Binärsystem und Codierung

Ein Prinzip der von-Neumann-Architektur sagt aus, dass Programm und abzuarbeitende Daten binär codiert sind. Aber was versteht man aber unter binärer Codierung?

Mit Hilfe dieses Arbeitsblattes sollen Sie sich das notwendige Grundwissen dazu erwerben. Arbeiten Sie dazu die folgenden Informationen und Übungen selbständig durch. Vergleichen Sie nach jedem Kapitel Ihre Aufgabenlösungen mit den ausliegenden Lösungsblättern. Besprechen Sie gegebenenfalls Unklarheiten mit Ihrer Lehrkraft.

1. Das Binärsystem

Wir nutzen zur Darstellung von Zahlen die Ziffern 0 bis 9. Dabei ist ausschlaggebend, an welcher Position, genannt Stelle, eine Ziffer innerhalb der Zahl steht. Dieses Prinzip haben Sie in der Grundschule und in der 5. Jahrgangsstufe anhand einer Stellenwerttabelle gelernt.

Beispiel: Bei der Zahl 1520 gibt die Ziffer 1 die Anzahl der Tausender, 5 die Anzahl der Hunderter usw. an. 1520 ergibt sich damit aus den Ziffern 1, 5, 2 und 0 nach folgendem Schema:

$$\begin{aligned} 1520 &= 1000 && + 500 && + 20 && + 0 \\ &= 1 \cdot 1000 && + 5 \cdot 100 && + 2 \cdot 10 && + 0 \cdot 1 \\ &= 1 \cdot 10^3 && + 5 \cdot 10^2 && + 2 \cdot 10^1 && + 0 \cdot 10^0 \end{aligned}$$

Die Bedeutung einer Ziffer für die Zahl ergibt sich damit aus der Position innerhalb der Zahl. Jede Ziffer wird mit einer entsprechenden Zehnerpotenz multipliziert und die Teilergebnisse werden dann addiert.

Die Zahl 10 spielt eine zentrale Rolle, sie wird **Grundzahl** oder **Basis** genannt. Unser Zahlensystem heißt deshalb auch **Dezimal- oder Zehnersystem**. Da die Stelle der Ziffer innerhalb der Zahl entscheidend ist, zählt man das Dezimalsystem zu den so genannten **Stellenwertsystemen**.

Das **Binärsystem,** auch **Dualsystem** genannt, ist ebenfalls ein Stellenwertsystem und damit nach den gleichen Prinzipien wie das Dezimalsystem aufgebaut:

	Dezimalsystem	Dualsystem
Ziffernvorrat	0; 1; 2; ...; 9	0; 1 (manchmal auch O, L)
Grundzahl (Basis)	10	2

Aus dem Ziffernvorrat des Dualsystems werden die Dualzahlen aufgebaut, beispielsweise 10110_2.

Bemerkung: Um eine Verwechslung von Dualzahl und Dezimalzahl zu vermeiden, werden Dualzahlen oft mit dem Index 2 markiert. Eine andere Möglichkeit der Unterscheidung besteht beispielsweise darin, als Ziffern eindeutige Zeichen wie L (für 1) und O (für 0) zu verwenden.

Übungen:

1. Welche Zahlensysteme gehören nicht zu den Stellenwertsystemen? Recherchieren Sie ggf. im Internet.
2. Welches weitere Stellenwertsysteme spielt in der Informatik eine wichtige Rolle? Recherchieren Sie ggf. im Internet.

2. Umrechnung von Dual- bzw. Dezimalzahlen

Dezimalzahlen können in Dualzahlen umgewandelt werden und umgekehrt.

2. 1 Umrechnung einer Dualzahl in eine Dezimalzahl

Diese Richtung ist einfach, sie orientiert sich an der obigen Darstellung der Zahl 1520 mit Zehnerpotenzen. Statt Zehnerpotenzen sind aber bei der Dualzahl Zweierpotenzen zu verwenden. Folgendes Beispiel zeigt die Vorgehensweise:

$10110_2 = 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 1 \cdot 16 + 0 \cdot 8 + 1 \cdot 4 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 =$

$= 16 + 4 + 2 + 1 = 23$

Übungen:

Wandeln Sie die Dualzahl in eine Dezimalzahl um!

a) 1011_2 = ____________________

b) 110110_2 = ____________________

c) LOOLLO = ____________________

d) LLLLLLLL = ____________________

2.2 Umwandlung einer Dezimalzahl in eine Dualzahl

Bei dieser Umrechnung kann man folgendermaßen vorgehen: Man zerlegt die gegebene Dezimalzahl in Potenzen von 2. Dazu kann man folgende Strategie anwenden:

```
rest = gegebene Dezimalzahl
wiederhole solange rest > 0
    Suche die größte Zweierpotenz zp, die kleiner als rest ist.
    Merke dir diese Zweierpotenz
    rest = rest - zp
endewiederhole
```

Die Dezimalzahl ist damit als Summe von Zweierpotenzen darstellbar. Analog zum Beispiel aus 2.1 wird dann in umgekehrter Reihenfolge die Dualzahl bestimmt.

Beispiel: $325 = 256 + 69 = 256 + 64 + 5 = 256 + 64 + 4 + 1 =$

$= 2^8 + 2^6 + 2^2 + 2^0$

$= 1 \cdot 2^8 + 0 \cdot 2^7 + 1 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$

$= 101000101_2$

Übungen:

1. Wandeln Sie die Dezimalzahl in eine Dualzahl um!

a) 21 = ____________________

b) 65 = ____________________

c) 135 = ____________________

d) 543 = ____________________

2. Ein anderes, sehr einfaches und gut programmierbares Verfahren zur Umrechnung ist das Resteverfahren. Informieren Sie sich im Internet über dieses Verfahren und testen Sie es mit den Zahlen aus Übung 1.

3. Binärer Speicher

Der Speicher eines von-Neumann-Rechners besteht aus gleich großen Speicherzellen, in denen Programm und Daten binär codiert, d.h. als Folge von Nullen und Einsen, abgelegt sind.

Exkurs "Bits und Bytes": Ein Bit (binary digit, englisch für Binärziffer) ist die kleinstmögliche Einheit für Daten. Bezogen auf den binären Speicher eines von-Neumann-Rechners interpretiert man ein Bit als eine Speicherzelle, in der entweder eine 1 oder eine 0 abgespeichert werden kann. 8 (aufeinander folgende) Bits fasst man oft zu einem Byte zusammen.

Wie viele verschiedene Folgen von Nullen und Einsen können nun in einer Speicherzelle mit einer bestimmten Länge abgespeichert werden?

Beispiel: Die Speicherzellen eines von-Neumann-Rechners haben die Größe 1 Byte. Jedes Bit kann mit 0 oder 1 belegt werden.

2 ·	2 ·	2 ·	2 ·	2 ·	2 ·	2 ·	2

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^8 = 256$$

Damit können 256 verschiedene Ziffernfolgen abgespeichert werden.

Übungen:

1. Wie viele verschiedene Folgen von Nullen und Einsen können in einer Speicherzelle der Größe 3 Bit abgespeichert werden? Schreiben Sie alle möglichen Kombinationen auf.
2. Wie viele verschiedene Folgen von Nullen und Einsen können in einer Speicherzelle
   a) der Länge 2 Byte bzw. 4 Byte bzw. 8 Byte abgespeichert werden;
   b) der Länge n Bit abgespeichert werden.

4. Code, Codierung

In einer Speicherzelle der Größe 1 Byte können 256 verschiedene Folgen aus Nullen und Einsen abgespeichert werden. Jede dieser Folgen kann nun als Binärzahl interpretiert werden.

Jede Binärzahl kann andererseits in eine eindeutige Dezimalzahl umgewandelt werden. Somit kann jede Dezimalzahl durch die entsprechende Binärzahl codiert werden. Die binäre Codierung einer natürlichen Zahl bedeutet also beispielsweise, dass diese Zahl als Dualzahl dargestellt wird.

Eine solche eindeutige Zuordnung nennt man in der Informatik **Code**.

Übungen:

1. Ein sehr bekannter Code ist der Morsecode. Recherchieren Sie diesbezüglich im Internet. Welche Codierung findet hier statt?
2. Man kann aber auch andere Zeichen, z.B. Buchstaben, binär codieren. Dazu muss man nur festlegen, durch welche Dualzahl der Buchstabe codiert wird. Dies wird beispielsweise beim so genannten ASCII-Code gemacht. Informieren Sie sich im Internet darüber.
3. Recherchieren Sie im Internet, wie ganze Zahlen typischerweise binär codiert werden.
4. Für Interessierte: Reelle Zahlen können mit der so genannten Gleitkommadarstellung (näherungsweise) binär codiert werden. Recherchieren Sie dieses Verfahren.
5. Für Interessierte: Unter http://elearning.fim.uni-passau.de/elearning/ können Sie sich unter dem Stichwort Onlinekurs vertiefter mit Codierung beschäftigen.