Umsetzungshinweise

Einführungsklasse, Mathematik

(sechsstündig, ca. 162 Stunden)

gültig ab Schuljahr 2023/24

Die Kompetenzerwartungen und Inhalte der Umsetzungshinweise für Einführungsklassen führen die Schülerinnen und Schüler an die Kompetenzen heran, die für den Eintritt in die Profil- und Leistungsstufe des bayerischen Gymnasiums erforderlich sind. Diese sind unter Berücksichtigung der Vorkenntnisse der Schülerinnen und Schüler im Rahmen der Einführungsklasse zu behandeln. Sie orientieren sich am LehrplanPLUS für das Fach Mathematik für das Gymnasium in Bayern.

Hinweis: In der Wissenschaftswoche erarbeiten die Schülerinnen und Schüler im zeitlichen Umfang einer Woche fachspezifische Zugänge zu einem fächerübergreifenden Rahmenthema, insbesondere in Vorbereitung auf das Wissenschaftspropädeutische Seminar.

1 Potenzfunktionen mit natürlichen Exponenten und Erweiterung des Potenzbegriffs (ca. 8 Std.)

Die Schülerinnen und Schüler ...

- beschreiben für Funktionen mit Termen der Form $a \cdot x^n$ in Abhängigkeit von a und n den Verlauf des zugehörigen Graphen sowie seine Symmetrie.
- verstehen die Definition der allgemeinen Wurzel und sind in der Lage, damit Gleichungen zu lösen, die sich auf die Form $x^n = c$ zurückführen lassen.
- erläutern, dass Potenzen mit rationalen Exponenten eine alternative Schreibweise für Wurzeln sind, wandeln davon ausgehend Potenz- und Wurzelschreibweise ineinander um und fassen in fortlaufender, klar strukturierter Rechnung Produkte und Quotienten zusammen, die Potenzen und Wurzeln enthalten.

2 Ganzrationale Funktionen (ca. 12 Std.)

Die Schülerinnen und Schüler ...

- verstehen ganzrationale Funktionen als Summe von Potenzfunktionen mit ganzzahligen nicht negativen Exponenten und begründen anhand des Funktionsterms (in allgemeiner oder faktorisierter Form) das Verhalten einer ganzrationalen Funktion an den Rändern des Definitionsbereichs. Sie bestimmen in Fällen angemessener Komplexität – auch durch Lösen von biquadratischen Gleichungen mittels Substitution – Nullstellen und deren Vielfachheit und erstellen mit deren Hilfe eine Skizze des Graphen, die sie, z. B. durch reflektierte Verwendung einer geeigneten Software (Funktionenplotter), kontrollieren.
- ziehen aus dem Graphen einer ganzrationalen Funktion, soweit möglich, Rückschlüsse auf den Grad der Funktion oder auch auf den zugehörigen Funktionsterm.

3 Sinus- und Kosinusfunktion (ca. 9 Std.)

Die Schülerinnen und Schüler ...

- verstehen das Bogenmaß als alternative Möglichkeit, Winkelgrößen zu beschreiben, und wechseln sicher zwischen Bogen- und Gradmaß. Sie veranschaulichen das Bogenmaß am Einheitskreis.
- beschreiben für Funktionen mit Termen der Form $a \cdot \sin\left(b \cdot (x + c)\right) + d$, wie sich Änderungen der Parameter a, b, c und d auf den Funktionsgraphen auswirken. Zur Untersuchung, Demonstration und Erläuterung dieser Zusammenhänge nutzen sie auch eine dynamische Mathematiksoftware.
- zeichnen für einen gegebenen Funktionsterm der Form $a \cdot \sin\left(b \cdot (x + c)\right) + d$ unter Verwendung geeigneter Merkmale (insbesondere Amplitude und Periode) den zugehörigen Funktionsgraphen und ermitteln umgekehrt aus dem Graphen den zugehörigen Funktionsterm.
- lösen realitätsbezogene Problemstellungen zu periodischen Vorgängen graphisch und rechnerisch, indem sie geeignete Modellierungen – v. a. mithilfe von Sinus- und Kosinusfunktionen – durchführen und bei Bedarf variieren.

4 Elementare gebrochen-rationale Funktionen (ca. 8 Std.)

Die Schülerinnen und Schüler ...

- geben für gebrochen-rationale Funktionen der Form $x \mapsto \frac{a}{x+b}+c$ die maximale Definitionsmenge an, bestimmen die Schnittpunkte des Graphen mit den Koordinatenachsen und beschreiben den Einfluss einer Änderung der Werte der Parameter b und c auf den Verlauf des Graphen. Zur Untersuchung und Veranschaulichung nutzen sie auch eine dynamische Mathematiksoftware.
- zeichnen den Graphen einer gebrochen-rationalen Funktion der Form $x \mapsto \frac{a}{x+b}+c$ einschließlich seiner Asymptoten und ermitteln umgekehrt anhand des Graphen einer solchen Funktion die zugehörigen Werte der Parameter.

5 Spezielle Eigenschaften von Funktionen (ca. 19 Std.)

Die Schülerinnen und Schüler ...

- geben für alle bisher bekannten Funktionstypen charakteristische Beispiele an. Sie bringen durch geeignete Skizzen der zugehörigen Graphen das Monotonieverhalten und weitere wesentliche Eigenschaften der jeweiligen Funktion deutlich zum Ausdruck und beschreiben diese.
- erläutern anhand des Graphen sowie anhand des Funktionsterms das Grenzverhalten von Funktionen für $x \to +\infty$ und für $x \to -\infty$; sie unterscheiden Konvergenz und Divergenz und veranschaulichen die Konvergenz mithilfe der Vorstellung eines beliebig schmalen Streifens, den ein gegebener Funktionsgraph jeweils ab einem bestimmten x-Wert nicht mehr verlässt. Zur Angabe des Grenzverhaltens verwenden sie die Grenzwertschreibweise.
- überprüfen rechnerisch sowie bei ganzrationalen Funktionen auch durch Analyse der Struktur des Funktionsterms, ob die Graphen von Funktionen achsensymmetrisch bezüglich der y-Achse bzw. punktsymmetrisch bezüglich des Koordinatenursprungs sind.
- beschreiben, welche Änderungen an einem Funktionsterm dazu führen, dass der zum geänderten Funktionsterm gehörige Graph gegenüber dem ursprünglichen Graphen in x- oder y-Richtung verschoben, in x- oder y-Richtung gestreckt bzw. an einer Koordinatenachse gespiegelt ist. Sie sind sich bewusst, dass bei der Kombination mehrerer solcher Transformationen die Reihenfolge der Ausführung von Bedeutung sein kann. Sie demonstrieren und erläutern diese Zusammenhänge – auch unter Verwendung einer geeigneten Mathematiksoftware – und argumentieren mit ihnen, z. B. bei der Zuordnung von Funktionstermen zu Funktionsgraphen und umgekehrt.

- unterscheiden auf der Grundlage einer anschaulichen Vorstellung von Stetigkeit anhand von Beispielen für abschnittsweise definierte Funktionen Graphen stetiger Funktionen von Graphen nicht stetiger Funktionen.

6 Gebrochen-rationale Funktionen – Grenzwerte und Asymptoten (ca. 18 Std.)

Die Schülerinnen und Schüler ...

- ermitteln die maximal mögliche Definitionsmenge sowie ggf. die Nullstellen einer einfachen gebrochen-rationalen Funktion (d. h. einer Funktion, bei der sowohl Zähler- als auch Nennerpolynom höchstens den Grad 2 aufweisen und deren Funktionsterm in vollständig gekürzter Form vorliegt). Sie geben ggf. das Zähler- bzw. Nennerpolynom als Produkt von Linearfaktoren an und verwenden situationsgerecht unterschiedliche Darstellungen des Funktionsterms.
- ermitteln anhand des Funktionsterms – auch mithilfe zielgerichteter Termumformungen – das Grenzverhalten einer einfachen gebrochen-rationalen Funktion für $x \to +\infty$ und für $x \to -\infty$ und geben ggf. die Gleichung der waagrechten Asymptote an. Besitzt der Graph eine schräge Asymptote, geben sie deren Gleichung an, sofern diese unmittelbar aus dem zugehörigen Funktionsterm ersichtlich ist.
- ermitteln mithilfe des Funktionsterms das links- und rechtsseitige Grenzverhalten einer einfachen gebrochen-rationalen Funktion für $x \to x_0$, um den Verlauf des Graphen in der Umgebung einer Polstelle x_0 zu beschreiben. Zur Angabe des Grenzverhaltens verwenden Sie die Grenzwertschreibweise und geben die Gleichung der zugehörigen senkrechten Asymptote des Graphen an.
- analysieren einfache gebrochen-rationale Funktionen hinsichtlich ihrer wesentlichen Eigenschaften, schließen damit auf den Verlauf des jeweiligen Graphen und zeichnen diesen. Umgekehrt schließen sie aus gegebenen Eigenschaften auf einen dazu passenden Funktionsterm. In beiden Fällen überprüfen sie ihre Ergebnisse mithilfe einer geeigneten Mathematiksoftware.
- ermitteln die Koordinaten von Schnittpunkten der Graphen zweier einfacher gebrochen-rationaler Funktionen bzw. des Graphen einer einfachen gebrochen-rationalen Funktion mit dem Graphen einer linearen Funktion rechnerisch, sofern sich das Lösen der dabei auftretenden Bruchgleichung auf das Lösen einer linearen oder quadratischen Gleichung zurückführen lässt. Die Lösung kontrollieren sie durch reflektierte Verwendung einer geeigneten Software.

7 Laplace-Experimente und Wahrscheinlichkeit verknüpfter Ereignisse (ca. 19 Std.)

Die Schülerinnen und Schüler ...

- grenzen anhand von Beispielen Laplace-Experimente von Zufallsexperimenten ab, die sich nicht mithilfe der Annahme der Gleichwahrscheinlichkeit aller Elementarereignisse tragfähig modellieren lassen.
- berechnen Laplace-Wahrscheinlichkeiten und nutzen dabei auch das Zählprinzip und Baumdiagramme.
- stellen zwei miteinander verknüpfte Ereignisse mithilfe von Schnitt- oder Vereinigungsmengen dar und nutzen Mengendiagramme sowie Vierfeldertafeln zur Veranschaulichung. Dabei übersetzen sie auch verbale Beschreibungen von Ereignissen in formale und umgekehrt.
- begründen den Zusammenhang $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ und bestimmen Wahrscheinlichkeiten im Kontext zweier miteinander verknüpfter Ereignisse.

8 Zusammengesetzte Zufallsexperimente – bedingte Wahrscheinlichkeit und stochastische Unabhängigkeit (ca. 25 Std.)

Die Schülerinnen und Schüler ...

- strukturieren zusammengesetzte Zufallsexperimente mit Baumdiagrammen, auch unter Zurückführung auf Urnenexperimente.
- berechnen mithilfe der Pfadregeln Wahrscheinlichkeiten.
- erkennen bedingte Wahrscheinlichkeiten als solche und bestimmen bedingte Wahrscheinlichkeiten auch unter flexibler Verwendung von Baumdiagrammen und Vierfeldertafeln.
- erläutern, dass in Sachzusammenhängen (z. B. in der medizinischen Diagnostik) klar zwischen $P_B(A)$, $P_A(B)$ und $P(A \cap B)$ unterschieden werden muss. Sie sind in der Lage, mithilfe von Vierfeldertafeln oder Baumdiagrammen – auch solchen, in denen sie Wahrscheinlichkeiten mithilfe von absoluten Häufigkeiten in den Feldern bzw. Knoten illustrieren – von der einen auf die andere bedingte Wahrscheinlichkeit zu schließen.
- erläutern die stochastische Unabhängigkeit zweier Ereignisse an konkreten Beispielen. Sie erkennen die stochastische Unabhängigkeit bzw. Abhängigkeit von Ereignissen an Baumdiagrammen und Vierfeldertafeln und prüfen rechnerisch, ob zwei Ereignisse stochastisch unabhängig sind.

- berücksichtigen verschiedene Aspekte, um aus Daten abgeleitete Aussagen (z. B. zu politischen oder gesellschaftlichen Sachverhalten) kritisch zu hinterfragen (z. B. Umfang und Zusammensetzung der Stichprobe, Änderung bedingter Wahrscheinlichkeiten je nach betrachteter Teilmenge der Daten, Art der Datenerhebung und der zugrunde liegenden Fragestellung) und unterscheiden dabei auch die Begriffe Korrelation und Kausalität. Sie sind sich bewusst, dass bei der Analyse und Darstellung von Daten Interpretationen vorgenommen werden, die zu falschen Schlussfolgerungen führen können.

9 Grundlagen der Differentialrechnung (ca. 44 Std.)

9.1 Lokales und globales Differenzieren (ca. 23 Std.)

Die Schülerinnen und Schüler ...

- berechnen Werte von Differenzenquotienten und deuten diese geometrisch als Sekantensteigungen. Sie interpretieren den Wert des Differenzenquotienten als mittlere Änderungsrate und nutzen diese Interpretation auch im Sachkontext (u. a. durchschnittliche Steigung einer Straße, Durchschnittsgeschwindigkeit).
- erläutern die Definition des Differentialquotienten mithilfe von Mathematiksoftware, deuten dessen Wert geometrisch als Tangentensteigung und interpretieren diese Steigung als Steigung des Graphen im zugehörigen Punkt. Für einfache Beispiele ganzrationaler Funktionen berechnen sie Werte von Differentialquotienten.
- erläutern an Graphen von Funktionen die Bedeutung des Begriffs der lokalen Differenzierbarkeit; dabei skizzieren sie insbesondere Graphen von Funktionen (u. a. der Betragsfunktion), die an einzelnen Stellen nicht differenzierbar sind.
- erläutern – auch mithilfe von Mathematiksoftware – die Definition der Ableitungsfunktion, schließen aus dem Graphen einer Funktion auf den Verlauf des Graphen der zugehörigen Ableitungsfunktion und begründen ihre Vorgehensweise.
- leiten ganzrationale Funktionen ab und nutzen dabei auch die Faktor- und die Summenregel.
- interpretieren Werte von Ableitungsfunktionen als lokale Änderungsraten und nutzen diese Interpretation auch im Sachkontext (u. a. lokale Steigung einer Straße, Momentangeschwindigkeit).
- nutzen die Ableitung, um die Gleichung einer Tangente an einen Graphen aufzustellen und die Größe des Steigungswinkels der Tangente zu berechnen.

9.2 Anwendung der Differentialrechnung bei der Untersuchung ganzrationaler Funktionen (ca. 21 Std.)

Die Schülerinnen und Schüler ...

- veranschaulichen die formale Definition der strengen Monotonie anhand geeigneter Skizzen und begründen damit z. B. die strenge Monotonie der Funktion $x \mapsto x^3$ $(x \in \mathbb{R})$. Sie erläutern, wie man aus der ersten Ableitung einer Funktion Rückschlüsse auf deren Monotonieverhalten sowie auf deren Extremstellen ziehen kann, und nutzen diese Zusammenhänge bei der Untersuchung ganzrationaler Funktionen.
- interpretieren das Krümmungsverhalten des Funktionsgraphen als Monotonieverhalten der ersten Ableitung einer Funktion; sie erläutern, dass an einer Wendestelle die Steigung des Funktionsgraphen bzw. die lokale Änderungsrate der Funktion extremal ist, und interpretieren dies im Sachkontext (z. B. Zeitpunkt größten Wachstums). Sie untersuchen das Krümmungsverhalten ganzrationaler Funktionen mithilfe der zweiten Ableitung und ermitteln rechnerisch Wendestellen dieser Funktionen.
- unterscheiden bei Extremstellen und Wendestellen zwischen notwendigen und hinreichenden Bedingungen. Sie begründen u. a., dass die Bedingung $f'(x_0) = 0$ notwendig, aber nicht hinreichend für die Existenz einer Extremstelle einer differenzierbaren Funktion f an der Stelle x_0 ist.
- analysieren ganzrationale Funktionen hinsichtlich ihrer Eigenschaften durch flexible und reflektierte Nutzung der Methoden der Differentialrechnung. Zur Kontrolle ihrer Ergebnisse verwenden sie auch eine geeignete Mathematiksoftware.

10 Additive Hinweise

- Je nach Kenntnisstand der Lerngruppe kann es erforderlich sein, Inhalte des LehrplanPLUS für die Realschule in Bayern aufzugreifen und vertieft zu wiederholen. So empfiehlt es sich beispielsweise, im Rahmen der Behandlung des fünften Lernbereichs dieser Umsetzungshinweise, die Eigenschaften von linearen und quadratischen Funktionen sowie von Funktionen mit Termen der Form $b \cdot a^x$ zu thematisieren. Als weiteres Beispiel für einen geeigneten Anknüpfungspunkt zur vertieften Wiederholung sei der siebte Lernbereich genannt; hier bietet sich die Möglichkeit, auf weitere, dort nicht explizit genannte Aspekte aus dem Gegenstandsbereich „Daten und Zufall“ einzugehen.
- Des Weiteren sollte ein besonderes Augenmerk darauf gelegt werden, dass der Kompetenzaufbau im Sinne des LehrplanPLUS für das Gymnasium in Bayern fortgesetzt wird, insbesondere im Hinblick auf die mathematischen Kompetenzen „Argumentieren“, „Modellieren“ und „Kommunizieren“.

- Die Kompetenzerwartungen und Inhalte der Umsetzungshinweise orientieren sich am LehrplanPLUS für das Gymnasium in Bayern für die Jahrgangsstufen 8 bis 11. Die entsprechenden Verweise können der untenstehenden Übersicht entnommen werden.

Lernbereiche der Umsetzungshinweise	**LehrplanPLUS Gymnasium**
1 Potenzfunktionen mit natürlichen Exponenten und Erweiterung des Potenzbegriffs	vgl. M9 5
2 Ganzrationale Funktionen	vgl. M10 4
3 Sinus- und Kosinusfunktion	vgl. M10 3
4 Elementare gebrochen-rationale Funktionen	vgl. M8 3
5 Spezielle Eigenschaften von Funktionen	vgl. M11 1
6 Gebrochen-rationale Funktionen – Grenzwerte und Asymptoten	vgl. M11 2
7 Laplace-Experimente und Wahrscheinlichkeit verknüpfter Ereignisse	vgl. M8 5 und M9 3
8 Zusammengesetzte Zufallsexperimente – bedingte Wahrscheinlichkeit und stochastische Unabhängigkeit	vgl. M10 2 und M11 3
9 Grundlagen der Differentialrechnung	vgl. M11 4

- Sollten am Ende des Schuljahres Freiräume zur Gestaltung des Unterrichts zur Verfügung stehen, bieten sich folgende Themen an:
  - Lösen realitätsnaher Aufgabenstellungen im Zusammenhang mit Wachstums- und Abklingvorgängen (vgl. LehrplanPLUS Gymnasium Bayern, M10 1)
  - Simulation von (zusammengesetzten) Zufallsexperimenten zur Bestimmung von Näherungswerten von Wahrscheinlichkeiten (vgl. LehrplanPLUS Gymnasium Bayern, M10 2)
  - Bestimmung von Volumina, Oberflächeninhalten, Längen und Winkelgrößen in Sachzusammenhängen (vgl. LehrplanPLUS Gymnasium Bayern, M10 5)
  - Bestimmung von Näherungswerten von Nullstellen mithilfe des Newton-Verfahrens (vgl. LehrplanPLUS Gymnasium Bayern, M11 4.2)