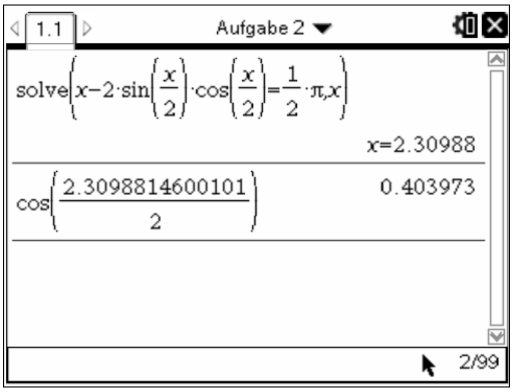
$$A_{Segment} = A_{Sektor}(r,x) - A_{\Delta AMB} = \frac{1}{2}r^2x - r \cdot \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cdot r \cdot \cos\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2}r^2 \cdot \left(x - 2\sin\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)$$

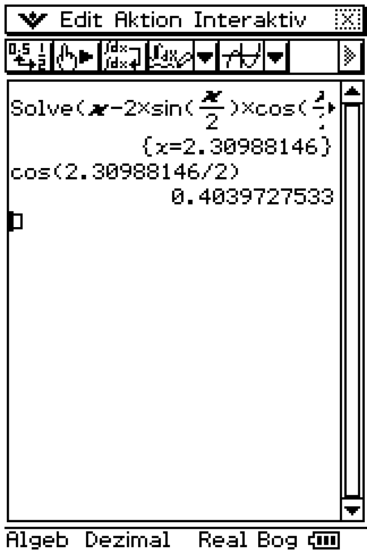
Eine Vereinfachung des Terms $2\sin\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{x}{2}\right)$ zu $\sin x$ wäre an dieser Stelle möglich, kann von den Schülerinnen und Schülern jedoch nicht erwartet werden.

Der Ansatz $A_{Segment} = \frac{1}{4}r^2\pi$ führt zu der Gleichung:

$$x - 2\sin\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2}\pi$$

Diese lässt sich algebraisch nicht lösen. Eine näherungsweise Lösung mit dem CAS-Rechner liefert schließlich das Ergebnis $d \approx 0{,}40 \cdot r$.



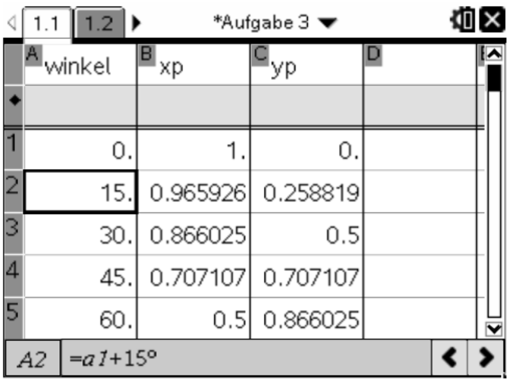


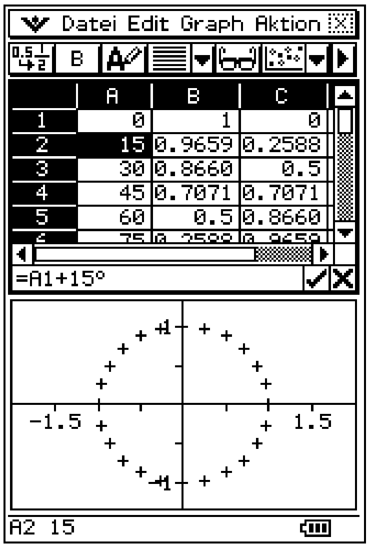
Beispielaufgabe 3 Sinus und Kosinus am Einheitskreis	
CAS-Grundfertigkeiten	Winkelmaß einstellen, Term definieren, Wertetabelle erstellen, Punktdiagramm zeichnen

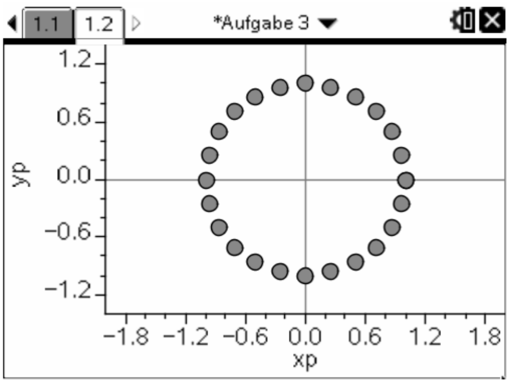
a) Zeichnen Sie Punkte $P(\cos\alpha;\sin\alpha)$ für ausgewählte $\alpha \in [0°;360°]$ in ein Koordinatensystem ein. Beschreiben Sie die Form der Kurve, auf der diese Punkte liegen.

b) Was ändert sich, wenn man die Koordinaten vertauscht?

Die Koordinaten werden als Terme definiert, die Winkelgrößen im Gradmaß angegeben; die zugehörigen Termwerte werden in einer Wertetabelle mit Einsetzungen von 0° bis 360° berechnet. Sinus- und Kosinuswerte können so graphisch als Koordinaten aller Punkte auf dem Einheitskreis interpretiert werden.



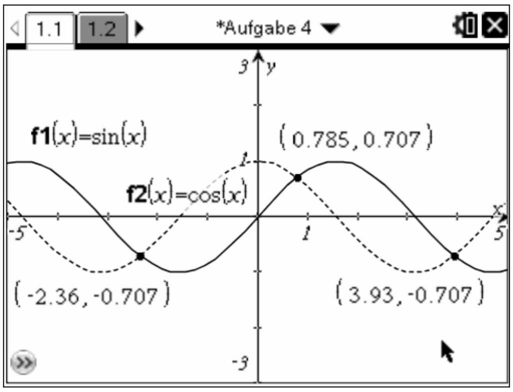


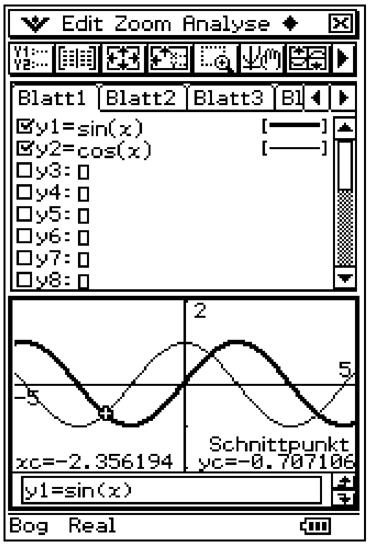


Schon anhand der Wertetabelle wird deutlich, dass eine Vertauschung der Koordinaten die Form der Kurve nicht verändert; sie ist symmetrisch bezüglich der Geraden $y = x$.

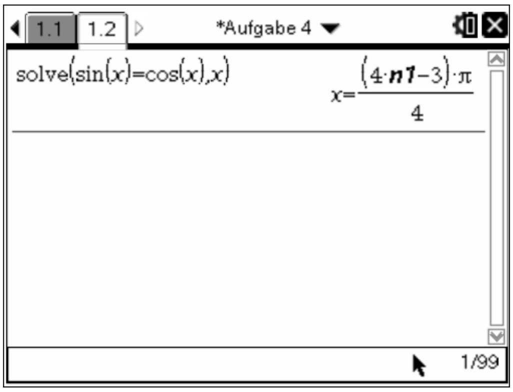
Beispielaufgabe 4 Bestimmung der Schnittpunkte zweier Funktionsgraphen	
CAS-Grundfertigkeiten	Winkelmaß einstellen, Gleichung lösen, Graph zeichnen, geeigneten Anzeigebereich wählen
Zeichnen Sie die Graphen der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen $f: x \mapsto \sin x$ sowie $g: x \mapsto \cos x$ und bestimmen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte der Graphen.	

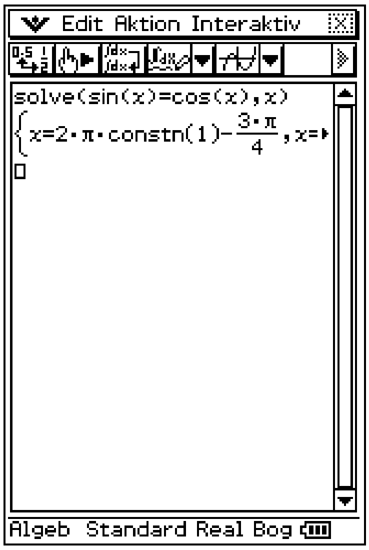
Nach Einstellen des Winkelmaßes und Wählen eines geeigneten Anzeigebereichs werden die beiden Funktionsgraphen in einem gemeinsamen Koordinatensystem dargestellt. Die Koordinaten der Schnittpunkte können dann graphisch ermittelt werden.



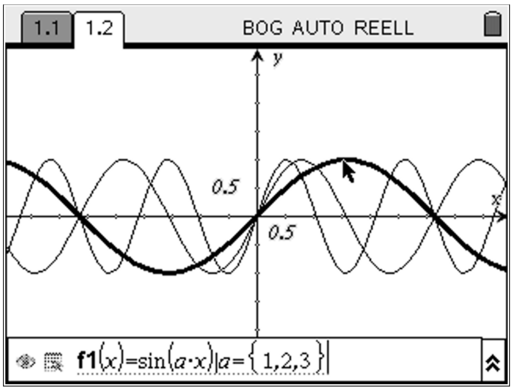


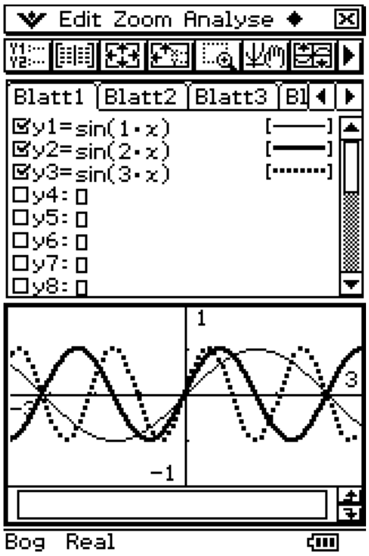
Bestimmt man die Koordinaten der Schnittpunkte rechnerisch durch Gleichsetzen der Funktionsterme, so äußert sich die Periodizität der x-Koordinaten der Schnittpunkte im Auftreten eines Parameters im Lösungsterm; eine Auswertung des Terms in Abhängigkeit von diesem Parameter bietet sich an.





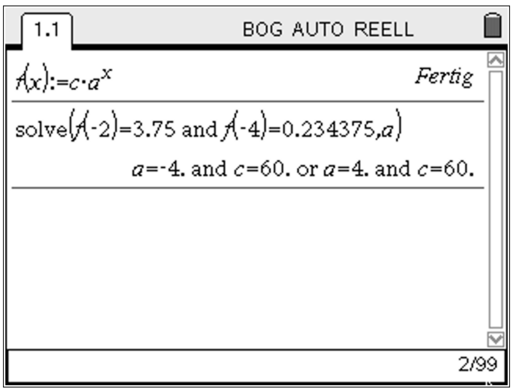
Beispielaufgabe 5 Untersuchung einer Funktionenschar	
CAS-Grundfertigkeiten	Graphen von Scharfunktionen zeichnen
Gegeben ist die Funktionenschar $f_a : x \mapsto \sin(a \cdot x)$ mit $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und Definitionsbereich $\mathbb{R}$. Zeichnen Sie einige Graphen der Schar für verschiedene Werte des Parameters a und untersuchen Sie die Auswirkung der Änderung des Parameters auf den Funktionsgraphen.	

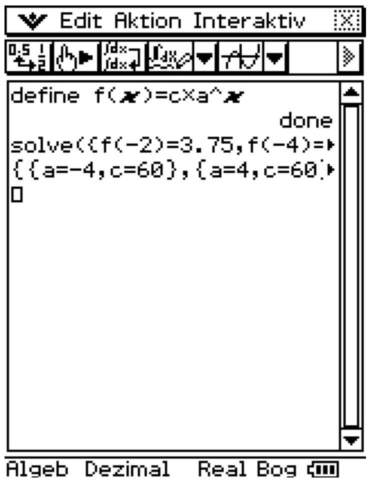




Beispielaufgabe 6 Ermittlung des Funktionsterms einer Funktion mit vorgegebenen Eigenschaften	
CAS-Grundfertigkeiten	Term definieren, Gleichungssystem lösen
Die Punkte $A(-2\,\vert\,3{,}75)$ und $B(-4\,\vert\,0{,}234375)$ liegen auf dem Graphen einer Exponentialfunktion $f : x \mapsto c \cdot a^x$ mit $a \in \mathbb{R}^+$, $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und Definitionsbereich $\mathbb{R}$. Ermitteln Sie passende Werte für a und c. (nach Fokus 10, S. 66, Aufgabe 6c)	

Die Definition des Funktionsterms im CAS-Rechner vereinfacht das Aufstellen des Gleichungssystems. Die negative Lösung für a sollte besprochen werden.



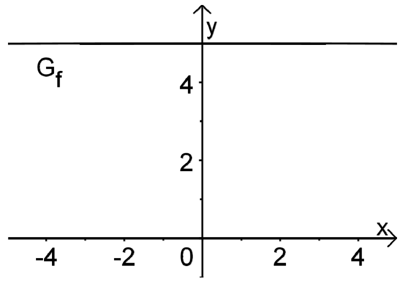


Beispielaufgabe 7
Verlauf eines Funktionsgraphen

CAS-Grundfertigkeiten	Term definieren, Grenzwert berechnen, Graph zeichnen, geeigneten Anzeigebereich wählen

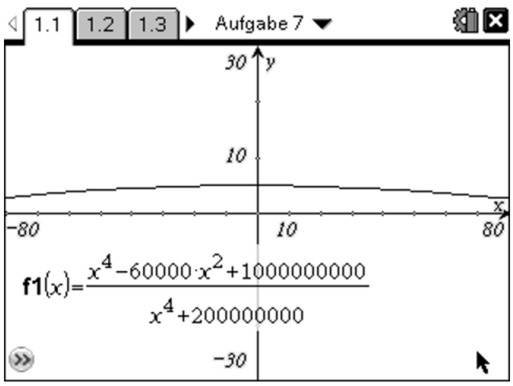
Ein Schüler experimentiert mit einem Funktionsplotter und erhält die abgebildete Ausgabe für den Graphen G_f der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion

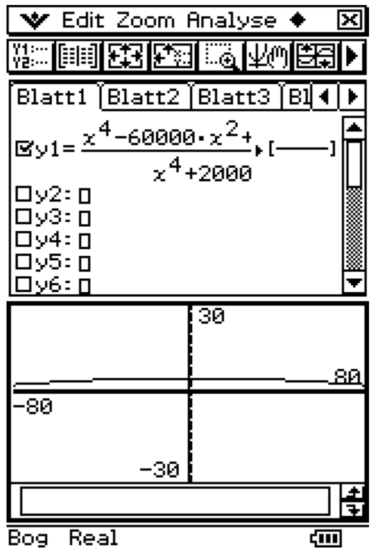
$$f : x \mapsto \frac{x^4 - 60.000x^2 + 1.000.000.000}{x^4 + 200.000.000}.$$

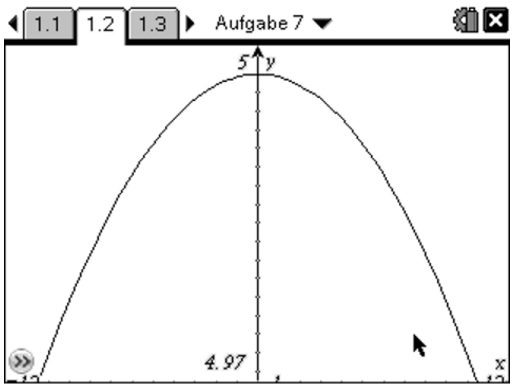


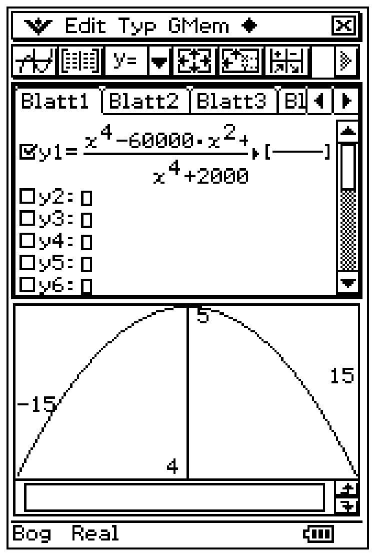
Der Schüler ist verunsichert. Ist G_f tatsächlich eine Parallele zur x-Achse? Stellen Sie die wesentlichen Eigenschaften von G_f zusammen.

Mithilfe manuellen Zoomens oder der automatischen Zoomanpassung lässt sich zeigen, dass der Graph von f gekrümmt ist.

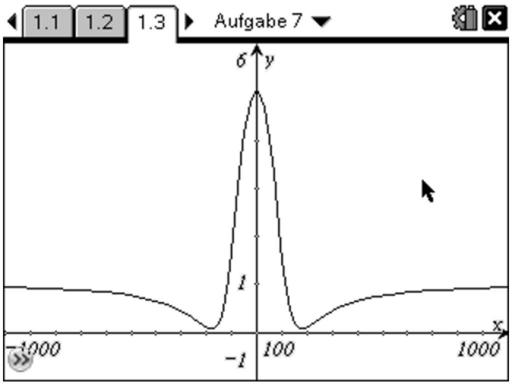


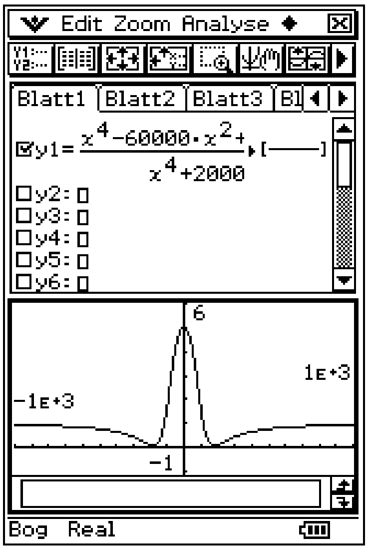




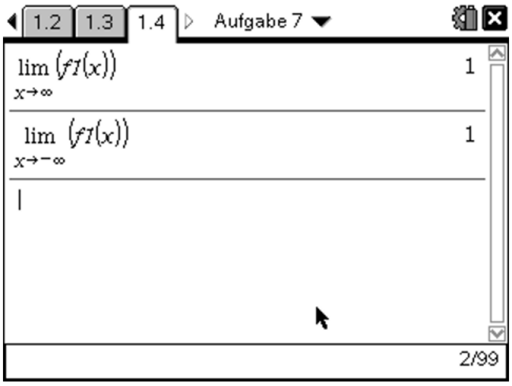


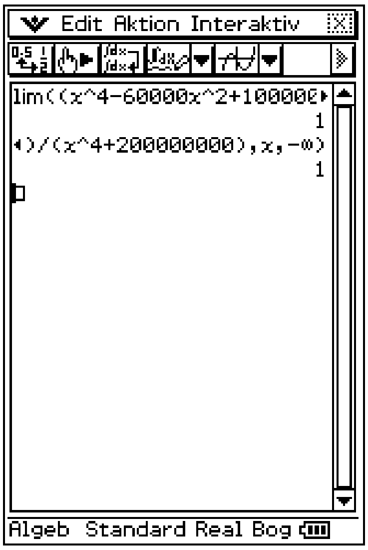
Eine Erweiterung des Anzeigebereichs für die x-Werte, z. B. auf den Bereich $[-1000;1000]$, lässt die Gerade mit der Gleichung $y=1$ als Asymptote des Graphen von f vermuten.





Die Bestimmung der Grenzwerte von f für $x \to +\infty$ und $x \to -\infty$ bestätigt die Vermutung.





Beispielaufgabe 8
Verschiebung eines Funktionsgraphen

CAS-Grundfertigkeiten	Term definieren, Term vereinfachen, Term ausmultiplizieren, Graph zeichnen, geeigneten Anzeigebereich wählen

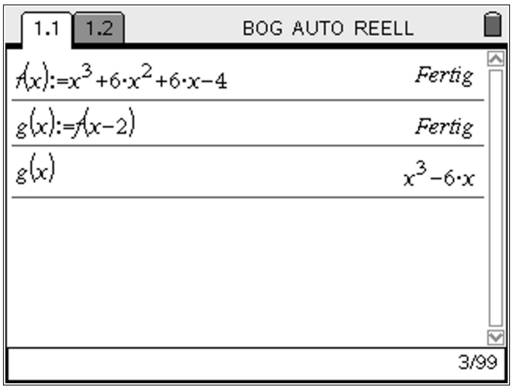
Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto x^3+6x^2+6x-4$ mit Definitionsbereich $\mathbb{R}$. Der Graph der Funktion g ist gegenüber dem Graphen von f um 2 in positive x-Richtung verschoben.

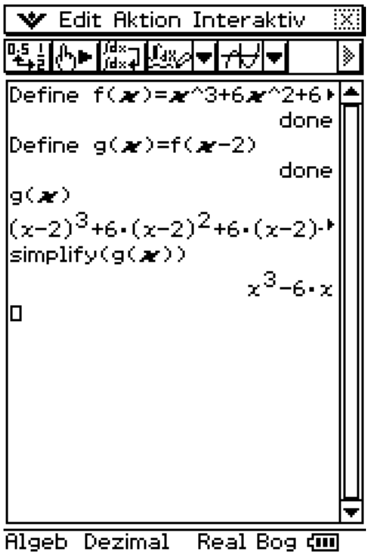
a) Bestimmen Sie den Funktionsterm von g.

b) Was lässt sich über die Symmetrie der Graphen von f und g aussagen?

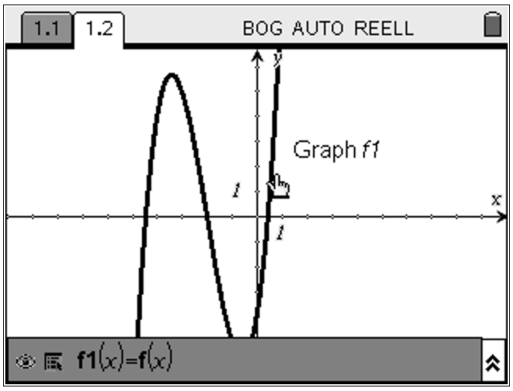
(nach Lambacher Schweizer 10, S. 153, Aufgabe 8)

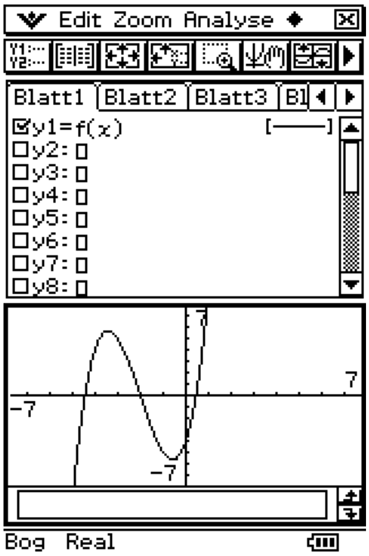
Mit dem CAS-Rechner lässt sich der Funktionsterm von g ohne langwierige manuelle Rechnung aus dem Zusammenhang $g(x) = f(x-2)$ in expliziter Form bestimmen.





Das Zeichnen des Graphen der Funktion f lässt eine Symmetrie bezüglich des Punkts $(-2\,|\,0)$ vermuten.





Da der Graph von g wegen $g(-x) = -g(x)$ punktsymmetrisch bezüglich des Koordinatenursprungs ist und aus dem Graphen von f durch eine Verschiebung um 2 in positive x-Richtung hervorgeht, trifft diese Vermutung zu.

2.1.3 Einstieg in die Arbeit mit dem CAS-Rechner

Die Bedienung der CAS-Rechner wird durch eine komfortable Menüführung unterstützt. Das Erlernen spezieller Befehle ist nicht erforderlich. Dies gibt Schülerinnen und Schülern die Möglichkeit, ohne eine längere Einführung in die Bedienung von Beginn an selbständig mit den Geräten zu arbeiten.

Für den Einstieg in die Arbeit mit dem CAS-Rechner bietet sich eine Wiederholung wesentlicher Inhalte der Jahrgangsstufe 9 an. So kann die Einführung der Schülerinnen und Schüler in die Grundfunktionen des CAS-Rechners mit einer Sicherung grundlegender mathematischer Kenntnisse, Fähigkeiten und Fertigkeiten verbunden werden. Bereits an dieser Stelle lässt sich der bei Schülerinnen und Schülern teilweise vorhandenen Fehlvorstellung entgegenwirken, manuelle Fertigkeiten und Kopfrechnen seien in Anbetracht der Funktionalität des zur Verfügung stehenden CAS-Rechners nicht mehr erforderlich.

Bei der Bearbeitung der folgenden Aufgaben, die Teil eines Arbeitsblatts zur Wiederholung wesentlicher Inhalte der Jahrgangsstufe 9 sein könnten, erlernen die Schülerinnen und Schüler im Umgang mit dem CAS-Rechner folgende Grundfertigkeiten:

- Taschenrechner verwenden
- Term definieren
- Termwert berechnen
- Term vereinfachen
- Term faktorisieren
- Gleichung lösen
- Graph zeichnen, geeigneten Anzeigebereich wählen
- Graphen von Scharfunktionen zeichnen

1 Arbeiten mit Termen

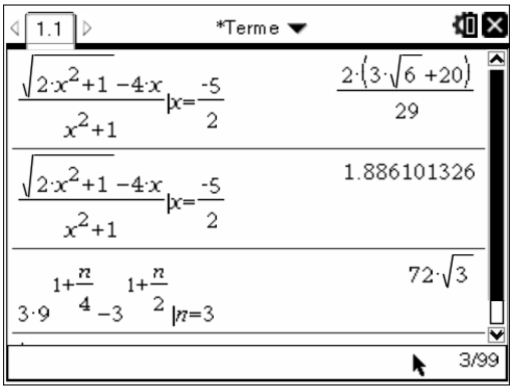
1.1 Geben Sie den Term in den CAS-Rechner ein und berechnen Sie seinen Wert für die angegebene Ersetzung.

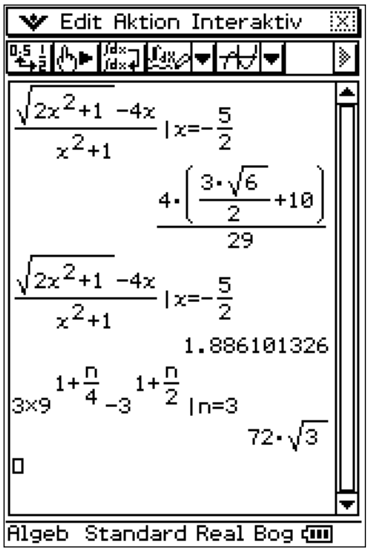
a) $\frac{\sqrt{2x^2+1}-4x}{x^2+1}$; $x=-\frac{5}{2}$ **b)** $3\cdot 9^{1+\frac{n}{4}}-3^{1+\frac{n}{2}}$; $n=3$ **c)** $\frac{p^2+pq+q^2}{p^2-q^2}$; $p=-3\sqrt{5}$, $q=4\sqrt{15}$

1.2 Vereinfachen Sie den Term zunächst manuell so weit wie möglich und kontrollieren Sie anschließend Ihr Ergebnis, indem Sie den Term in den CAS-Rechner eingeben.

a) $\frac{\frac{1}{z+q}-\frac{1}{z}}{q}$ **b)** $\frac{(s+t)^2-s^2}{t}$ **c)** $\frac{\sqrt[4]{x^3}}{\sqrt{x}}\cdot\frac{x^{\frac{5}{4}}}{x^{\frac{1}{3}}}$

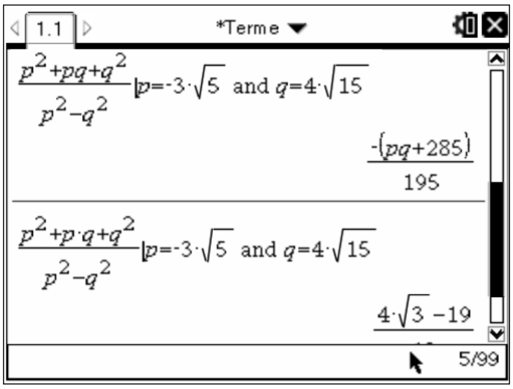
Folgende Abbildungen zeigen mögliche Lösungen der Aufgaben 1.1a und 1.1b. Je nach Systemeinstellung des CAS-Rechners erhält man exakte oder gerundete Ergebnisse.

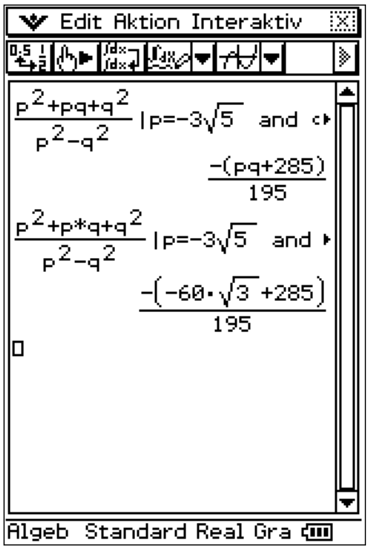




Es empfiehlt sich, insbesondere das Ergebnis der Aufgabe 1.1b von den Schülerinnen und Schülern auch manuell berechnen zu lassen, um die Rechenregeln zu Potenzen mit rationalen Exponenten zu wiederholen.

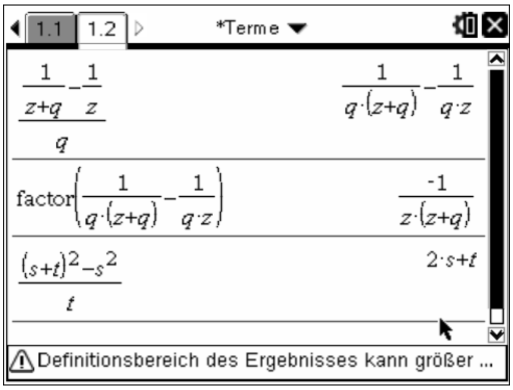
Im Zusammenhang mit Aufgabe 1.1c kann auf eine häufige Fehlerquelle bei der Eingabe von Termen hingewiesen werden. Gibt man den Term pq ohne Multiplikationszeichen ein, so behandelt der CAS-Rechner diesen als eine einzige Variable; die Eingabe aller Rechenzeichen ist erforderlich.

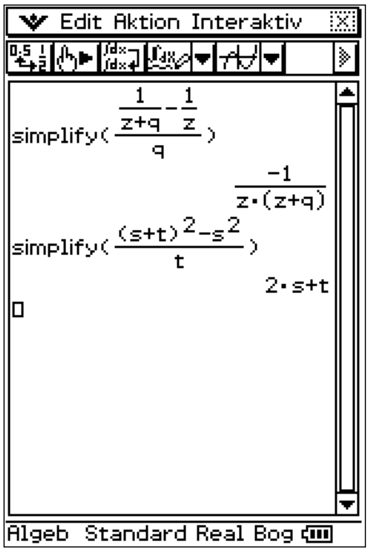




Im Rahmen der Bearbeitung der Aufgabe 1.2 dient der CAS-Rechner zur Kontrolle der manuell erzielten Ergebnisse. Derart grundlegende algebraische Umformungen müssen Schülerinnen und Schüler selbstverständlich auch ohne Verwendung von Hilfsmitteln beherrschen.

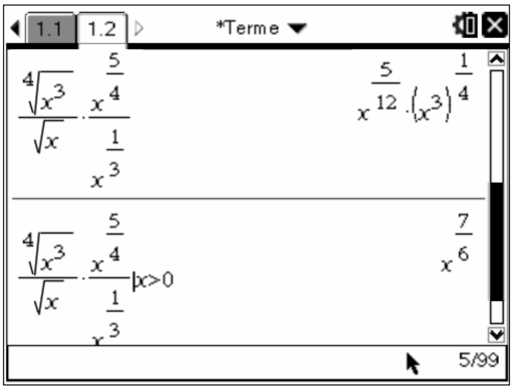
Bei Eingabe eines Terms wird dieser nicht immer vollständig vereinfacht. Weitere Vereinfachungen sind häufig mithilfe von Befehlen zum Umformen von Termen (z. B. Faktorisieren oder Ausmultiplizieren) möglich. Allerdings muss Schülerinnen und Schülern erst bewusst werden, dass Ergebnisse des CAS-Rechners nicht unbedacht übernommen werden sollten.

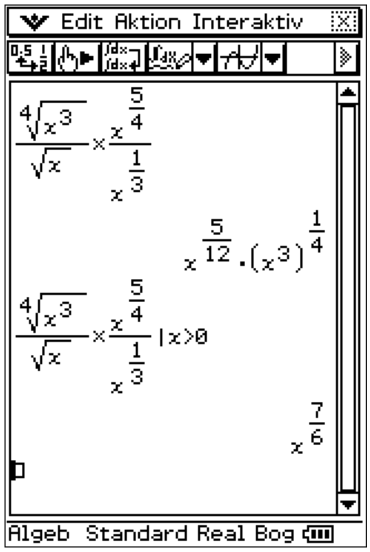




Aufgabe 1.2b bietet die Gelegenheit, den Begriff des maximalen Definitionsbereichs aufzugreifen. Im Ausgangsterm darf die Variable t nicht null sein, im vereinfachten Ergebnis wäre dies dagegen möglich.

Auch bei Bearbeitung der Aufgabe 1.2c zeigt sich, dass ein vom CAS-Rechner ausgegebenes Ergebnis einer Termvereinfachung stets kritisch betrachtet werden sollte.





Die beiden Faktoren $x^{\frac{5}{12}}$ und $\left(x^3\right)^{\frac{1}{4}}$ lassen sich zu $x^{\frac{5}{12}+\frac{3}{4}} = x^{\frac{7}{6}}$ zusammenfassen. Der CAS-Rechner nimmt eine derartige Vereinfachung nicht grundsätzlich vor; hier ist die Eingabe der Zusatzbedingung $x > 0$ erforderlich. Manuelles Rechnen kann also gelegentlich einfacher zum gewünschten Ergebnis führen. Generell sollten die Schülerinnen und Schüler zu einem bewussten Einsatz des CAS-Rechners angeleitet werden.

2 Algebraisches Lösen von Gleichungen

2.1 Ermitteln Sie die Lösungsmenge zunächst manuell und kontrollieren Sie Ihr Ergebnis anschließend mithilfe des CAS-Rechners.

a) $4 \cdot (x+4)^2 - (2x-11)^2 = 171$

b) $(5a-5)^2 - (3+3a)^2 = 20 - (6-4a)^2$

c) $\left(\sqrt{2}z+1\right)^2 - \left(\sqrt{8}z-3\right)^2 = 2 \cdot \left(\sqrt{2}z+56\right)^2$

d) $2x^2 + 45x = 47$

e) $\frac{18}{x+3} - \frac{3}{x-3} = 1$

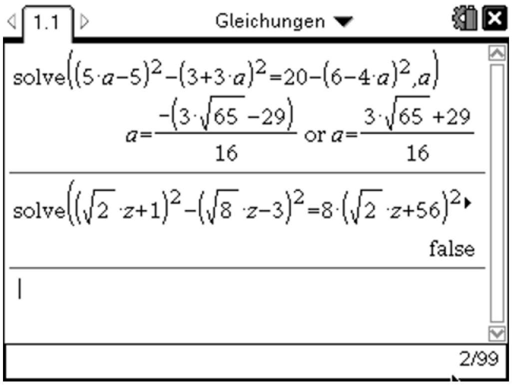
2.2 Lösen Sie die Gleichung mit dem CAS-Rechner nach den in eckigen Klammern angegebenen Variablen auf. Welche physikalische Bedeutung hat die Gleichung b?

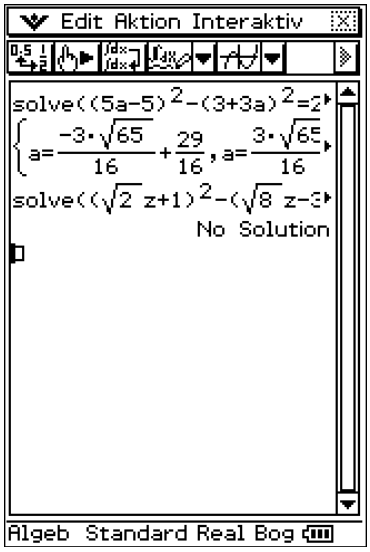
a) $a^2x^2 + (2a-1) \cdot x + 1 = 0$; $[x]$, $[a]$

b) $x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$; $[t]$, $[v_0]$

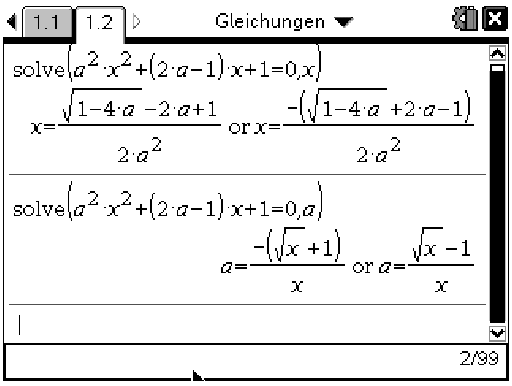
Im Rahmen von Aufgabe 2.1 soll der CAS-Rechner zur Kontrolle der manuell erzielten Ergebnisse eingesetzt werden. Bei der Eingabe in den CAS-Rechner muss sowohl die Gleichung als auch die Variable, nach der aufgelöst werden soll, angegeben werden – ein Beispiel dafür, dass die Rechnersprache teilweise einzelne Aspekte algebraischer Objekte deutlich betont und damit zum Verständnis beitragen kann.

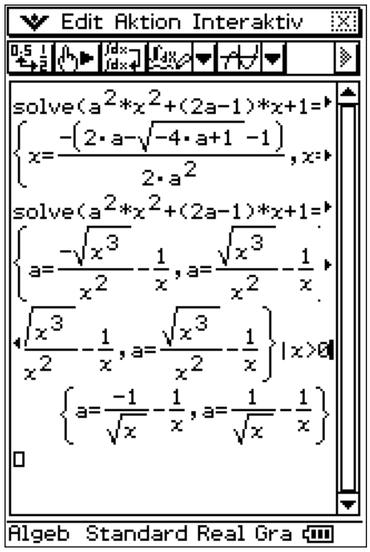
Folgende Abbildungen zeigen die Ergebnisse der Aufgaben 2.1b und 2.1c.



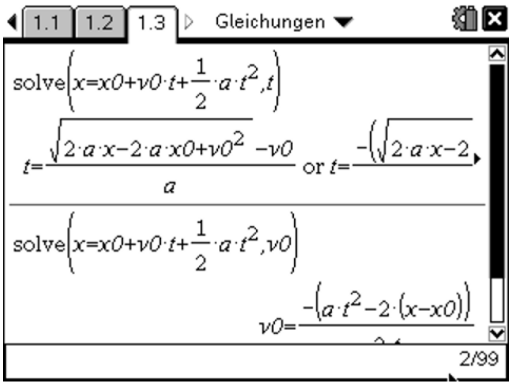


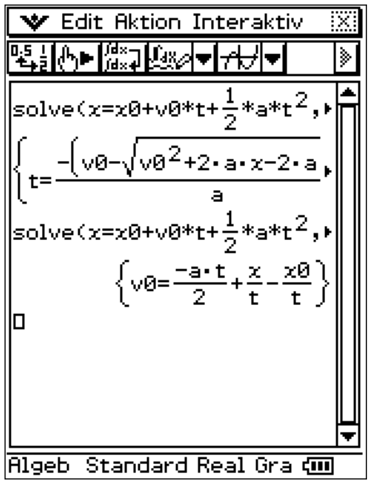
Bei Bearbeitung der Aufgabe 2.2a zeigt sich, dass auch die Lösung einer Gleichung vom CAS-Rechner nicht immer vollständig vereinfacht ausgegeben wird. Die Eingabe einer Zusatzbedingung (z. B. $x > 0$) kann dann eine weitere Vereinfachung ermöglichen.





Folgende Abbildungen zeigen die Ergebnisse der Aufgabe 2.2b.





Die Aufgaben 2.2a und 2.2b lassen sich erweitern, indem man beispielsweise die Anzahl der Lösungen in Abhängigkeit vom Parameter bzw. die physikalische Bedeutung der Variablen thematisiert.

3 Eigenschaften von Parabeln

Gegeben sind die in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen f_1, $f_2, \ldots,$ f_9 und f_{10} mit folgenden Termen:

$f_1(x) = -(x-5)^2$ $\quad$ $f_2(x) = x^2 - 3$ $\quad$ $f_3(x) = 2x^2 - 1$ $\quad$ $f_4(x) = -0{,}5x^2 + 2$

$f_5(x) = x^2 - 2x + 1$ $\quad$ $f_6(x) = -(2+x)^2$ $\quad$ $f_7(x) = x \cdot (x-6)$ $\quad$ $f_8(x) = -2 \cdot (x-1) \cdot (x+4)$

$f_9(x) = -0{,}5x^2 + 2x$ $\quad$ $f_{10}(x) = (3-x)^2 - 4$

Die zugehörigen Graphen werden mit G_1, G_2, …, G_9 und G_{10} bezeichnet.

a) Stellen Sie G_1, G_2, …, G_9 und G_{10} graphisch dar.

b) Erklären Sie, wie man am Funktionsterm einer Parabel erkennen kann, ob sie
- kongruent zur Normalparabel ist;
- nach oben geöffnet ist;
- durch den Koordinatenursprung verläuft;
- weiter als die Normalparabel ist;
- keinen Punkt mit der x-Achse gemeinsam hat;
- durch alle vier Quadranten verläuft.

Die Verwendung des CAS-Rechners dient im Rahmen der Bearbeitung dieser Aufgabe insbesondere der Veranschaulichung und unterstützt damit selbständiges, experimentelles Arbeiten.

4 Graphisches Lösen von Gleichungen

Gegeben ist die Gleichung $\frac{1}{x} + 2 = mx + 5$ mit $m \in \mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

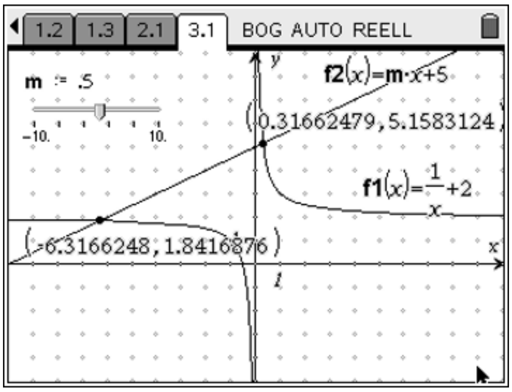
a) Ermitteln Sie mithilfe des CAS-Rechners für $m = 0{,}5$ graphisch Näherungswerte der Lösungen, indem Sie die Schnittpunkte zweier geeigneter Funktionsgraphen bestimmen.

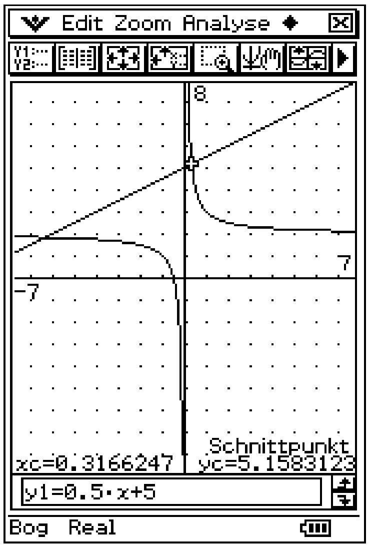
b) Ermitteln Sie die exakten Lösungen der Gleichung in Abhängigkeit von m und überprüfen Sie Ihr Ergebnis aus Aufgabe a.

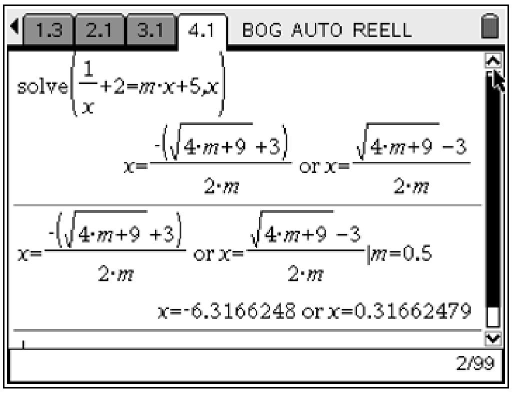
c) Für welche Parameterwerte m erhält man keine, genau eine oder zwei Lösungen?

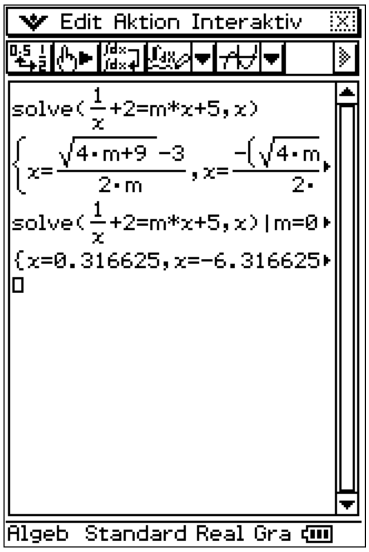
d) Veranschaulichen Sie die Ergebnisse aus Aufgabe c mithilfe des CAS-Rechners.

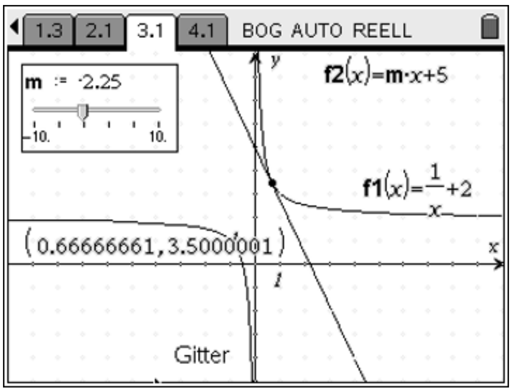
Zur Veranschaulichung und zum besseren Verständnis für die Lösungen einer Gleichung ist die graphische Ermittlung der Lösungen hilfreich – insbesondere dann, wenn die Anzahl der Lösungen vom Wert eines Parameters abhängt. Mithilfe eines CAS-Rechners lassen sich die hier wesentlichen Zusammenhänge verhältnismäßig zügig untersuchen.

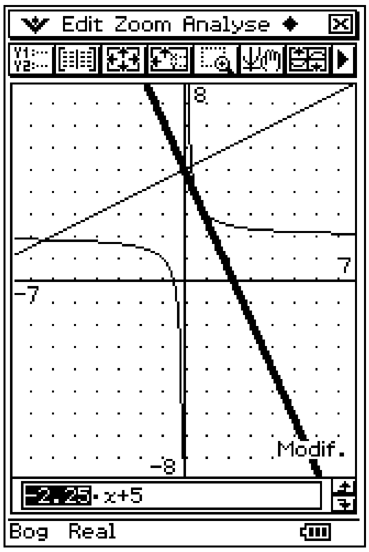

1.2 1.3 2.1 3.1 BOG AUTO REELL
m := .5
-10. 10.
f2(x)=m·x+5
(0.31662479,5.1583124)
f1(x)=1/x+2
(-6.3166248,1.8416876)
y
x
1

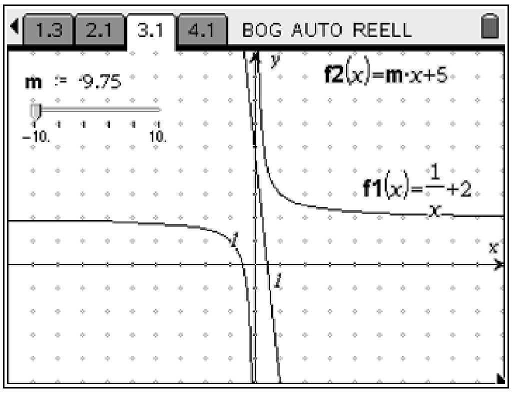

Edit Zoom Analyse
8
7
-7
Schnittpunkt
xc=0.3166247
yc=5.1583123
y1=0.5·x+5
Bog Real

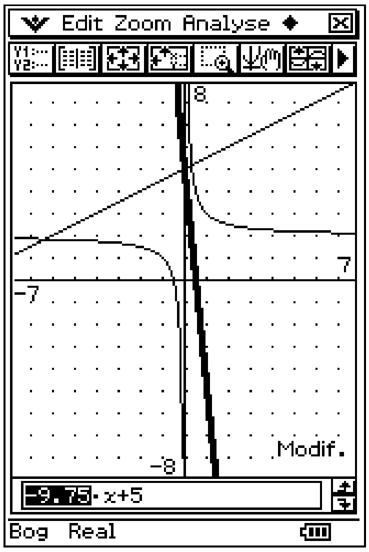

1.3 2.1 3.1 4.1 BOG AUTO REELL
solve(1/x+2=m·x+5,x)
x=-(√(4·m+9)+3)/(2·m) or x=(√(4·m+9)-3)/(2·m)
x=-(√(4·m+9)+3)/(2·m) or x=(√(4·m+9)-3)/(2·m)|m=0.5
x=-6.3166248 or x=0.31662479
2/99


Edit Aktion Interaktiv
solve(1/x+2=m*x+5,x)
{x=(√(4·m+9)-3)/(2·m),x=-(√(4·m
solve(1/x+2=m*x+5,x)|m=0
{x=0.316625,x=-6.316625
Algeb Standard Real Gra


1.3 2.1 3.1 4.1 BOG AUTO REELL
m := -2.25
-10. 10.
f2(x)=m·x+5
f1(x)=1/x+2
(0.66666661,3.5000001)
y
x
1
Gitter


Edit Zoom Analyse
8
7
-7
-8
Modif.
-2.25·x+5
Bog Real





Nach Bearbeitung dieser einführenden Aufgaben sollten die Schülerinnen und Schüler mit den Grundfunktionen des CAS-Rechners vertraut sein. Weitere CAS-Grundfertigkeiten sowie die Anwendung wertvoller Funktionen, wie der dynamischen Geometrie, erlernen sie im weiteren Verlauf des Unterrichts an jeweils geeigneter Stelle.

2.2 Vorschläge zur Unterrichtsgestaltung

Die folgenden Vorschläge zur Gestaltung des Unterrichts liefern exemplarisch Anregungen für eine Umsetzung des Lehrplans unter Verwendung von CAS im Mathematikunterricht der Jahrgangsstufe 10. Sie zeigen, an welchen Stellen und zu welchem Zweck der CAS-Rechner gewinnbringend eingesetzt werden kann, und unterstützen Lehrkräfte damit bei der Entwicklung eigener Unterrichtsideen. Dazu wird auch immer wieder auf das vielfältige Angebot der zugelassenen Lehrbücher verwiesen.

Ausdrücklich wird darauf hingewiesen, dass die Vorschläge zur Unterrichtsgestaltung die jeweils behandelten Lehrplanabschnitte oder Lehrplaninhalte nicht vollständig abdecken. Abhängig von der jeweiligen Einsatzmöglichkeit des CAS-Rechners sind die Vorschläge außerdem unterschiedlich ausführlich beschrieben. Verzichtet wurde auf Vorschläge zur Umsetzung des Lehrplanabschnitts „M 10.4 Stochastik: Zusammengesetzte Zufallsexperimente“, da sich der Einsatz des CAS-Rechners im Zusammenhang mit stochastischen Fragestellungen der Jahrgangsstufe 10 auf die Funktionen eines herkömmlichen Taschenrechners beschränkt.

Teilweise werden im Anschluss an die Vorschläge Möglichkeiten zur Vertiefung beschrieben; die dabei jeweils zugrunde liegenden Inhalte sind im Lehrplan nicht verbindlich vorgesehen. Unter Berücksichtigung der Intention des Lehrplans, die von Prinzipien wie Verständnisorientierung und Anwendungsbezug geprägt ist, sowie der Leistungsfähigkeit der Lerngruppe können diese Inhalte jedoch nach didaktisch-methodischem Ermessen der Lehrkraft im Unterricht behandelt werden. Dazu könnte sich beispielsweise eine Übungsphase mit Binnendifferenzierung anbieten. Derartige Vertiefungen dürfen jedoch nicht zu Lasten verbindlicher Lehrplaninhalte erfolgen.

2.2.1 Kreis – Bogenmaß

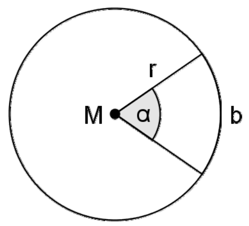
In der Jahrgangsstufe 8 haben sich die Schülerinnen und Schüler bereits mit der Kreismessung beschäftigt, die Formeln für Umfang und Flächeninhalt kennen gelernt sowie erste Näherungswerte für die Kreiszahl π ermittelt. Der Lehrplanabschnitt „M 10.1.1 Kreis“ sieht die Einführung des Bogenmaßes vor. Mithilfe des CAS-Rechners lässt sich der Zusammenhang zwischen der Größe eines Winkels im Gradmaß und dessen Größe im Bogenmaß veranschaulichen.

Vom Lehrplan nicht verbindlich vorgegeben ist die näherungsweise Bestimmung der Kreiszahl π mithilfe eines numerischen Verfahrens. Mit Unterstützung des CAS-Rechners, insbesondere der Tabellenkalkulationsfunktion, lassen sich geeignete Näherungsverfahren effektiv anwenden (vgl. „Vertiefungsmöglichkeit").

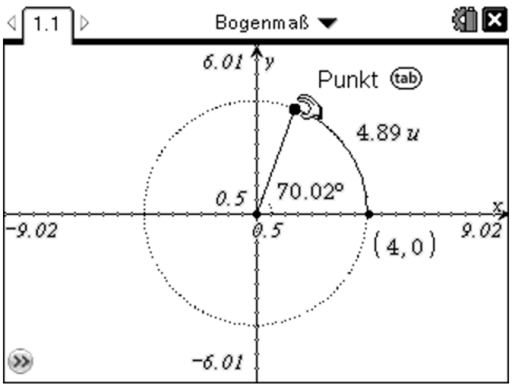
Im Zusammenhang mit den beschriebenen Vorschlägen zur Unterrichtsgestaltung sowie zur Vertiefung kommen insbesondere folgende CAS-Grundfertigkeiten zur Anwendung:
- Winkelmaß einstellen
- Taschenrechner verwenden
- Term definieren
- Termwert berechnen
- Wertetabelle erstellen
- Graph zeichnen, geeigneten Anzeigebereich wählen

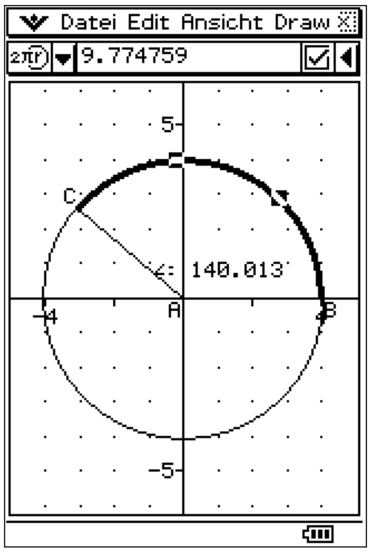
Vorschläge zur Unterrichtsgestaltung

Der Zusammenhang zwischen der Größe des Mittelpunktswinkels α (im Gradmaß) und der Bogenlänge b des zugehörigen Kreisbogens mit Radius r (vgl. Abbildung) kann unter Verwendung der dynamischen Geometriefunktion des CAS-Rechners anschaulich untersucht werden.



Mögliche Vorgehensweise:
- CAS-Rechner auf Gradmaß einstellen
- Kreis um den Koordinatenursprung zeichnen
- Kreisbogen durch drei Punkte auf dem Kreis festlegen
- Bogenlänge und Größe des Winkels (im Gradmaß) messen





Wird nun ein Endpunkt des Kreisbogens bewegt oder der Radius des Kreises verändert, so wird deutlich, dass die Bogenlänge sowohl von der Größe des Winkels als auch vom Radius abhängt; die direkte Proportionalität zwischen b und α sowie zwischen b und r liegt nahe. Auf dieser Grundlage lässt sich der Zusammenhang

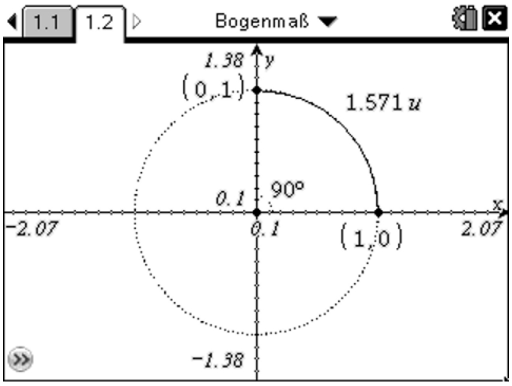
$$b = \frac{\alpha}{360°} \cdot 2r\pi$$

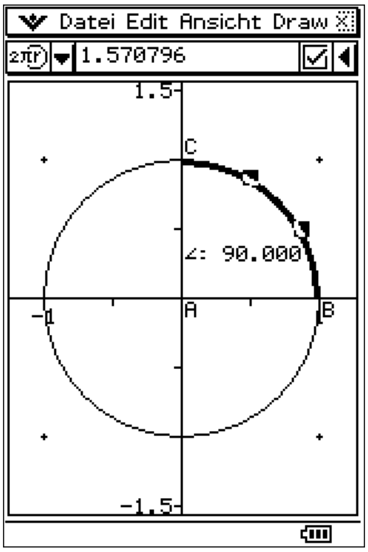
erarbeiten.

Da auch der Quotient $\frac{b}{r}$ wegen $\frac{b}{r} = \frac{\alpha}{360°} \cdot 2\pi$ direkt proportional zur Größe des Winkels α (im Gradmaß) ist, eignet er sich als Maß für die Größe des Winkels:

$$x = \frac{b}{r} \text{ (Größe des Winkels im Bogenmaß)}$$

Wählt man als Radius $r = 1$, so liefert die Maßzahl der Bogenlänge auf dem Einheitskreis zu einem Winkel der Größe α (im Gradmaß) das zugehörige Bogenmaß x.





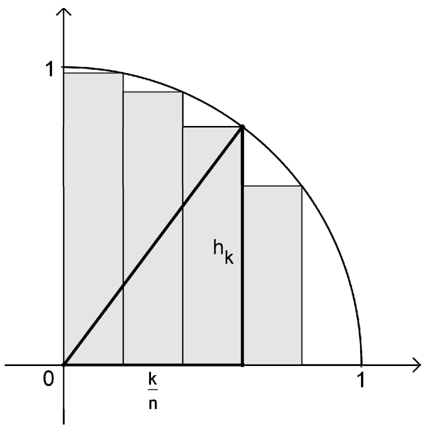
Bei der Bearbeitung von Aufgaben zum Bogenmaß (Umrechnung zwischen Gradmaß und Bogenmaß, Berechnung von Bogenlängen, Berechnung von Sinus- und Kosinuswerten) kann der CAS-Rechner im Wesentlichen wie ein herkömmlicher Taschenrechner verwendet werden.

Vertiefungsmöglichkeit

Näherungsweise Bestimmung der Kreiszahl π

Aufbauend auf Grundkenntnissen zur Kreismessung aus der Jahrgangsstufe 8 können mit Unterstützung von CAS numerische Näherungsverfahren zur Bestimmung der Kreiszahl π betrachtet werden. Dabei erkennen die Schülerinnen und Schüler die Notwendigkeit, Grenzprozesse durchzuführen. Der besondere Nutzen des CAS-Einsatzes liegt weniger in der Herleitung der Verfahren, als vielmehr in der Verarbeitung komplexer Terme, die gerade bei leistungsschwächeren Schülerinnen und Schülern das Verständnis für das eigentliche Verfahren behindern würde.

Zur Bestimmung eines Näherungswerts für π werden dem abgebildeten Sektor des Einheitskreises n Rechtecke der Breite $\frac{1}{n}$ einbeschrieben.



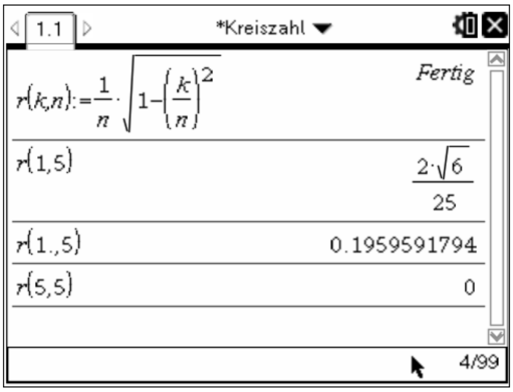
Mithilfe des Satzes von Pythagoras erhält man für die Höhe h_k des k-ten Rechtecks:

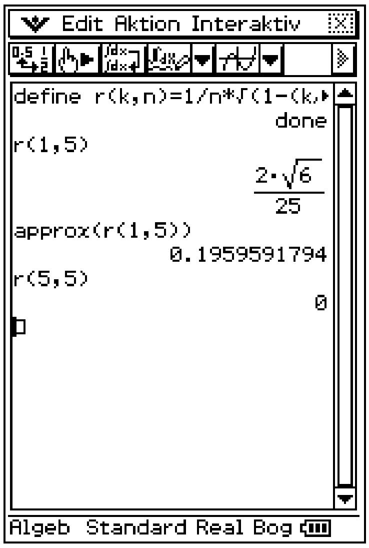
$$h_k = \sqrt{1 - \left(\frac{k}{n}\right)^2}$$

Damit ergibt sich für den Flächeninhalt des k-ten Rechtecks:

$$r(k,n) = \frac{1}{n} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{k}{n}\right)^2}$$

Um den Zusammenhang zwischen der algebraisch-symbolischen Beschreibung und der anschaulichen geometrischen Situation zu verdeutlichen, können konkrete Zahlenwerte eingesetzt werden.

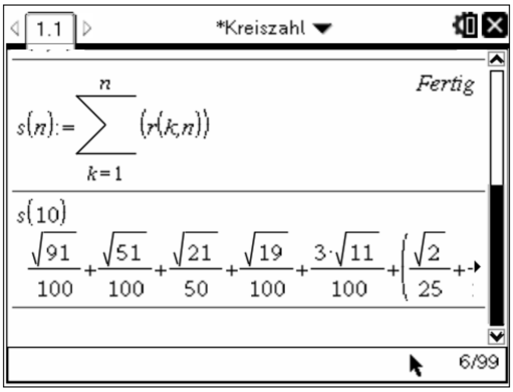


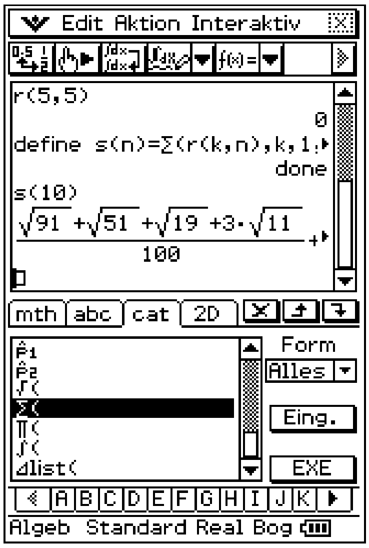


Als Näherungswert für den Flächeninhalt des Kreissektors ergibt sich:

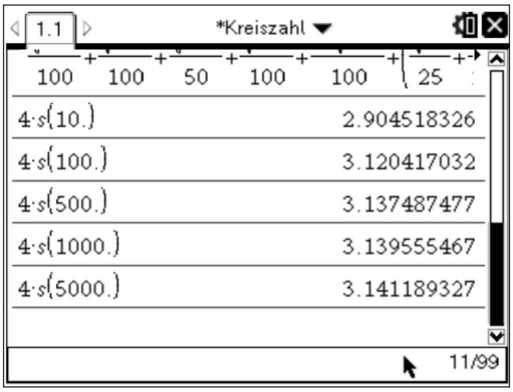
$$s(n)=\sum_{k=1}^{n} r(k,n)$$

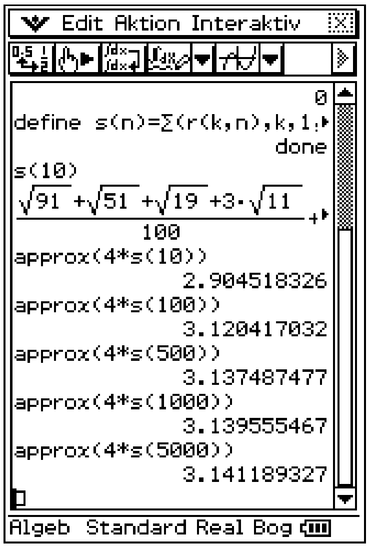
Der CAS-Rechner kann für $s(n)$ exakte Werte ausgeben.





Zur Ermittlung eines Näherungswerts für π ist die Ausgabe gerundeter Werte für $s(n)$ sinnvoll. Je größer man die Anzahl n der Rechtecke wählt, desto genauer wird – unter Berücksichtigung des Faktors 4 – der Näherungswert für π.





Das hergeleitete Näherungsverfahren lässt sich durch einen alternativen Zugang zur Höhe h_k des k-ten Rechtecks abwandeln.

Beschreibt man den Rand des Kreissektors durch die Funktion $f: x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ mit Definitionsbereich $[0;1]$, so gilt:

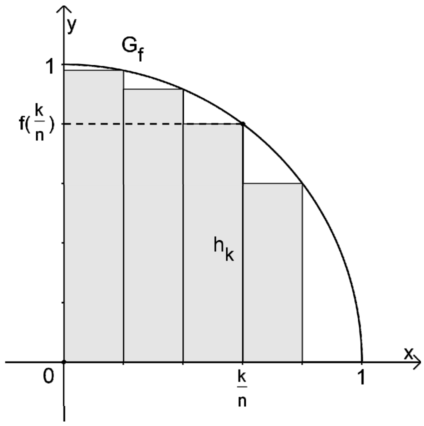
$$h_k = f\left(\tfrac{k}{n}\right)$$

Damit ergibt sich für den Flächeninhalt des k-ten Rechtecks:

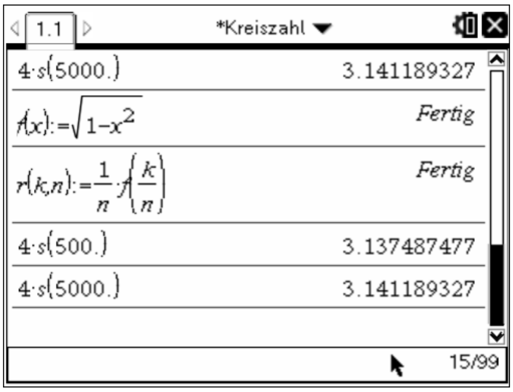
$$r(k,n) = \tfrac{1}{n} \cdot f\left(\tfrac{k}{n}\right)$$

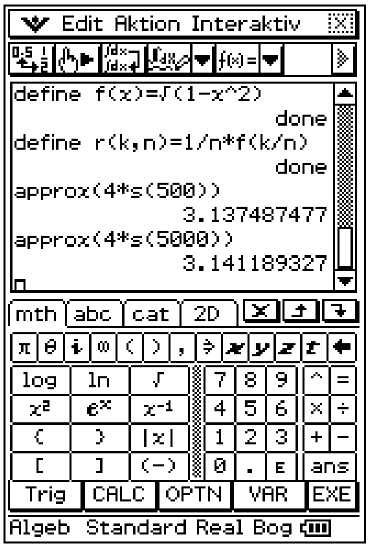
Der Näherungswert für den Flächeninhalt des Kreissektors bleibt unverändert:

$$s(n) = \sum_{k=1}^{n} r(k,n)$$



Ausgehend von dem zunächst durchgeführten Verfahren müssen im CAS-Rechner entsprechend nur der Funktionsterm von f und der geänderte Term $r(k,n)$ neu definiert werden.

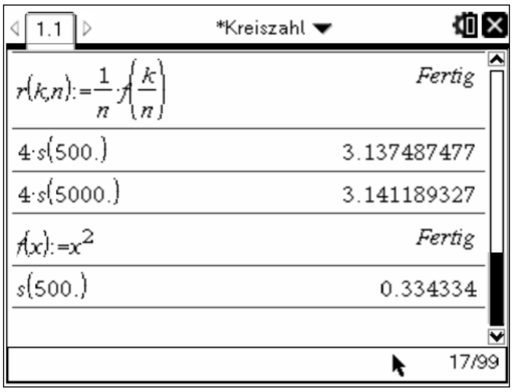


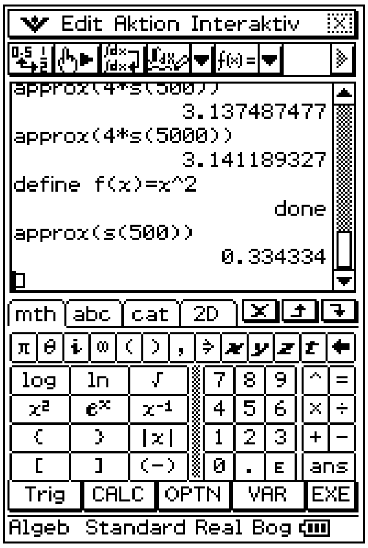


Das alternative Verfahren lässt sich auf beliebige Funktionen anwenden, um jeweils den Inhalt eines Flächenstücks zu bestimmen, das vom Funktionsgraphen, der x-Achse und zwei Parallelen zur y-Achse eingeschlossen wird.

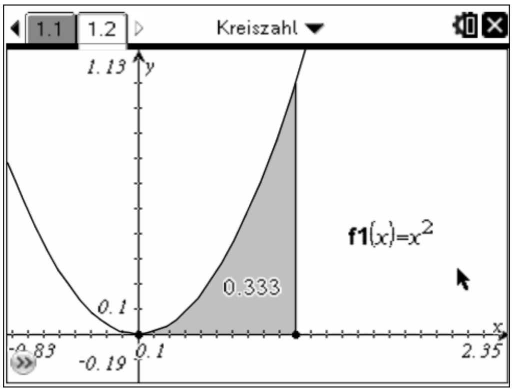
> **Arbeitsauftrag**
>
> Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $f : x \mapsto x^2$. Ermitteln Sie einen Näherungswert für den Inhalt des Flächenstücks, das der Graph von f, die x-Achse und die Gerade $x = 1$ einschließen.

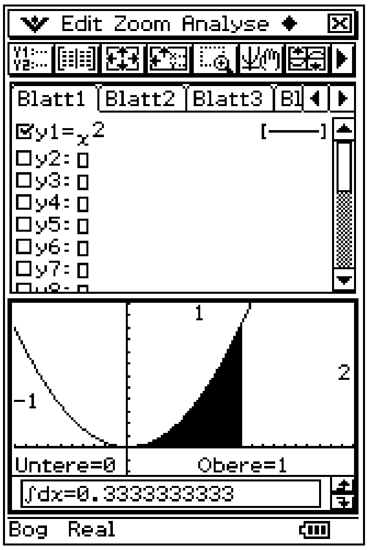
Ausgehend von der Bestimmung des Flächeninhalts des Kreissektors ist zur Lösung dieser Aufgabe lediglich eine Änderung der Definition des Funktionsterms von f im CAS-Rechner erforderlich.





Dass das verwendete Verfahren geeignet ist, den exakten Inhalt des betrachteten Flächenstücks zu ermitteln, lässt sich nahelegen, indem man zum Vergleich die Funktion des CAS-Rechners zur Berechnung eines derartigen Flächeninhalts nutzt.





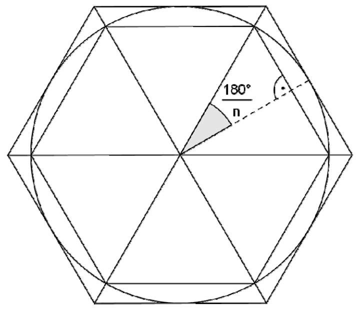
Für eine lineare Funktion ließe sich der ermittelte Näherungswert zusätzlich mit dem elementargeometrisch berechneten Inhalt der betrachteten Fläche vergleichen.

Näherungswerte für die Kreiszahl π lassen sich auch mithilfe einer Abschätzung des Kreisumfangs bestimmen (vgl. zugelassene Lehrbücher). Dazu wird der Umfang eines Kreises mit Radius r durch den Umfang u_n eines einbeschriebenen sowie den Umfang U_n eines umbeschriebenen regelmäßigen n-Ecks angenähert.

Einfache geometrische Überlegungen liefern:

$$u_n = n \cdot 2r \cdot \sin\left(\tfrac{180°}{n}\right)$$

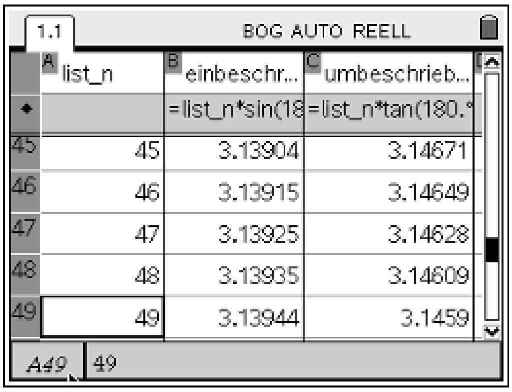
$$U_n = n \cdot 2r \cdot \tan\left(\tfrac{180°}{n}\right)$$

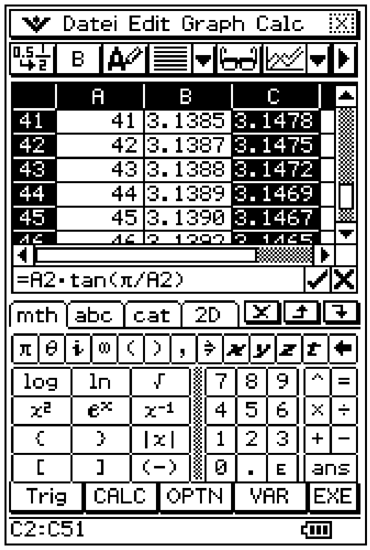


Mithilfe der Tabellenkalkulationsfunktion des CAS-Rechners lassen sich aus der resultierenden Abschätzung

$$u_n < 2r\pi < U_n \Leftrightarrow n \cdot \sin\left(\tfrac{180°}{n}\right) < \pi < n \cdot \tan\left(\tfrac{180°}{n}\right)$$

Näherungswerte für π ermitteln.





Die zugelassenen Lehrbücher bieten weitere Aufgaben zur näherungsweisen Bestimmung von π auf der Grundlage numerischer Verfahren. Insbesondere die Tabellenkalkulationsfunktion des CAS-Rechners kann die Bearbeitung dieser Aufgaben wesentlich unterstützen.

Arbeitsauftrag

Archimedes verwendete für sein Verfahren zur näherungsweisen Bestimmung der Kreiszahl π die Methode der Eckenverdoppelung. Dazu näherte er den Umfang eines Kreises mit einem Radius von einer halben Längeneinheit durch den Umfang u_n eines einbeschriebenen regelmäßigen n-Ecks an und bestimmte daraus mithilfe des Satzes von Pythagoras den Umfang des entsprechenden 2n-Ecks. Er begann die Ermittlung der Umfänge mit einem regelmäßigen 6-Eck, berechnete anschließend den Umfang des regelmäßigen 12-Ecks usw. Die Iterationsformel zur Berechnung des Umfangs u_{2n} des einbeschriebenen 2n-Ecks aus dem Umfang u_n des einbeschriebenen n-Ecks lautet:

$$u_{2n} = 2n \cdot \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{u_n}{n}\right)^2}}$$

a) Leiten Sie die oben angegebene Formel anhand einer geeigneten Skizze her. Ermitteln Sie u_6 und berechnen Sie u_n für $n = 12$, 24, 48 und 96.

b) Berechnen Sie u_n mithilfe der Tabellenkalkulationsfunktion des CAS-Rechners für sehr große Werte von n. Welches Problem tritt dabei auf?

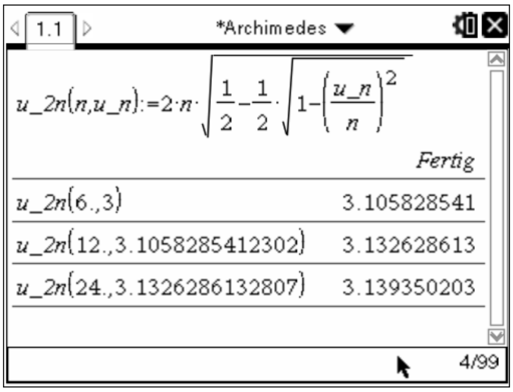
c) Durch geeignetes Erweitern erhält man aus der oben angegebenen Formel folgende veränderte Iterationsformel:

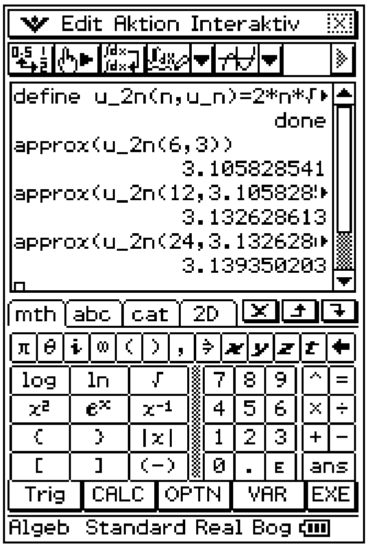
$$u_{2n} = \frac{2u_n}{\sqrt{2+2\sqrt{1-\left(\frac{u_n}{n}\right)^2}}}$$

Begründen Sie die Gültigkeit dieser Formel und führen Sie damit die Tabellenkalkulation erneut durch.

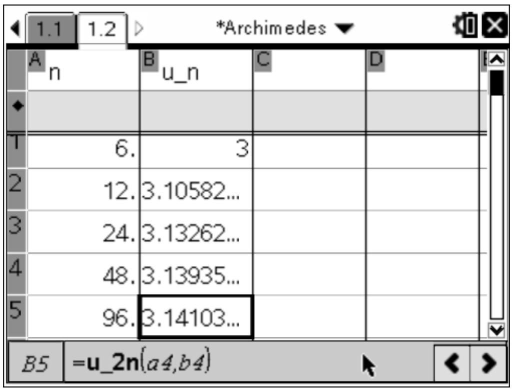
(nach Lambacher Schweizer 10, S. 11, Aufgabe 6)

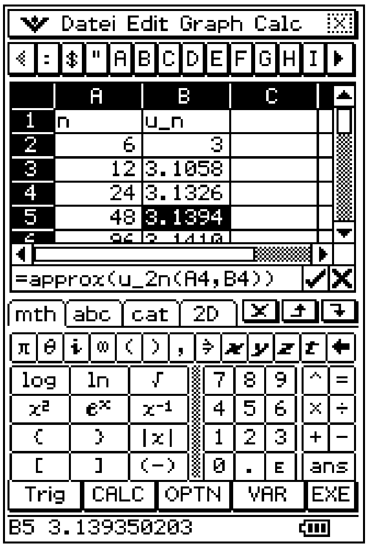
Die angegebenen Formeln zur Berechnung des Umfangs des einbeschriebenen n-Ecks lassen sich in den CAS-Rechner eingeben und auswerten.



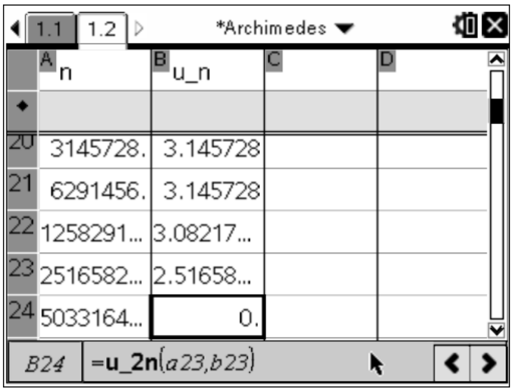


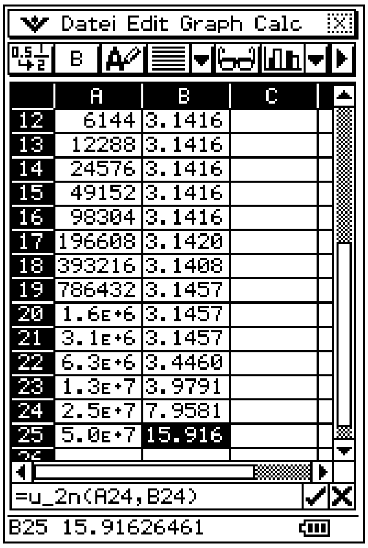
Eine Verwendung der Tabellenkalkulationsfunktion des CAS-Rechners bietet sich an.



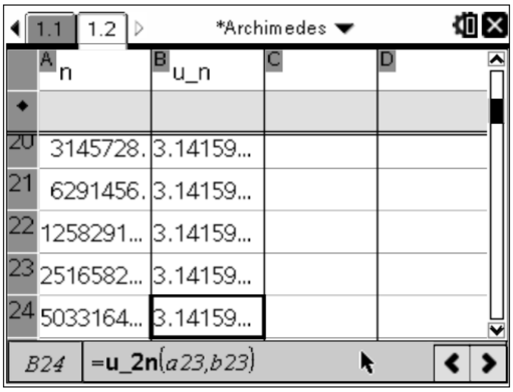


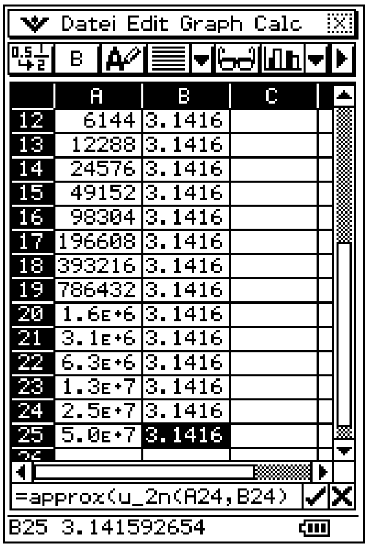
Die Folge, die durch die im einleitenden Text angegebene Iterationsformel definiert wird, ist allerdings nur bedingt dazu geeignet, einen Näherungswert von π mithilfe der Tabellenkalkulationsfunktion zu bestimmen.





Die durch die veränderte Iterationsformel definierte Folge dagegen liefert unter Verwendung der Tabellenkalkulationsfunktion den erwarteten Näherungswert. Die Änderung der Definition von u_{2n} wird vom CAS-Rechner automatisch in die Tabellenkalkulation übernommen.





2.2.2 Geometrische und funktionale Aspekte der Trigonometrie

Die Schülerinnen und Schüler ergänzen die Menge der ihnen bereits bekannten Funktionen durch die Sinus- und Kosinusfunktion. Ausgehend von Betrachtungen am Einheitskreis untersuchen sie diese Funktionen hinsichtlich wesentlicher Eigenschaften und lernen Periodizität als ein neues, charakteristisches Merkmal von Funktionen kennen. Die Verwendung des CAS-Rechners unterstützt dabei selbständig entdeckendes Lernen.

Anwendungen in Sachzusammenhängen bieten die Möglichkeit, den Einfluss der Änderung von Parametern im Funktionsterm auf die Graphen der Sinus- und Kosinusfunktion zu untersuchen. Die CAS-Rechner stellen Werkzeuge bereit, mit deren Hilfe sich Parameterwerte auf einfache Weise variieren lassen, und können damit äußerst gewinnbringend eingesetzt werden.

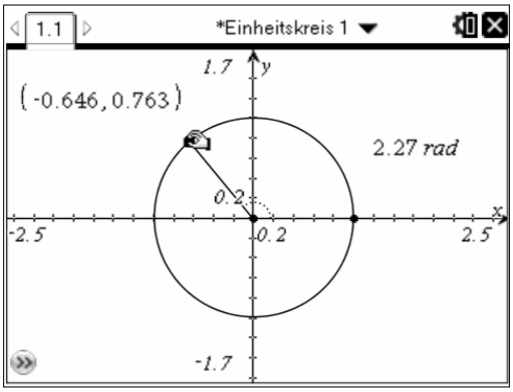
Mithilfe des CAS-Rechners kann auch die mathematische Beschreibung überlagerter Schwingungen, die vom Lehrplan nicht verbindlich vorgegeben ist, anschaulich behandelt werden (vgl. „Vertiefungsmöglichkeiten").

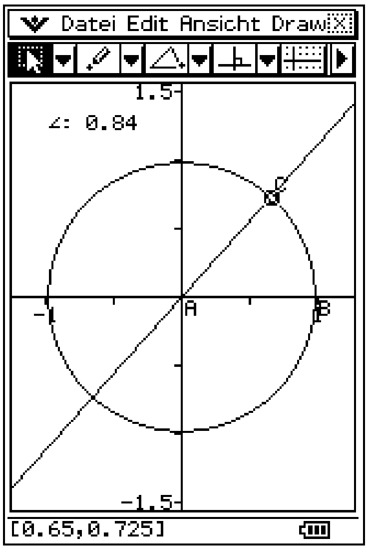
Im Zusammenhang mit den beschriebenen Vorschlägen zur Unterrichtsgestaltung sowie zur Vertiefung kommen insbesondere folgende CAS-Grundfertigkeiten zur Anwendung:
- Winkelmaß einstellen
- Taschenrechner verwenden
- Term vereinfachen
- Terme vergleichen
- Wertetabelle erstellen
- Gleichung lösen
- Graph zeichnen, geeigneten Anzeigebereich wählen
- Graphen von Scharfunktionen zeichnen
- Punktdiagramm zeichnen

Vorschläge zur Unterrichtsgestaltung

Sinus- und Kosinusfunktion

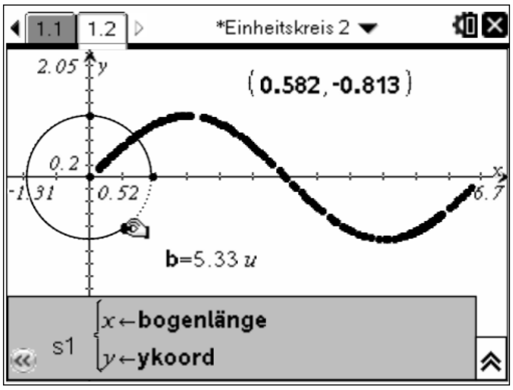
Mithilfe des CAS-Rechners können die Schülerinnen und Schüler am Einheitskreis zu einigen Winkelgrößen im Bogenmaß die zugehörigen Sinus- und Kosinuswerte bestimmen.

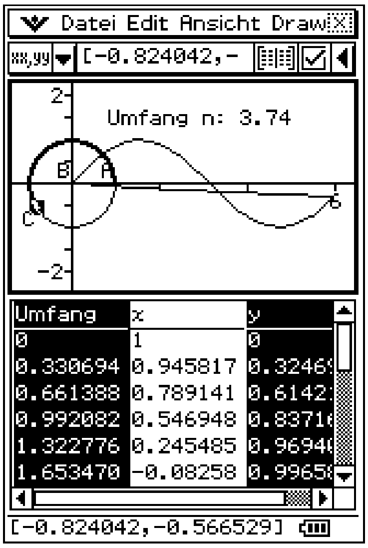


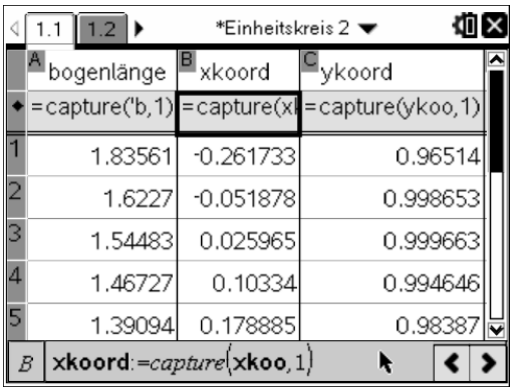


Die jeweiligen Wertepaare können manuell in einer Wertetabelle festgehalten und anschließend in einem Koordinatensystem dargestellt werden. Dabei wenden die Schülerinnen und Schüler die am Einheitskreis erarbeiteten Definitionen von Sinus und Kosinus für beliebige Winkel an und können gleichzeitig den Verlauf der Graphen der Sinus- und Kosinusfunktion selbständig entdeckend erarbeiten.

Alternativ oder im Anschluss daran können die Graphen der Sinus- und Kosinusfunktion mithilfe des CAS-Rechners dynamisch ermittelt werden, indem ein Punkt auf dem Einheitskreis bewegt und dabei seine y- bzw. x-Koordinate über die Winkelgröße aufgetragen wird. Dazu sind allerdings fortgeschrittene technische Fertigkeiten erforderlich, die von Schülerinnen und Schülern nicht erwartet werden.







Anschließend werden Wertemenge, Nullstellen und Periode der Sinus- und Kosinusfunktion durch geeignete Betrachtungen am Einheitskreis bestimmt. Auch die Symmetrieeigenschaften der Graphen können untersucht werden.

Periodizität

Durch folgenden Arbeitsauftrag kann eine allgemeine Definition der Periodizität vorbereitet werden.

Arbeitsauftrag

Stellen Sie mit dem CAS-Rechner den Graphen der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion $f: x \mapsto \sin x$ im selben Koordinatensystem zweimal dar, einmal als durchgezogene und einmal als gestrichelte Linie. Verschieben Sie nun einen der Graphen so nach links oder rechts, dass die Graphen wieder zur Deckung kommen.

a) Wie weit muss man den Graphen verschieben? Geben Sie mehrere Möglichkeiten an.

b) Begründen Sie, dass der Graph von f die beobachtete Eigenschaft besitzt.

c) Für welche x-Werte stimmt der Funktionswert von f mit dem Funktionswert an der Stelle $x = \frac{\pi}{2}$ überein? Beschreiben Sie damit die in Aufgabe a beobachtete Eigenschaft des Graphen von f in Symbolschreibweise.

d) Lassen sich Ihre Ergebnisse auf die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $g: x \mapsto \cos x$ übertragen?

Sobald die Definition der Periodizität bekannt ist, können die Schülerinnen und Schüler mithilfe des CAS-Rechners weitere Funktionen im Hinblick auf Periodizität untersuchen.

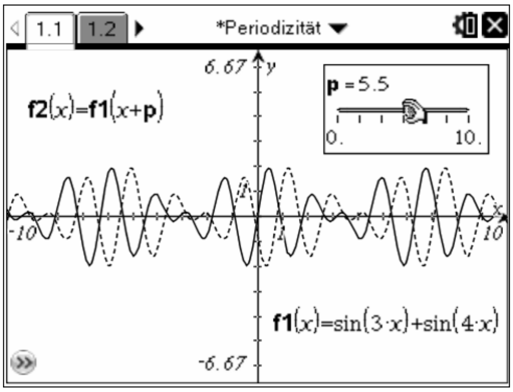
Arbeitsauftrag

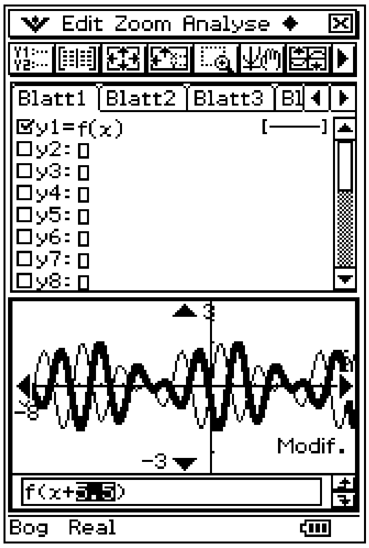
Stellen Sie mit dem CAS-Rechner die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $f: x \mapsto \sin(3x) + \sin(4x)$ graphisch dar.

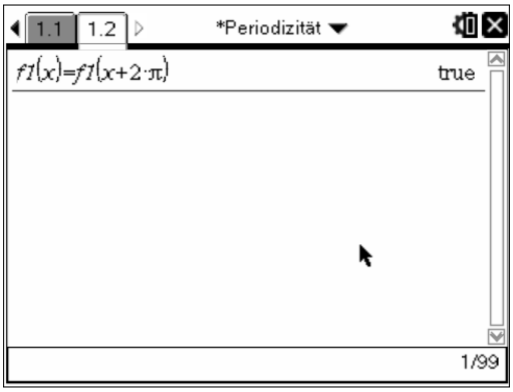
a) Welche Periode p hat die Funktion f? Begründen Sie Ihre Antwort anhand des Funktionsterms.

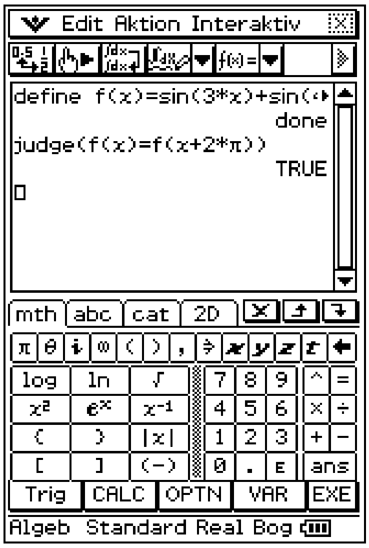
b) Was gilt also für die Funktionswerte $f(x)$ und $f(x+p)$? Überprüfen Sie Ihre Antwort, indem Sie die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $g: x \mapsto f(x+p)$ graphisch darstellen.

c) Kontrollieren Sie mithilfe des CAS-Rechners die Gültigkeit der Gleichung $f(x) = f(x+p)$ algebraisch und korrigieren Sie gegebenenfalls Ihren für p gefundenen Wert.







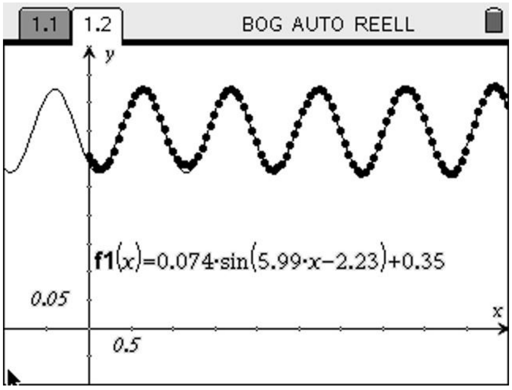


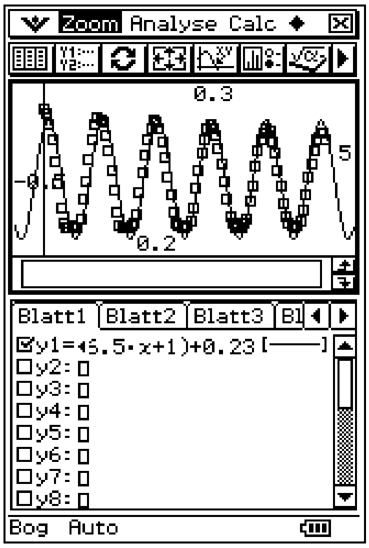
An dieser Stelle bietet es sich an, Periodizität auch im Zusammenhang mit dem Lösen von Gleichungen zu betrachten, z. B. anhand des einfachen Beispiels $\sin x = 0$.

Einfluss der Änderung von Parametern im Funktionsterm auf den zugehörigen Graphen

Werden gemeinsam mit den Schülerinnen und Schülern Beispiele für periodische Vorgänge aus deren Erfahrungswelt zusammengetragen, so wird deutlich, dass Sinus- und Kosinusfunktion im Zusammenhang mit der Beschreibung von Vorgängen aus Natur und Technik von wesentlicher Bedeutung sind.

Im Unterricht kann ein realer periodischer Vorgang am Beispiel der Schwingung eines Federpendels untersucht werden. Zunächst beschreiben die Schülerinnen und Schüler den Schwingungsvorgang möglichst genau in Worten; die eine Schwingung charakterisierenden Größen Frequenz, Periodendauer und Amplitude werden eingeführt, Vermutungen hinsichtlich der graphischen Darstellung der Auslenkung in Abhängigkeit von der Zeit angestellt. Um diese Vermutungen zu überprüfen, kann mithilfe eines CAS-Rechners und einem System zur Messwerterfassung (vgl. Abbildung) eine Messreihe aufgenommen werden; die Wertepaare werden in einem Punktdiagramm dargestellt. Anschließend wird ein im selben Koordinatensystem dargestellter Graph der Sinusfunktion so lange verschoben und verformt, bis der veränderte Graph die Darstellung der Messwerte möglichst gut approximiert.





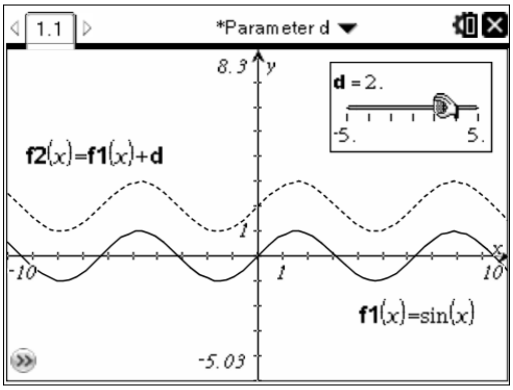
Ausgehend vom erhaltenen Funktionsterm können die Schülerinnen und Schüler Funktionen mit Termen der Form $f(x) = a \cdot \sin(b \cdot (x + c)) + d$ dahingehend systematisch untersuchen, wie sich eine Änderung der Parameter auf die zugehörigen Graphen auswirkt. Eine exakte Analyse des aus dem Experiment gewonnenen Funktionsterms, insbesondere eine Ermittlung der Frequenz der betrachteten Schwingung, kann nach dieser Untersuchung erfolgen.

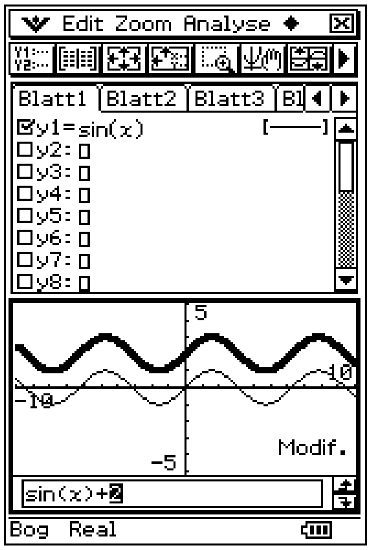
Arbeitsauftrag

a) Erstellen Sie mit dem CAS-Rechner Graphen der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionenschar $f_d : x \mapsto \sin x + d$ mit $d \in \mathbb{R}$, indem Sie den Wert des Parameters d unter Verwendung eines geeigneten Werkzeugs variieren.

b) Beschreiben Sie, wie diese Graphen aus dem Graphen der in $\mathbb{R}$ definierten Sinusfunktion $x \mapsto \sin x$ hervorgehen.

c) Geben Sie die Wertemenge und die Periode der Funktionenschar an.





Analog werden Arbeitsaufträge zur Untersuchung der Bedeutung der Parameter a, b und c formuliert. Es bietet sich an, jeweils zusätzlich den Zusammenhang mit den aus der Jahrgangsstufe 9 bekannten Lage- und Formveränderungen einer Parabel herzustellen.

Die Bearbeitung der Arbeitsaufträge könnte methodisch in Form eines Lernzirkels oder eines Expertenpuzzles durchgeführt werden. Denkbar ist auch, die Arbeitsaufträge arbeitsteilig in Gruppen bearbeiten zu lassen; stellen die einzelnen Gruppen ihre jeweiligen Ergebnisse übersichtlich auf jeweils einem Plakat zusammen, so können sie die Ergebnisse anschließend anhand der Plakate präsentieren.

Zur Festigung der Lerninhalte könnten die Schülerinnen und Schüler untersuchen, inwieweit sich die gewonnenen Erkenntnisse auf die Kosinusfunktion übertragen lassen. Außerdem bieten die zugelassenen Lehrbücher eine Vielzahl von Aufgaben, die an dieser Stelle zur Übung herangezogen werden können.

Zur Vorbereitung auf die Bearbeitung weiterer realitätsnaher Aufgaben können Arbeitsaufträge mit fiktiven Messwerten dienen, deren Zusammenhang jeweils durch eine Funktion möglichst genau beschrieben werden soll. Das Anforderungsniveau hängt dabei von der Anzahl gleichzeitig zu ändernder Parameter ab.

Arbeitsauftrag

Gegeben sind folgende Messwerte:

x	–1,0	0,0	0,8	1,6	2,2	3,1	3,5	4,7	6,0	6,5	7,0
y	18,6	6,0	–4,8	–9,0	–6,1	5,4	11,3	21	10,2	2,8	–3,9

Gesucht ist zunächst eine in $\mathbb{R}$ definierte Funktion der Form $x \mapsto a \cdot \sin(b \cdot (x+c)) + d$, die den Zusammenhang der Messwerte x und y möglichst gut beschreibt.

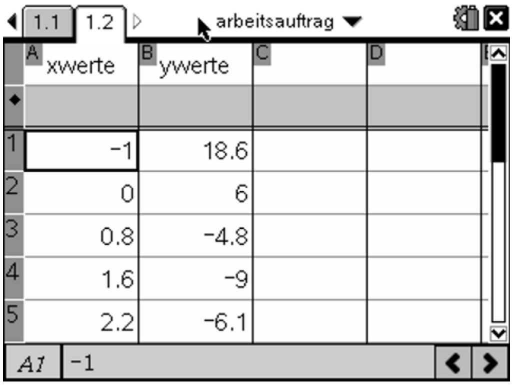
a) Stellen Sie die Wertepaare mit dem CAS-Rechner in einem Punktdiagramm dar.

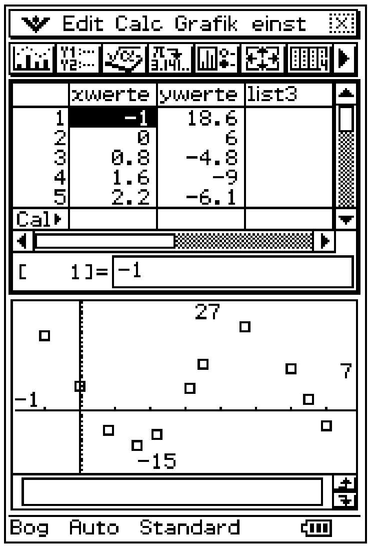
b) Stellen Sie eine Vermutung an, wie die Parameterwerte zu wählen sind, und überprüfen Sie Ihre Vermutung anschließend, indem Sie den Graphen der zugehörigen Funktion im Punktdiagramm darstellen. Geben Sie die Wertemenge und die Periode der ermittelten Funktion an.

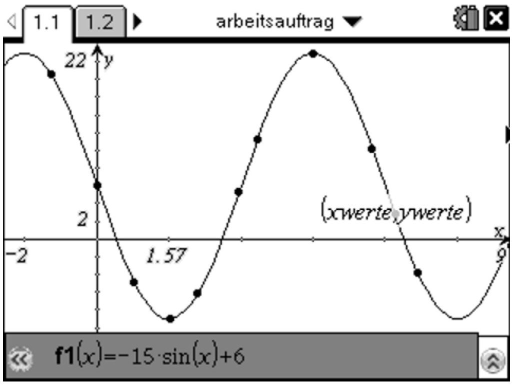
c) Gibt es noch weitere ebenso geeignete Funktionen der Form $x \mapsto a \cdot \sin(b \cdot (x+c)) + d$ mit Definitionsbereich $\mathbb{R}$? Stellen Sie eine Vermutung an und überprüfen Sie diese mithilfe des CAS-Rechners.

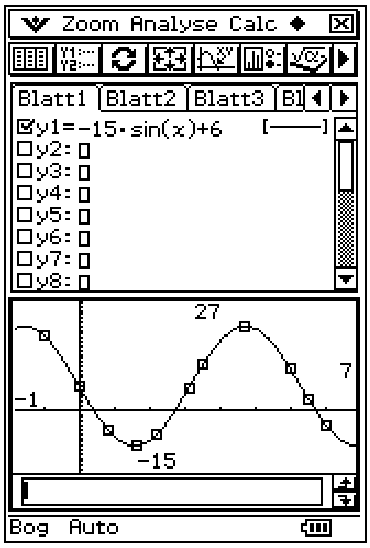
d) Geben Sie nun eine in $\mathbb{R}$ definierte Funktion der Form $x \mapsto a \cdot \cos(b \cdot (x + c)) + d$ an, die den Zusammenhang der Messwerte x und y möglichst gut beschreibt.

Vergleichen Sie Ihre Lösungen mit der ausliegenden Musterlösung.









Im Rückblick auf die einleitende Untersuchung der Schwingung eines Federpendels können nun Lage- und Formveränderungen der Graphen der Sinus- und Kosinusfunktion im Zusammenhang mit Frequenz, Periodendauer, Amplitude, Startzeitpunkt und Bezugsniveau analysiert werden. Anschließend können weitere Beispiele realer periodischer Vorgänge anhand von Aufgaben aus den zugelassenen Lehrbüchern betrachtet werden (z. B. bsv 10, S. 61, Aufgabe 11; delta 10, S. 57, Aufgabe IV; Lambacher Schweizer 10, S. 57, Aufgabe 14). Dabei kann es sich gegebenenfalls anbieten, zu einem vorgegebenen Diagramm mit dem CAS-Rechner ein entsprechendes Punktdiagramm zu erstellen, um einen vorgegebenen Funktionsterm hinsichtlich seiner Eignung zur Beschreibung des Kurvenverlaufs zu beurteilen bzw. einen dazu geeigneten Funktionsterm zu ermitteln.

Vertiefungsmöglichkeiten

Näherungsweise Bestimmung von Sinus- und Kosinuswerten

Der Frage, wie ein Taschenrechner Sinuswerte ermittelt, können insbesondere leistungsstärkere Schülerinnen und Schüler – beispielsweise im Rahmen einer Unterrichtsphase mit Binnendifferenzierung – mit folgendem Arbeitsauftrag nachgehen.

Arbeitsauftrag

Mithilfe des Zusammenhangs

$$\sin x = \frac{x^1}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

lassen sich durch Beschränkung auf endlich viele Summanden Näherungswerte für $\sin x$ bestimmen.

a) Machen Sie sich an einfachen Beispielen die Struktur des oben angegebenen Terms mit dem Summenzeichen klar. Berechnen Sie anschließend mit dem CAS-Rechner unter Verwendung des Summenzeichens:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 99^2 = \sum_{k=1}^{99} \ldots = \ldots$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} \ldots = \ldots$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \ldots = \ldots$$

$$1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} \ldots$$

b) Welchen Wert hat die rechte Seite der Gleichung $\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$ für $x = 0$?

c) Die im einleitenden Text angegebene Summe besteht aus unendlich vielen Summanden. Schreiben Sie die ersten sieben Summanden auf und berechnen Sie für ein beliebiges $x \in]0;1[$ den Wert der zugehörigen Summe. Vergleichen Sie diesen Wert mit dem Wert, den der CAS-Rechner für $\sin x$ liefert.

d) Wie viele Summanden sind nötig, um den Wert $\sin\left(\frac{5}{3}\pi\right)$ auf zehn Dezimalen genau zu bestimmen?

Die für kleine x-Werte geltende Näherung $\sin x \approx x$ kann anhand des folgenden Arbeitsauftrags oder anhand von Aufgaben aus den zugelassenen Lehrbüchern (z. B. Fokus 10, S. 38, Aufgabe 17; Lambacher Schweizer 10, S. 52, Aufgabe 18) untersucht werden.

Arbeitsauftrag

Für kleine x-Werte gilt die Näherung $\sin x \approx x$.

a) Veranschaulichen Sie die Näherung, indem Sie zwei geeignete Funktionsgraphen zeichnen.

b) Bestimmen Sie alle x-Werte, für die der absolute Fehler der Näherung kleiner als 0,01 ist.

Zu Aufgabe b sind mithilfe eines CAS-Rechners beispielsweise folgende Lösungswege möglich:

- Betrachten des Graphen der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion $f: x \mapsto \sin x - x$ in einem geeigneten Anzeigebereich
- Rechnerisches Lösen geeigneter Gleichungen ($\sin x - x = 0{,}01$, $\sin x - x = -0{,}01$)

Arbeitsauftrag

Betrachten Sie den Graphen der Sinus- oder Kosinusfunktion in einem Abschnitt zwischen zwei benachbarten Schnittpunkten mit der x-Achse und beschreiben Sie diesen Abschnitt näherungsweise durch eine quadratische Funktion.

Der gesuchte Funktionsterm kann mithilfe des CAS-Rechners durch Verschieben und Verformen des Graphen der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion $x \mapsto x^2$ verhältnismäßig einfach ermittelt werden.

Schwebung

Mithilfe des CAS-Rechners lässt sich veranschaulichen, dass die Addition der Terme von Sinusfunktionen den Term einer ebenfalls periodischen Funktion liefert. Dies kann am Beispiel einer akustischen Schwebung hörbar gemacht werden.

Arbeitsauftrag

Überlagern sich zwei Schallwellen gleicher Amplitude an einem festen Ort, so kann das resultierende Phänomen mathematisch mithilfe der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen $f_1 : t \mapsto \sin(b_1 t)$ und $f_2 : t \mapsto \sin(b_2 t)$ mit $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ erfasst werden. Es ergibt sich eine Schwingung, deren Auslenkung sich durch den Term $f(t) = f_1(t) + f_2(t)$ beschreiben lässt.

a) Variieren Sie b_1 sowie b_2 und beobachten Sie die Auswirkung auf den Graphen von f.

b) Vereinfachen Sie den Term $\sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$ mit dem CAS-Rechner. Wenden Sie die resultierende Beziehung an, um $f(t) = f_1(t) + f_2(t)$ in ein Produkt zu verwandeln. Welches Produkt ergibt sich für $b_1 = b_2$?

Setzen Sie nun $b_1 = 1{,}5\pi$ und $b_2 = 1{,}45\pi$.

c) Beschreiben Sie für f_1, f_2 und f jeweils den Verlauf des zugehörigen Graphen.

d) Zeigen Sie mithilfe von Aufgabe b, dass gilt:

$$f(t) = 2 \cdot \sin(1{,}475\pi t) \cdot \cos(0{,}025\pi t)$$

Welche physikalische Bedeutung haben die Faktoren 2, $\sin(1{,}475\pi t)$ und $\cos(0{,}025\pi t)$?

e) Eine Schwingung, die durch Überlagerung zweier Wellen annähernd gleicher Frequenz an einem festen Ort entsteht, bezeichnet man als Schwebung. Überprüfen Sie Ihre Überlegungen zu Aufgabe d in einem Experiment mit zwei auf die gleiche Frequenz geeichten Stimmgabeln, von denen eine beispielsweise mit einem Tropfen Wachs versehen ist.

(nach Lambacher Schweizer 10, S. 60 f.)

2.2.3 Exponentielles Wachstum

Vielfältige Beispiele aus Natur, Technik und Wirtschaft machen den Schülerinnen und Schülern die große Bedeutung von Wachstums- und Abklingprozessen bewusst. Mithilfe des CAS-Rechners lassen sich reale Vorgänge, wie das Abkühlen heißen Tees, verhältnismäßig einfach durch Exponentialfunktionen modellieren; die Förderung des Verständnisses für mathematische Modelle und die Interpretation von Ergebnissen können betont werden.

Aufbauend auf ihrem Wissen über Potenzen erforschen die Schülerinnen und Schüler verschiedene Exponentialfunktionen und können deren charakteristische Eigenschaften selbständig entdeckend erarbeiten. Insbesondere am Verlauf der zugehörigen Funktionsgraphen stellen sie fest, wie sich exponentielles von linearem Wachstum unterscheidet.

Im Zusammenhang mit den beschriebenen Vorschlägen zur Unterrichtsgestaltung sowie zur Vertiefung kommen insbesondere folgende CAS-Grundfertigkeiten zur Anwendung:

- Taschenrechner verwenden
- Term definieren
- Termwert berechnen
- Wertetabelle erstellen
- Gleichung lösen
- Gleichungssystem lösen
- Graph zeichnen, geeigneten Anzeigebereich wählen
- Graphen von Scharfunktionen zeichnen
- Punktdiagramm zeichnen

Vorschläge zur Unterrichtsgestaltung

Beispiele für exponentiellen Anstieg und exponentielle Abnahme, Abgrenzung des exponentiellen Wachstums von linearem Wachstum

Beispielsweise anhand unterschiedlicher Geldanlagemöglichkeiten lernen die Schülerinnen und Schüler exponentielles Wachstum kennen und von linearem Wachstum zu unterscheiden. Einführende Beispiele mit einfachen Zahlen zu überschaubaren Sachzusammenhängen erleichtern das Verständnis für diese Grundlagen. Da der CAS-Rechner dabei hauptsächlich wie ein herkömmlicher Taschenrechner zum Einsatz kommt, wird im Folgenden nur ein Beispiel vorgestellt. Auch Beispiele für exponentielle Abnahme können analog formuliert werden.

Arbeitsauftrag

Betrachtet werden folgende Sparpläne.

Sparplan 1: 1300 Euro Startguthaben, 100 Euro jährliche Zuzahlung

Sparplan 2: 1000 Euro Startguthaben, jährliche Verzinsung mit einem Zinssatz von 10 %

a) Erstellen Sie eine Tabelle, die für jeden Sparplan für die ersten zehn Jahre das jeweils am Ende eines Jahres bestehende Guthaben angibt; stellen Sie die Daten graphisch dar.

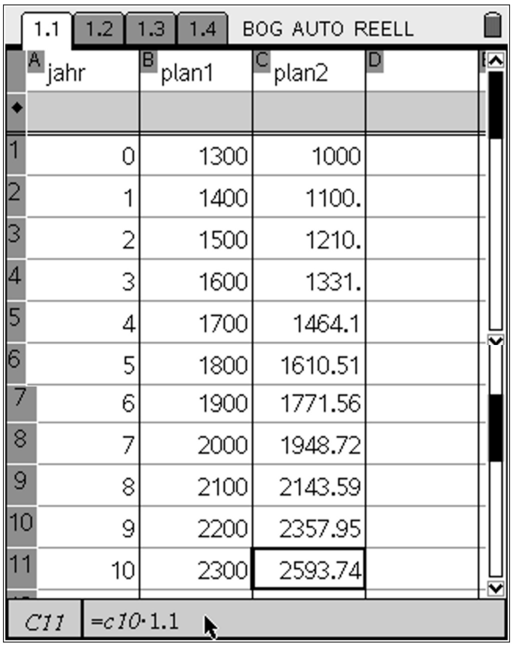
b) Beschreiben Sie für die beiden Sparpläne die Entwicklung des Guthabens jeweils durch eine Funktion; wählen Sie jeweils einen sinnvollen Definitionsbereich. Vergleichen Sie die zugehörigen Graphen mit der Darstellung aus Aufgabe a.

c) Ermitteln Sie, nach wie vielen Jahren das exponentiell wachsende Guthaben das linear wachsende Guthaben erstmalig übersteigt. Löst man diese Aufgabe mithilfe einer Gleichung, so liefert der CAS-Rechner zwei verschiedene Lösungen; interpretieren Sie diese anhand einer graphischen Darstellung.

d) Ändern Sie den Zinssatz so, dass das Guthaben nach zehn Jahren für beide Sparpläne gleich groß ist.

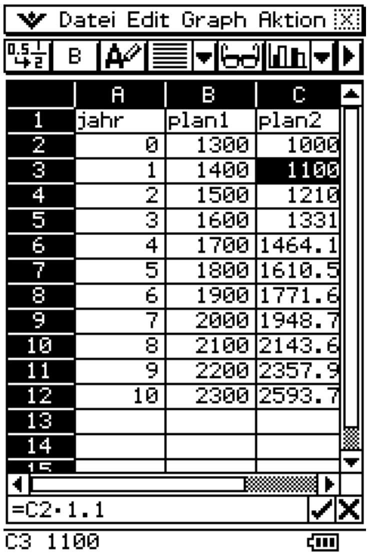
e) Ermitteln Sie für den Zinssatz von 10 % ein Startguthaben, das für beide Sparpläne innerhalb von zehn Jahren zum gleichen Guthaben führt.

Mithilfe der Tabellenkalkulationsfunktion des CAS-Rechners lässt sich Aufgabe a verhältnismäßig einfach bearbeiten.



	A jahr	B plan1	C plan2	D
1	0	1300	1000	
2	1	1400	1100.	
3	2	1500	1210.	
4	3	1600	1331.	
5	4	1700	1464.1	
6	5	1800	1610.51	
7	6	1900	1771.56	
8	7	2000	1948.72	
9	8	2100	2143.59	
10	9	2200	2357.95	
11	10	2300	2593.74	

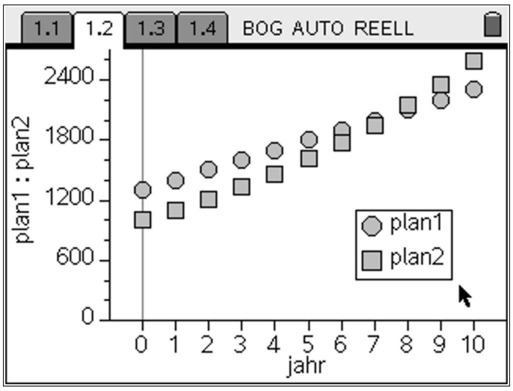
C11 =c10·1.1

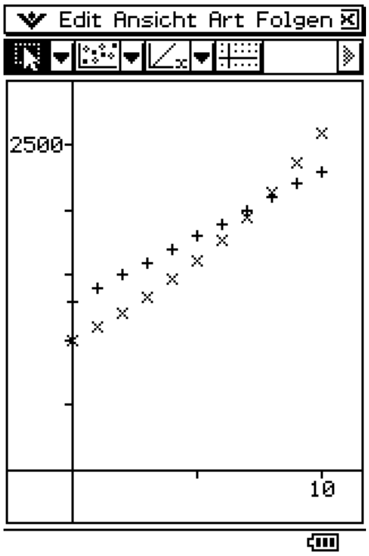


	A	B	C
1	jahr	plan1	plan2
2	0	1300	1000
3	1	1400	1100
4	2	1500	1210
5	3	1600	1331
6	4	1700	1464.1
7	5	1800	1610.5
8	6	1900	1771.6
9	7	2000	1948.7
10	8	2100	2143.6
11	9	2200	2357.9
12	10	2300	2593.7
13			
14			

=C2·1.1

C3 1100





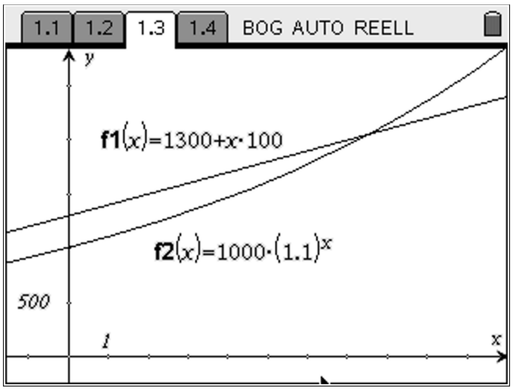
Schon vor der Bearbeitung der Aufgabe b können die grundlegenden Begriffe lineares und exponentielles Wachstum, Anfangswert und konstanter Zuwachs bzw. Wachstumsfaktor besprochen werden.

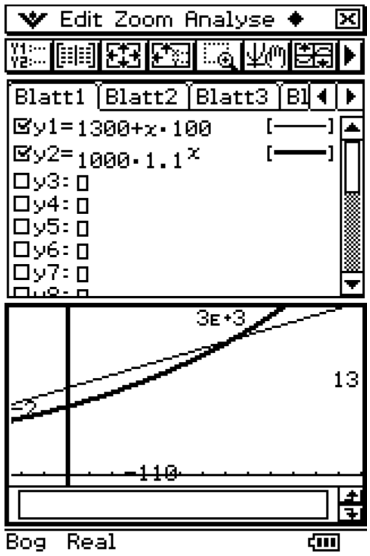
Eine Analyse der Wertetabellen ermöglicht das Aufstellen der Funktionen zur Beschreibung der beiden Sparpläne:

$$f_1 : x \mapsto 1300 + x \cdot 100\,;\ \ x \in \mathbb{N}_0$$

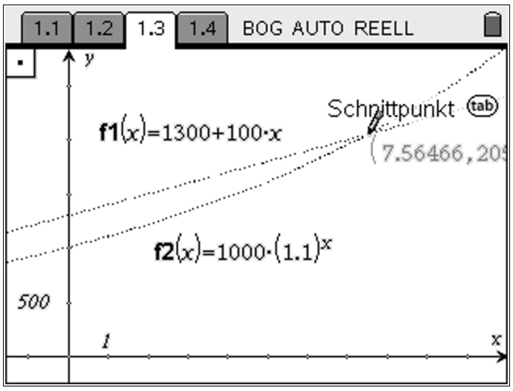
$$f_2 : x \mapsto 1000 \cdot 1{,}10^x\,;\ \ x \in \mathbb{N}_0$$

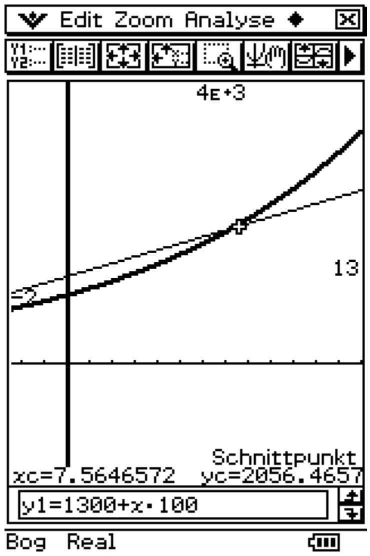
Der CAS-Rechner stellt die zugehörigen Graphen aus technischen Gründen stetig über $\mathbb{R}$ dar.

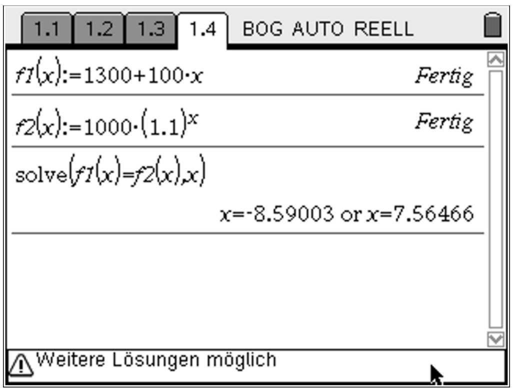


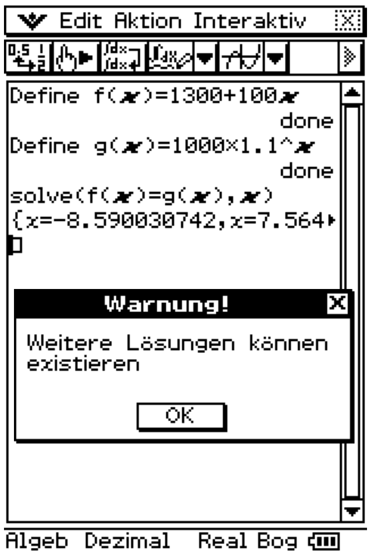


Im Rahmen der Bearbeitung der Aufgabe c kann die Gleichung $f_1(x) = f_2(x)$ algebraisch nicht gelöst werden. Mit dem CAS-Rechner lassen sich deren Lösungen jedoch graphisch oder rechnerisch näherungsweise ermitteln.



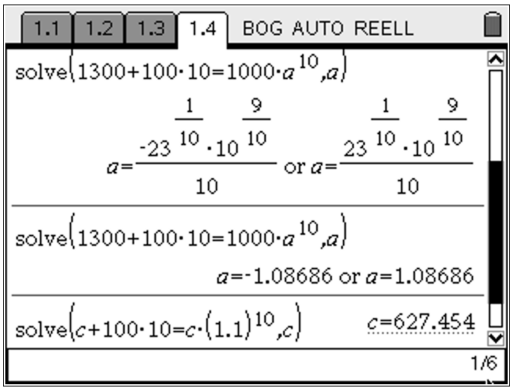


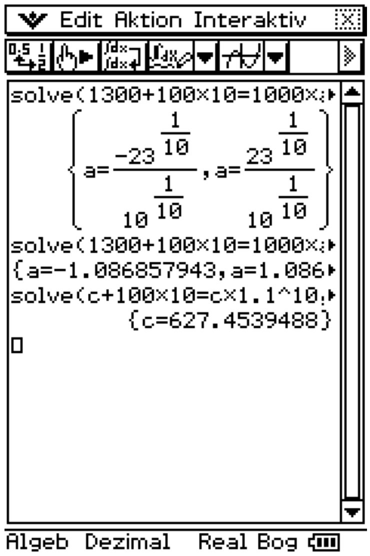




Da der CAS-Rechner die beiden Lösungen der Gleichung nur numerisch ermitteln kann, wird durch eine Warnmeldung darauf hingewiesen, dass weitere Lösungen existieren können. Die vom CAS-Rechner ausgegebene negative Lösung lässt sich graphisch erst nach Veränderung des Anzeigebereichs erkennen; der Schnittpunkt der Graphen mit negativer x-Koordinate wird dann sichtbar. Stets sollten Ergebnisse des CAS-Rechners kritisch geprüft werden – hier ist die negative Lösung im Sachzusammenhang bedeutungslos.

Auch anhand der Aufgaben d und e erfahren die Schülerinnen und Schüler das Aufstellen einer Gleichung sowie das Interpretieren der zugehörigen Lösungen als geeignete Lösungsstrategie.



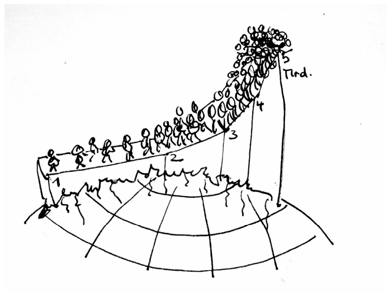


Modellierung von Wachstums- und Abklingprozessen

Die Entwicklung der Weltbevölkerung bietet Anknüpfungspunkte für die Modellierung von Vorgängen mit linearem oder exponentiellem Wachstum.

Arbeitsauftrag

Ende des Jahres 2007 bestand die Weltbevölkerung aus etwa 6,7 Milliarden Menschen. Um das Jahr 950 gab es Schätzungen zufolge weltweit etwa 300 Millionen Menschen.



a) Ermitteln Sie aus den gegebenen Daten eine Wachstumsfunktion mit einem Funktionsterm der Form $N(x) = c \cdot a^x$, die die Entwicklung der Anzahl der auf der Erde lebenden Menschen in Abhängigkeit von der Zeit x näherungsweise beschreibt. Dabei soll x die seit Christi Geburt vergangene Zeit in Jahren sein.

b) Überprüfen Sie die ermittelte Wachstumsfunktion mithilfe der gegebenen Daten und berechnen Sie, um wie viele Menschen die Weltbevölkerung nach diesem Modell seit Ende des Jahres 2007 zugenommen hat.

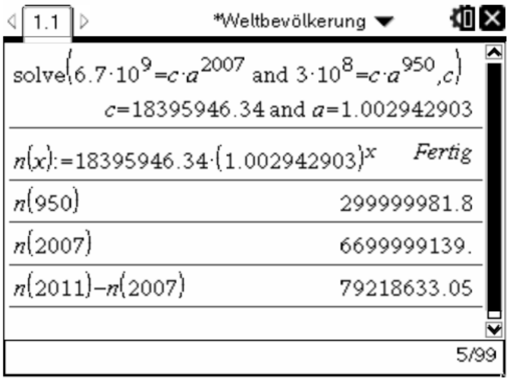
c) In welchem Jahr lebte nach dem ermittelten Modell ein einziges Menschenpaar?

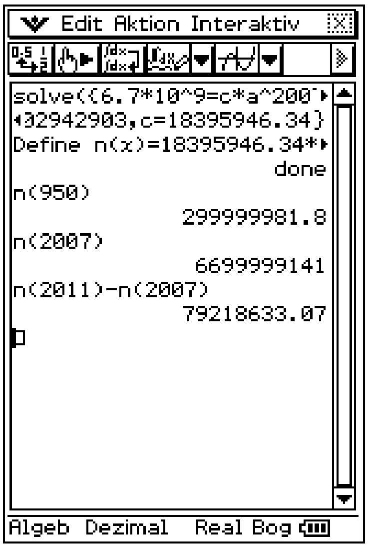
d) Stellen Sie die ermittelte Wachstumsfunktion für die folgenden Zeiträume jeweils graphisch dar und beschreiben Sie vergleichend die jeweiligen Formen der Graphen:

$T_1 = [0;2000]$ $T_2 = [1800;2000]$ $T_3 = [1990;2000]$

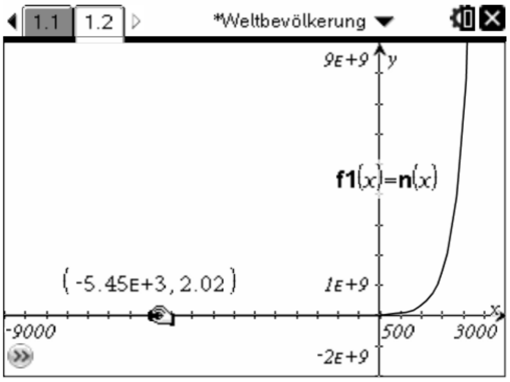
e) Ermitteln Sie den Term einer linearen Funktion, mit der sich das exponentielle Wachstum im Zeitraum T_3 möglichst gut näherungsweise beschreiben lässt; veranschaulichen Sie die Näherung graphisch. Bestimmen Sie anhand des Terms der linearen Funktion die jährliche Zunahme der Anzahl der auf der Erde lebenden Menschen.

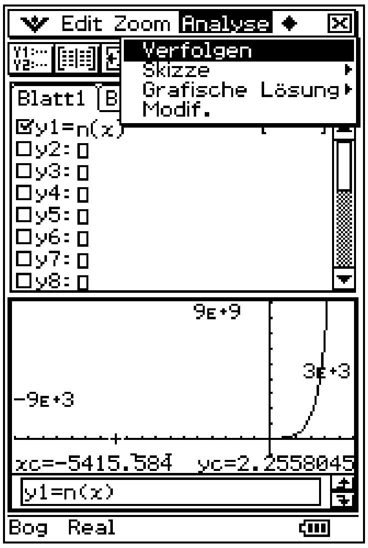
Eine Überprüfung der zu Aufgabe a ermittelten Wachstumsfunktion im Rahmen der Bearbeitung der Aufgabe b ist sinnvoll, da so erkannt werden kann, ob der Wachstumsfaktor möglicherweise zu grob gerundet wurde.

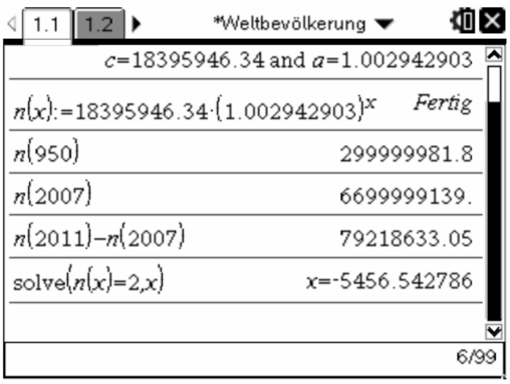


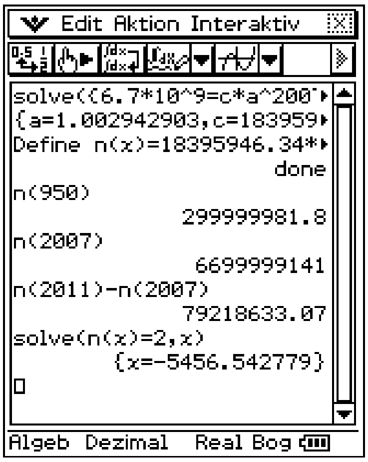


Die Bearbeitung der Aufgabe c erfordert die Lösung der Exponentialgleichung $n(x) = 2$. Wurde der Logarithmus noch nicht eingeführt, kann die Gleichung mit dem CAS-Rechner graphisch oder rechnerisch gelöst werden. Graphisch erhält man näherungsweise das Jahr 5400 v. Chr., rechnerisch das Jahr 5457 v. Chr.



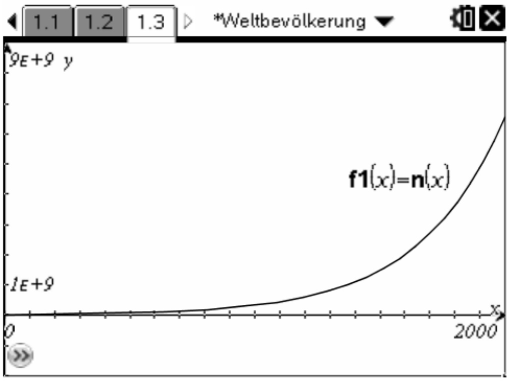


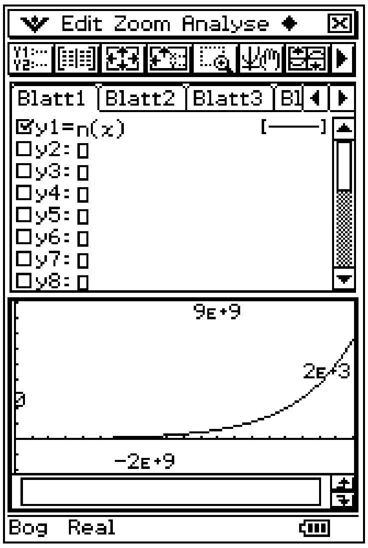




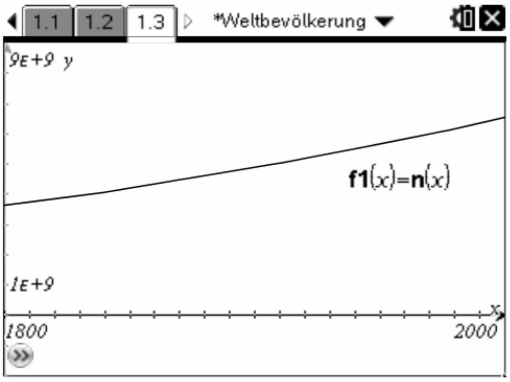
Eine genaue Betrachtung des Verlaufs des Graphen der Exponentialfunktion im Rahmen der Aufgaben d und e zeigt, dass sich dieser abschnittsweise in guter Näherung durch eine lineare Funktion beschreiben lässt.

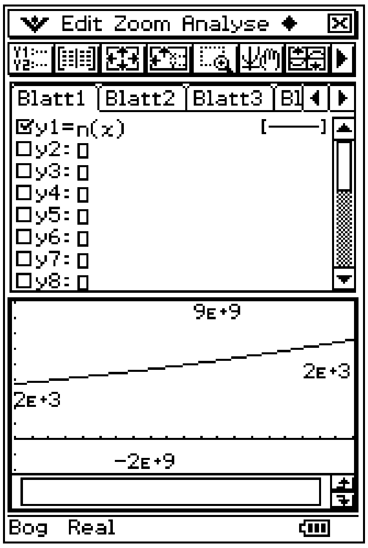
- $T_1 = [0;2000]$



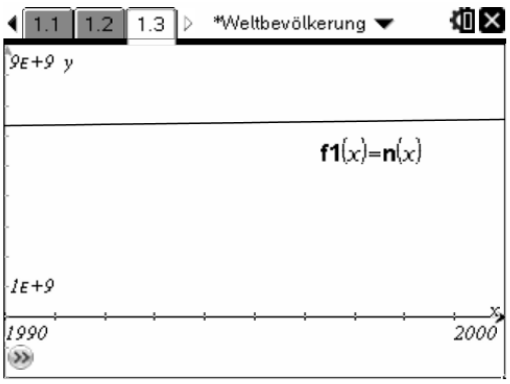


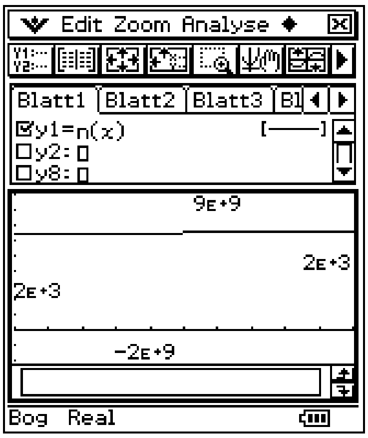
- $T_2 = [1800;2000]$



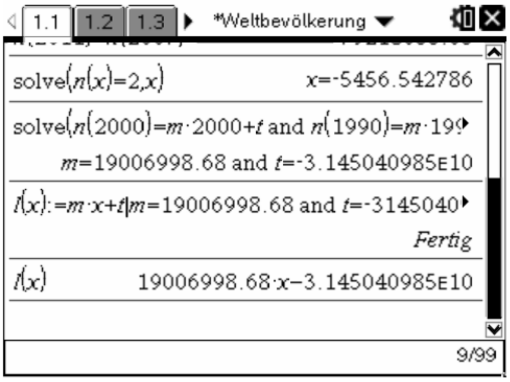


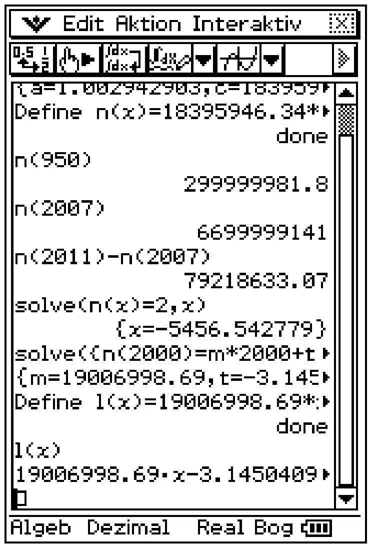
- $T_3 = [1990;2000]$

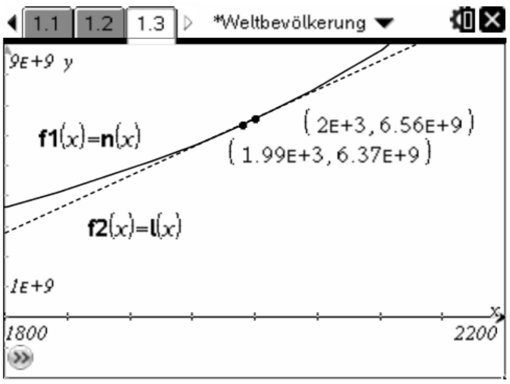


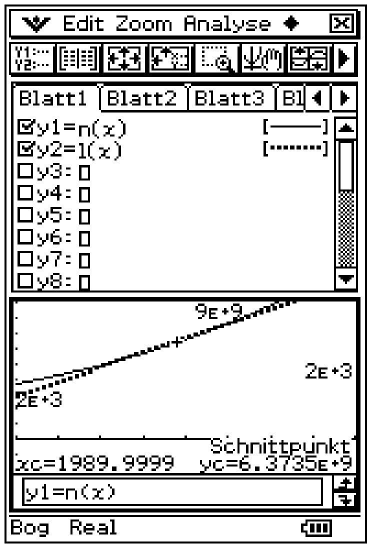


Um den Term der gesuchten linearen Funktion zu ermitteln, können z. B. die Werte $N(x)$ an den Grenzen des Zeitraums T_3 verwendet werden. Der CAS-Rechner liefert die Lösung des aus dem Ansatz $y = mx + t$ resultierenden Gleichungssystems. Unter Verwendung der Zoomfunktion lässt sich zeigen, dass der Graph der linearen Funktion im Zeitraum T_3 mit dem Graphen der Exponentialfunktion nahezu übereinstimmt.









Die beiden folgenden offen formulierten Arbeitsaufträge zum Wachstum der Weltbevölkerung eignen sich besonders zur Bearbeitung in Gruppen. Die mithilfe des CAS-Rechners ermittelten Ergebnisse können anschließend präsentiert werden.

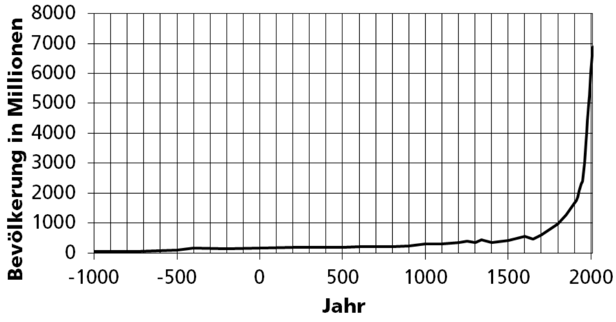
Arbeitsauftrag

Modellieren Sie das Wachstum der Weltbevölkerung durch eine Exponentialfunktion. Schätzen Sie ab, wann sämtliche Kontinente der Erde nach diesem Modell lückenlos von Menschen besiedelt wären.

Arbeitsauftrag

Die Abbildung zeigt die Entwicklung der Weltbevölkerung in den letzten 3000 Jahren.

Modellieren Sie das Bevölkerungswachstum jeweils in einem geeigneten Zeitraum durch eine lineare Funktion und eine Exponentialfunktion.



Auch eine von den Schülerinnen und Schülern durchgeführte Recherche im Internet kann als Grundlage für selbständiges, CAS-gestütztes Modellieren von Wachstumsvorgängen dienen.

CAS-Rechner erlauben eine mobile Datenerfassung; einige Modelle lassen sich direkt mit einem Temperatursensor verbinden. Erfasste Daten können rechnerisch bearbeitet werden.

Arbeitsauftrag

Das Abkühlen heißen Tees soll durch ein mathematisches Modell beschrieben werden.

a) Füllen Sie heißen Tee in eine Tasse und messen Sie in geeignet gewählten Zeitabständen dessen Temperatur, bis diese annähernd mit der Raumtemperatur übereinstimmt.

b) Stellen Sie die Daten mit dem CAS-Rechner tabellarisch und graphisch dar.

c) Beschreiben Sie den Temperaturverlauf möglichst genau durch eine Funktion f mit einem Term der Form $f(x) = c + b \cdot a^x$, wobei x die seit dem Einfüllen des Tees vergangene Zeit in Minuten und f(x) die zugehörige Temperatur in °C ist. Welche physikalische Bedeutung haben die Parameter b und c?

d) Vergleichen Sie für ausgewählte Zeitpunkte Modell und Realität. Wie entwickelt sich die Temperatur im Modell insbesondere für lange Wartezeiten?

In ähnlicher Weise können das Erwärmen von Eiswasser mit Eiswürfeln, das Erwärmen eines in der Sonne liegenden schwarzen Körpers oder das Zerfallen von Bierschaum untersucht werden.

Allgemeine Exponentialfunktion

Die Schülerinnen und Schüler müssen in der Lage sein, Funktionsgraphen auch manuell exakt zu zeichnen. Deshalb sollten sie nach der Einführung der in $\mathbb{R}$ definierten allgemeinen Exponentialfunktion $f: x \mapsto a^x$ mit $a \in \mathbb{R}^+$ für ausgewählte Werte von a jeweils manuell eine Wertetabelle erstellen und den zugehörigen Graphen zeichnen. Anschließend können sie in Gruppen mithilfe des CAS-Rechners die mathematischen Eigenschaften der Funktion in Abhängigkeit von der Basis selbständig entdeckend untersuchen. Die beispielsweise auf einem Plakat oder einer Folie festgehaltenen Erkenntnisse können dann präsentiert werden. Wird dabei der Bildschirminhalt eines CAS-Rechners projiziert, können im Rahmen der gemeinsamen Diskussion Vermutungen anhand geeigneter Graphen unmittelbar überprüft und falls nötig korrigiert werden.

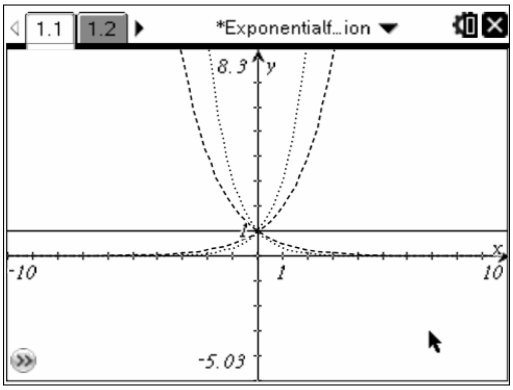
Arbeitsauftrag

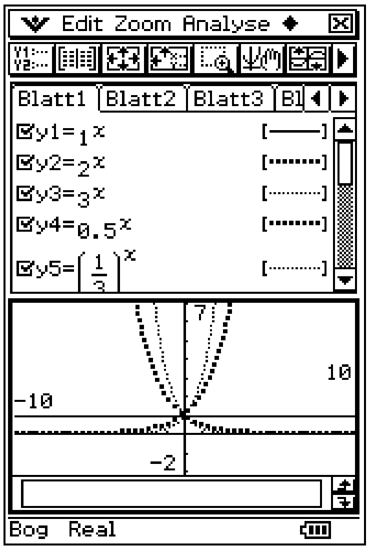
Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Schar von Exponentialfunktionen $f_a: x \mapsto a^x$ mit $a \in \mathbb{R}^+$. Der Graph von f_a wird mit G_a bezeichnet.

a) Stellen Sie G_1, G_2, G_3, $G_{\frac{1}{2}}$ und $G_{\frac{1}{3}}$ mit dem CAS-Rechner graphisch dar.

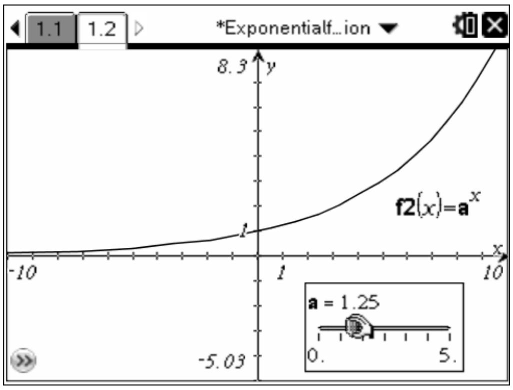
b) Beantworten Sie folgende Fragen; zeichnen Sie dazu falls nötig weitere Graphen. Gestalten Sie ein übersichtliches Plakat, das die Gemeinsamkeiten der Graphen verdeutlicht.
- In welchen Quadranten verlaufen die Graphen?
- Wo liegen die Schnittpunkte der Graphen mit den Koordinatenachsen?
- Welche Punkte haben alle Graphen gemeinsam?
- Welches Steigungsverhalten zeigen die Graphen?
- Wie verhalten sich die Funktionen für sehr große und sehr kleine x-Werte?
- Welche Wertemenge haben die Funktionen?
- Zeigen die Graphen eine Symmetrie?
- Gibt es Graphen, die zueinander symmetrisch sind?

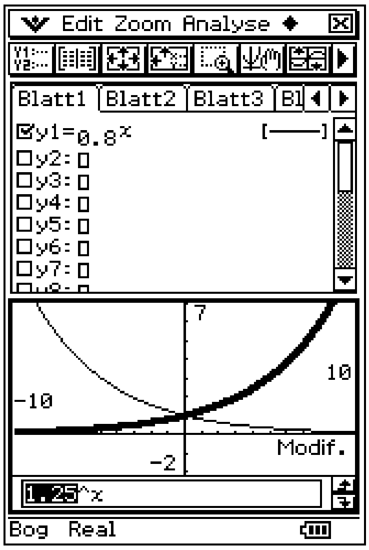
Der CAS-Rechner dient den Schülerinnen und Schülern zum Zeichnen der Graphen sowie zur Durchführung möglicherweise hilfreicher Berechnungen.





Zum Zeichnen weiterer Graphen bietet sich eine Verwendung der von den CAS-Rechnern bereitgestellten Werkzeuge an, mit deren Hilfe sich Parameterwerte auf einfache Weise variieren lassen.





2.2.4 Graphen ganzrationaler Funktionen

Aufbauend auf ihrem bisherigen Wissen über Funktionen untersuchen die Schülerinnen und Schüler ganzrationale Funktionen. Sie ermitteln Lage und Art von Nullstellen sowie das Verhalten der Funktionen an den Rändern des Definitionsbereichs; dabei soll die Anschauung im Vordergrund stehen. Beim Einüben manueller Fertigkeiten, wie dem Skizzieren eines Graphen unter Berücksichtigung der wesentlichen Eigenschaften der zugehörigen Funktion, kann der CAS-Rechner als Kontrollinstrument dienen.

Im Zusammenhang mit dem Lehrplanabschnitt „M 10.5.2 Vertiefen der Funktionenlehre“ werden die gewonnenen Erkenntnisse vertieft. Mithilfe des CAS-Rechners können die Schülerinnen und Schüler den Einfluss der Änderung von Parametern im Funktionsterm auf den Graphen einer ganzrationalen Funktion selbständig entdeckend untersuchen.

Im Zusammenhang mit den beschriebenen Vorschlägen zur Unterrichtsgestaltung sowie zur Vertiefung kommen insbesondere folgende CAS-Grundfertigkeiten zur Anwendung:

- Term definieren
- Termwert berechnen
- Term faktorisieren
- Wertetabelle erstellen
- Gleichung lösen
- Graph zeichnen, geeigneten Anzeigebereich wählen
- Graphen von Scharfunktionen zeichnen

Vorschläge zur Unterrichtsgestaltung

Potenzfunktionen mit natürlichen Exponenten

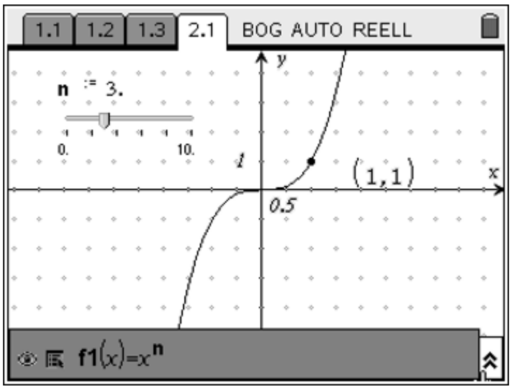
Die Schülerinnen und Schüler können die wesentlichen Eigenschaften von Potenzfunktionen mit natürlichen Exponenten mithilfe des CAS-Rechners selbständig erarbeiten. Eine systematische Untersuchung von Potenzfunktionen mit ganzzahligen Exponenten kann später im Zusammenhang mit dem Lehrplanabschnitt „M 10.5.2 Vertiefen der Funktionenlehre“ erfolgen.

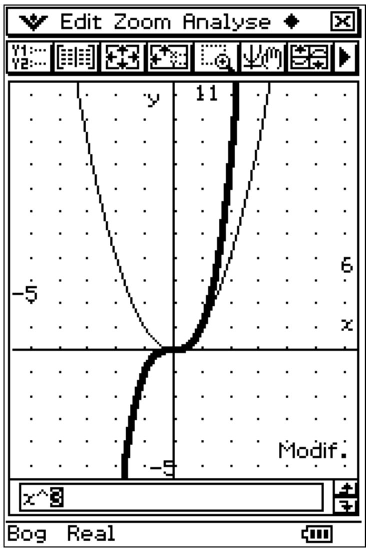
Arbeitsauftrag

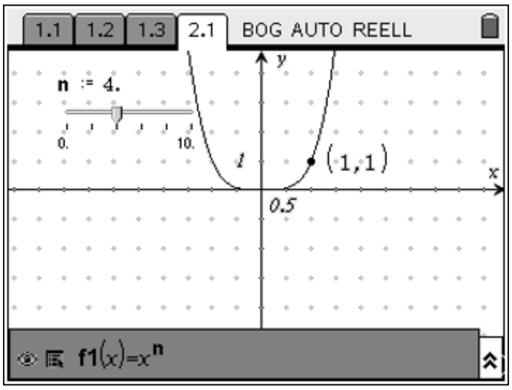
Untersuchen Sie mithilfe des CAS-Rechners die Graphen der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen $f: x \mapsto x^n$ mit $n \in \mathbb{N}$ bezüglich folgender Eigenschaften:

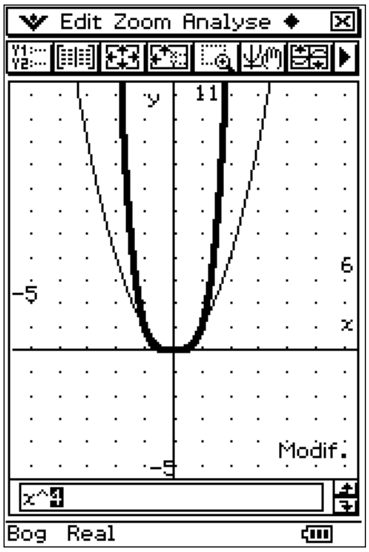
- Definitions- und Wertemenge
- Nullstellen
- Symmetrie
- Steigungsverhalten
- Gemeinsame Punkte

Für die Untersuchung empfiehlt sich die Verwendung der von den CAS-Rechnern bereitgestellten Werkzeuge, mit deren Hilfe sich Parameterwerte auf einfache Weise variieren lassen.





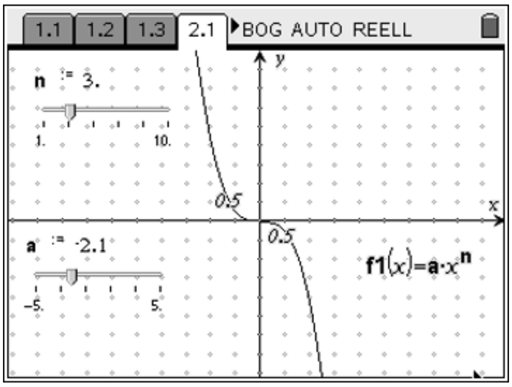


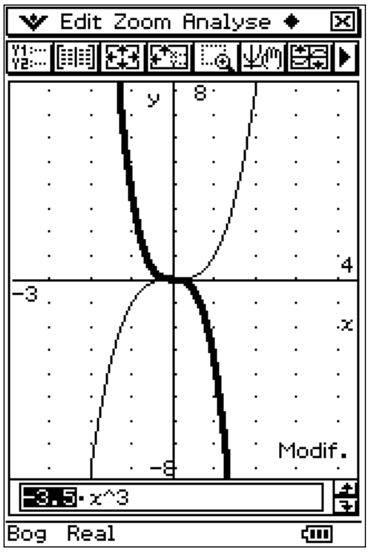


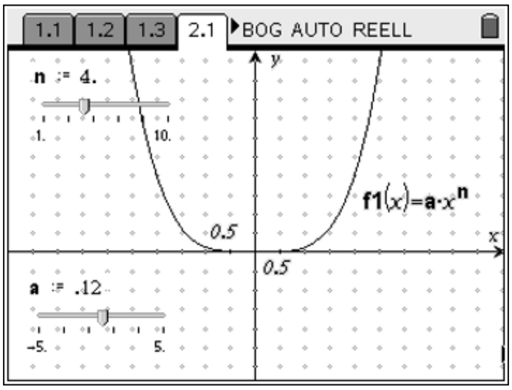
Arbeitsauftrag

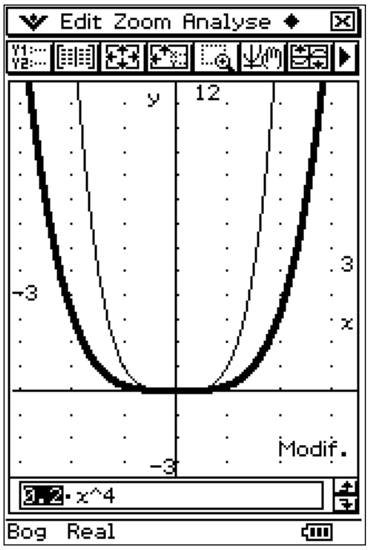
Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Schar von Funktionen $f_a : x \mapsto a \cdot x^n$ mit $a \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$. Untersuchen Sie den Einfluss des Parameters a auf den Verlauf des Graphen von f_a.

Welche Eigenschaften der Graphen der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen $f : x \mapsto x^n$ mit $n \in \mathbb{N}$ bleiben unabhängig von a erhalten, welche Eigenschaften ändern sich?









Verhalten an den Rändern des Definitionsbereichs

Arbeitsauftrag

Untersuchen Sie das Verhalten folgender in $\mathbb{R}$ definierter Funktionen für sehr große und sehr kleine x-Werte, d. h. für $x \to +\infty$ und $x \to -\infty$:

$f: x \mapsto x^3 - 2x^2 - 5x + 2$ $\quad$ $g: x \mapsto 2x^4 - 4x^3 - 8x^2 + 5$ $\quad$ $h: x \mapsto x^5 - 3x^4 + 4x - 4$

$i: x \mapsto 4x^4 - 2x^6 + 4$ $\quad$ $j: x \mapsto -2x^3 - x^2$

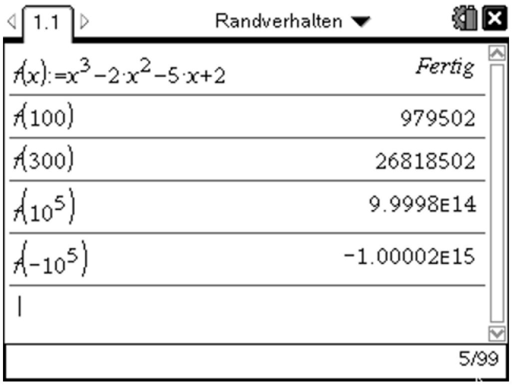
Wie verhält sich allgemein eine in $\mathbb{R}$ definierte ganzrationale Funktion

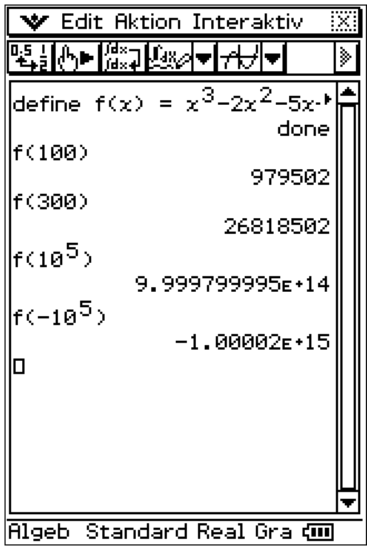
$$f: x \mapsto a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \text{ mit } a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$$

für sehr große und sehr kleine x-Werte?

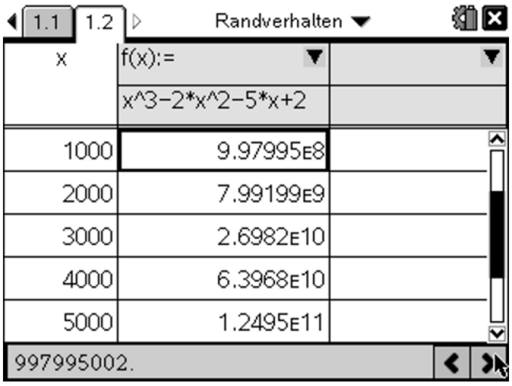
Für die Bearbeitung dieses Arbeitsauftrags mithilfe des CAS-Rechners haben die Schülerinnen und Schüler verschiedene Möglichkeiten.

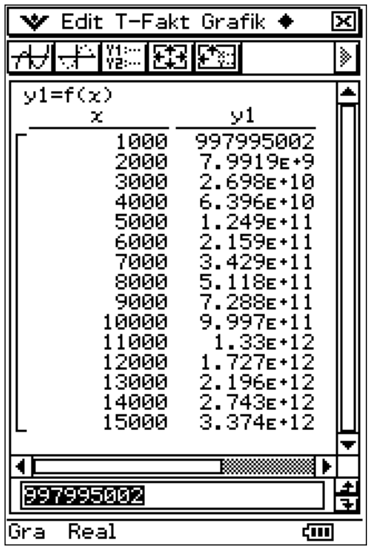
♦ Berechnen geeigneter Funktionswerte



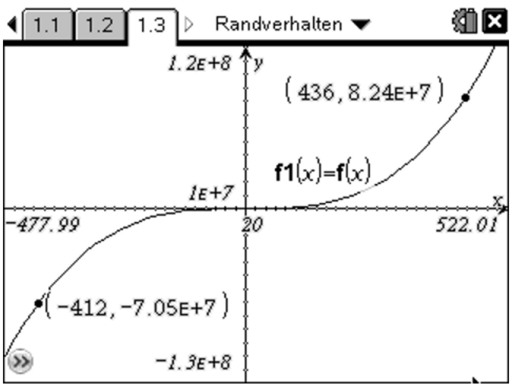


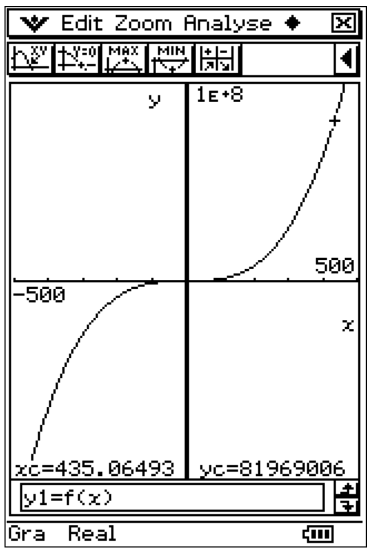
♦ Erstellen einer Wertetabelle



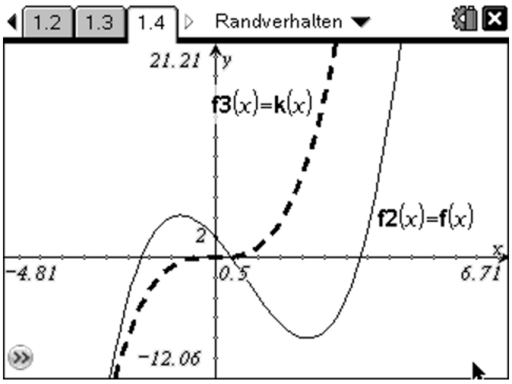


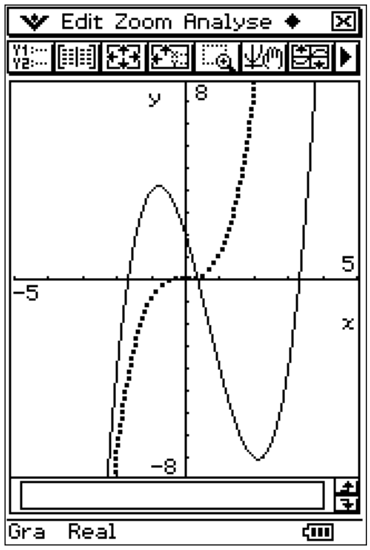
♦ Darstellen des Verlaufs des zugehörigen Graphen für sehr große und sehr kleine x-Werte

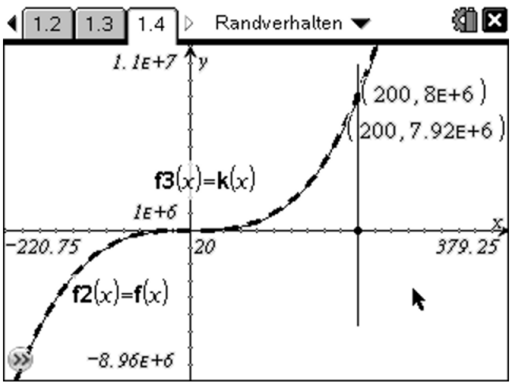


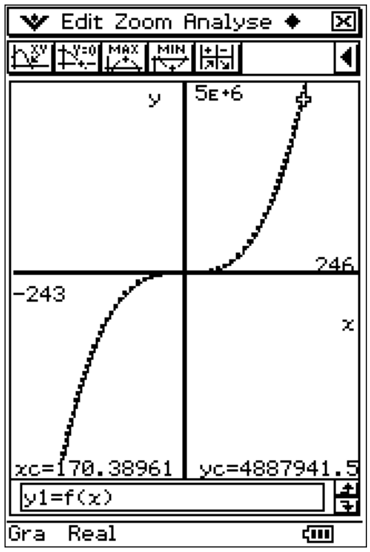


Die aus der Bearbeitung des Arbeitsauftrags gewonnene Erkenntnis, dass der Term mit dem größten Exponenten im Term einer ganzrationalen Funktion deren Verhalten für $x \to +\infty$ und $x \to -\infty$ bestimmt, lässt sich mithilfe des CAS-Rechners anschaulich überprüfen und begründen. Dazu kann beispielsweise der Verlauf des Graphen der Funktion f für kleine und große Werte von |x| mit dem Verlauf des Graphen der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion $k : x \mapsto x^3$ verglichen werden.

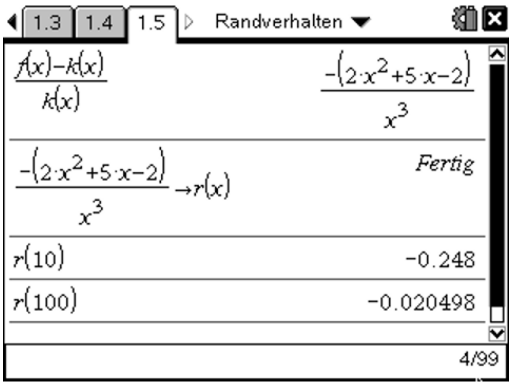


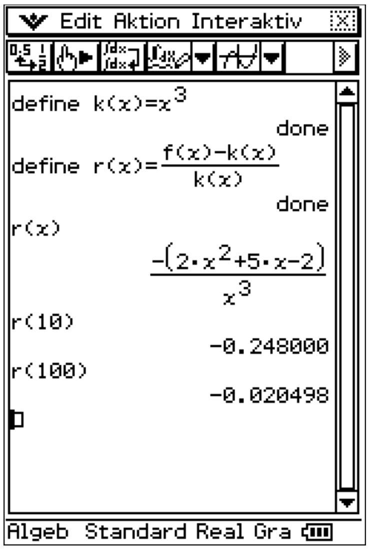






Für große Werte von $|x|$ stimmen die Graphen von f und k näherungsweise überein. Damit entspricht das Verhalten von f für sehr große und sehr kleine x-Werte dem Verhalten von k; es gilt die Näherung $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 2 \approx x^3 = k(x)$. Der relative Fehler $r(x) = \frac{f(x) - k(x)}{k(x)} = -\frac{2}{x} - \frac{5}{x^2} + \frac{2}{x^3}$ dieser Näherung geht für $x \to +\infty$ und $x \to -\infty$ gegen null. Dies lässt sich mithilfe des CAS-Rechners verdeutlichen.



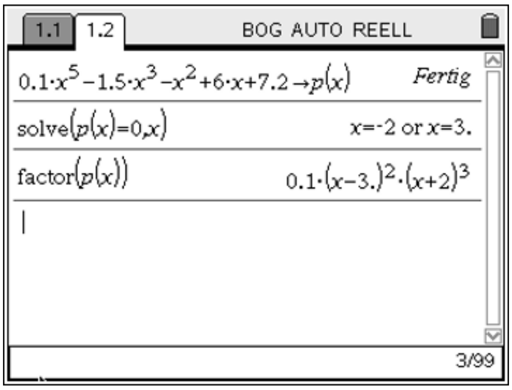


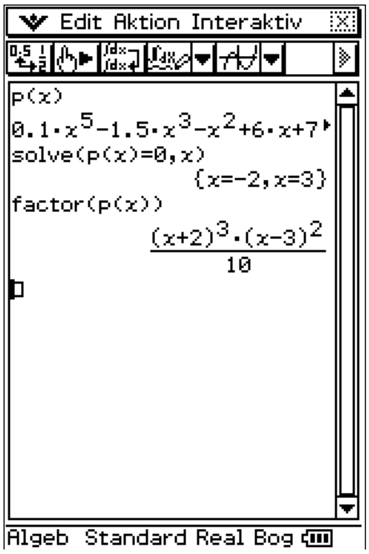
Anschließend kann die Bedeutung des Terms mit dem größten Exponenten im Term einer ganzrationalen Funktion für deren Verhalten an den Rändern des Definitionsbereichs am Beispiel von f durch Ausklammern bestätigt werden:

$$f(x) = x^3 \cdot \left(1 - \frac{2}{x} - \frac{5}{x^2} + \frac{2}{x^3}\right)$$

Verlauf eines Graphen in der Umgebung von Nullstellen

Im Lehrplanabschnitt „M 10.5.1 Graphen ganzrationaler Funktionen“ wird im Zusammenhang mit der Ermittlung von Nullstellen beispielhaft die Polynomdivision als mögliches Verfahren genannt. Mit dem CAS-Rechner können die Bestimmung von Nullstellen einer ganzrationalen Funktion sowie die Zerlegung des zugehörigen Funktionsterms in Linearfaktoren verhältnismäßig einfach durchgeführt werden.





Arbeitsauftrag

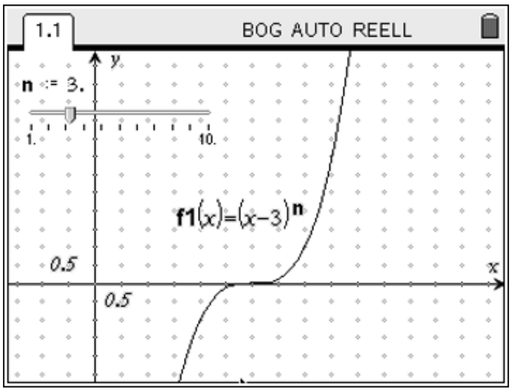
Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Schar ganzrationaler Funktionen $f_n : x \mapsto (x-3)^n$ mit $n \in \mathbb{N}$.

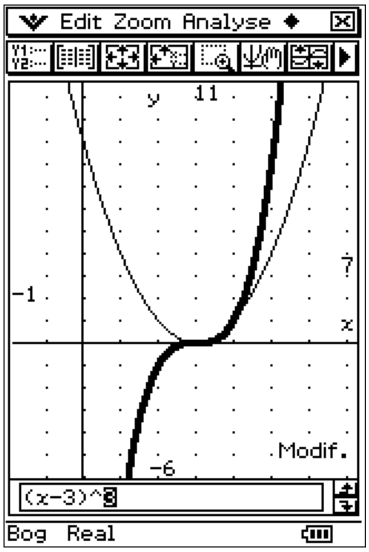
a) Untersuchen Sie den Verlauf des Graphen von f_n in der Umgebung der Nullstelle $x = 3$ in Abhängigkeit vom Exponenten n.

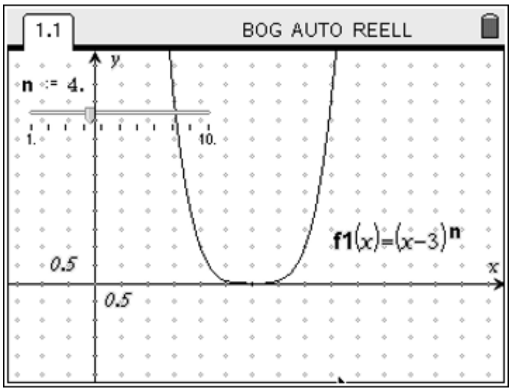
Gegeben ist weiterhin die in $\mathbb{R}$ definierte Schar ganzrationaler Funktionen $g_n : x \mapsto h(x)\cdot(x-3)^n$ mit $n \in \mathbb{N}$. Dabei ist $h(x)$ der Term einer beliebigen in $\mathbb{R}$ definierten ganzrationalen Funktion h mit $h(3) \neq 0$.

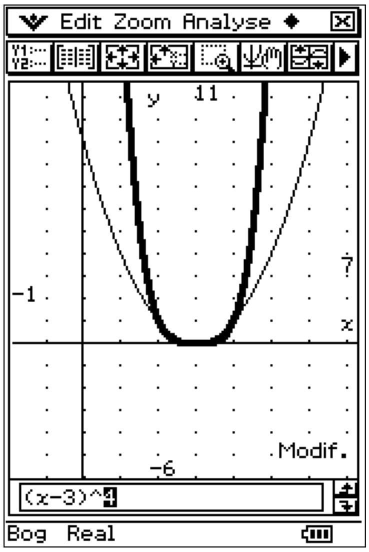
b) Untersuchen Sie den Verlauf des Graphen von g_n in der Umgebung der Nullstelle $x = 3$ in Abhängigkeit von n.

Mit dem CAS-Rechner können die Schülerinnen und Schüler selbständig beispielhafte Graphen erstellen, um den Zusammenhang zwischen der Vielfachheit einer Nullstelle einer Funktion und dem Verlauf des zugehörigen Graphen zu untersuchen.



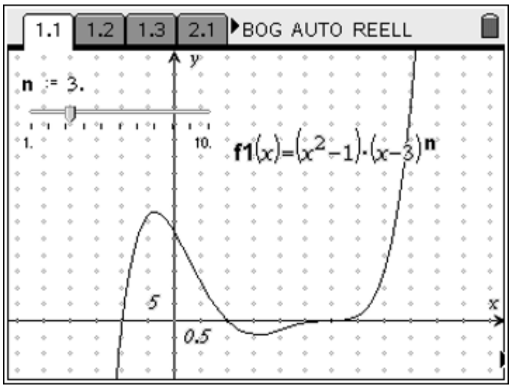


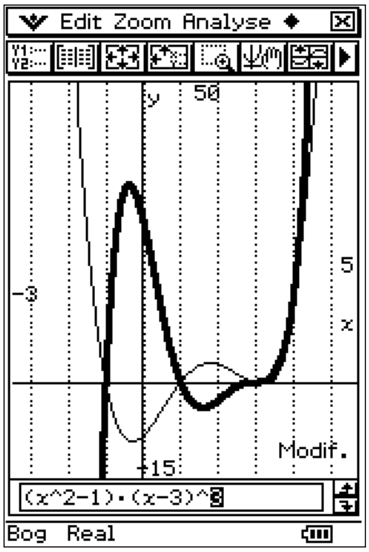


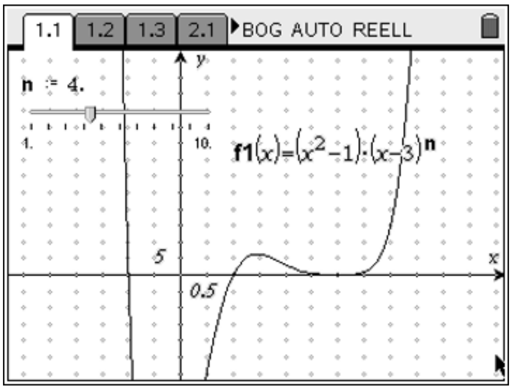


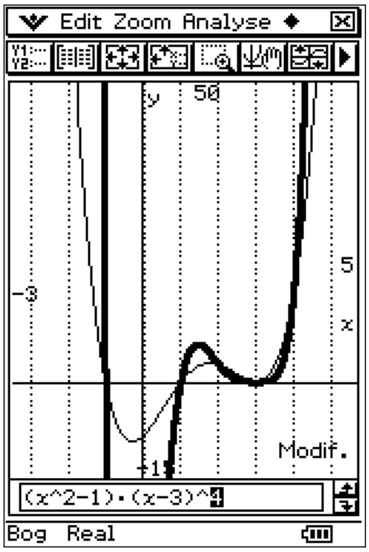
Die Schülerinnen und Schüler erkennen, dass bei ungeraden Exponenten jeweils eine Nullstelle mit Vorzeichenwechsel, bei geraden Exponenten jeweils eine Nullstelle ohne Vorzeichenwechsel vorliegt. Eine entsprechende Regel kann mithilfe von Vorzeichentabellen begründet werden.

Ein zusätzlicher Faktor in der Form eines Polynoms $h(x)$ mit $h(3) \neq 0$ beeinflusst diese Eigenschaft nicht.







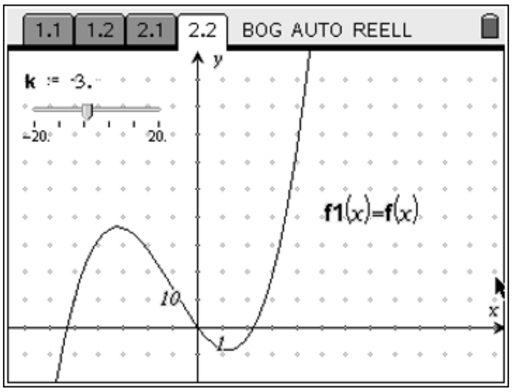


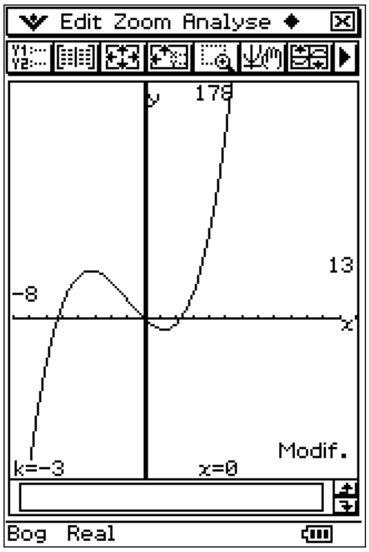
Mithilfe der Nullstellen, ihrer Vielfachheit und des Verhaltens für $x \to +\infty$ und $x \to -\infty$ lässt sich der Graph einer ganzrationalen Funktion skizzieren. Außerdem kann man aus den Nullstellen, ihrer Vielfachheit und einem Punkt auf dem Graphen den Term einer ganzrationalen Funktion bestimmen. Die zugelassenen Lehrbücher bieten zu beiden Varianten eine Vielzahl geeigneter Aufgaben.

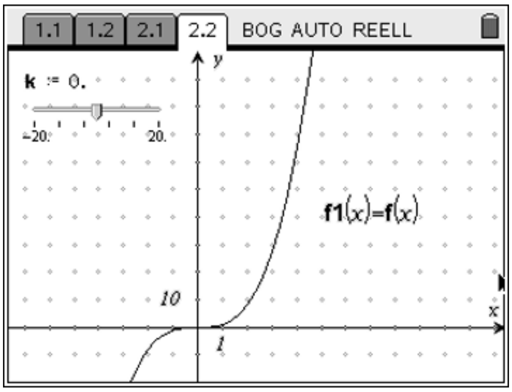
Arbeitsauftrag

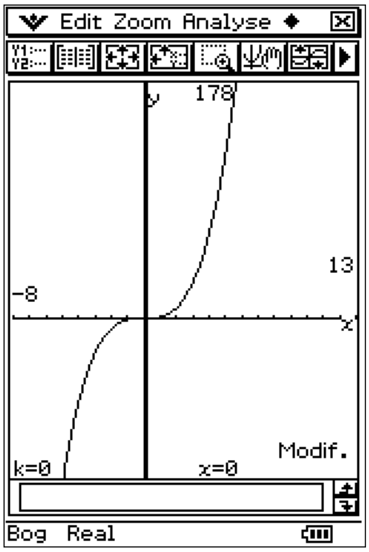
Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Schar ganzrationaler Funktionen $f_k : x \mapsto x^3 - kx^2 + 4kx$ mit $k \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie die Nullstellen von f_k sowie ihre jeweilige Vielfachheit in Abhängigkeit von k.

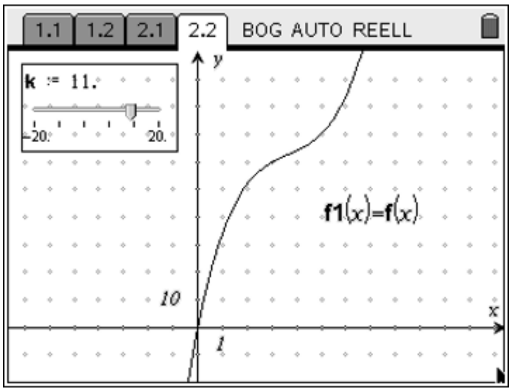
Eine Betrachtung des Graphen von f_k für verschiedene Werte von k liefert einen Überblick über die Anzahl der Nullstellen und deren Vielfachheiten.

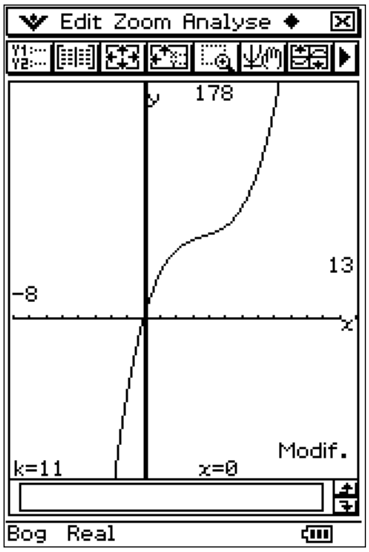

1.1 1.2 2.1 2.2 BOG AUTO REELL
k := -3.
-20.
20.
f1(x)=f(x)
10
1
x
y

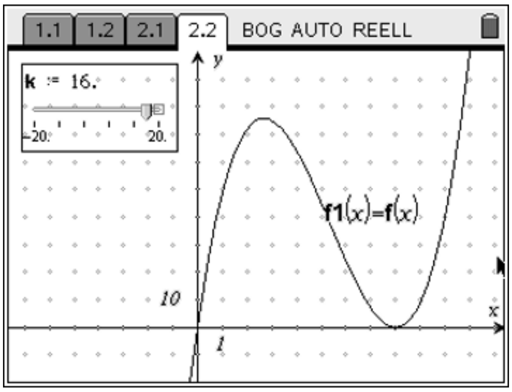

Edit Zoom Analyse
178
y
13
-8
x
k=-3
x=0
Modif.
Bog Real

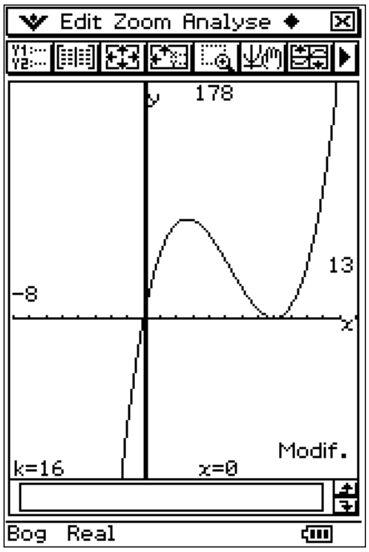

1.1 1.2 2.1 2.2 BOG AUTO REELL
k := 0.
-20.
20.
f1(x)=f(x)
10
1
x
y

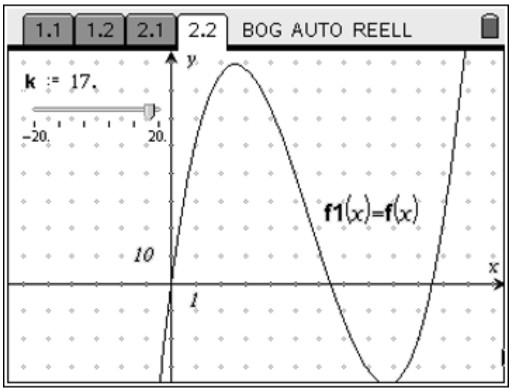

Edit Zoom Analyse
178
y
13
-8
x
k=0
x=0
Modif.
Bog Real

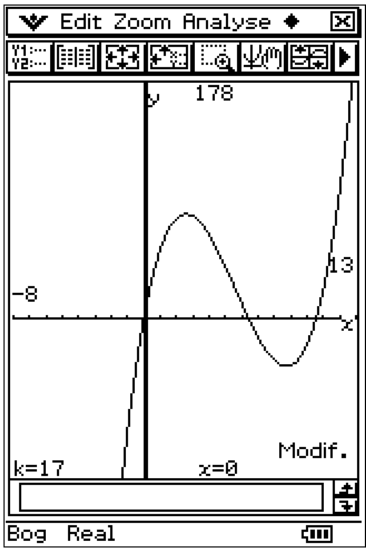

1.1 1.2 2.1 2.2 BOG AUTO REELL
k := 11.
-20.
20.
f1(x)=f(x)
10
1
x
y


Edit Zoom Analyse
178
y
13
-8
x
k=11
x=0
Modif.
Bog Real



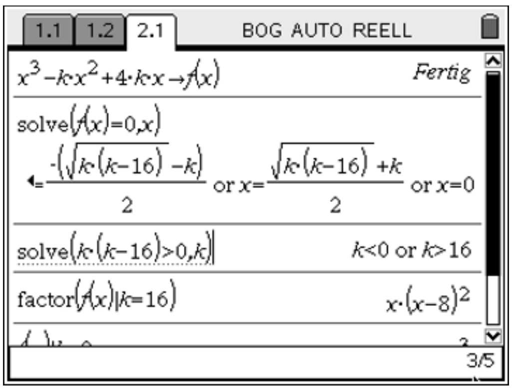


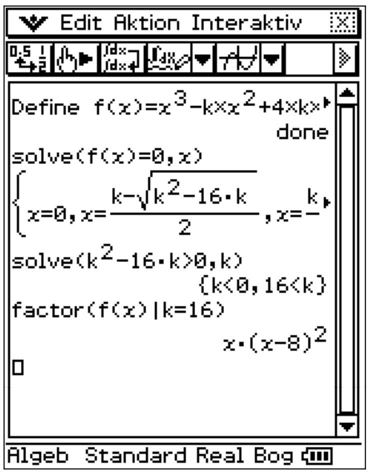




Anschließend zeigt man rechnerisch mithilfe des CAS-Rechners: f_k besitzt für

- $k < 0$ drei einfache Nullstellen;
- $k = 0$ eine dreifache Nullstelle in $x = 0$;
- $0 < k < 16$ eine einfache Nullstelle in $x = 0$;
- $k = 16$ eine einfache Nullstelle in $x = 0$ und eine doppelte Nullstelle in $x = 8$;
- $k > 16$ drei einfache Nullstellen.





2.2.5 Vertiefen der Funktionenlehre

Bisher haben die Schülerinnen und Schüler ganzrationale, einfache gebrochen-rationale und trigonometrische Funktionen sowie Exponentialfunktionen kennen gelernt. Im Rahmen der Behandlung des Lehrplanabschnitts „M 10.5.2 Vertiefen der Funktionenlehre“ wiederholen sie Grundbegriffe und analysieren vertiefend verschiedene Eigenschaften ausgewählter Graphen. Dabei ermitteln sie beispielsweise Nullstellen von Funktionen und wiederholen Techniken zur Lösung von Gleichungen. Die Schülerinnen und Schüler üben, den Verlauf von Graphen unter Verwendung der entsprechenden Fachbegriffe (z. B. Steigen und Fallen) zu beschreiben. Die Symmetrie bezüglich der y-Achse oder des Koordinatenursprungs wird genauer betrachtet.

Anhand des unterschiedlichen Verhaltens von Funktionen an den Rändern ihres jeweiligen Definitionsbereichs gewinnen die Schülerinnen und Schüler aus der Anschauung heraus einen Grenzwertbegriff für $x \to \pm\infty$ und verwenden erstmals systematisch die Grenzwertschreibweise. Die Behandlung des Grenzwertbegriffs soll mit den bekannten Funktionstypen und deren Eigenschaften vernetzt werden.

In Analogie zum Vorgehen etwa bei quadratischen oder trigonometrischen Funktionen können die Schülerinnen und Schüler auch für andere Funktionstypen untersuchen, wie sich Veränderungen des Funktionsterms auf den Kurvenverlauf auswirken.

Der Einsatz des CAS-Rechners dient insbesondere der Veranschaulichung. So können bei der Untersuchung von Funktionen verschiedene Darstellungsformen (Funktionsterm, Wertetabelle, Funktionsgraph) parallel betrachtet werden; Graphen lassen sich in unterschiedlichen Bereichen und Maßstäben darstellen. Der Einfluss der Änderung von Parametern im Funktionsterm auf den zugehörigen Graphen kann dynamisch veranschaulicht werden. Da insbesondere bei der manuellen Bestimmung von Grenzwerten Ergebnisse mithilfe des CAS-Rechners kontrolliert werden können, ergeben sich vielfältige Möglichkeiten zu selbständig entdeckendem Lernen und zur Binnendifferenzierung.

Vertiefend kann die Symmetrie eines Graphen bezüglich einer Parallele zur y-Achse oder eines beliebigen Punkts anschaulich auf die Symmetrie bezüglich der y-Achse bzw. des Koordinatenursprungs zurückgeführt werden (vgl. „Vertiefungsmöglichkeit“).

Im Zusammenhang mit den beschriebenen Vorschlägen zur Unterrichtsgestaltung sowie zur Vertiefung kommen insbesondere folgende CAS-Grundfertigkeiten zur Anwendung:
- ♦ Term definieren
- ♦ Termwert berechnen
- ♦ Terme vergleichen
- ♦ Wertetabelle erstellen
- ♦ Grenzwert berechnen
- ♦ Gleichung lösen
- ♦ Graph zeichnen, geeigneten Anzeigebereich wählen
- ♦ Graphen von Scharfunktionen zeichnen

Vorschläge zur Unterrichtsgestaltung

Überblick über die bisher bekannten Funktionstypen

Die Schülerinnen und Schüler können arbeitsteilig in Gruppen mithilfe des CAS-Rechners die wesentlichen Eigenschaften der bisher bekannten Funktionstypen wiederholend erarbeiten und auf jeweils einem Plakat übersichtlich zusammenstellen (vgl. z. B. Fokus 10, S. 152 f.; Lambacher Schweizer 10, S. 146 f.).
- ♦ Gruppe 1: Lineare Funktionen
- ♦ Gruppe 2: Quadratische Funktionen
- ♦ Gruppe 3: Potenzfunktionen mit natürlichen Exponenten
- ♦ Gruppe 4: Ganzrationale Funktionen

- Gruppe 5: Einfache gebrochen-rationale Funktionen
- Gruppe 6: Trigonometrische Funktionen
- Gruppe 7: Exponentialfunktionen

Anschließend können neue Gruppen gebildet werden; jede neue Gruppe besteht aus jeweils einem Mitglied der ursprünglichen Gruppen. In jeder neuen Gruppe kann so eine Schülerin oder ein Schüler als Expertin bzw. Experte für einen Funktionstyp die erarbeiteten Eigenschaften anhand des entsprechenden Plakats präsentieren. Die neu gebildeten Gruppen wechseln dazu in geeignet festgelegten Zeitabständen von Plakat zu Plakat. Auch zur Präsentation der Ergebnisse kann der CAS-Rechner als Hilfsmittel verwendet werden. Die Plakate können später auch als Grundlage für die weitere Arbeit genutzt werden.

Zur Festigung der Lerninhalte können die ursprünglichen Gruppen jeweils einige Arbeitsaufträge zum jeweiligen Funktionstyp erstellen (z. B. Zuordnung passender Funktionsterme zu einem vorgegebenen Graphen oder umgekehrt). Die Arbeitsaufträge können dann zusammengefasst von allen Schülerinnen und Schülern bearbeitet werden – in Einzel- oder Gruppenarbeit oder gemeinsam im Unterrichtsgespräch. Der CAS-Rechner kann dabei zur Kontrolle der Ergebnisse genutzt werden.

Arbeitsauftrag

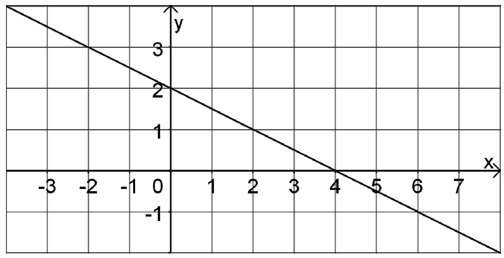
Welche der folgenden Funktionsterme passen zu dem abgebildeten Graphen? Kreuzen Sie an und begründen Sie jeweils Ihre Entscheidung.

☐ $f_1(x) = \frac{1}{2}x - 2$ ☐ $f_2(x) = -\frac{1}{2}x - 2$

☐ $f_3(x) = 2 + \frac{1}{2}x$ ☐ $f_4(x) = 2 - \frac{1}{2}x$

☐ $f_5(x) = 2 - 2x$ ☐ $f_6(x) = -2x - 2$

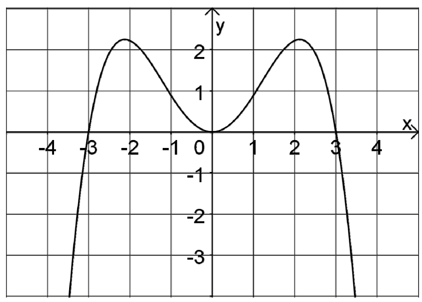
☐ $f_7(x) = -\frac{1}{2} \cdot (x - 4)$ ☐ $f_8(x) = -\frac{1}{2} \cdot (x + 4)$



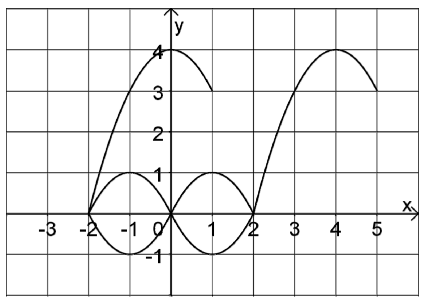
Vertiefend können im Sinne experimentellen, entdeckenden Arbeitens vorgegebene Abbildungen mit dem CAS-Rechner erzeugt werden.

Arbeitsauftrag

a) Die Abbildung zeigt den Graphen einer ganzrationalen Funktion vierten Grades. Beschreiben Sie seinen Verlauf und stellen Sie ihn mit dem CAS-Rechner so genau wie möglich dar.



b) Stellen Sie die abgebildete Figur, die ausschließlich aus Parabelabschnitten zusammengesetzt ist, mit dem CAS-Rechner so genau wie möglich dar.



Der in Aufgabe a abgebildete Graph gehört zu der in ℝ definierten Funktion $f: x \mapsto -\frac{1}{9}x^4 + x^2$. Die Abbildung zu Aufgabe b ist aus den Graphen der folgenden Funktionen zusammengesetzt:

$f_1: x \mapsto -(x+2)\cdot x;\ -2 \le x \le 0$ $\qquad$ $f_2: x \mapsto (x+2)\cdot x;\ -2 \le x \le 0$

$f_3: x \mapsto -x\cdot(x-2);\ 0 \le x \le 2$ $\qquad$ $f_4: x \mapsto x\cdot(x-2);\ 0 \le x \le 2$

$f_5: x \mapsto -(x+2)\cdot(x-2);\ -2 \le x \le 1$ $\qquad$ $f_6: x \mapsto -(x-2)\cdot(x-6);\ 2 \le x \le 5$

Bei der Bearbeitung dieses Arbeitsauftrags dient der CAS-Rechner zur selbständigen Kontrolle von Lösungsansätzen, die bestätigt, korrigiert oder verworfen werden können.

Symmetrie bezüglich y-Achse oder Koordinatenursprung

Am Beispiel von Potenzfunktionen mit natürlichen Exponenten können grundlegende Kenntnisse, Fähigkeiten und Fertigkeiten im Zusammenhang mit der Symmetrie eines Graphen bezüglich der y-Achse oder des Koordinatenursprungs wiederholt bzw. erarbeitet werden. Das beschriebene Vorgehen kann dann auf die anderen bekannten Funktionstypen übertragen werden.

Arbeitsauftrag

Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto x^2$ mit Definitionsbereich ℝ.

a) Zeichnen Sie den Graphen von f und kennzeichnen Sie darauf den Punkt P, der die x-Koordinate 2 besitzt.

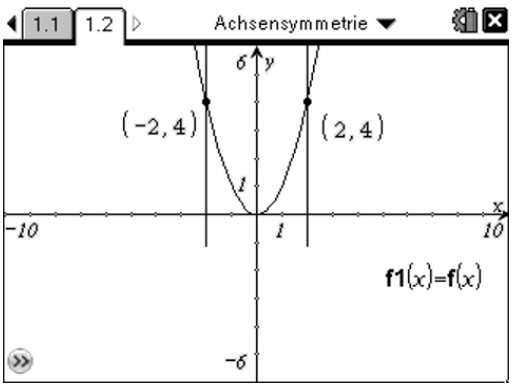
b) Konstruieren Sie den Punkt P', der bei Spiegelung von P an der y-Achse entsteht. Geben Sie die Koordinaten von P' an und beschreiben Sie den Zusammenhang zwischen den Koordinaten von P und P'.

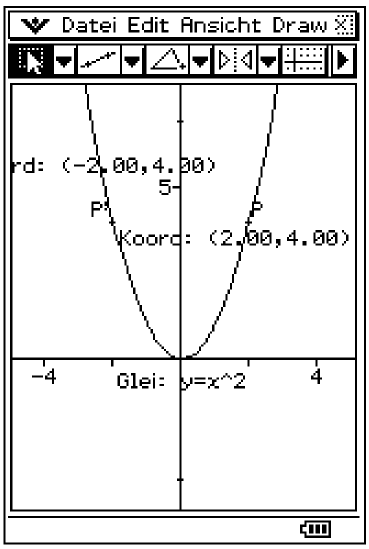
c) Welcher Zusammenhang besteht allgemein zwischen den Koordinaten zweier bezüglich der y-Achse symmetrischer Punkte $P(x\,|\,f(x))$ und $P'(x'\,|\,f(x'))$? Geben Sie in Symbolschreibweise eine Bedingung dafür an, dass der Graph einer Funktion f symmetrisch bezüglich der y-Achse ist.

d) Geben Sie weitere Funktionen an, deren Graphen achsensymmetrisch bezüglich der y-Achse sind.

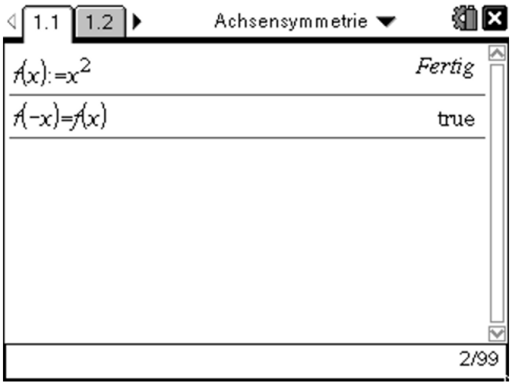
Stellen Sie ausgehend von einer geeigneten Funktion analoge Überlegungen für Funktionen an, deren Graphen symmetrisch bezüglich des Koordinatenursprungs sind.

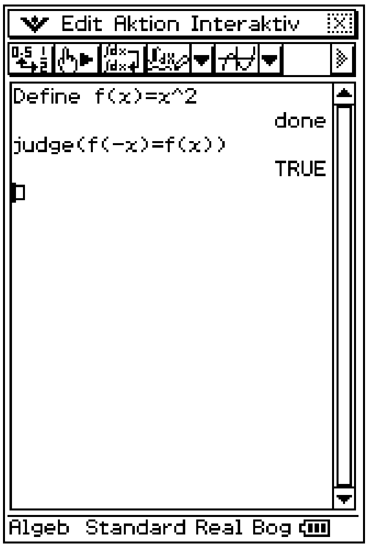
Der CAS-Rechner ermöglicht eine dynamische Veranschaulichung der Bedingung $f(-x) = f(x)$. Die Konstruktion des Punkts P' muss dabei nur einmal vorgenommen werden; bei einer Änderung des Punkts P bleibt die Konstruktion ebenso erhalten wie bei einer Änderung des Funktionsterms.





Mithilfe des CAS-Rechners kann die für die Punkte P und P' entdeckte Eigenschaft $f(-x)=f(x)$ anhand weiterer Punkte überprüft und anschließend allgemein bestätigt werden.





Verhalten an den Rändern des Definitionsbereichs

Einleitend können in Gruppen – arbeitsgleich oder arbeitsteilig – einige Funktionen mit Termen angemessener Komplexität hinsichtlich ihres Verhaltens für sehr große x-Werte untersucht werden. Dazu werden Wertetabellen, Funktionsgraphen und Funktionsterme betrachtet.

Arbeitsauftrag

Gegeben sind folgende Funktionen mit jeweils maximalem Definitionsbereich:

$$f: x \mapsto \frac{2x-1}{x} \qquad g: x \mapsto 2-0{,}5^x \qquad h: x \mapsto \frac{x^2}{x-1} \qquad i: x \mapsto 3\cdot 2^x \qquad j: x \mapsto \frac{1-2x}{x} \qquad k: x \mapsto -10^{-x}$$

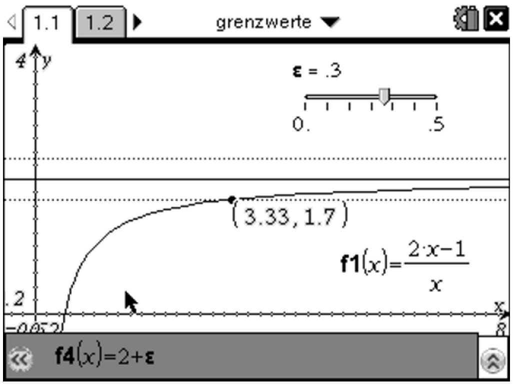
Das Verhalten der Funktionen für sehr große x-Werte, d. h. für $x \to +\infty$, soll jeweils anhand folgender Aufgabenstellung untersucht werden.

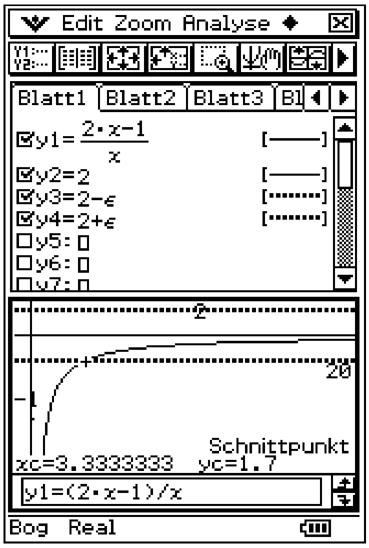
a) Erstellen Sie eine geeignete Wertetabelle. Welches Verhalten der Funktion vermuten Sie für sehr große x-Werte?

b) Zeichnen Sie den Graphen der Funktion. Bestätigt sich Ihre Vermutung aus Aufgabe a? Geben Sie falls möglich die Gleichung einer Geraden an, der sich der Graph nähert.

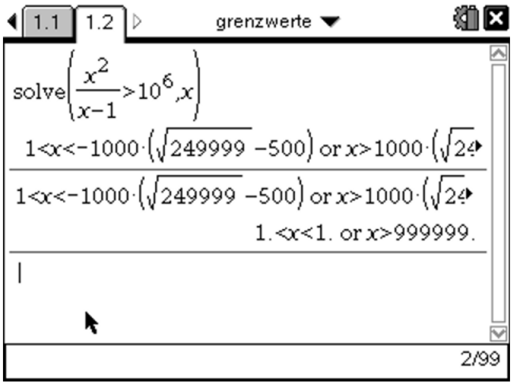
c) Machen Sie das Verhalten der Funktion für sehr große x-Werte anhand des Funktionsterms plausibel.

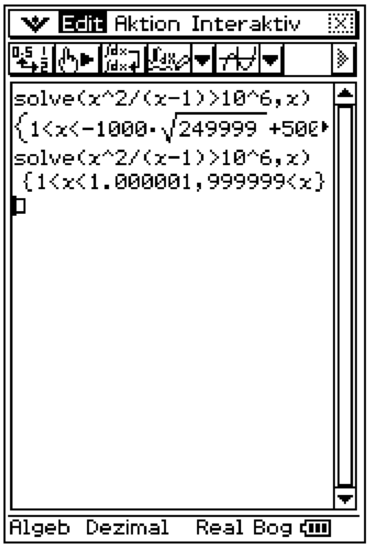
Der CAS-Rechner bietet bei der Bearbeitung des Arbeitsauftrags wertvolle Unterstützung. So sich lässt beispielsweise graphisch veranschaulichen, dass die Funktionswerte von f jede vorgegebene Abweichung von 2 ab einem bestimmten x-Wert durchgehend unterschreiten.





Außerdem kann beispielsweise für die Funktion h zu jeder vorgegebenen Zahl derjenige x-Wert berechnet werden, ab dem die vorgegebene Zahl von allen Funktionswerten überschritten wird.





Im Anschluss an die Präsentation der Ergebnisse werden diese systematisch überprüft; die wesentlichen Fachbegriffe wie „konvergent“ und „divergent“ sowie die Grenzwertschreibweise werden eingeführt.

Eine anschauliche Entwicklung des Grenzwertbegriffs schließt die beispielhafte Bearbeitung von Aufgaben nicht aus, die den Abstand zwischen Funktionswert und Grenzwert thematisieren. Ein systematisches Einüben von Betragsungleichungen entspricht dabei jedoch nicht der Intention des Lehrplans; nicht eine formale Definition, sondern ihre Aussage, die am asymptotischen Verlauf von Funktionsgraphen deutlich wird, soll im Vordergrund stehen.

Arbeitsauftrag

Gegeben sind folgende Funktionen mit jeweils maximalem Definitionsbereich:

$f: x \mapsto \frac{1}{x^2}$ $\qquad g: x \mapsto \frac{1}{x^3}$ $\qquad h: x \mapsto 0{,}5^x$ $\qquad i: x \mapsto \left(\frac{1}{3}\right)^x$

Das Verhalten der Funktionen für $x \to +\infty$ soll jeweils anhand folgender Aufgabenstellung untersucht werden.

a) Stellen Sie den Graphen der Funktion mit dem CAS-Rechner dar. Welchen Grenzwert a der Funktion vermuten Sie für $x \to +\infty$?

b) Wählen Sie eine geeignete Zahl $\varepsilon \in \mathbb{R}$ und stellen Sie zusätzlich die Geraden mit den Gleichungen $y = a + \varepsilon$ und $y = a - \varepsilon$ gestrichelt dar. Ermitteln Sie nun eine Stelle s auf der x-Achse, sodass alle Graphenpunkte mit $x > s$ zwischen den beiden Geraden liegen. Was gilt für die Funktionswerte für $x > s$? Begründen Sie anhand des Funktionsterms, dass dies tatsächlich für alle $x > s$ gilt.

c) Verkleinern Sie nun den Abstand der beiden Geraden und ermitteln Sie erneut einen geeigneten Wert für s.

d) Begründen Sie anhand des Funktionsterms, dass die Funktionswerte jede vorgegebene Abweichung ε von a ab einem bestimmten x-Wert durchgehend unterschreiten.

Beschreiben Sie allgemein, wie man zeigen kann, dass eine Funktion für $x \to -\infty$ den Grenzwert a besitzt. Untersuchen Sie das Verhalten der Funktionen f und g für $x \to -\infty$.

Aspekte einer anschaulichen Grenzwertdefinition werden auch im Rahmen des folgenden Arbeitsauftrags mit weiteren Inhalten des Lehrplanabschnitts „M 10.5.2 Vertiefen der Funktionenlehre“, wie dem Beschreiben des Verlaufs von Graphen unter Verwendung der entsprechenden Fachbegriffe, verbunden.

Arbeitsauftrag

Gegeben sind folgende Funktionen mit jeweils maximalem Definitionsbereich:

$f: x \mapsto x^2$ $\qquad g: x \mapsto x^3$ $\qquad h: x \mapsto 2^x$ $\qquad i: x \mapsto 3^x$

Das Verhalten der Funktionen für $x \to +\infty$ soll jeweils anhand folgender Aufgabenstellung untersucht werden.

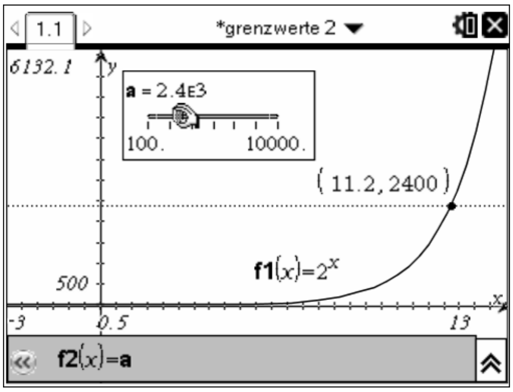
a) Stellen Sie den Graphen der Funktion mit dem CAS-Rechner dar. Welches Verhalten der Funktion vermuten Sie für $x \to +\infty$?

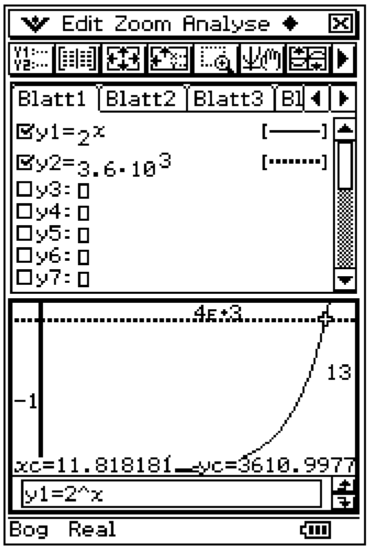
b) Wählen Sie eine geeignete Zahl $a \in \mathbb{R}$ und stellen Sie zusätzlich die Gerade mit der Gleichung $y = a$ gestrichelt dar. Ermitteln Sie nun eine Stelle s auf der x-Achse, sodass alle Graphenpunkte mit $x > s$ oberhalb der Geraden liegen. Was gilt für die Funktionswerte für $x > s$? Begründen Sie anhand des Funktionsterms, dass dies tatsächlich für alle $x > s$ gilt.

c) Vergrößern Sie nun die Zahl a und ermitteln Sie erneut einen geeigneten Wert für s.

d) Begründen Sie anhand des Funktionsterms, dass es zu jeder vorgegebenen Zahl a einen x-Wert gibt, ab dem die vorgegebene Zahl von allen Funktionswerten überschritten wird.

Beschreiben Sie allgemein, wann eine Funktion für $x \to +\infty$ den Grenzwert $-\infty$ besitzt. Untersuchen Sie das Verhalten der Funktionen für $x \to -\infty$.





Um zur Bestimmung von Grenzwerten auf das bekannte Grenzverhalten grundlegender Funktionen zurückgreifen zu können, ist es hilfreich, die Grenzwerte

$$\lim_{x\to\pm\infty} a,\ \lim_{x\to\pm\infty} x^n,\ \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x^n} \text{ und } \lim_{x\to\pm\infty} a^x$$

mit den notwendigen Fallunterscheidungen zusammenfassend festzuhalten.

Sinus- und Kosinusfunktion bieten weitere Möglichkeiten, den auf anschauliche Weise gewonnenen Grenzwertbegriff zu festigen.

Arbeitsauftrag

Entscheiden Sie, ob die Aussage wahr oder falsch ist. Begründen Sie Ihre Entscheidung.

a) Sinus- und Kosinusfunktion nehmen an unendlich vielen Stellen den Funktionswert 0 an. Da die Funktionswerte außerdem nie weiter als 1 vom Wert 0 abweichen, gilt $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \sin x = 0$ und $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \cos x = 0$.

b) Die Funktion $f: x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ mit Definitionsbereich $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ konvergiert für $x \to +\infty$ gegen 0.

c) Die Funktion $f: x \mapsto 2^x \cdot \cos x$ mit Definitionsbereich $\mathbb{R}$ konvergiert für $x \to +\infty$ gegen 0.

Zur Ermittlung von Grenzwerten unter Verwendung des bekannten Grenzverhaltens grundlegender Funktionen sind teilweise algebraische Umformungen erforderlich (z. B. Ausklammern der jeweils höchsten Potenz von x in Zähler und Nenner des Terms einer gebrochen-rationalen Funktion). Die Umformungen unterstützen die intuitive Anwendung der Grenzwertregeln und müssen in geeigneter Form erarbeitet werden. Dazu können auch die Grenzwerte der im einleitenden Arbeitsauftrag betrachteten Funktionen f bis k für $x \to \pm\infty$ auf grundlegende Grenzwerte zurückgeführt werden.

Die Schülerinnen und Schüler sind nun in der Lage, die Bestimmung von Grenzwerten selbständig zu üben. Dabei werden die für sie erfahrungsgemäß offensichtlichen Grenzwertregeln angewandt, müssen jedoch nicht mathematisch exakt begründet werden. Die Linkebene des Lehrplans sowie die zugelassenen Lehrbücher enthalten eine Vielzahl geeigneter Übungsaufgaben. Im Rahmen einer Übungsphase mit Binnendifferenzierung können leistungsstärkere Schülerinnen und Schüler zusätzlich vertiefende Aufgaben bearbeiten. Der CAS-Rechner kann zur Kontrolle von Ergebnissen dienen.

Einfluss der Änderung von Parametern im Funktionsterm auf den zugehörigen Graphen

Beispielsweise im Zusammenhang mit quadratischen und trigonometrischen Funktionen wurde bereits untersucht, wie sich die Änderung von Parametern im Funktionsterm auf den zugehörigen Graphen auswirkt. Daran anknüpfend betrachten die Schülerinnen und Schüler auch andere Funktionen hinsichtlich des Einflusses von Veränderungen des Funktionsterms auf den Kurvenverlauf.

Arbeitsauftrag

Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto \frac{1}{x}$ mit Definitionsbereich $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Der Graph von f wird mit G_f bezeichnet.

a) Zeichnen Sie G_f.

b) Begründen Sie, dass G_f keine Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen besitzt.

c) Geben Sie die weiteren wesentlichen Eigenschaften von f an und begründen Sie diese.

Betrachtet wird nun die Schar der Funktionen $f_a(x) = f(x) + a$ mit $a \in \mathbb{R}$ und maximalem Definitionsbereich D_a. Der Graph von f_a wird mit G_a bezeichnet.

d) Zeichnen Sie G_a für $a \in \{-2;0;2\}$.

e) Beschreiben Sie den Einfluss einer Änderung des Parameters a auf G_a. Betrachten Sie G_a dazu falls nötig für weitere Werte von a.

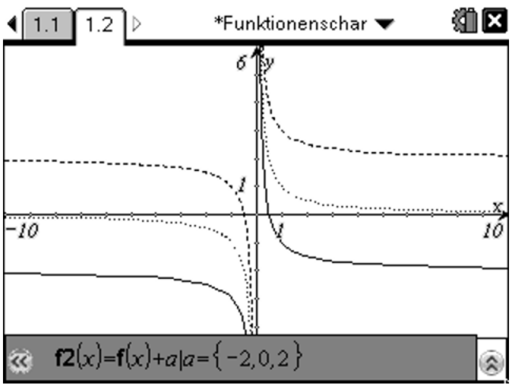
f) Geben Sie D_a sowie die wesentlichen Eigenschaften von f_a an und begründen Sie diese. Welche Eigenschaften der Funktion f besitzt auch f_a?

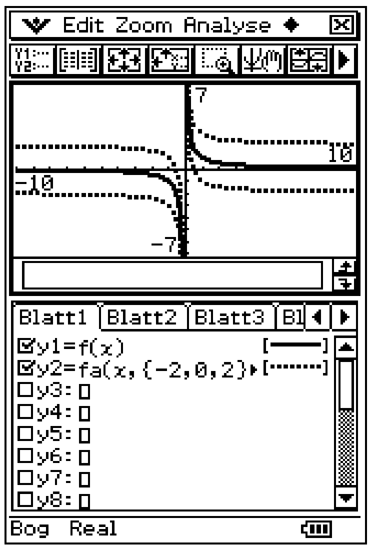
Betrachtet wird nun die Schar der Funktionen $f_b: x \mapsto f(x+b)$ mit $b \in \mathbb{R}$ und maximalem Definitionsbereich D_b. Der Graph von f_b wird mit G_b bezeichnet.

g) Wie wirkt sich eine Änderung des Parameters b auf G_b aus?

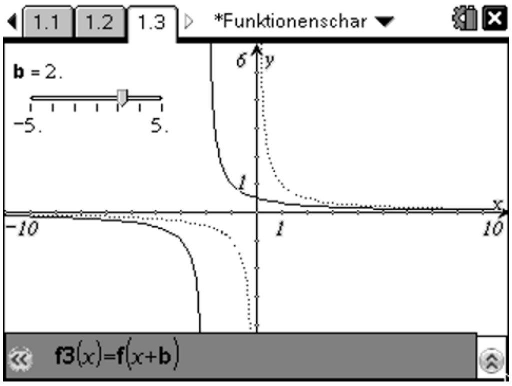
h) Geben Sie D_b sowie die wesentlichen Eigenschaften von f_b an und begründen Sie diese. Welche Eigenschaften der Funktion f besitzt auch f_b?

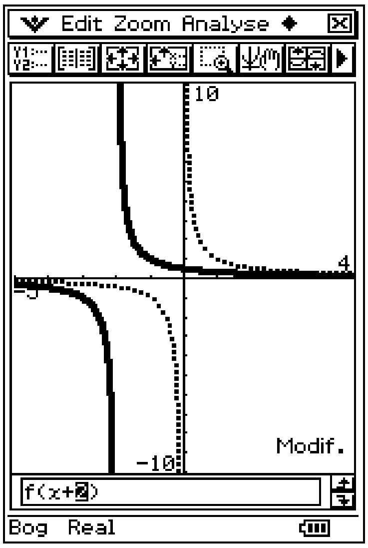
Der CAS-Rechner bietet die Möglichkeit, mehrere Graphen einer Funktionenschar in einem gemeinsamen Koordinatensystem darzustellen. So können die Schülerinnen und Schüler diese Graphen miteinander vergleichen, den Einfluss der Änderung eines Parameters diskutieren und angestellte Vermutungen mathematisch begründen.





Auch eine Verwendung der von den CAS-Rechnern bereitgestellten Werkzeuge, mit deren Hilfe sich Parameterwerte auf einfache Weise variieren lassen, bietet sich an.





Die Bestimmung der Definitionsbereiche, die Angabe der Asymptoten und die Ermittlung der Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen dürfen Schülerinnen und Schülern auch ohne CAS-Unterstützung keine Schwierigkeiten bereiten. Der CAS-Rechner kann jedoch genutzt werden, um Ergebnisse graphisch oder rechnerisch zu kontrollieren.

Im Zusammenhang mit diesem Arbeitsauftrag könnte die Symmetrie eines Graphen bezüglich eines beliebigen Punkts betrachtet werden (vgl. „Vertiefungsmöglichkeit“).

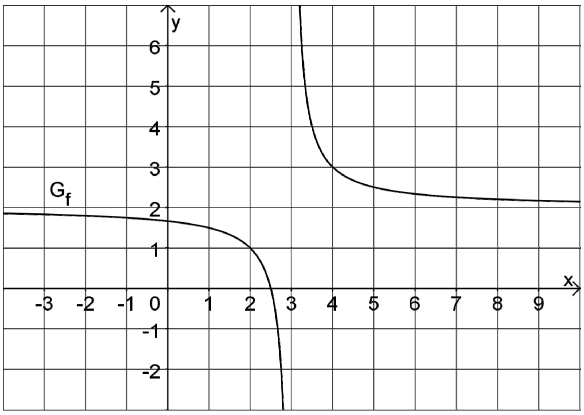
Zur Festigung der Lerninhalte sind folgende Arbeitsaufträge geeignet.

Arbeitsauftrag

Die Abbildung zeigt den Graphen G_f einer Funktion f.

a) Beschreiben Sie den Verlauf von G_f.

b) Ermitteln Sie einen passenden Funktionsterm so, dass f einen möglichst großen Definitionsbereich besitzt. Überprüfen Sie Ihr Ergebnis mithilfe des CAS-Rechners.



Dem abgebildeten Graphen liegt die Funktion $f : x \mapsto \frac{1}{x-3} + 2$ mit Definitionsbereich $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ zugrunde.

Arbeitsauftrag

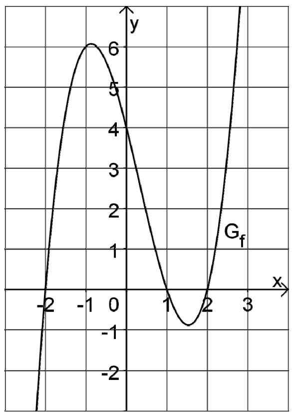
Die Abbildung zeigt den Graphen G_f einer in $\mathbb{R}$ definierten Funktion f.

a) Skizzieren Sie die Graphen der folgenden in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen:

$f_1 : x \mapsto f(x)+2$ $\qquad$ $f_2 : x \mapsto f(x)-4$

$f_3 : x \mapsto f(x-2)$ $\qquad$ $f_4 : x \mapsto f(x+1)-3$

b) Ermitteln Sie einen Funktionsterm, der zu G_f passt, und geben Sie die zu f_1, f_2, f_3 und f_4 gehörenden Funktionsterme in ausführlicher Schreibweise an.



Im Rahmen der Bearbeitung dieses Arbeitsauftrags dient der CAS-Rechner im Wesentlichen zur Kontrolle der Ergebnisse. Der zu ermittelnde Funktionsterm ist $f(x)=(x-2)\cdot(x-1)\cdot(x+2)$.

Anhand eines offener formulierten Arbeitsauftrags können die Schülerinnen und Schüler anschließend selbständig den Einfluss der Änderung von Parametern untersuchen, die eine Streckung des Funktionsgraphen in x- oder y-Richtung bewirken, insbesondere die Spiegelung an einer der Koordinatenachsen. Eine Bearbeitung in Gruppen – arbeitsgleich oder arbeitsteilig – ist möglich.

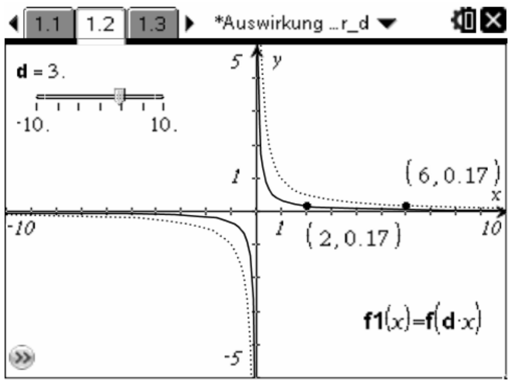
Arbeitsauftrag

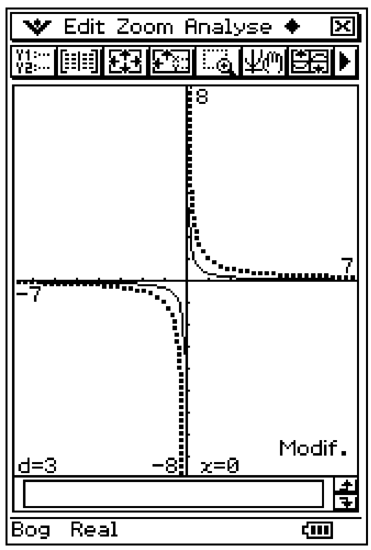
Gegeben sind die Funktion $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ mit Definitionsbereich $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ sowie die in $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ definierten Scharen von Funktionen $f_c : x \mapsto c\cdot f(x)$ mit $c \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ und $f_d : x \mapsto f(d\cdot x)$ mit $d \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

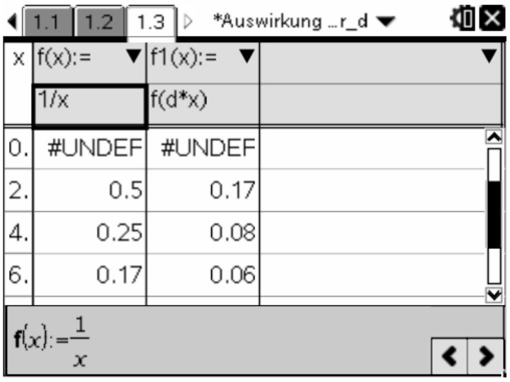
a) Untersuchen Sie den Einfluss einer Änderung des Parameters c auf den Graphen von f_c. Stellen Sie Ihre Ergebnisse übersichtlich zusammen.

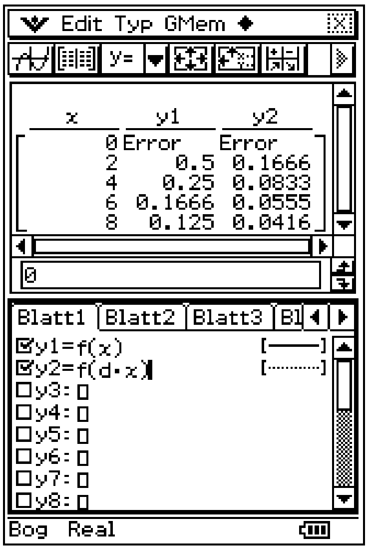
b) Untersuchen Sie den Einfluss einer Änderung des Parameters d auf den Graphen von f_d. Stellen Sie Ihre Ergebnisse übersichtlich zusammen.

Der Einfluss der Änderung der Parameter c und d auf die Graphen der zugehörigen Funktionenscharen kann nicht nur graphisch, sondern auch anhand einer Wertetabelle untersucht werden; z. B. gilt: $f_3(2)=f(3\cdot 2)=f(6)$.

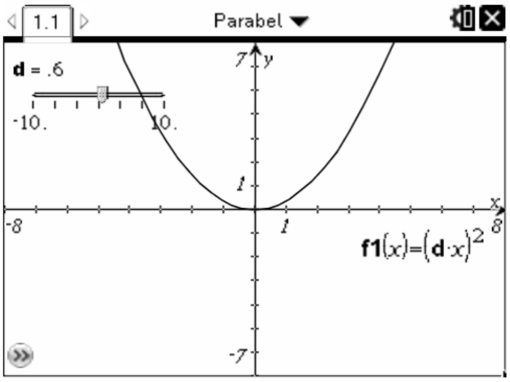


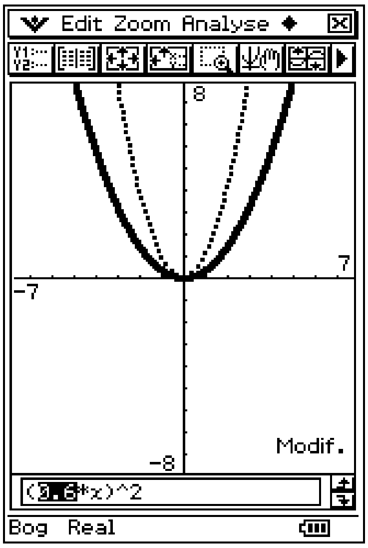






Es empfiehlt sich, den Zusammenhang mit der Streckung des Graphen der in $\mathbb{R}$ definierten quadratischen Funktion $f: x \mapsto x^2$ herzustellen.



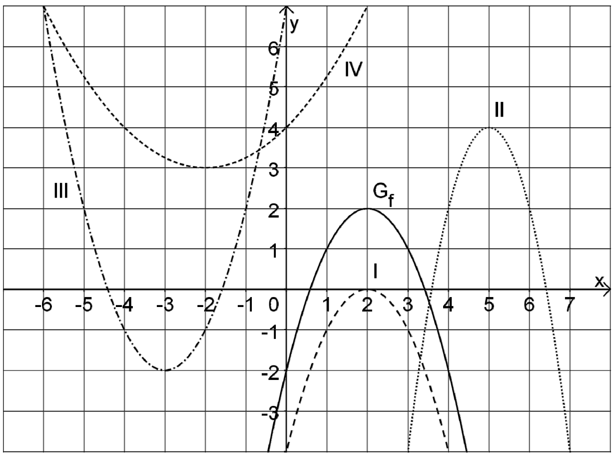


Die zugelassenen Lehrbücher bieten zur Übung vielfältige Aufgaben zu allen bisher bekannten Funktionstypen. Auch der Einfluss einer gleichzeitigen Änderung mehrerer Parameter im Funktionsterm auf den Kurvenverlauf kann analysiert werden.

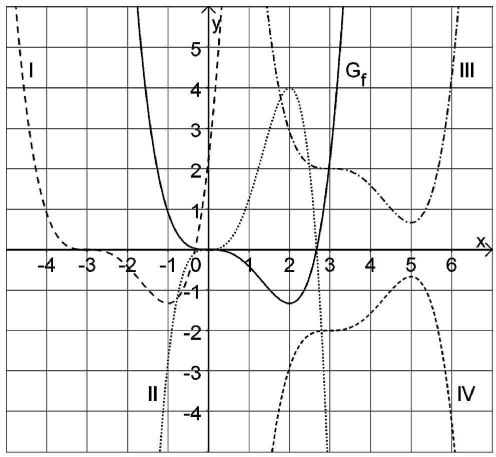
Arbeitsauftrag

Die Abbildung zeigt hervorgehoben den Graphen G_f der gegebenen Funktion f. Bestimmen Sie zu den Graphen I, II, III und IV jeweils einen passenden Funktionsterm.

a) $f: x \mapsto -x^2 + 4x - 1;\ x \in \mathbb{R}$



b) $f: x \mapsto \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3;\ x \in \mathbb{R}$

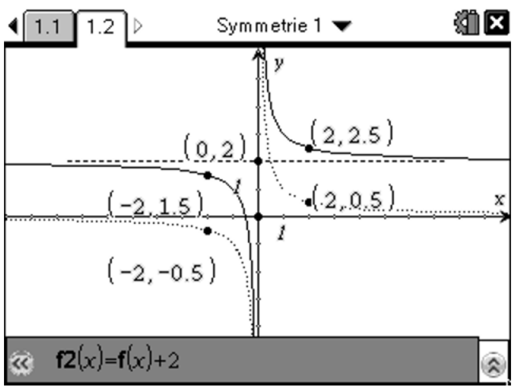


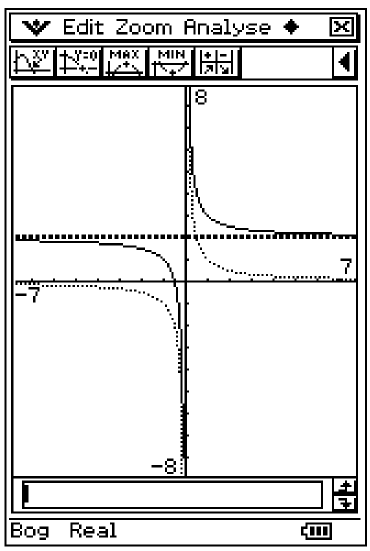
Vertiefungsmöglichkeit

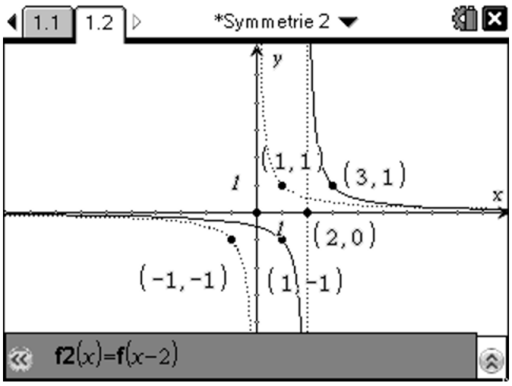
Symmetrie bezüglich einer Parallele zur y-Achse oder eines beliebigen Punkts

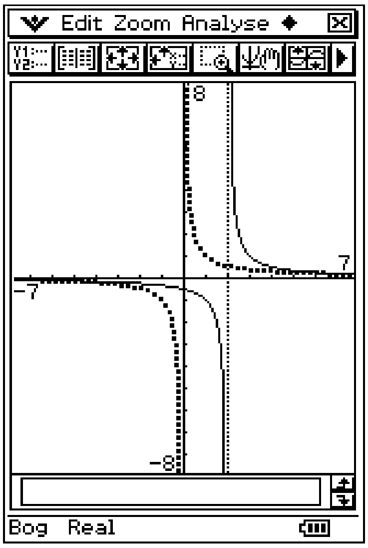
Nachdem die Schülerinnen und Schüler den Einfluss der Änderung von Parametern im Funktionsterm auf den zugehörigen Graphen eingehend untersucht haben, liegt es nahe, die Symmetrie eines Graphen bezüglich einer Parallele zur y-Achse oder eines beliebigen Punkts zu betrachten.

Die Symmetrie eines Graphen bezüglich eines beliebigen Punkts kann beispielsweise im Rahmen der Behandlung des Einflusses der Veränderungen des Terms einer gebrochen-rationalen Funktion auf den Kurvenverlauf schrittweise untersucht werden. Eine Verschiebung des Funktionsgraphen führt zu einer Verschiebung des Symmetriezentrums: Ist der Graph einer Funktion f symmetrisch bezüglich des Koordinatenursprungs, d. h. bezüglich des Punkts $P(0\,|\,0)$, so ist der Graph der Funktion f_a mit $f_a(x) = f(x) + a$ symmetrisch bezüglich des Punkts $P_a(0\,|\,a)$, der Graph der Funktion f_b mit $f_b(x) = f(x - b)$ symmetrisch bezüglich des Punkts $P_b(b\,|\,0)$. Diese Eigenschaften können die Schülerinnen und Schüler mithilfe des CAS-Rechners experimentell entdecken und verhältnismäßig einfach überprüfen. Anhand konkreter Beispiele lässt sich die Symmetrie der Graphen von f_a und f_b aus der Symmetrie des Graphen von f jeweils durch eine Verschiebung im Koordinatensystem folgern.



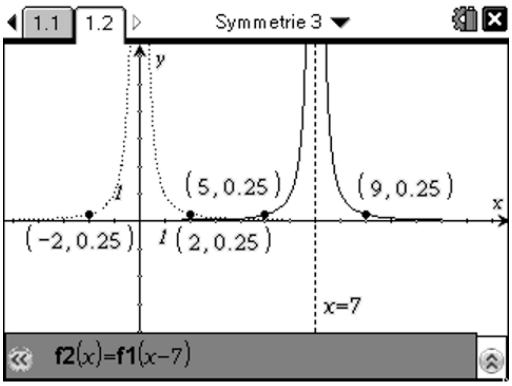


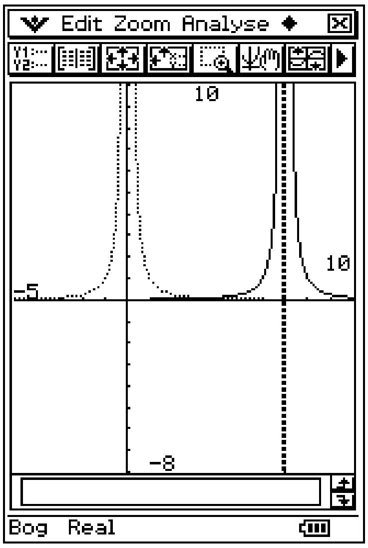




Eine Kombination von Verschiebungen in x- und y-Richtung liefert dann die Begründung für die Symmetrie eines Graphen bezüglich eines beliebigen Punkts.

In ähnlicher Weise kann die Symmetrie eines Graphen bezüglich einer Parallele zur y-Achse begründet werden.





Eine Verallgemeinerung der Kriterien für die Symmetrie von Funktionsgraphen könnte beispielsweise anhand Fokus 10, S. 186, Aufgaben 14, 15 und 16 schrittweise erarbeitet werden.

3 Einsatz von CAS bei Leistungsnachweisen

Die Vorteile des CAS-Rechners liegen im Wesentlichen in seinen vielfältigen Einsatzmöglichkeiten im Unterricht. Wird der CAS-Rechner im Unterricht als gewinnbringendes Hilfsmittel verwendet, so liegt es jedoch nahe, seinen Einsatz auch bei Leistungsnachweisen zuzulassen. Ziel eines Leistungsnachweises, bei dem ein CAS-Rechner verwendet werden darf, muss es sein, mathematische Kenntnisse, Fähigkeiten und Fertigkeiten sowie deren Anwendung mit mathematischem Verständnis zu prüfen, nicht die bloße Fähigkeit, einem CAS-Rechner die Lösung einer Aufgabe zu entnehmen.

Auch im Zusammenhang mit Leistungsnachweisen sollten die allgemeinen mathematischen Kompetenzen der Bildungsstandards ausgewogen berücksichtigt werden. Dazu werden die Schwerpunkte anders als in der Vergangenheit gesetzt; die Kompetenzen „Mathematisch argumentieren“, „Probleme mathematisch lösen“, „Mathematisch modellieren“ und „Kommunizieren“ werden stärker betont. Trotz der veränderten Schwerpunktsetzung muss selbstverständlich weiterhin darauf geachtet werden, den Schülerinnen und Schülern Sicherheit im Umgang mit Zahlen, Termen und Gleichungen nachhaltig zu vermitteln; manuelle Grundfertigkeiten sind weiterhin unverzichtbar. Entsprechend enthalten auch Leistungsnachweise, bei denen ein CAS-Rechner verwendet werden darf, in angemessenem Umfang Aufgaben, die manuelle Fertigkeiten prüfen. Außerdem sollte auch bei Leistungsnachweisen immer wieder gezielt auf eine Verwendung des CAS-Rechners verzichtet werden.

Zu beachten ist, dass nicht jede Aufgabe, die sich für eine CAS-gestützte Bearbeitung anbietet, auch für Leistungsnachweise geeignet ist. Beispielsweise sind Aufgaben, die im Wesentlichen mithilfe der dynamischen Geometriefunktion des CAS-Rechners zu bearbeiten sind, für schriftliche Leistungsnachweise eher ungeeignet.

3.1 Mündliche Leistungsnachweise

Der Einsatz eines CAS-Rechners bei mündlichen Leistungsnachweisen ist auf der Grundlage eines CAS-gestützten Unterrichts unproblematisch. Der Bildschirminhalt des CAS-Rechners kann mithilfe eines Overheadprojektors oder eines Beamers projiziert werden. So besteht die Möglichkeit, Lösungswege für alle Schülerinnen und Schüler sichtbar darzustellen.

3.2 Schriftliche Leistungsnachweise

Schulaufgaben können in zwei Teilen durchgeführt werden – im einen Teil ist die Verwendung des CAS-Rechners zugelassen, im anderen ausgeschlossen. Es empfiehlt sich, mit dem Prüfungsteil ohne CAS-Einsatz zu beginnen. Der Zeitpunkt, zu dem die Bearbeitung dieses Prüfungsteils abgegeben wird und die Bearbeitung der übrigen Aufgaben begonnen werden darf, kann entweder vorher festgelegt oder von jeder Schülerin bzw. jedem Schüler individuell gewählt werden. Der Vorteil dieser zweiteiligen Prüfungsform liegt in der Möglichkeit, grundlegende mathematische Kenntnisse, Fähigkeiten und Fertigkeiten ohne Verwendung des CAS-Rechners zu prüfen. Der damit verbundene erhöhte organisatorische Aufwand kann bei einem schriftlichen Leistungsnachweis im zeitlichen Umfang einer Schulaufgabe durchaus gerechtfertigt sein. Es ist selbstverständlich möglich, die Verwendung des CAS-Rechners auch während der gesamten Prüfungszeit zuzulassen.

Bei Stegreifaufgaben ist ein teilweiser Ausschluss der Benutzung des CAS-Rechners aufgrund der zeitlichen Rahmenbedingungen kaum praktikabel. Hier empfiehlt es sich, den Einsatz des CAS-Rechners abhängig von der Zielsetzung entweder durchgehend zuzulassen oder durchgehend auszuschließen.

Ist der CAS-Rechner als Hilfsmittel zugelassen und sollen von den Schülerinnen und Schülern schrittweise manuelle Umformungen gefordert werden, so lässt sich dies durch eine entsprechende Formulierung der jeweiligen Aufgabenstellung erreichen (z. B. „Bestimmen Sie schrittweise und nachvollziehbar …“). Die Schülerinnen und Schüler haben dann zwar die Möglichkeit, jeden einzelnen Rechenschritt mithilfe des CAS-Rechners zu überprüfen, dies ist jedoch mit einem erhöhten Zeitaufwand verbunden.

Dokumentation der Lösungen

Auch wenn bei einem schriftlichen Leistungsnachweis ein CAS-Rechner verwendet werden darf, müssen alle Lösungen auf Papier dokumentiert werden. Was dabei von den Schülerinnen und Schülern erwartet wird, muss rechtzeitig vor der Durchführung des ersten derartigen Leistungsnachweises im Unterricht geklärt werden.

Exakte, allgemeingültige Regeln dazu, wie ein bestimmtes CAS-Verfahren zu dokumentieren ist, lassen sich zwar nicht festlegen, es können jedoch grundlegende Anforderungen an die Dokumentation einer Lösung genannt werden.

- Die Dokumentation einer Lösung muss diese nachvollziehbar darstellen. Insbesondere muss deutlich werden, bei welchen Lösungsschritten und in welcher Weise der CAS-Rechner verwendet wurde.
- Die Dokumentation einer Lösung beschreibt mathematische Vorgehensweisen und beschränkt sich dabei nicht auf die Wiedergabe produktspezifischer Rechnersprache.
- Die Dokumentation einer Lösung zu einer bestimmten Aufgabe sollte nicht aufwändiger oder umfangreicher sein als die Darstellung einer Lösung zu dieser Aufgabe, die ohne den Einsatz eines CAS-Rechners erarbeitet werden müsste.

Beispiele zur Umsetzung dieser Grundsätze sind im Abschnitt 3.3 zu finden.

Technische Aspekte

- Die CAS-Rechner der Schülerinnen und Schüler lassen sich in einen Prüfungsmodus oder durch jeweilige Anwendung einer Reset-Funktion in einen einheitlichen Ausgangszustand versetzen.
- Die Schülerinnen und Schüler sollten dazu angehalten werden, die Stromversorgung eigenverantwortlich sicherzustellen.

3.3 Beispiele zu schriftlichen Leistungsnachweisen

3.3.1 Beispiel einer Schulaufgabe

Exemplarisch wird im Folgenden eine Schulaufgabe vorgestellt, die Teile der Lehrplanabschnitte „M 10.2 Geometrische und funktionale Aspekte der Trigonometrie“ sowie „M 10.3 Exponentielles Wachstum und Logarithmen“ prüft.

2. Schulaufgabe aus der Mathematik

Der CAS-Rechner darf zur Bearbeitung der Aufgaben verwendet werden. Alle Lösungen müssen nachvollziehbar sein.

BE

1 Eine Schülerband bietet auf ihrer Internetseite einen Song zum Download an und beobachtet die Anzahl der Downloads. Zu Beginn der Beobachtung konnte die Band insgesamt 112 Downloads verzeichnen, bis zum Ende des vierten Monats nach Beobachtungsbeginn insgesamt 787 Downloads.

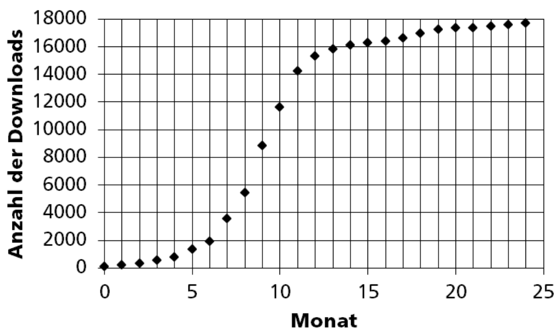
6 **a)** Bestimmen Sie jeweils den Term einer Funktion, die die Entwicklung der Anzahl der Downloads seit Beobachtungsbeginn beschreibt, wenn man von

α) exponentiellem Wachstum **β)** linearem Wachstum

ausgeht und die vergangene Zeit in Monaten angibt. Geben Sie auf der Grundlage beider Modelle jeweils an, wie viele Downloads die Schülerband bis zum Ende des fünften Monats seit Beobachtungsbeginn erwarten konnte.

1 **b)** Ermitteln Sie, innerhalb welcher Zeit sich die Anzahl der Downloads bei exponentiellem Wachstum jeweils verdoppelt.

4 **c)** Die Abbildung zeigt die tatsächliche Entwicklung der Anzahl der Downloads bis zum Ende der ersten 24 Monate seit Beobachtungsbeginn. Ermitteln Sie den Zeitraum, in dem das Modell exponentiellen Wachstums zur Beschreibung dieser Entwicklung geeignet ist. Geben Sie einen möglichen Grund dafür an, dass die Anzahl der Downloads anschließend ein anderes Wachstumsverhalten zeigte.



2 **d)** Für längerfristige Prognosen ist es oftmals günstiger, die seit Beobachtungsbeginn vergangene Zeit in Jahren anzugeben. Geben Sie für die Modelle exponentiellen und linearen Wachstums aus Aufgabe 1a jeweils allgemein an, wie der Wachstumsfaktor bzw. der Zuwachs pro Zeiteinheit dann zu ändern wäre (verwenden Sie 1 Jahr = 12 Monate).

5 **2** Bestimmen Sie schrittweise die exakte Lösung der Gleichung $13^{x+1} - 2 \cdot 13^x = 5^{x-1}$ über der Grundmenge $\mathbb{R}$.

7 **3** Zeichnen Sie den Graphen einer in $\mathbb{R}$ definierten Funktion der Form $f: x \mapsto a \cdot \sin\left(b \cdot (x-c)\right) + d$, deren Wertemenge $W = \left[-\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right]$ ist und deren Nullstellen die ganzzahligen Vielfachen von $\frac{\pi}{3}$ sind. Geben Sie einen passenden Term von f an. Für welches $k \in \mathbb{R}$ besitzt die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $g: x \mapsto f(x) - k$ die Nullstelle $\frac{\pi}{6}$? Begründen Sie Ihre Antwort anhand des Graphen von f. Geben Sie für dieses k alle Nullstellen von g an.

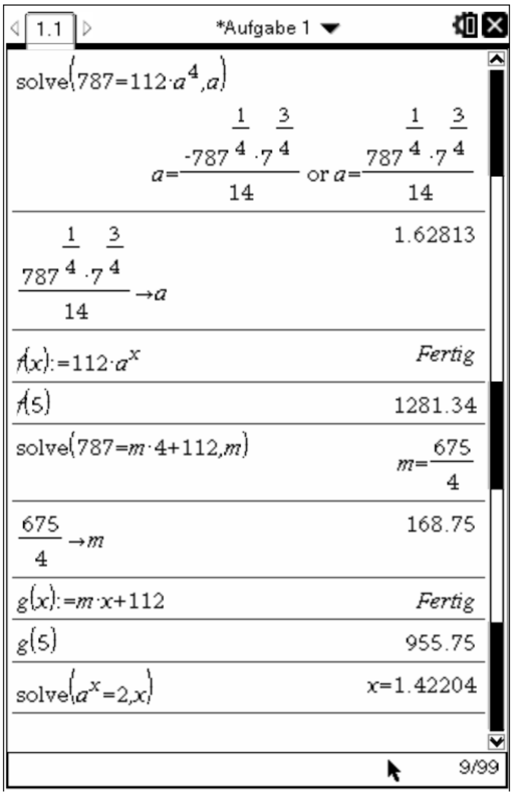
6 **4** Ermitteln Sie näherungsweise, für welche Werte von $a \in \mathbb{R}^+$ die Graphen der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen $f: x \mapsto ax$ und $g: x \mapsto \sin x$ genau drei Schnittpunkte besitzen. Wählen Sie anschließend a so, dass Sie die Koordinaten der drei zugehörigen Schnittpunkte exakt bestimmen können, und geben Sie diese an.

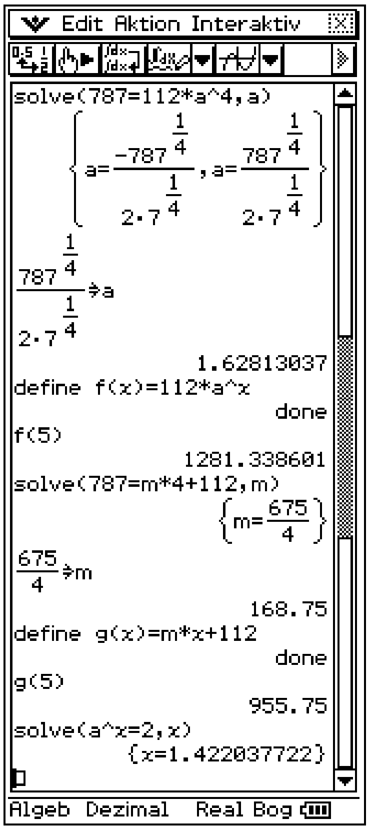
5 **5** Unterscheiden sich zwei reelle Zahlen (dargestellt als Dezimalbrüche) lediglich durch die Position des Kommas, so unterscheiden sich ihre dekadischen Logarithmen um eine ganze Zahl. Begründen Sie diese Tatsache.

Hinweise zu Lösung und Bewertung

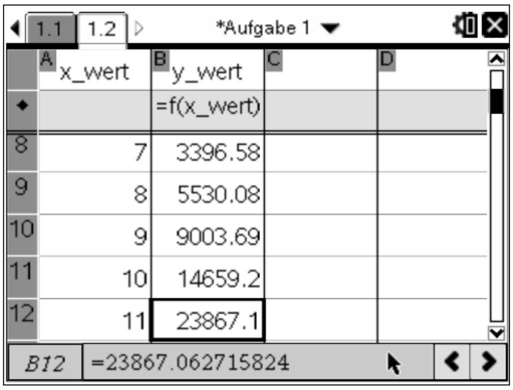
Aufgabe 1

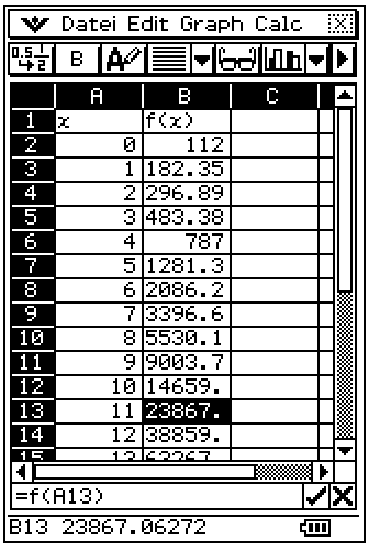
Bei derartigen Aufgaben ist es sinnvoll, ermittelte Funktionsterme im CAS-Rechner zu definieren, um bei weiteren Bearbeitungsschritten darauf zurückgreifen zu können.





Zur Bearbeitung der Aufgabe c kann die Tabellenkalkulationsfunktion des CAS-Rechners vorteilhaft genutzt werden.





Mögliche Dokumentation einer Lösung:

a) α) exponentielles Wachstum: $f(x) = b \cdot a^x$

$f(0) = 112 \Leftrightarrow b = 112$

$f(4) = 787 \Leftrightarrow a \approx 1{,}63$

$f(5) \approx 1281$

β) lineares Wachstum: $g(x) = m \cdot x + t$

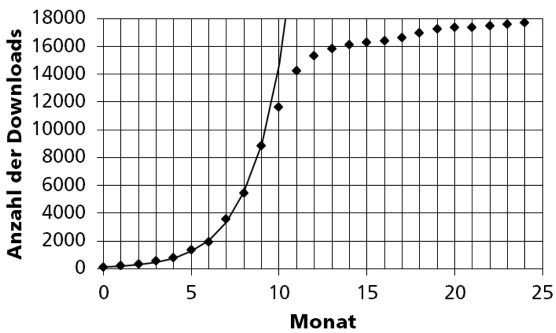
$g(0) = 112 \Leftrightarrow t = 112$

$g(4) = 787 \Leftrightarrow m = 168{,}75$

$g(5) \approx 956$

b) $a^x = 2 \Leftrightarrow x \approx 1{,}42$

c) Zeichnet man den Graphen zum Modell exponentiellen Wachstums in die Abbildung ein, so zeigt sich, dass dieses Modell dazu geeignet ist, die Entwicklung der Anzahl der Downloads von Beobachtungsbeginn bis zum Ende des neunten Monats zu beschreiben.



Die anschließende Änderung des Wachstumsverhaltens könnte darin begründet sein, dass bereits ein großer Anteil der möglichen Interessenten den Download des Songs durchgeführt und damit eine Sättigung des Marktes eingesetzt hat.

d) geänderter Wachstumsfaktor: a^{12}

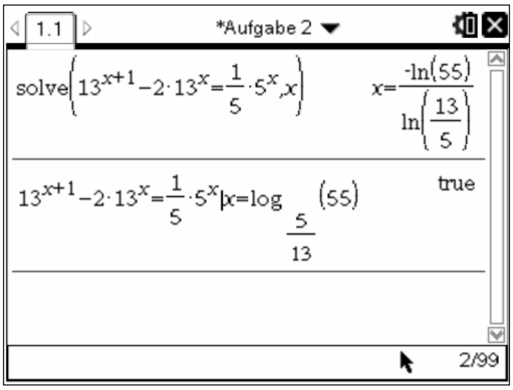
geänderter Zuwachs pro Zeiteinheit: $12 \cdot b$

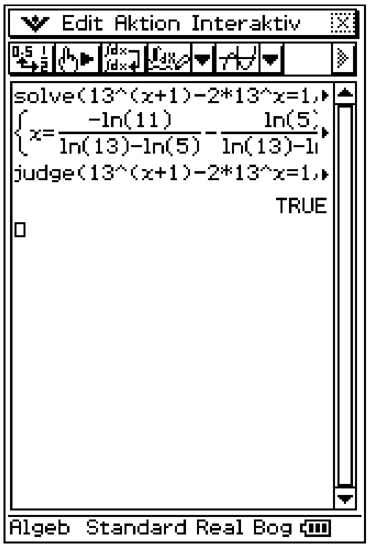
Aufgabe 2

In Verbindung mit der Vorbemerkung zur Schulaufgabe, dass alle Lösungen nachvollziehbar sein müssen, werden durch die Aufgabenstellung schrittweise manuelle Umformungen gefordert. Diese liefern $x = \log_{\frac{5}{13}} 55$ oder ein dazu äquivalentes Ergebnis.

Die Schülerinnen und Schüler haben die Möglichkeit, die einzelnen Rechenschritte mithilfe des CAS-Rechners zu überprüfen. Da dies jedoch mit einem erhöhten Zeitaufwand verbunden ist, kann die Bewertung wie bei einer Schulaufgabe erfolgen, deren Aufgaben ohne CAS-Einsatz zu bearbeiten sind.

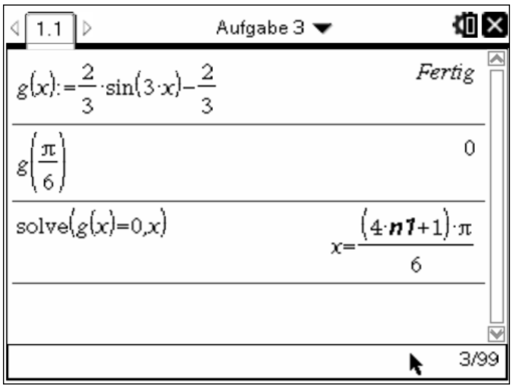
Ein Vergleich der manuell ermittelten Lösung mit der vom CAS-Rechner ausgegebenen Lösung würde Umformungen erfordern; einfacher ist eine Kontrolle der manuell ermittelten Lösung durch Einsetzen in die gegebene Gleichung.

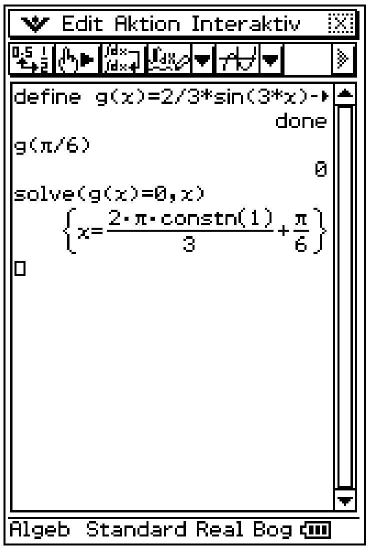




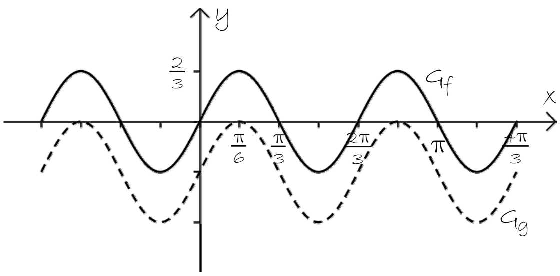
Aufgabe 3

Der ermittelte Wert für k kann mithilfe des CAS-Rechners kontrolliert werden. Die Nullstellen von g lassen sich rechnerisch oder durch Überlegungen anhand des Graphen von f oder g bestimmen.





Mögliche Dokumentation einer Lösung:



$f(x) = \frac{2}{3}\sin(3x)$

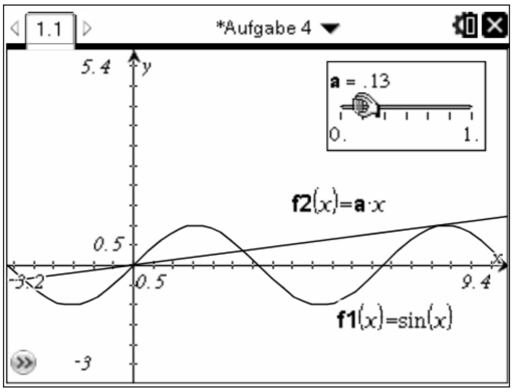
$k = \frac{2}{3}$

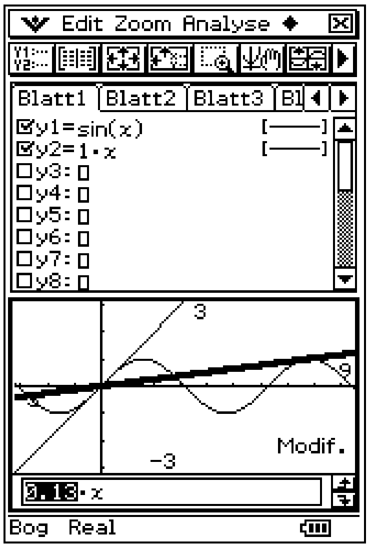
Begründung: Da $f(\frac{\pi}{6}) = \frac{2}{3}$, muss der Graph von g gegenüber dem Graphen von f um $\frac{2}{3}$ in negative y-Richtung verschoben sein.

Nullstellen von g: $(4n+1)\cdot\frac{\pi}{6}$; $n \in \mathbb{Z}$

Aufgabe 4

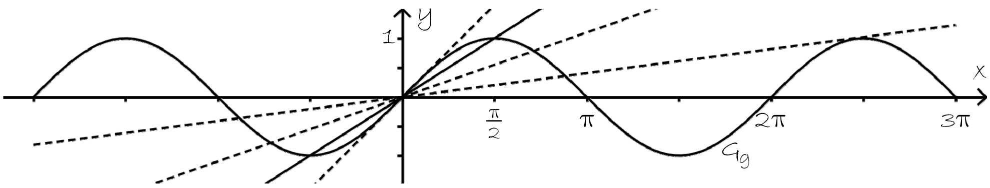
Die Schülerinnen und Schüler können die Graphen der beiden Funktionen mithilfe des CAS-Rechners untersuchen. Die Werte für a können beispielsweise unter Verwendung der von den CAS-Rechnern bereitgestellten Werkzeuge ermittelt werden, mit deren Hilfe sich Parameterwerte auf einfache Weise variieren lassen. Bei der Bewertung der Bearbeitungen zu diesem Aufgabenteil sollte die wesentliche Lösungsidee, die Suche eines Berührpunkts mit $x \in [2\pi; 3\pi]$, positiv gewürdigt werden.





Ein geeignetes Beispiel zur exakten Bestimmung der Koordinaten der Schnittpunkte lässt sich finden, indem man Schnittpunkte mit bekannten Koordinaten wählt und den zugehörigen Wert für a bestimmt.

Mögliche Dokumentation einer Lösung:



Probieren mit dem CAS-Rechner zeigt: Die Graphen von f und g besitzen genau drei Schnittpunkte für $a \in [0{,}13; 1[$ (näherungsweise).

Schnittpunkte für $a = \frac{2}{\pi}$: $(-\frac{\pi}{2} / -1)$, $(0/0)$, $(\frac{\pi}{2} / 1)$

Aufgabe 5

Der Anspruch dieser Aufgabe liegt im Wesentlichen in der Formulierung des vorgegebenen Zusammenhangs zweier reeller Zahlen z_1 und z_2 in der Form $z_1 = 10^n \cdot z_2$ sowie in der Anwendung der Rechenregeln für Logarithmen. Die mithilfe des CAS-Rechners mögliche Kontrolle der einzelnen Rechenschritte ist mit einem erhöhten Zeitaufwand verbunden. Die Bewertung kann deshalb wie bei einer Schulaufgabe erfolgen, deren Aufgaben ohne CAS-Einsatz zu bearbeiten sind.

Mögliche Dokumentation einer Lösung:

$z_1 = 10^n \cdot z_2$ mit $n \in \mathbb{N}$

Damit: $\lg z_1 = \lg(10^n \cdot z_2) = \lg 10^n + \lg z_2 = n + \lg z_2$

3.3.2 Weitere Beispielaufgaben

Im Folgenden werden beispielhaft weitere mögliche Prüfungsaufgaben zu den Lehrplanabschnitten „M 10.2 Geometrische und funktionale Aspekte der Trigonometrie“ sowie „M 10.3 Exponentielles Wachstum und Logarithmen“ vorgestellt. Im Rahmen der Bearbeitung der Aufgaben steht jeweils eine der allgemeinen mathematischen Kompetenzen „Mathematisch argumentieren“, „Probleme mathematisch lösen“, „Mathematisch modellieren“ und „Kommunizieren“ im Vordergrund.

Mathematisch argumentieren

Welcher geometrische Zusammenhang besteht zwischen den Graphen der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen $f: x \mapsto a^x$ und $g: x \mapsto \left(\frac{1}{a}\right)^x$ mit $a \in \mathbb{R}^+$? Begründen Sie diesen Zusammenhang.

Mit dem CAS-Rechner können zugehörige Graphen dargestellt werden; so lässt sich ein Zusammenhang vermuten. Die Begründung der angestellten Vermutung erfordert die Kompetenz „Mathematisch argumentieren“.

Probleme mathematisch lösen

Dagobert Duck legt für die Dauer eines Jahres seinen Glückskreuzer bei der Entenhausener Bank an, bei der Zinsen stets mitverzinst werden.

a) Bestimmen Sie die Höhe seines Guthabens nach einem Jahr, wenn es jährlich mit einem Zinssatz von 100 % verzinst wird.

b) Bestimmen Sie die Höhe seines Guthabens nach einem Jahr, wenn es für jedes halbe Jahr mit einem Zinssatz von 50 % verzinst wird.

c) Dagobert wittert ein gutes Geschäft. Geben Sie einen Term an, der beschreibt, wie hoch sein Guthaben nach einem Jahr ist, wenn ein Jahr in n Zeitabschnitte ($n \in \mathbb{N}$) unterteilt und das Guthaben für jeden Zeitabschnitt mit einem Zinssatz von $\frac{100}{n}\,\%$ verzinst wird (unterjährige Verzinsung). Kann Dagobert mit dieser Geldanlage innerhalb eines Jahres unermesslich reich werden? Machen Sie Ihre Antwort plausibel.

Unter der Voraussetzung, dass den Schülerinnen und Schülern eine zur Bearbeitung der Aufgabe c notwendige Strategie noch nicht bekannt ist, steht im Rahmen der Bearbeitung dieser Aufgabe die Kompetenz „Probleme mathematisch lösen“ im Vordergrund. Zur Formulierung einer Vermutung hinsichtlich der Entwicklung des Guthabens für sehr große Werte von n kann das Zeichnen eines Graphen oder die Berechnung geeigneter Termwerte hilfreich sein.

Mathematisch modellieren

Zur Finanzierung eines Eigenheims wird bei einer Bank ein Darlehen in Höhe von 200.000 Euro aufgenommen. Der jährliche Zinssatz beträgt 5,5 %.

a) Am Ende jedes Jahres werden 10.000 Euro getilgt sowie die anfallenden Zinsen gezahlt (Ratentilgung). Bestimmen Sie den Betrag, der für Zinsen insgesamt aufgewendet werden muss, bis das Darlehen vollständig zurückgezahlt ist.

b) Am Ende jedes Jahres werden insgesamt 16.735,87 Euro für Tilgung und Zinsen aufgewendet (Annuitätentilgung). Bestimmen Sie die Zeit, nach der das Darlehen vollständig zurückgezahlt ist.

Im Rahmen der Bearbeitung der Aufgaben a und b muss jeweils eine Sachsituation in ein mathematisches Modell übersetzt werden; dazu bedarf es der Kompetenz „Mathematisch modellieren“. Die Tabellenkalkulationsfunktion des CAS-Rechners unterstützt die Ermittlung der Lösungen wesentlich.

Kommunizieren

Aus einem Mathematik-Forum im Internet:

„Hallo Mathe-Könner, ich möchte die Gleichung $\sin x = 1$ mithilfe meines CAS-Rechners lösen und werde aus der Ausgabe $x = 2 \cdot n3 \cdot \pi + \frac{\pi}{2}$ nicht schlau. Kann mir jemand schreiben, was die Ausgabe bedeutet? Hätte ich die Aufgabe auch ohne CAS-Rechner lösen können? Danke schon mal. Alex“

Verfassen Sie eine sinnvolle Antwort.

Um die Bedeutung des vom CAS-Rechner ausgegebenen Terms sowie eine Lösung der Aufgabe ohne Verwendung des Geräts zu beschreiben, wird die Kompetenz „Kommunizieren“ benötigt.

Literatur

Lehrbücher (zugelassen für die Verwendung an bayerischen Gymnasien)

- Distel B., Feuerlein R., Mathematik 10. Unterrichtswerk für das G8, München 2008. [bsv 10]
- Jahnke Th., Scholz D. (Hrsg.), Fokus Mathematik 10. Gymnasium Bayern, Berlin 2008. [Fokus 10]
- Schätz U., Eisentraut F. (Hrsg.), delta 10. Mathematik für Gymnasien, Bamberg 2008. [delta 10]
- Schmid, A., Weidig I. (Hrsg.), Lambacher Schweizer 10. Mathematik für Gymnasien, Stuttgart 2008. [Lambacher Schweizer 10]

Weitere gedruckte Publikationen

- Barzel B., Pallack A. (Hrsg.), ... aller Anfang ist leicht. Aufgaben mit TI-Nspire/TI-Nspire CAS, Münster 2008.
- Barzel B., Pallack A. (Hrsg.), Aufgaben mit TI-Nspire/TI-Nspire CAS, Münster 2007.
- Baumann R., Analysis I. Ein Arbeitsbuch mit Derive, Stuttgart 2002.
- Bichler E., Explorative Studie zum langfristigen Taschencomputereinsatz im Mathematikunterricht. Der Modellversuch Medienintegration im Mathematikunterricht (M^3) am Gymnasium, Hamburg 2010.
- Böhm J., Optimierungsaufgaben grafisch, analytisch und numerisch lösen mit dem TI-92, Hagenberg 2005.
- Brandt D., Reinelt G., Lambacher Schweizer. Mathematik für Gymnasien. Gesamtband Oberstufe mit CAS, Stuttgart 2007.
- Bruder R. (Hrsg.), Aufgaben mit CAS-Einsatz. Modellversuch 2004/2005 Hessen, Freising 2006.
- Bruder R., Weiskirch W. (Hrsg.), CALiMERO. Computer-Algebra im Mathematikunterricht: Entdecken, Rechnen, Organisieren. Bände 1 - 5, Münster 2007 - 2009.
- Demana F., Waits B., Foley G., Kennedy, D., Precalculus. Functions and Graphs, Boston 2004.
- Dopfer G., Reimer R., Funktionen mit Parametern, Kurvenscharen. Arbeitsmaterialien unter Einsatz eines GTR/CAS. Lehrermaterialien und Lösungshinweise, Stuttgart 2003.
- Edwards C. H., Penney D. E., Single Variable Calculus, Athens 2002.
- Fulge R., Röttger A., Neue Ideen für den Mathematikunterricht. Einsatz moderner Technologien im Vorkurs der Jahrgangsstufe 11, Hannover 1999.
- Greefrath G., Mühlenfeld U. (Hrsg.), Realitätsbezogene Aufgaben für die Sekundarstufe II. Mit Ausarbeitungen für den ClassPad 300 Plus. Entwickelt im Rahmen des Modellversuchs SINUS-Transfer NRW, Troisdorf 2007.
- Heugl H., Klinger W., Lechner J., Mathematikunterricht mit Computeralgebra-Systemen. Ein didaktisches Lehrbuch mit Erfahrungen aus dem österreichischen Derive-Projekt, Bonn 1996.
- Hischer H., Mathematikunterricht und neue Medien. Hintergründe und Begründungen in fachdidaktischer und fachübergreifender Sicht, Hildesheim 2002.
- Knechtel H., Kramer H., Krüger U.-H., Weiskirch W., Materialien für den Einsatz von Grafikrechnern und Computeralgebra. Teil 1, Braunschweig 2003.
- Moldenhauer W. (Hrsg.), Der Einsatz des TI-89 in der Jahrgangsstufe 10 an Thüringer Gymnasien, Freising 2003.
- Landesinstitut für Schulentwicklung Baden-Württemberg (Hrsg.), Unterrichtspraxis mit dem grafikfähigen Taschenrechner in der Klassenstufe 7/8. Erfahrungsberichte und Unterrichtsmaterialien zur Leitidee funktionaler Zusammenhang, Heimsheim 2007.
- Pallack A., Mit CAS zum Abitur. TI-89 Titanium und Voyage 200 in Unterricht und Prüfung, Braunschweig 2006.
- Prugger E., Rauniak C., Schneider E., Wachstums- und Abnahmeprozesse mit dem TI-92. Ein Lehrgang zur Behandlung von Exponential- und Logarithmusfunktionen, Hagenberg 2002.
- Schneider G., Girlinger H., Paul M., Tinhof F., Mathematik II HLW/HLT/HLM/ALM/HLK, Linz 2007.
- Sächsisches Staatsinstitut für Bildung und Schulentwicklung (Hrsg.), Einsatz von Computer-Algebra-Systemen im Mathematikunterricht. Handreichung, Lapertswalde 2006.
- Weigand H.-G., Weth T., Computer im Mathematikunterricht. Neue Wege zu alten Zielen, Heidelberg 2002.

Publikationen im Internet

- www.t3deutschland.de (abgerufen am 15.07.2011)
  Die Internetseiten des Lehrerfortbildungsprojekts „Teachers Teaching with Technology“ (T^3) enthalten eine umfangreiche Datenbank mit Literaturangaben zum Einsatz von CAS.
- www.acdca.ac.at (abgerufen am 15.07.2011)
  Die Internetseiten des „Austrian Center for Didactics of Computer Algebra“ bieten eine umfangreiche Sammlung von Materialien zum Einsatz von CAS im Unterricht.
- wiki.zum.de/Mathematik-digital (abgerufen am 15.07.2011)
  Das Wiki „Mathematik Digital“ enthält eine Sammlung von Unterrichtsmaterialien sowie eine Sammlung von Links zu Materialien für den Mathematikunterricht, darunter auch Materialien zum Einsatz moderner Technologie.
- www.nctm.org (abgerufen am 15.07.2011)
  Die Internetseiten des „National Council of Teachers of Mathematics“, des größten Verbandes von Mathematiklehrkräften der USA, bieten eine umfangreiche Sammlung von Materialien, die teilweise ohne Abschluss einer (kostenpflichtigen) Mitgliedschaft verfügbar sind.

HANDREICHUNG
GYMNASIUM

Mathematik

Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung
Schellingstraße 155, 80797 München
Tel.: 089 2170-2101
Fax: 089 2170-2105
www.isb.bayern.de