



# Rechnen- lernen im Zahlen- raum 20+

Kompetenzorientierter  
Mathematikunterricht  
im Förderschwerpunkt  
geistige Entwicklung

ISB

Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung München





Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung München

# Rechnenlernen im Zahlenraum 20+

Kompetenzorientierter  
Mathematikunterricht  
im Förderschwerpunkt  
geistige Entwicklung

München 2023

## Impressum

Erarbeitet im Auftrag des Bayerischen Staatsministeriums für Unterricht und Kultus

### Leitung des Arbeitskreises:

Isabell Niedermeier Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung

### Mitglieder des Arbeitskreises:

Milena Dmoch Georg-Zahn-Schule, Erlangen  
Veronika Kratschmann Privates Förderzentrum mit dem Förderschwerpunkt geistige  
Entwicklung der Lebenshilfe Neumarkt  
Ulrike Kreipe Privates Förderzentrum mit dem Förderschwerpunkt geistige  
Entwicklung Marktredwitz  
Annelore Miller Schule am Kleefeld, Irchenrieth  
Christina Müller Bildungszentrum St. Wolfgang, Straubing  
Yvonne Neidhart Herbert-Meder-Schule, Unsleben  
Kerstin Weber-Böck Tom-Mutters-Schule, Kempten

### Redaktion:

Isabell Niedermeier Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung

### Herausgeber:

Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung

### Anschrift:

Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung  
Abteilung Grund-, Mittel- und Förderschulen und Schule für Kranke  
Schellingstr. 155, 80797 München,  
Tel. 089 2170-2150, Fax 089 2170-2815  
[kontakt@isb.bayern.de](mailto:kontakt@isb.bayern.de)  
[www.isb.bayern.de](http://www.isb.bayern.de)

### Gestaltung:

Eischer-Werbung, Zur Sonnenwiese 9, 91710 Gunzenhausen  
[info@eischer-werbung.de](mailto:info@eischer-werbung.de)

### Stand:

Januar 2024

*Wir danken herzlich dem DZLM und besonders Prof. Dr. Christoph Selter für die Zusammenarbeit, die Genehmigung zur Verlinkung auf die DZLM-Homepage Mahiko und die Verwendung von Bildmaterial. Wir danken auch Milena Dmoch für die Bereitstellung der Nutzungsrechte für das von ihr fotografierte Titelbild.*

# INHALTSVERZEICHNIS

<b>1</b>	<b>Vorwort</b>	<b><u>4</u></b>
<b>2</b>	<b>Didaktik des Mathematikunterrichts für Schülerinnen und Schüler mit dem Förderbedarf geistige Entwicklung</b>	<b><u>5</u></b>
2.1	Die Bedeutung der Mathematikdidaktik für das Rechnenlernen von Schülerinnen und Schülern mit dem Förderbedarf geistige Entwicklung	<u>5</u>
2.2	Grundlagen der Mathematikdidaktik	<u>7</u>
2.2.1	Arithmetischer Anfangsunterricht	<u>8</u>
2.2.2	Schreiben von Zahlen	<u>10</u>
2.2.3	Verschiedene Darstellungsformen im arithmetischen Anfangsunterricht	<u>10</u>
2.2.4	Sprachförderliches Unterrichten	<u>12</u>
2.2.5	Aufbau von Grundvorstellungen und Ablösung vom Rechnen mit Material	<u>13</u>
2.2.6	Sinnvoll Üben	<u>15</u>
2.3	Das Fach Mathematik im LehrplanPLUS für den Förderschwerpunkt geistige Entwicklung in Bayern	<u>17</u>
2.4	Inhaltlicher Aufbau des Praxisteils	<u>20</u>
<b>3</b>	<b>Schülerinnen und Schüler mit dem Förderbedarf geistige Entwicklung beim Rechnenlernen</b>	<b><u>21</u></b>
3.1	Wie lernen Schülerinnen und Schüler mit dem Förderbedarf geistige Entwicklung rechnen?	<u>21</u>
3.2	Welche Fördermaßnahmen unterstützen die Schülerinnen und Schüler mit dem Förderbedarf geistige Entwicklung beim Rechnenlernen?	<u>25</u>
<b>4</b>	<b>Teilkompetenzen des Rechnens im Zahlenraum 20+ und deren Förderung</b>	<b><u>27</u></b>
4.1	Teilkompetenz: Zählen	<u>27</u>
4.2	Teilkompetenz: Mengen vergleichen und Relationszeichen nutzen	<u>36</u>
4.3	Teilkompetenz: Anzahlen simultan und quasi-simultan erfassen	<u>43</u>
4.4	Teilkompetenz: Das Teil-Ganzes-Konzept nutzen	<u>50</u>
4.5	Teilkompetenz: Bündeln	<u>61</u>
4.6	Teilkompetenz: Stellenwerte verstehen	<u>68</u>
4.7	Teilkompetenz: Grundvorstellungen von Rechenoperationen nutzen: Addition und Subtraktion	<u>77</u>
4.8	Teilkompetenz: Rechenstrategien anwenden	<u>81</u>
<b>5</b>	<b>Hilfreiche Materialien zum Rechnenlernen</b>	<b><u>89</u></b>
<b>6</b>	<b>Literatur</b>	<b><u>102</u></b>

# 1 Vorwort

---

Im Fach Mathematik zu erwerbende Kompetenzen sind für die Alltagsbewältigung von hoher Bedeutung. Dies gilt auch für Schülerinnen und Schüler mit dem Förderschwerpunkt geistige Entwicklung. Damit kommt der Mathematikdidaktik eine elementare Bedeutung zu, was aktuell an einem entsprechend breiten Diskurs innerhalb der sonderpädagogischen Wissenschaft deutlich wird. Gerade zur Mathematikdidaktik erfolgten zahlreiche wissenschaftliche Veröffentlichungen, z. B. von MOSER OPITZ, RATZ, SCHÄFERS oder WITTMANN.

Einhellige Aussage dieser Veröffentlichungen ist, dass der Erwerb mathematischer Kompetenzen von Schülerinnen und Schülern mit dem Förderbedarf geistige Entwicklung nicht grundsätzlich anders verläuft als von Kindern ohne Förderbedarf (vgl. SCHÄFER 2020, 11f.).

Um den Lehrkräften, die Kinder und Jugendliche mit dem Förderbedarf geistige Entwicklung unterrichten, Handlungssicherheit im Fach Mathematik zu vermitteln, möchte die vorliegende Handreichung:

- Grundlagen der Fachdidaktik für den mathematischen Anfangsunterricht darlegen,
- besondere Förderansätze für die Schülerschaft mit dem Förderschwerpunkt geistige Entwicklung ausführen,
- einzelne Teilkompetenzen des Rechnenlernens im Zahlenraum 20+ und deren Förderung kompakt und praxisnah beschreiben,
- hilfreiche Materialien zum Rechnenlernen vorstellen.

Da laut der Studie SFGE II „Schülerschaft mit dem Förderschwerpunkt geistige Entwicklung“ (BAUMANN, DWORSCHAK, KROSCHEWSKI, SELMAYR, RATZ, WAGNER) von 2021 ein Großteil der Schülerinnen und Schüler mit dem Förderbedarf geistige Entwicklung vor allem im Zahlenraum 20 rechnet, beschränkt sich die Veröffentlichung auf diesen Zahlenraum. Wobei der Titel „Rechnen im Zahlenraum 20+“ verdeutlichen soll, dass der hier beschriebene Kompetenzerwerb sich keinesfalls auf diesen Zahlenraum beschränken sollte, sondern vielmehr die Zahlenräume fließend ineinander übergehen und die arithmetischen Anfangskompetenzen auf erweiterte Zahlenräume angewandt werden.

Wir wünschen Ihnen eine interessante Lektüre und viel Freude beim Rechnenlernen mit den Schülerinnen und Schülern.

**Isabell Niedermeier**

Referentin für den Förderschwerpunkt geistige Entwicklung  
am Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung

## 2 Didaktik des Mathematikunterrichts für Schülerinnen und Schüler mit dem Förderbedarf geistige Entwicklung

---

### 2.1 Die Bedeutung der Mathematikdidaktik für das Rechnenlernen von Schülerinnen und Schülern mit dem Förderbedarf geistige Entwicklung

---

Nach der Gründung der „Schulen für Geistigbehinderte“ in den 1950er Jahren und dem Ausbau des Sonderschulwesens in Bayern orientierte sich dieses, auch wenn so nicht benannt, eher an der Kindergartenpädagogik. Erst in den 1980er Jahren entstand aufgrund von MÜHLs sog. „Handlungs- und Situationsfeldern“ ein Ansatz für einen handlungsorientierten Unterricht für Kinder und Jugendliche mit dem Förderbedarf geistige Entwicklung. Gleichzeitig entwickelte sich mit den Einflüssen aus den amerikanischen Curricula der „Arbeitsplan G“, der vor allem Alltagskompetenzen sowie basales Wissen und Kommunikationsanlässe beinhaltete. Ebenfalls bereits in den 1980er Jahren beschrieb FISCHER für den Unterricht nicht nur einen Basis- und einen Elementarbereich, sondern auch einen Fachbereich, in den auch die Kulturtechniken einbezogen wurden (vgl. RATZ 2011, 10 ff. und SCHÄFER 2020, 11 f.).

Zwar gab es durch erste integrative Entwicklungen eine Orientierung an regulären Unterrichtsfächern der Allgemeinen Schule, ...

*„[...] jedoch schlossen die Arbeiten in Theorie und Praxis wenig (oder gar nicht) an die fachwissenschaftlichen Grundlagen an, sondern beschränkten eigene (mehr sonderpädagogische) Wege, die jedoch nicht selten fachlicher Grundlagen entbehrten, aus entwicklungspsychologischer Sicht nicht stimmig waren und zudem einen interdisziplinären Dialog mit der Regelpädagogik (und damit zugleich der Fachdidaktik Mathematik) außer Acht ließen.“ (SCHÄFER 2020, 11)*

Dies führte dazu, dass an den bayerischen Schulen zur individuellen Lebensbewältigung und im ersten „Lehrplan für den Unterricht in der Schule für geistig Behinderte“ von 1982 zunächst der Lernbereich „Rechnen“ und ab 2002 am Förderzentrum für den Förderschwerpunkt geistige Entwicklung und dem zugehörigen Lehrplan von 2003 der Lernbereich „Mathematik“ eingeführt wurden.

Zwei Entwicklungen führten dazu, dass die Bedeutung der Mathematikdidaktik auch für den Unterricht von Kindern und Jugendlichen mit dem Förderbedarf geistige Entwicklung als elementar anerkannt wurde. Zum einen richteten zunehmende inklusive Beschulungsmöglichkeiten den Blick verstärkt auf die allgemeine Fachdidaktik und ließen ihre Vorteile erkennen. Zum anderen zeigten Forschungen, dass der Erwerb mathematischer Kompetenzen von Schülerinnen und Schülern mit dem Förderbedarf geistige Entwicklung nicht grundsätzlich anders verläuft als der von Kindern ohne Förderbedarf (vgl. SCHÄFER 2020, 11 f.).

Seither wurde die Fachdidaktik zunehmend in die sonderpädagogische Wissenschaft aufgenommen und es erschienen zahlreiche wissenschaftliche Veröffentlichungen, z. B. von MOSER OPITZ, RATZ, SCHÄFERS oder WITTMANN, zur Mathematikdidaktik im Förderschwerpunkt geistige Entwicklung. Auch der seit 2019 in Bayern gültige LehrplanPLUS für den Förderschwerpunkt geistige Entwicklung verweist im theoretisch ausgerichteten Fachprofil ausdrücklich auf die Bedeutung der Fachdidaktik und berücksichtigt im Aufbau des Fachlehrplans fachdidaktische und entwicklungspsychologische Grundlagen. In logischer Konsequenz bildet der Lehrplan nun auch Mathematik als Unterrichtsfach ab.

Damit kommt der Fachdidaktik Mathematik eine geschichtlich neue und für die Förderung der Schülerinnen und Schüler herausragende Bedeutung zu. SCHÄFER fordert:

*„Mathematik muss sich als eine sogenannte Kulturtechnik auch im FgE auf eine mathematisch korrekte Fachdidaktik beziehen. Die in diesem Zusammenhang wichtige sonderpädagogische Akzentuierung mit Verweis auf die besonderen Bedarfe der Schüler im FgE darf [...] nicht zur Etablierung fachwissenschaftlich fragwürdiger (z. T. falscher) (Sonder-) Wege führen.“ (SCHÄFER 2016, 4)*

Die Grundlagen der Mathematikdidaktik und deren Bedeutung für den Unterricht im Förderschwerpunkt geistige Entwicklung werden im folgenden Kapitel beschrieben, bevor im Anschluss daran auf die Frage eingegangen wird, wie Schülerinnen und Schüler mit dem Förderbedarf geistige Entwicklung Rechnen lernen.



## 2.2 Grundlagen der Mathematikdidaktik

Mathematikunterricht in der Sonderpädagogik richtet sich an der allgemeinen Didaktik für das Fach Mathematik aus. Diese beruht auf dem Verständnis von der Mathematik als Wissenschaft der Muster und Strukturen (vgl. RATZ & WITTMANN 2011, 130). Diese Muster und Strukturen lassen sich z. B. in Zahlzerlegungen, in der Multiplikation oder bei Parkettierungen finden. Sie stellen das Grundgerüst mathematischen Verstehens dar und werden zum zentralen Kern des Unterrichts. Die Ausrichtung an der Mathematikdidaktik bedeutet auch „eine Ablösung vom sonderpädagogischen Konstrukt der Pränumerik hin zu einer Betonung der Numerik und des Zahlenerwerbs von Beginn an (SCHÄFER 2020, 14).

### 2.2.1 Arithmetischer Anfangsunterricht

SCHÄFER beschreibt den arithmetischen Anfangsunterricht als die „Entwicklung des Zahlbegriffs, der numerischen Kompetenzen und der operativen Handlungen“ (SCHÄFER 2020, 86).

RATZ und WITTMANN differenzieren diese als die Grundideen der Arithmetik weiter aus:

0. *Numerische Bewusstheit*
1. *Zahlreihe*
2. *Rechnen, Rechengesetze, Rechenvorteile*
3. *Zehnersystem*
4. *Rechenverfahren*
5. *Arithmetische Gesetzmäßigkeiten und Muster*
6. *Zahlen in der Umwelt*

(RATZ & WITTMANN 2011, 138 zitiert nach PETER-KOOP 2016, 7)

DÖNGES überführt diese Grundideen in fünf konkrete Kompetenzen, die beim Rechnenlernen als grundlegend zu betrachten sind:

1. *Zählen und Zählkompetenzen*
2. *Strukturierte Anzahlerfassung (Quasi-Simultanerfassung)*
3. *Einsicht in die Zerlegbarkeit von Zahlen (Teil-Ganzes Verständnis)*
4. *Strukturiertes Zählen*
5. *Grundvorstellungen von Zahlen und Operationen*

(DÖNGES 2016, 13 ff. zitiert nach SCHÄFER 2020, 91)

Eine Konkretisierung und Beschreibung der beiden ersten komplexen Kompetenzbereiche „Numerische Bewusstheit“ und „Zahlreihe“ leistet das **Entwicklungsmodell der Zahl-Größen-Verknüpfung (ZGV-Modell) von KRAJEWSKI und ENNEMOSER** (vgl. SCHÄFER 2020, 87).

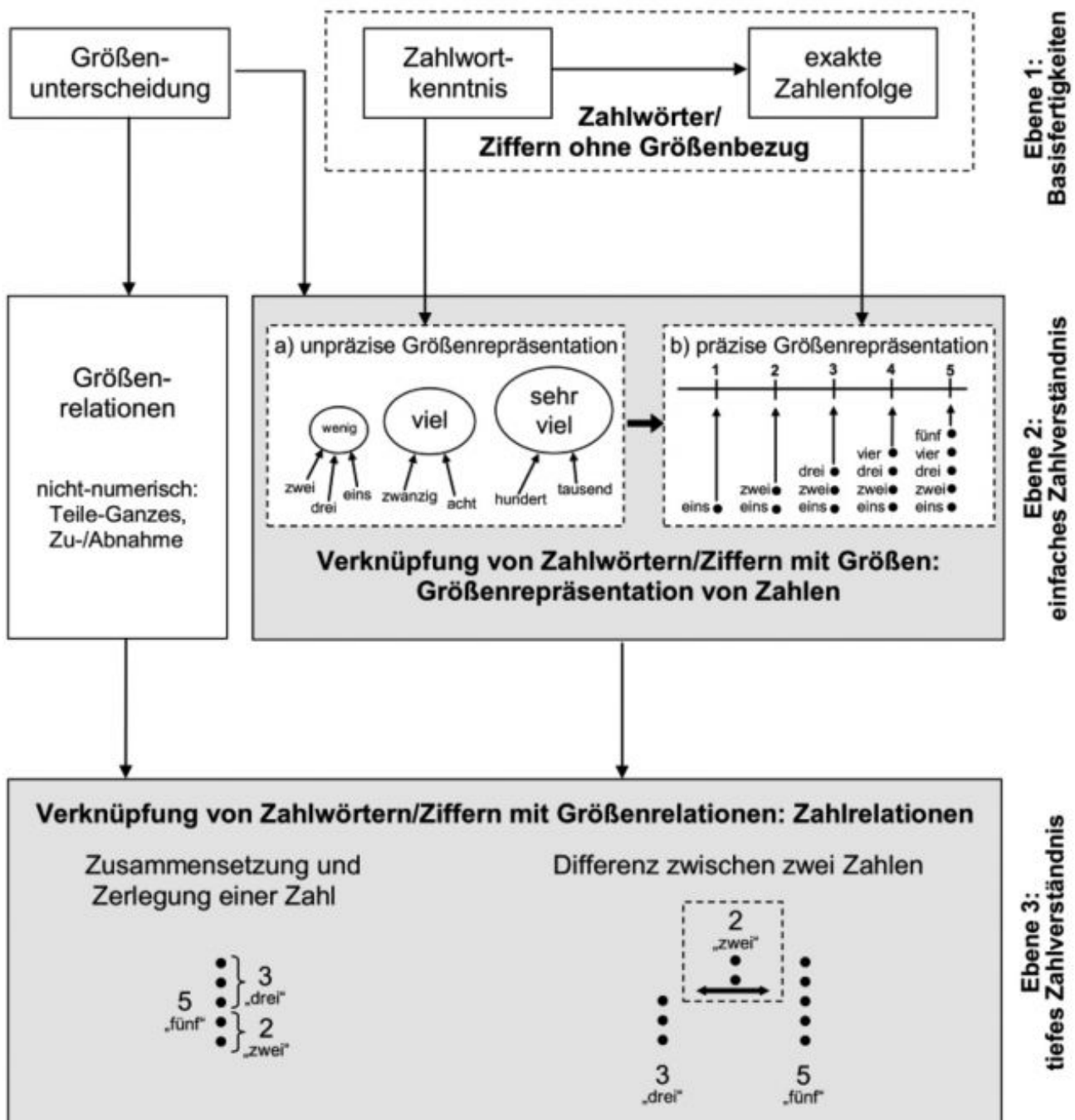


Abbildung 1: Modell der Zahl-Größen-Verknüpfung nach KRAJEWSKI und ENNEMOSER; <https://pikas-mi.dzlm.de/förderschwerpunkte/geistige-entwicklung/hintergrund> (abgerufen am 06.11.2022)

KRAJEWSKI und ENNEMOSER beschreiben in ihrem Modell die Zahlbegriffsentwicklung über drei Ebenen:

- Die Ebene 1 beschreibt die Basisfertigkeiten, die am Anfang des Verknüpfungsprozesses stehen. Die Kinder unterscheiden Mengen, im Modell als „Größen“ bezeichnet, indem sie diese ungenau miteinander vergleichen. Sie kennen erste Zahlwörter, wobei sie noch kein kardinales Verständnis und somit zwar Mengen zum Teil zählen, aber nicht bestimmen können. Die exakte Zahlwortfolge entwickelt sich nach und nach. Dabei gilt es, den Spaß, den viele Kinder am Zählen haben, aufrechtzuhalten und zu nutzen, indem man beispielsweise das Zählen im Alltag immer wieder aufgreift.

- Auf der Ebene 2 entwickeln die Kinder über zwei qualitativ unterschiedliche Schritte ein einfaches Zahlverständnis, das heißt, Zahlwort und Menge werden miteinander verknüpft.

Zunächst entwickelt sich in Phase a) die Einsicht in die unpräzise Größenrepräsentation. Dabei werden Zahlen und Mengen grob in die Kategorien „wenig“, „viel“ oder „sehr viel“ eingeordnet. Die exakte Bestimmung der Anzahl sowie der Differenz spielen noch keine Rolle. Um diese Teilkompetenz zu fördern, kann ein Vergleich von unterschiedlichen Anzahlen auf Abbildungen eingefordert werden.

In Phase b) entwickelt sich daraus das differenzierte Verständnis der präzisen Größenrepräsentation. Die Kinder ordnen jedem Zahlwort eine Menge zu, das heißt zum Beispiel, drei Dingen wird die Zahl 3 zugeordnet. Die Einsicht in die unterschiedlichen Zählprinzipien (Eindeutigkeitsprinzip, Prinzip der stabilen Ordnung, Kardinalprinzip, Abstraktionsprinzip, Prinzip der Irrelevanz der Anordnung) ist dabei Voraussetzung.

Diese ersten beiden Ebenen bilden die Grundlagen für das Rechnen.

- Die Ebene 3 umfasst ein tiefes Zahlenverständnis, das „auf beginnende arithmetische Einsichten“ verweist (SCHÄFER 2020, 89) und fungiert als Integrationsstufe der Ebenen 1 und 2. Die Kinder zerlegen und setzen Zahlen zusammen und benennen die Differenz zwischen zwei Zahlen.  
(vgl. SCHÄFER 2020, 87 ff.; SCHNEPEL & KRÄHENMANN 2016, 10 f.; PETER-KOOP 2016, 6 f.)

Im ZGV-Modell sind „Verschiebungen in der individuellen Entwicklung“ (PETER-KOOP 2016, 7) möglich. Es können mehrere Entwicklungen parallel ablaufen und auf unterschiedlichen Repräsentationsformen und in verschiedenen Zahlenräumen gegeneinander verschoben sein. Ein Kind kann „möglicherweise im Zahlenraum bis 10 bereits auf Ebene 3 operieren, während es im Zahlenraum über 100 erst noch die Zahlwörter und damit Ebene 1 erwerben muss“ (KRAJEWSKI & ENNEMOSER 2013, 45f., zitiert nach PETER-KOOP 2016, 7).

Das vorgestellte Modell spielt in der Mathematikdidaktik, besonders auch im Förderschwerpunkt geistige Entwicklung eine wichtige Rolle, da sich anhand dessen „mathematische Kompetenzen auf einem basalen Niveau differenziert analysieren lassen und Zusammenhänge zwischen den Teilkompetenzen deutlich werden“ (MOSER OPITZ 2016 et al., 127, zitiert nach SCHÄFER 2020, 90). Dies lässt gewinnbringende Rückschlüsse auf mögliche Fördermaßnahmen zu, die bei Schülerinnen und Schülern mit dem Förderbedarf geistige Entwicklung bis in die Berufsschulstufe hinein Lernfortschritte erzeugen können (vgl. RATZ 2012, 145 zitiert, nach SCHÄFER 2020, 90). Deshalb erscheint es sinnvoll, sich dabei an der Fachdidaktik des mathematischen Anfangsunterrichts sowie vorschulischen Bildungsangeboten zu orientieren (vgl. DÖNGES 2016, 13).

## 2.2.2 Schreiben von Zahlen

Während das numerische Verständnis angebahnt wird, ist es sinnvoll, die Ziffern auch im Rahmen eines Schreiblehrgangs zu thematisieren, damit diese optisch diskriminiert und in automatisierter Weise korrekt, ökonomisch und an der richtigen Stelle verschriftlicht werden können.

Im LehrplanPLUS werden u. a. folgende Kompetenzen zum Darstellen von Zahlen genannt:

„Die Schülerinnen und Schüler ...

- *lesen und schreiben die Ziffern und Zahlen bis 10, indem sie*
  - *die Form einer Ziffer erfassen (...).*
  - *Ziffern aufgrund ihrer Form unterscheiden und wiedererkennen.*
  - *die Ziffern mit den entsprechenden Zahlwörtern kombinieren.*
  - *die Ziffern formtreu schreiben, auf einen bewegungsökonomischen Schreibablauf achten und Begrenzungslinien (z. B. Kästchen) zunehmend einhalten.“* (<https://www.lehrplanplus.bayern.de/fachlehrplan/foerderschule/2/mathematik/foerderschwerpunkt/geistige-entwicklung>, abgerufen am 06.11.2022)

## 2.2.3 Verschiedene Darstellungsformen im arithmetischen Anfangsunterricht

Die Lehrkraft regt durch Lernangebote zu tatsächlichen bzw. auch mentalen Handlungen an, um den Lernenden zu ermöglichen, sich konstruktiv und entdeckend mit einem Inhalt auseinanderzusetzen und tragfähige Vorstellungen von Mathematik aufzubauen (vgl. RATZ & WITTMANN 2011, 131 ff.). Neben diesem aktiven eigenen geistigen Tun kommt der Interaktion im Rahmen eines kommunikativen Prozesses eine besondere Bedeutung beim Erkennen und Verstehen neuer mathematischer Inhalte zu (vgl. HASEMANN & GASTEIGER 2020, 77).

Die Lehrkraft berücksichtigt bei den Lernangeboten für die Schülerinnen und Schüler das sog. EIS-Prinzip nach BRUNER. Die drei Buchstaben stehen für die **e**naktive, **i**konische und **s**ymbolische Darstellungsform, die beim Rechnen Anwendung finden (vgl. HASEMANN & GASTEIGER 2020, 78):

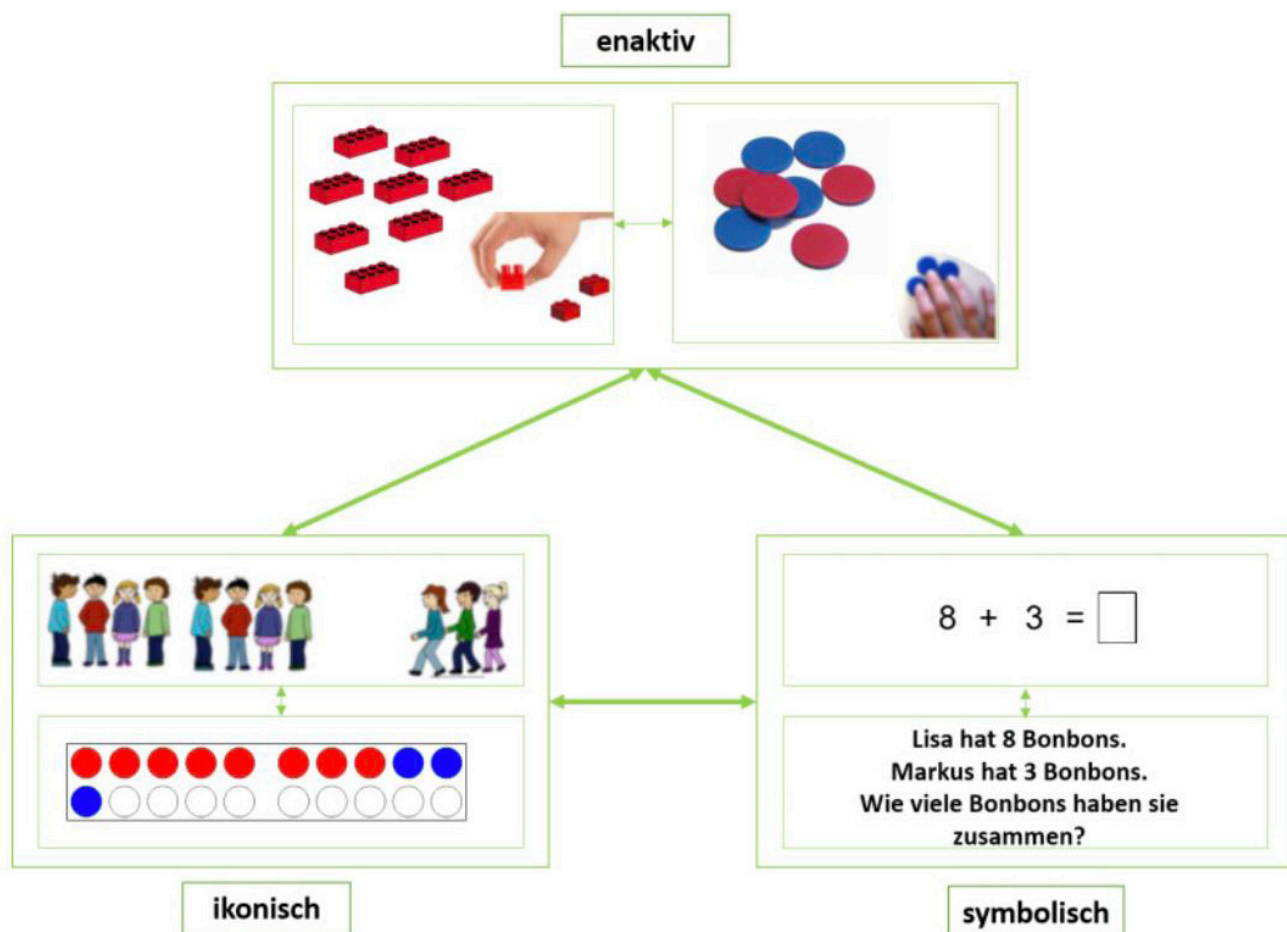


Abbildung 2: EIS-Prinzip, Darstellungsmodi nach dem EIS-Prinzip von BRUNER; <https://pikas-mi.dzlm.de/node/224> (abgerufen am 05.10.2022)

- **Enaktive Darstellungsform:**  
Eine Aufgabe wird durch konkrete Handlungen mit realen Gegenständen gelöst.  
**Beispielaufgabe:** Ich habe acht Legosteine und lege noch drei dazu. Wie viele sind es?  
**Lösungsweg:** Die Schülerin oder der Schüler legt acht echte Legosteine auf den Tisch. Anschließend legt die Schülerin oder der Schüler drei Steine dazu und zählt die Steine ab.
- **Ikonische Darstellungsform:**  
Eine Aufgabe wird mithilfe von Bildern oder anderen bildlichen Darstellungen gelöst.  
**Beispielaufgabe:** Auf einem Bild sind acht Kinder im Klassenzimmer. Drei Kinder kommen dazu. Wie viele sind es jetzt?  
**Lösungsweg:** Die Schülerin oder der Schüler nutzt ein Zwanzigerfeld zur Lösung der Aufgabe, indem z. B. acht Punkte rot ausgemalt und anschließend drei Punkte blau eingefärbt werden. Dann nennt sie oder er das Ergebnis.
- **Symbolisch:**  
Eine Aufgabe wird durch sprachliche oder numerische Zeichen gelöst.  
**Beispielaufgabe:** Lisa hat acht Bonbons. Markus hat drei Bonbons. Wie viele Bonbons haben sie zusammen?  
**Lösungsweg:**  $8 + 3 = 11$

Die Schülerinnen und Schüler lernen diese drei verschiedenen Repräsentationsformen kennen und setzen sie beim Lösen eines Problems entsprechend ein (vgl. <https://pikas-mi.dzlm.de/node/224>, abgerufen am 05.10.2022). Dabei liegt das Vorgehen vom Konkreten zum Abstrakten nahe, also von der enaktiven über die ikonische hin zur symbolischen Auseinandersetzung. Diese Abfolge wird allerdings nicht als absolut gesetzt, viel bedeutender und wichtiger ist, flexibel zwischen den verschiedenen Darstellungen wechseln und übersetzen zu können (vgl. HASEMANN & GASTEIGER 2020, 79).

## 2.2.4 Sprachförderliches Unterrichten

Im Mathematikunterricht spielt Sprache eine bedeutende Rolle. Die Schülerinnen und Schüler nutzen sie ...

**für das Verständigen  
über Mathematik**

und

**für das Verstehen mathematischer  
Vorgänge durch das  
Sprechen.**

(Vgl. Verboom, 2010, 96)

*„In diesem Zusammenhang kommt der mathematischen Fachsprache eine besondere Bedeutung zu. Diese Fachsprache beruht zum Großteil auf Fachbegriffen und deren Verwendung. Da wir Fachbegriffe wie plus und minus oder auch Addition und Subtraktion im Alltag eher nicht verwenden, müssen diese mit ihren Bedeutungen sowie den entsprechenden Symbolen erlernt werden (Götze & Hang, 2017, 68). So meint das Wort größer im Alltag etwas anderes als im Matheunterricht.“*  
(<https://pikas-kompakt.dzlm.de/node/33>, abgerufen am 22.02.2023)

Um die Schülerinnen und Schüler beim Erlernen der mathematischen Fachsprache zu unterstützen, ist es wichtig, dass ...

- nur mathematisch korrekte Begriffe eingeführt werden.
- ein einmal eingeführter Begriff konsequent beibehalten und verwendet wird (weil mehrere Begriffe für ein und dasselbe mathematische Ereignis eine größere Komplexität bedeuten und eine höhere Gedächtnisleistung erfordern).
- eingeführte Begriffe mit Piktogrammen und Gebärden ergänzt werden.
- die eingeführten Begriffe auch unterstützt kommunizierenden Schülerinnen und Schülern zur Verfügung stehen.
- die genutzten Begriffe sowie zentrale Satzmuster in einem Wortspeicher notiert und visualisiert werden.
- die zu verwendenden Begriffe und Satzmuster mit allen Kolleginnen und Kollegen kommuniziert werden und eine Einigkeit über deren Verwendung besteht.

- der Wortspeicher gut sichtbar im Klassenzimmer den Kindern und Jugendlichen sowie den Kolleginnen und Kollegen zugänglich ist.
- die Lehrkraft durch ihr eigenes Sprachhandeln ein Vorbild für die Schülerinnen und Schüler darstellt.

Um den Schülerinnen und Schülern das Verstehen mathematischer Vorgänge mithilfe von Sprache zu ermöglichen, ist es wichtig, dass ...

- die Lehrkraft den Kindern und Jugendlichen mit dem Förderbedarf geistige Behinderung auch das Sprechen über Mathematik zutraut.
- Anlässe zum Sprechen über mathematische Situationen geschaffen werden und die Lehrkraft Beschreibungen oder Einschätzungen dazu von den Schülerinnen und Schülern einfordert.
- die Kinder und Jugendlichen sich ggf. sogar gegenseitig – unter Begleitung der Lehrkraft – Zusammenhänge erklären.



<https://mahiko.dzlm.de/node/62>



## 2.2.5 Aufbau von Grundvorstellungen und Ablösung vom Rechnen mit Material

Damit Schülerinnen und Schüler mathematische Inhalte verstehen können, bedarf es eines Aufbaus an tragfähigen Grundvorstellungen von Mengen, Rechenoperationen und Strategien. Nur so können die großen Hürden im mathematischen Lernprozess, das verfestigte, zählende Rechnen sowie Probleme beim Stellenwertverständnis angegangen und überwunden werden (vgl. WARTHA & SCHULZ 2011, 3 – 10). Entscheidend für den Aufbau von Grundvorstellungen ist, dass konkrete Handlungen an geeigneten Materialien zu gedanklichen Operationen umgebaut werden (vgl. VOM HOFE 1995, zitiert nach WARTHA & SCHULZ 2011, 11). Dieser Umbau erfolgt durch ein sukzessives Ablösen vom Rechnen mit Material. Nach WARTHA und SCHULZ gelingt eine solche Ablösung über vier Abstraktionsstufen:

PHASE 1	Das Kind handelt am geeigneten mathematischen Material.
PHASE 2	Das Kind beschreibt NUR die Handlung MIT Sicht auf das Material.
PHASE 3	Das Kind beschreibt die Handlung OHNE Sicht auf das Material.
PHASE 4	Das Kind arbeitet OHNE Material auf der symbolischen Ebene.

Abbildung 3: Das Vierphasenmodell nach WARTHA & SCHULZ 2011; ISB

In **Phase 1** liegt das Rechenmaterial sichtbar auf dem Tisch. Die Schülerin oder der Schüler löst die Aufgabe, indem sie oder er das Material entsprechend nutzt, legt bzw. verändert. Dabei ist zu berücksichtigen, dass den Lernenden der korrekte Umgang mit dem entsprechenden Material vertraut ist (vgl. WARTHA & SCHULZ 2011, 12). Außerdem ist es für ein erfolgreiches Agieren in den nachfolgenden Phasen von besonderer Bedeutung, dass die Schülerinnen und Schüler ihr Handeln versprachlichen.

Auch in **Phase 2** liegt das Material für die Schülerinnen und Schüler sichtbar auf dem Tisch. Sie handeln nun allerdings nicht mehr selbst damit, sondern beschreiben die notwendigen mathematischen Handlungen einer Partnerin oder einem Partner, die diese stellvertretend ausführen. Dabei achten sie darauf, dass die Handlungen von ihrem Gegenüber korrekt umgesetzt werden. Das Gegenüber kann eine Lehrkraft oder eine Mitschülerin bzw. ein Mitschüler sein.

In **Phase 3** versprachlichen die Schülerinnen und Schüler die Handlungsschritte, ohne das Material dabei sichtbar vor sich zu haben. Die Handlung muss also ausschließlich in der Vorstellung nachvollzogen werden, wodurch der Abstraktionsgrad deutlich zunimmt. Das Material liegt dabei hinter einem Sichtschutz. Ein Gegenüber führt die Handlungsanweisungen nach Beschreibung der Schülerinnen und Schüler stellvertretend aus. Gegebenenfalls kann als Hilfestellung der Sichtschutz kurz weggenommen werden, falls die Schülerinnen und Schüler sich orientieren müssen, um die Aufgabe weiter zu lösen.

In **Phase 4** lösen die Schülerinnen und Schüler die Aufgabe ohne den Einsatz eines Materials. Die Handlungsschritte werden verbalisiert oder ausschließlich gedacht (vgl. <https://pikas.dzlm.de/selbststudium/rechenschwierigkeiten/weitere-themen/vierphasenmodell>, abgerufen am 06.11.2022).

„Es sei darauf hingewiesen, dass dieses Phasenmodell nicht als Stufenmodell zu sehen ist“ (WARTHA & SCHULZ 2011, 13). Nicht jede Schülerin bzw. jeder Schüler muss explizit alle Phasen durchlaufen, und es müssen nicht alle Phasen explizit durchgeführt werden. Vielmehr ist zu beachten, dass der Wechsel von einer Stufe zur nächsten erfolgt, wenn die jeweilige Schülerin bzw. der jeweilige Schüler eine gewisse Routine und Sicherheit auf der aktuellen Stufe erlangt hat. „Kinder und Jugendliche mit dem Förderbedarf geistige Entwicklung benötigen teilweise mehr Zeit auf einer Stufe bzw. erreichen ggf. nicht alle Stufen“ ([https://www.lehrplanplus.bayern.de/sixcms/media.php/71/M\\_Ablösung%20vom%20Rechenmaterial\\_4-Phasen-Modell\\_Wartha\\_Schulz.16468.pdf](https://www.lehrplanplus.bayern.de/sixcms/media.php/71/M_Ablösung%20vom%20Rechenmaterial_4-Phasen-Modell_Wartha_Schulz.16468.pdf), abgerufen am 06.11.2022).



## 2.2.6 Sinnvoll Üben

Im Mathematikunterricht nimmt das Üben eine zentrale Rolle ein. Dabei wird Üben „als Prozess verstanden, bei dem eine Kompetenz, z. B. die Rechenkompetenz, durch das Lösen mehrerer gleichartiger Aufgaben ausgebaut wird“ (WITTMANN 1992, 177, zitiert nach <https://mahiko.dzlm.de/node/60>, abgerufen am 21.3.2023).

Dabei geht es nicht ausschließlich um das Automatisieren, sondern es werden verschiedene Aspekte berücksichtigt, sodass die Schülerinnen und Schüler tragfähige und auf Verständnis beruhende Kompetenzen aufbauen:

- grundlegendes Üben
- beziehungsreiches Üben
- strukturiertes Üben
- automatisierendes Üben

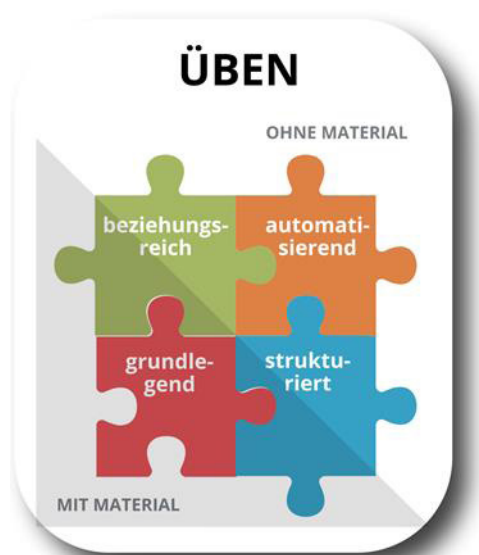


Abbildung 4: Verschränktes Üben; <https://mahiko.dzlm.de/node/60> (abgerufen am 21.3.2023)

Am Anfang des Übungsprozesses steht das grundlegende Üben, das weitere Übungsformen erleichtert. Den Schülerinnen und Schülern muss genug Zeit gelassen werden, damit sie ein grundlegendes Verständnis für den jeweiligen Lerninhalt aufbauen können. Sprachlich begleitete Materialhandlungen unterstützen dies. Sollen die Schülerinnen und Schüler z. B. eine Grundvorstellung zur Additionsaufgabe  $6 + 5$  aufbauen, können sie dies mithilfe von Plättchenlegen innerhalb eines Zwanzigerfeldes anbahnen. Zentral dabei ist, dass der Umgang mit dem Material versprachlicht wird.

Das beziehungsreiche Üben dient dazu, Zusammenhänge und Analogien zwischen verschiedenen Aufgaben erkennen und nutzen zu können. Die Schülerinnen und Schüler sollen diese Beziehungen nach und nach selbständig durchschauen und gezielt einsetzen, damit sie Aufgaben möglichst

geschickt und ohne zählendes Rechnen lösen. Der Einsatz von Material kann dabei ggf. unterstützen. Um beispielsweise die Aufgabe  $4 + 3$  zu lösen, kann die automatisierte Verdopplungs- und Nachbaraufgabe  $3 + 3$  genutzt werden.

Schließlich soll im Mathematikunterricht das strukturierte Üben Eingang finden. Die Schülerinnen und Schüler werden mithilfe solcher Aufgabenstellungen dazu angeleitet, eine mathematische Situation oder Regel zu entdecken. Dabei spielt es keine Rolle, ob diese Aufgaben mit Material oder als reine Rechnungen angeboten werden. Eine solche Aufgabenstellung kann z. B. sein: „Wir bündeln immer zehn Einzelne zu einem Zehnerbündel. Wie viele Zehnerbündel entstehen?“ Die Kinder und Jugendlichen können dabei zwei Erkenntnisse erlangen: Nämlich zum einen, dass in Abhängigkeit von der Anzahl der Einzelnen wiederholt Zehnerbündel gebildet werden können, und zum anderen, dass dabei Einzelne oder Einer übrig oder auch nicht übrig bleiben können. Eine solche Art von Aufgabenstellung kann zum Beispiel aber auch durch Aufgabenpäckchen gestellt werden:

$$\begin{array}{l} 2+3=5 \\ 3+3=6 \\ 4+3=7 \\ 5+3=8 \\ 6+3=\dots \\ 7+3=\dots \end{array}$$

Abbildung 5: Sinnvolles Üben mit Rechenpäckchen; ISB

Entscheidend für den Erkenntnisprozess ist es, dass die Lehrkraft die Schülerinnen und Schüler dazu anregt, ihre Beobachtungen und Vermutungen verbal zu beschreiben. Werden solche Aufgaben von den Kindern und Jugendlichen gelöst, ohne dass die darin liegende Regelmäßigkeit thematisiert wird, bleibt eine wichtige Lernchance ungenutzt.

Haben die Schülerinnen und Schüler umfassende Grundvorstellungen zum entsprechenden mathematischen Inhalt aufgebaut, folgt das automatisierende Üben. Dadurch werden die durch Verständnis geprägten Kompetenzen gefestigt, sodass die Schülerinnen und Schüler diese effizient anwenden können (vgl. <https://mahiko.dzlm.de/node/60>, abgerufen am 21.3.2023).

„Alle vier Formen des Übens greifen ineinander und sind zu einem bestimmten Zeitpunkt im Übungsprozess sinnvoll und gleichermaßen wichtig.“ (<https://mahiko.dzlm.de/node/60>, abgerufen am 21.3.2023)



<https://mahiko.dzlm.de/node/60>



## 2.3 Das Fach Mathematik im LehrplanPLUS für den Förderschwerpunkt geistige Entwicklung in Bayern



Abbildung 6: Kompetenzstrukturmodell Mathematik; <https://www.lehrplanplus.bayern.de/fachprofil/foerderschule/mathematik/foerderschwerpunkt/geistige-entwicklung/1> (abgerufen am 06.10.2022)

Im Kompetenzstrukturmodell des LehrplanPLUS wird das Fach Mathematik gemäß der Bildungsstandards in fünf Gegenstandsbereichen abgebildet:

- Muster und Strukturen
- Zahlen und Operationen
- Größen und Messen
- Raum und Form
- Daten und Zufall

In jedem dieser Gegenstandsbereiche werden Muster und Strukturen thematisiert, in ganz elementarer Form im Gegenstandsbereich „Muster und Strukturen“.

Neben den inhaltsbezogenen Kompetenzen aus den Gegenstandsbereichen wird besonderer Wert auf die prozessbezogenen Kompetenzen gelegt. Diese sind im Kompetenzstrukturmodell in einem Ring um die Gegenstandsbereiche angeordnet. Sie sind nicht voneinander getrennt zu betrachten, sondern werden in der Auseinandersetzung mit Mathematik verschränkt angewendet (vgl. SCHÄFFER 2020, 70 f.).

### Problemlösen umfasst:

- *„Mathematische Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten bei der Bearbeitung problemhaltiger Aufgaben anwenden;*
- *Lösungsstrategien entwickeln und nutzen (z. B. systematisch probieren);*
- *Zusammenhänge erkennen, nutzen und auf ähnliche Sachverhalte übertragen“*  
(KMK 2013, 4, zitiert nach SCHÄFER 2020, 71).

Es ist wichtig, das Lösen von mathematischen Problemen in einen für die Schülerinnen und Schüler relevanten Lebensweltbezug zu setzen. Daher bieten sich Aufgabenstellungen z. B. in den Bereichen Sachunterricht, Hauswirtschaft, Arbeitslehre und Berufsorientierung an (vgl. SCHÄFER, PETER-KOOP, WOLLRING 2019, 485).

### Kommunizieren umfasst:

- *„Eigene Vorgehensweisen beschreiben, Lösungswege anderer verstehen und gemeinsam darüber reflektieren;*
- *mathematische Fachbegriffe und Zeichen sachgerecht verwenden;*
- *Aufgaben gemeinsam bearbeiten, dabei Verabredungen treffen und einhalten“*  
(KMK 2013, 4, zitiert nach SCHÄFER 2020, 72).

Mathematik kann als erste Fremdsprache betrachtet werden, weswegen es wichtig ist, die Verwendung von Begriffen und Zeichen sowie die Beschreibung eigener Vorgehensweisen durch die Schülerinnen und Schüler gezielt im Unterricht in den Blick zu nehmen und anzubahnen. Dabei können das immer wiederkehrende Sprachvorbild der Lehrkraft sowie die Erstellung und Verwendung von Wortspeichern einen wichtigen Beitrag leisten (vgl. SCHÄFER 2020, 72). Dadurch wird die konstante Verwendung der gleichen Begrifflichkeiten sowohl für die Schülerinnen und Schüler als auch für das gesamte Lehrpersonal erleichtert. Bei Bedarf kommen an dieser Stelle Hilfsmittel der Unterstützten Kommunikation zum Einsatz.

### Argumentieren umfasst:

- *„Mathematische Aussagen hinterfragen und auf Korrektheit prüfen;*
- *mathematische Zusammenhänge erkennen und Vermutungen entwickeln;*
- *Begründungen suchen und nachvollziehen“*  
(KMK 2013, 4, zitiert nach SCHÄFER 2020, 73).

Um Schülerinnen und Schülern mit dem Förderbedarf geistige Entwicklung mathematische Erkenntnisse zu ermöglichen, ist es wichtig, sie zu Vermutungen anzuregen und diese, auch wenn sie zunächst abwegig klingen mögen, begründen zu lassen und ernst zu nehmen.

Durch vertiefende Gespräche, Anschauungsmaterial, Modelle oder Lösungswege werden die Vermutungen gemeinsam auf ihre Richtigkeit hin überprüft und bewertet.

Auch sollten Lehrkräfte die Schülerinnen und Schüler immer wieder auffordern, Ergebnisse zu hinterfragen und zu begründen, unabhängig davon, ob sie richtig oder falsch sind (vgl. SCHÄFER 2020, 73).

Modellieren umfasst:

- „Sachtexten und anderen Darstellungen der Lebenswirklichkeit die relevanten Informationen entnehmen;
- Sachprobleme in die Sprache der Mathematik übersetzen und diese Lösungen auf die Ausgangssituation beziehen;
- zu Termen, Gleichungen und bildlichen Darstellungen Sachaufgaben formulieren“

(KMK 2013, 5 zitiert nach SCHÄFER 2020, 74).

Folgendes Modell in Anlehnung an BLUM und LEISS verdeutlicht den Modellierungskreislauf in der Auseinandersetzung mit mathematischen Fragestellungen:

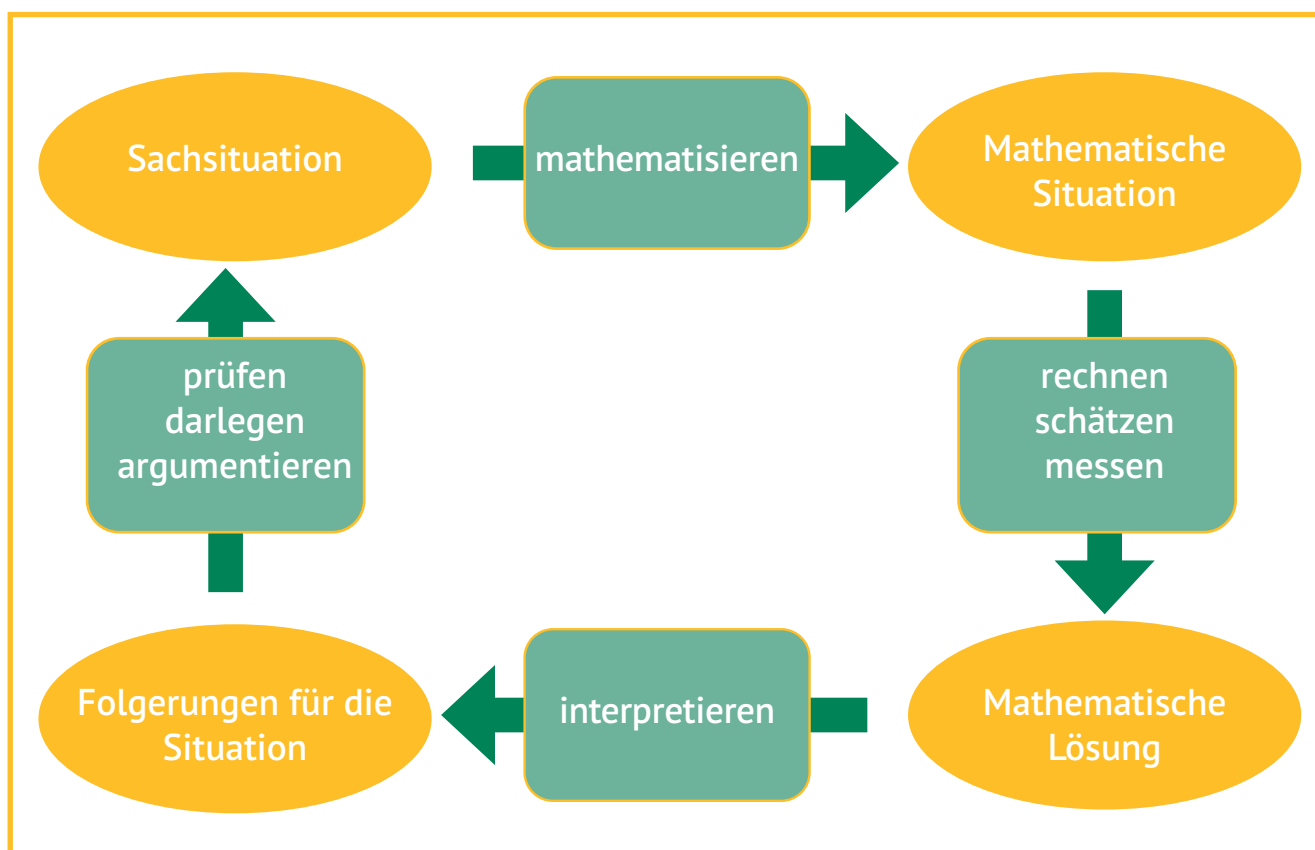


Abbildung 7: mathematischer Modellierungskreislauf nach WALTER 2021; ISB, erstellt in Anlehnung an WALTER

Eine Sachsituation gilt es zu mathematisieren, so dass ein mathematisches Modell zur Lösung der Situation herangezogen werden kann. Dies geschieht in der Regel durch Rechnen, Schätzen oder Messen. Das sich daraus ergebende mathematische Ergebnis ist zu interpretieren, damit Folgerungen für die Situation erschlossen werden können. Im Anschluss werden diese Folgerungen geprüft dargelegt und erklärt, so dass sich die Problemsituation lösen lässt.

**Darstellen umfasst:**

- „Für das Bearbeiten mathematischer Probleme geeignete Darstellungen entwickeln, auswählen und nutzen;

- eine Darstellung in eine andere übertragen;
- Darstellungen miteinander vergleichen und bewerten“  
(KMK 2013, 5 zitiert nach SCHÄFER 2020, 75).

Die Schülerinnen und Schüler lesen und entwickeln jeweils passende, unterschiedliche Formen der Darstellung, wie „erlebte oder selbst vollzogene Handlungen, Gesten, sprachliche Darstellungen, Fotos, Abbildungen, Rechnungen, Skizzen, Tabellen“ (<https://www.lehrplanplus.bayern.de/fachprofil/foerderschule/mathematik/foerderschwerpunkt/geistige-entwicklung/1>, abgerufen am 06.10.2022). Zusätzlich eignet sich häufig auch die Darstellung von Situationen mittels mathematischer Anschauungs- und Arbeitsmaterialien.

Im Mathematikunterricht geht es also nicht um das ausschließliche Aneignen von Kenntnissen und Fähigkeiten, sondern um eine solide mathematische Grundbildung, die die allgemeinen Kompetenzen in den Blick nimmt (vgl. HASEMANN & GASTEIGER 2020, 82).

Im Folgenden wird vertiefend auf den arithmetischen Anfangsunterricht eingegangen, der für das Rechnen im Zahlenraum 20+ grundlegend ist und somit den Kern dieser Veröffentlichung darstellt.

## 2.4 Inhaltlicher Aufbau des Praxisteils

Anknüpfend an

- die Grundideen der Arithmetik nach RATZ und WITTMANN,
- die fünf grundlegenden Aspekte des Rechnenlernens nach DÖNGES und
- das Zahlen-Größen-Verknüpfungsmodell nach KRAJEWSKIJ und ENNEMOSER

werden in dieser Veröffentlichung die folgenden Teilkompetenzen genauer betrachtet, deren Bedeutung für das Rechnenlernen verdeutlicht und Umsetzungsmöglichkeiten für den Unterricht aufgezeigt:

- Teilkompetenz: Zählen
- Teilkompetenz: Anzahlen simultan und quasi-simultan erfassen
- Teilkompetenz: Mengen vergleichen und Relationszeichen nutzen
- Teilkompetenz: Teil-Ganzes-Konzept nutzen
- Teilkompetenz: Bündeln
- Teilkompetenz: Stellenwerte verstehen
- Teilkompetenz: Grundvorstellungen von Rechenoperationen nutzen: Addition und Subtraktion
- Teilkompetenz: Rechenstrategien anwenden

### Das muss man im Blick behalten:

Die einzelnen Teilkompetenzen sind weder separat voneinander zu betrachten noch folgen sie einer linearen Abfolge. Vielmehr gilt es, deren Entwicklung in gegenseitiger Verschränkung anzuregen und zu fördern.

### 3 Schülerinnen und Schüler mit dem Förderbedarf geistige Entwicklung beim Rechnenlernen



Abbildung 8: Schülerin und Schüler beim Rechnen mit Material; ISB

#### 3.1 Wie lernen Schülerinnen und Schüler mit dem Förderbedarf geistige Entwicklung rechnen?

Schülerinnen und Schüler mit dem Förderbedarf geistige Entwicklung erwerben mathematische Kompetenzen in gleicher Weise wie Schülerinnen und Schüler ohne Förderbedarf. Dies konnten MOSER OPITZ, RATZ und SIEGEMUND in verschiedenen Studien belegen (MOSER OPITZ 2008, RATZ 2009 und 2012 und SIEGMUND 2016). Allerdings erfolgt die Entwicklung ihrer mathematischen Kompetenzen in einem langsameren Lerntempo (vgl. SCHÄFER & PETER-KOOP & WOLLRING 2019, 480). Sie stoßen beim Rechnenlernen auch schneller an individuelle Grenzen des Kompetenzausbaus.

Studien von RATZ sowie DWORSCHAK, KANNEWISCHER, RATZ und WAGNER zeigen auf, in welchen Zahlenräumen Schülerinnen und Schüler mit dem Förderbedarf geistige Entwicklung rechnen. Sie weisen darauf hin, dass sich etwa 20 Prozent der entsprechenden Schülerinnen und Schüler (oft bis zum Schulabschluss) im Zahlenraum bis 10 bewegen (vgl. RATZ 2016, 16). Die Studie SFGE II „Schülerschaft mit dem Förderschwerpunkt geistige Entwicklung“ von 2021 bestätigt die Zahlen der vorangegangenen Studie SFGE I im Bereich der mathematischen Kompetenzen (vgl. KROSCHEWSKI 2021, 152).

Kompetenz	Ergebnisse der SFGE II
<b>Basisfertigkeiten</b>	
Die Schülerinnen und Schüler benennen die Zahlen im ZR 10 mit dem richtigen Zahlwort.	GSST: 25,2 % MSST: 81,8 %
Die Schülerinnen und Schüler sagen die Zahlenfolge bis 20 vorwärts richtig auf.	GSST: 27,9 % MSST: 62,1 %
Die Schülerinnen und Schüler benennen Vorgänger und Nachfolger im ZR 100.	GSST: 8,8 % MSST: 18,7 %
<b>Präzise Größenrepräsentation</b>	
Kardinalverständnis: Die Schülerinnen und Schüler ordnen einer Zahl die richtige Anzahl an Objekten zu.	GSST: 19,7 % im ZR 5 GSST: 25,4 % im ZR 10 GSST: 20,2 % im ZR 20 MSST: 25,4 % im ZR 100
Zahlenvergleich: Die Schülerinnen und Schüler unterscheiden Anzahlen anhand ihrer Größe.	GSST: 13,9 % im ZR 5 GSST: 15,1 % im ZR 10 MSST: 24,8 % im ZR 100
<b>Grundrechenarten</b>	
Die Schülerinnen und Schüler addieren (mit oder ohne Material).	GSST: 16,9 % im ZR 10 mit Material GSST: 10,7 % im ZR 10 ohne Material GSST: 6,3 % im ZR 100 mit Material GSST: 5,2 % im ZR 100 ohne Material MSST: 24,0 % im ZR 100 mit Material MSST: 15,6 % im ZR 100 ohne Material
Subtraktion	8,6 % der Schülerinnen und Schüler subtrahieren im Zahlenraum bis 20 ohne Material.
Multiplikation und Division	15,7 % der Schülerinnen und Schüler multiplizieren mit Material (10,7 % ohne Material) 9,1 % der Schülerinnen und Schüler dividieren mit Material (5,6 % ohne Material)

Anmerkung zu Abkürzungen:  
SuS = Schülerinnen und Schüler

GSST = Grundschulstufe  
MSST = Mittelschulstufe

BSST = Berufsschulstufe  
ZR = Zahlenraum



Die Entwicklung des Rechnenlernens hängt von individuellen Voraussetzungen der Schülerinnen und Schüler mit dem Förderbedarf geistige Entwicklung in den folgenden grundlegenden Entwicklungsbereichen ab (vgl. SCHÄFER 2020, 14 ff. und GAIDOSCHIK 2013, 9 ff.):

### Wahrnehmung

Die Wahrnehmung umfasst die Aufnahme und Verarbeitung von Sinneseindrücken. Beeinträchtigungen in diesem Bereich können als Sinnesbehinderungen oder als zentrale Wahrnehmungsstörungen auftreten. Das Erlernen mathematischer Kompetenzen kann insbesondere durch eine beeinträchtigte Diskriminierung visueller (z. B. ähnlich aussehende Zahlen, ungeordnete Mengen) und auditiver Informationen (z. B. die Zahlen Zwei und Drei) erschwert werden.

### Motorik

Die Motorik beinhaltet alle (auch koordinatorische) Bewegungen des Stütz- und Bewegungsapparates. Beim Erwerb mathematischer Kompetenzen ist bedeutsam, inwiefern die Schülerinnen und Schüler die Auge-Hand-Koordination steuern bzw. mathematische Handlungen selbstständig ausführen (z. B. Material beim Abzählen antippen, Zahlen schreiben) können. Auch ist ein intaktes Raum-Lage-Verständnis für mathematisches Handeln notwendig.

### Denken und Lernstrategien

Denkprozesse werden stark beeinflusst von der Gedächtnisleistung. Das Erinnern ist ein komplexer Prozess zwischen Wahrnehmung, Handlung, Verarbeitung und Speicherung. Hierbei gibt es verschiedene Modelle, wie z. B. das Drei-Speicher-Modell (vgl. PITSCH, LIMBACH-REICH 2019, 61 ff.). „Grundsätzlich können Schwierigkeiten der Gedächtnisbildung wie Gedächtnisnutzung in jedem Teilprozess auftreten, bei der Aufnahme, der Verarbeitung und Speicherung und beim Abruf“ (PITSCH, LIMBACH-REICH 2019, 73). Bei Schülerinnen und Schülern mit dem Förderbedarf geistige Entwicklung besteht eine kognitive Beeinträchtigung, die mit einer reduzierten Gedächtnisleistung verbunden ist. Der nachhaltige Gedächtniszuwachs steigt langsamer an. Visuelle Inhalte werden dabei meist besser im Gedächtnis integriert als auditive Inhalte (vgl. PITSCH, LIMBACH-REICH 2019, 78).

Betrachtet man die Phasen im Lernverlauf nach KOBİ – Motivation, Widerstandserleben, Problemlösung, Tun, Verfestigen und Transfer – kommt es sehr stark auf die individuellen vorangegangenen Lernvoraussetzung an (vgl. PITSCH, LIMBACH-REICH 2019, 223). So kann der Lernprozess von der Befriedigung der Grundbedürfnisse, der Wahrnehmungsleistung, der Konzentrations- und Ausdauerleistung, der Handlungsplanung, der Problemlösefähigkeit, der Gedächtnisleistung sowie mangelnder Transferfähigkeiten auf anderes Material abhängig sein und das Erlernen von mathematischen Kompetenzen beeinflussen (vgl. PITSCH, LIMBACH-REICH 2019, 18 f.).

### Kommunikation und Sprache

Die akustische Präsentation von Inhalten sowie das Sprechen über gelernte Inhalte tragen maßgeblich zu Lern- und Speicherprozessen bei. Grundsätzlich lässt die Sprachentwicklung keine Rückschlüsse auf mathematische Kompetenzen zu. Dennoch sind sprachliche Aspekte, wie die

---

Größe des Alltagswortschatzes, die rezeptive und expressive Sprachentwicklung sowie Formen der Unterstützten Kommunikation (z. B. Symbolkarten, elektronische Hilfsmittel, Gebärden) beim Aneignungsprozess mathematischer Kompetenzen und des mathematischen Wortschatzes von Bedeutung.

### Emotionen und soziale Beziehungen

Emotionen haben einen wichtigen Einfluss auf chemische und neurale Reaktionen des Gehirns. Sie sind ein subjektiver Ausdruck und rufen bestimmte Körperreaktionen hervor (vgl. PITSCH, LIM-BACH-REICH 2019, 83 f.). Wichtig für den mathematischen Kompetenzerwerb sind die intrinsische Motivation, individuelle Interessen, Impulsivität, Reflexivität sowie die Frustrationstoleranz.

Neben diesen individuellen Voraussetzungen bedingen auch soziobiographische Ressourcen die Entwicklung des Rechnenlernens, z. B.:

- Anregungsreichtum im familiären Umfeld, etwa sprachliche und kognitive Voraussetzungen der Eltern, Interaktion zwischen Geschwisterkindern oder Gleichaltrigen, Vorhandensein eines Kinderzimmers mit Spielsachen, Gewichtung schulischer Inhalte
- Vorerfahrungen vor Schuleintritt: Spielerfahrungen, Freizeitbeschäftigungen, Umfang des Medienkonsums
- Institutionelle Fördermöglichkeiten: räumliche oder personelle Ressourcen, Ausstattung, Differenzierungsmöglichkeiten, Aufarbeitung der Inhalte, Zutrauen der prozessbezogenen Kompetenzen

Die mathematische Leistungsfähigkeit der Kinder und Jugendlichen ergibt sich aus dem Zusammenspiel dieser individuellen und soziobiografischen Entwicklungsvoraussetzungen und ist bei Schülerinnen und Schülern mit dem Förderbedarf geistige Entwicklung sehr heterogen. Bei der Planung von Unterricht sind diese individuellen Lernvoraussetzungen daher sehr differenziert zu berücksichtigen (vgl. SIEGEMUND 2016, 67 ff.).

## 3.2 Welche Fördermaßnahmen unterstützen die Schülerinnen und Schüler mit dem Förderbedarf geistige Entwicklung beim Rechnenlernen?

„Für Lernende im Förderschwerpunkt geistige Entwicklung (FgE) ist die Entwicklung des Zahlbegriffs ein zentrales, jedoch anspruchsvolles Ziel.“ (SCHNEPEL, KRÄHENMANN 2016, 10)

Für die Schülerinnen und Schüler ist ein langsames und in klare Schritte gegliedertes Erarbeiten neuer Sachzusammenhänge hilfreich. Außerdem bedürfen sie intensiver Übungsphasen auch bis in ein höheres Lernalter (vgl. RATZ, WITTMANN 2011, 135 ff. und SIEGEMUND 2016, 114 ff.).

Im Einzelnen unterstützen folgende Maßnahmen den Lernprozess von Schülerinnen und Schülern mit dem Förderbedarf geistige Entwicklung:

### Diagnostik individueller mathematischer Kompetenzen

Für Schülerinnen und Schüler mit dem Förderbedarf geistige Entwicklung ist eine individuelle Lernplanung für die Gestaltung von Lernprozessen von hoher Bedeutung. Dafür muss der individuelle Entwicklungsstand festgestellt werden. SCHÄFER verweist für die Diagnostik auf verschiedene standardisierte oder informelle Verfahren (vgl. SCHÄFER 2020, 52 ff.):

Standardisierte Verfahren:

- OTZ – Osnabrücker Test zur Zahlbegriffsentwicklung
- TEDI-MATH – Test zur Erfassung numerisch-rechnerischer Fertigkeiten

Informelle Verfahren:

- EMBI – Elementar mathematisches Basisinterview
- Weißblatttest bzw. strukturierte Beobachtung

### Förderplanung

Nach der Feststellung der Lernausgangslage erfolgt in der Förderplanung die Festlegung der individuellen Ziele sowie der unterrichtlich-pädagogischen Angebote. Diese müssen immer wieder evaluiert und ggf. neu formuliert werden.

### Strukturierung des Lernprozesses

Um Lernprozesse der Schülerinnen und Schüler zu unterstützen, muss die Lernumgebung angemessen strukturiert werden:

- Vorbereitete Aufgabenstellungen und benötigte Hilfsmaterialien sind übersichtlich und thematisch geordnet für die Schülerinnen und Schüler zugänglich.
- Für die Arbeit mit Materialien verwenden die Lehrkräfte sowie die Schülerinnen und Schüler eine einfarbige dunkle Teppichfliese. Diese lenkt den Fokus auf die Handlungen mit dem Material, erleichtert das Greifen und verhindert ein Wegrollen von runden Materialien.

- Für eine Demonstration achtet die Lehrkraft darauf, dass die Schülerinnen und Schüler frontal vor ihr sitzen (z. B. kleiner Halbkreis vor der Teppichfliese) und sie selbst alle Handlungen „auf dem Kopf“ durchführt (z. B. Schreiben von Zahlen, Legen von Stellenwerten). Dies garantiert, dass die Kinder und Jugendlichen die Handlungen von links nach rechts verfolgen und Zahlen lesen können. Eine solche „Aufdem-Kopf“-Demonstration fordert der Lehrkraft Vorüberlegungen und etwas Übung ab.
- Optisch reduzierte Arbeitsblätter, die möglichst nur für die Aufgabenstellung notwendige Bebilderungen enthalten, erleichtern den Schülerinnen und Schülern das Erfassen und Lösen der Aufgabe.
- Wortspeicher werden möglichst immer an der gleichen Stelle im Klassenzimmer aufgehängt, wobei das Plakat in einer reizarmen Umgebung platziert werden sollte.

### Herstellen von Lebensbezügen

Gerade mit Blick auf Jugendliche in höheren Jahrgangsstufen ist es wichtig, die mathematischen Situationen und die Anwendung von Rechenoperationen auf deren aktuelle und zukünftige Lebensrealität auszurichten. Daher thematisiert die Lehrkraft mit den Schülerinnen und Schülern zunehmend den Einsatz von Hilfsmitteln auch in niedrigen Zahlenräumen, wie z. B. die Taschenrechnerfunktion auf einem Smartphone oder ein Taschenrechner. Die Zielsetzung dabei ist stets, die Jugendlichen auf möglichst selbstständiges Handeln in Alltagssituationen vorzubereiten, die mathematisches Denken erfordern.

### Reflektieren der Lernerfolge

Gerade bei Schülerinnen und Schülern mit dem Förderbedarf geistige Entwicklung ist mit einer längeren Verweildauer bei einem mathematischen Thema zu rechnen. Es kann sein, dass es zu einer Mechanisierung oder zu frustrierenden Momenten kommt. Daher sollten die individuellen Lernerfolge, auch ganz besonders der Erwerb von kleinen Teilkompetenzen, gemeinsam reflektiert und notiert werden. So wird den Kindern und Jugendlichen der eigene Lernprozess bewusst und ihre Motivation wird gefördert.

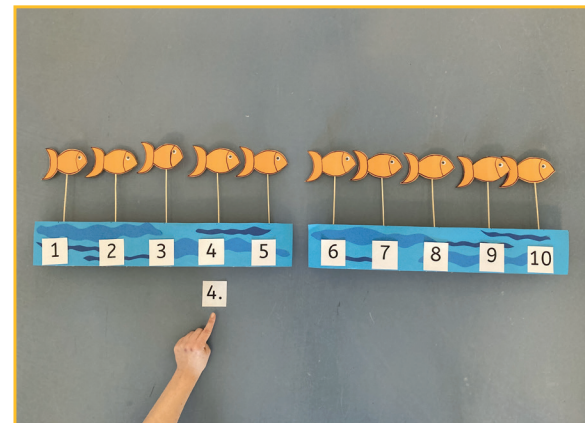
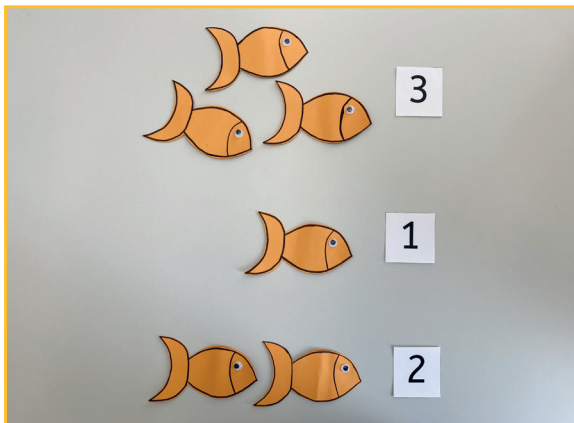
# 4 Teilkompetenzen des Rechnens im Zahlenraum 20+ und deren Förderung

## 4.1 Teilkompetenz: Zählen

### 4.1.1 Was versteht man unter Zählen und Zählkompetenz?

#### Zählen und Zählkompetenz

„Zählen können bedeutet, eine Anzahl oder eine Position innerhalb einer Reihe zu bestimmen, und ist eine unverzichtbare Voraussetzung um Rechnen zu lernen.“ (DÖNGES 2016, 12).



Abbildungen 9 und 10: Resultatives Zählen; ISB

„Dazu gehören neben der Kenntnis der Zahlwortreihe und der Einsicht, dass diese unveränderbar ist, auch das resultative Zählen zur Bestimmung von Anzahlen, bei dem eine Eins-zu-eins-Zuordnung zwischen den zu zählenden Objekten und den jeweiligen Zahlwörtern hergestellt werden muss. Hinzu kommt das Wissen, dass das letztgenannte Zahlwort auf die Gesamtzahl verweist (Kardinalzahlprinzip).“ (SCHÄFER 2016, 8)

Um die Zählkompetenz zu erwerben, müssen folgende **Zählprinzipien** erfasst werden (vgl. DÖNGES 2016 nach SCHERER, MOSER, OPITZ 2010, S.96):

#### Eindeutigkeit

Erkenntnis, dass jeder gezählten Menge nur ein Zahlwort zugeordnet werden kann

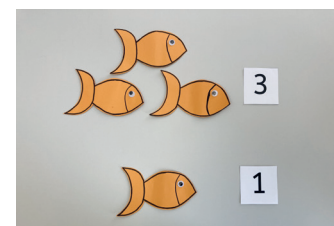


Abbildung 11: Prinzip der Eindeutigkeit; ISB

**Stabile Ordnung**

Erkenntnis, dass die Reihenfolge der Zahlwörter festgelegt ist und gleich bleibt, egal bei welcher Zahl mit dem Zählen begonnen wird

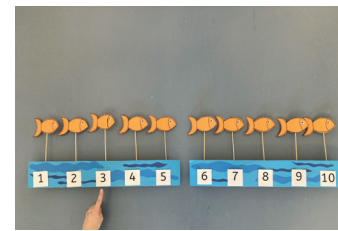


Abbildung 12: Prinzip der stabilen Ordnung; ISB

**Kardinalzahlprinzip**

Erkenntnis, dass immer das letzte Zahlwort die Gesamtanzahl angibt

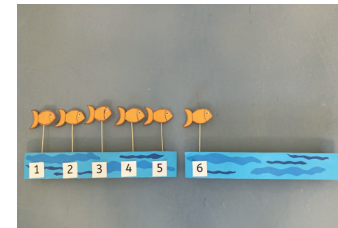


Abbildung 13: Kardinalzahlprinzip; ISB

**Irrelevanz der Anordnung**

Erkenntnis, dass die Anordnung der Objekte für das Zählen unbedeutend ist



Abbildung 14: Prinzip der Irrelevanz der Anordnung; ISB

Ebenso wichtig ist es für den Erwerb der Zählkompetenz, die verschiedenen Funktionen, die Zahlen übernehmen können, die Zahlaspekte (vgl. RATZ, WITTMANN 2011, 139), zu unterscheiden:

<b>Anzahlbestimmung</b>	Zahl als Bezeichnung einer Menge = kardinaler Aspekt	„Das sind insgesamt fünf.“
<b>Ordnungszahl</b>	Zahl zur Bestimmung einer Position = ordinaler Aspekt	„Das ist der Vierte in der Reihe.“
<b>Maßzahl</b>	Zahl zur Bestimmung einer Maßeinheit	z. B. 1 Euro, 1 €, 180 Meter, 180 m
<b>Rechenzahlen</b>	Zahlen als Bestandteil einer Rechnung	z. B. $3 + 2 = 5$
<b>Codezahl</b>	Zahlen in einer Folge als Code	z. B. Telefonnummer, Nummernschild
<b>Sonderstellung der Zahl „0“</b>	Die Schülerinnen und Schüler müssen die Null als das Nichtvorhandensein von etwas verstehen und gleichzeitig erkennen, dass die Null ein wichtiges Element der Zahlwortreihe ist.	

## 4.1.2 Welche Bedeutung hat das Zählen für das Rechnenlernen?

Die numerische Bewusstheit, die Zählkompetenzen und die Anwendung der vollständig reversiblen Zahlwortreihe bilden Grundlage und Ausgangspunkt für die Einsicht in mathematische Prozesse (vgl. RATZ, WITMANN 2011, 138).

## 4.1.3 Besitzen die Schülerinnen und Schüler die notwendigen Vorläuferkompetenzen für das Erlernen des Zählens?

Diagnostische Leitfragen:

- Welche Vorerfahrungen bringt die Schülerin bzw. der Schüler zum Zählen und im Umgang mit Zahlen mit (z. B. Abzählverse, Erfahrungen mit Brettspielen, Nennen des eigenen Alters)?
- Nennt die Schülerin oder der Schüler bereits die Zahlwortreihe? Benennt sie bzw. er die Zahlen in der richtigen Reihenfolge?
- Ist die Schülerin oder der Schüler in der Lage, eine Eins-zu-eins-Zuordnung durchzuführen oder zählt sie bzw. er noch asynchron (Objekte werden vergessen oder übersehen)?

## 4.1.4 Wie fördert man das Zählen?

*Die Förderung [der] Zählkompetenz erfordert nicht zwingend einen eigenen Zählkurs, sondern kann in den unterschiedlichsten Situationen des Schulalltags erfolgen. Gerade im FgE ergeben sich bei alltagspraktischen Aktivitäten viele Gelegenheiten zu zählen und damit den Erfahrungsprozess zur Einsicht in die Zählprinzipien und zur Entwicklung des kardinalen Verständnisses anzustoßen bzw. zu fördern. (DÖNGES 2016, 13)*

### Erwerb der Zahlwortreihe

Auch wenn die Schülerinnen und Schüler sich noch nicht mit Mengen oder z. B. nur mit Mengen bis zwei beschäftigen, ist es sinnvoll, bereits die Zahlwortreihe bis zehn z. B. mit Zählversen einzuführen. Die Zahlwortreihe begegnet den Kindern oftmals bereits vor Schuleintritt in ihrer alltäglichen Umgebung, so dass an diese angeknüpft werden kann. Außerdem ist das Zählenlernen motivierend und dient der Sprachförderung. Gerade das Zählen mithilfe eines Zählverses trägt durch den einprägsamen Sprechrhythmus und sprachliche Bilder, die mit dem Vers verknüpft sind, zur Festigung der Zahlwortreihe bei.

Die Schülerinnen und Schüler eignen sich die Zahlwortreihe in mehreren Entwicklungsstufen an:

#### Stufe 1

**Ganzheitsauffassung** Die Schülerinnen und Schüler können die Zahlwortreihe auswendig, wie **der Zahlwortreihe** eine Art Gedicht, aufsagen.

---

#### Stufe 2

**Unflexible** Die Schülerinnen und Schüler können Gegenstände abzählen, wobei sie **Zahlwortreihe** dazu immer bei eins beginnen müssen und noch nicht bei einer höheren Zahl einsetzen können.

---

#### Stufe 3

**Teilweise flexible** Die Schülerinnen und Schüler können die Zahlwortreihe ab einer beliebigen **Zahlwortreihe** Zahl weiter aufsagen sowie Vorgänger und Nachfolger von Zahlen benennen.

---

#### Stufe 4

**Flexible** Die Schülerinnen und Schüler können Mengen von einer beliebigen Zahl aus **Zahlwortreihe** weiter abzählen.

---

#### Stufe 5

**Vollständig reversible** Die Schülerinnen und Schüler haben die Zahlreihe automatisiert (vorwärts **Zahlwortreihe** und rückwärts), können Nachbarzahlen finden und Zahlenfolgen fortsetzen.

---

(Vgl. RATZ 2011, 139, zitiert nach MOSER OPITZ 2008 zitiert nach FUSON 1988)

#### Das muss man im Blick behalten:

- Die Zahlen Zwei und Drei klingen sehr ähnlich. Eine überdeutliche Betonung beim Aus sprechen erleichtert den Schülerinnen und Schülern deren Unterscheidung.
- Bei der Einführung der Zahlwortreihe muss beachtet werden, dass alle Zahlwörter bis auf die Sieben einsilbige Wörter sind, die Sieben hingegen ein zweisilbiges Wort darstellt. Man spricht „sie-ben“. Dies kann dazu führen, dass die Schülerinnen und Schüler bei einer Eins-zu-eins-Zuordnung bei der Nennung der Sieben gleich zwei Mengenteile zählen. Daher ist es wichtig bei der Einführung der Zahlwortreihe und der Eins-zu-eins-Zuordnung in der Lehrerdemonstration darauf zu achten, für die gesamte Dauer, in der „sieben“ ausgesprochen wird, auf dem siebten gezeigten Objekt zu verweilen.
- Die Zahlwortreihe ist eine wichtige Vorläuferfähigkeit für die anderen Teilkompetenzen, daher sollten die Schülerinnen und Schüler ausreichend Zeit haben, diese zu erkunden und zu festigen.



Die Lehrkraft wählt einen für die Schülerinnen und Schüler geeigneten Abzählvers oder ein entsprechendes Fingerspiel aus:

„Zehn kleine Zappel­männer  
zappeln hin und her,  
zehn kleinen Zappel­männern  
fällt das gar nicht schwer.“

Zehn kleine Zappel­männer  
zappeln auf und nieder,  
zehn kleine Zappel­männer  
tun das immer wieder.

Zehn kleine Zappel­männer  
kriechen ins Versteck,  
zehn kleine Zappel­männer  
sind auf einmal weg.

Zehn kleine Zappel­männer  
sind auf einmal wieder da!  
Zehn kleine Zappel­männer  
Rufen laut: Hurra!“

„Eins, zwei, drei, vier, fünf  
der Storch hat keine Strümpf,  
der Frosch hat kein Haus  
und du musst raus.“

„Zehn kleine Fische, die  
schwammen im Meer.  
Da sagte die Mutter:  
Ich warne euch sehr.  
Kommt lieber hier in den  
kleinen Teich,  
denn im Meer gibt es Haie  
und die fressen euch gleich.  
Schwupp, schwupp,  
schwuppschwubidubi  
Schwupp, schwupp,  
schwuppschwubidubi  
Neun kleine Fische, ...  
Acht kleine Fische, ...  
Zwei kleine Fische ...  
Ein kleiner Fisch, der  
schwamm im Meer.  
Da sagte die Mutter:  
Ich warne dich sehr.  
Komm lieber hier in den  
kleinen Teich,  
denn im Meer gibt es Haie  
und die fressen dich gleich.  
Schwupp ...“

- Die Schülerinnen und Schüler zählen, während sie sich dazu im Rhythmus bewegen. Das festigt die Zahlreihe zusätzlich, ist motivierend und rhythmisiert die Lernsituation: Treppenstufen in Begleitung eines Erwachsenen hinauf oder hinunter hüpfen, entlang von Hüpfkästchen springen, entlang von Verkehrshütchen hüpfen oder schreiten

- Auch durch einen sog. Raketenstart oder Countdown kann man die Zahlwortreihe spielerisch üben: gemeinsam von zehn bis null rückwärts zählen und ggf. mit Handlung begleiten, z. B. bei „Null“ in die Luft springen
- Es ist wichtig, die Schülerinnen und Schüler die Menge Null erleben zu lassen, indem sie z. B. in eine leere Fühlbox greifen oder in den Nebenraum schauen, in dem kein Kind zu sehen ist, sich also null Kinder befinden, oder es werden alle Gummibärchen aufgegessen und so sind keine mehr da.
- Lassen Sie die Schülerinnen und Schüler,
  - Zahlen in einer mit Plättchen gelegten Zahlreihe oder auf dem Zahlenstrahl finden („Zeige mir die Zahl ...“),
  - Lücken in der Zahlreihe füllen sowie
  - Zahlenkärtchen der Reihe nach ordnen.
- Um die Thematik „Vorgänger und Nachfolger“ einzuführen, ist es sinnvoll, eine Reihe von Spielfiguren auf dem Boden oder auf der Tischplatte anzuordnen, mit deren Hilfe Vorgänger und Nachfolger gezeigt werden. Das Aufstellen der Schülerinnen und Schüler in einer Reihe ist für die Bestimmung von Vorgänger und Nachfolger nicht geeignet, da sie die Gesamtsituation nicht überblicken können. Der Reihe von Spielfiguren wird dann eine Reihe mit Zahlenplättchen zugeordnet und die Begriffe „Vorgänger“ und „Nachfolger“ werden zu entsprechenden Zahlen in Beziehung gesetzt und erläutert.

### Beispiel für einen Wortspeicher

Das Diagramm zeigt drei Strategien zum Zählen:

- vorwärts zählen
- rückwärts zählen
- weiter zählen

Die Nullmenge wird durch folgende Begriffe dargestellt:

- kein
- keine
- keiner
- nichts

Ein Klammer-Symbol fasst diese Begriffe als  $= 0$  zusammen.

Rechts ist ein Foto einer Hand, die auf einer Reihe von fünf Zahlenplättchen (1 bis 5) zeigt. Über den Plättchen sind fünf orangefarbene Fischfiguren auf Stäbchen angeordnet. Unter den Plättchen sind die Begriffe „Vorgänger“ und „Nachfolger“ beschriftet, wobei die Hand auf den Plättchen 2 und 3 zeigt.

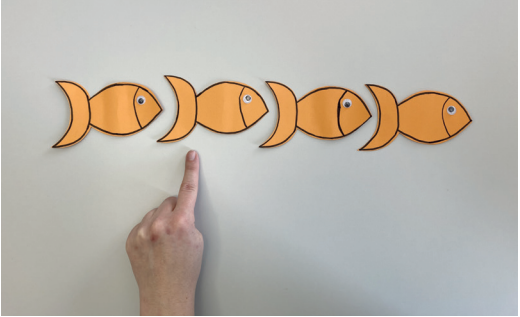
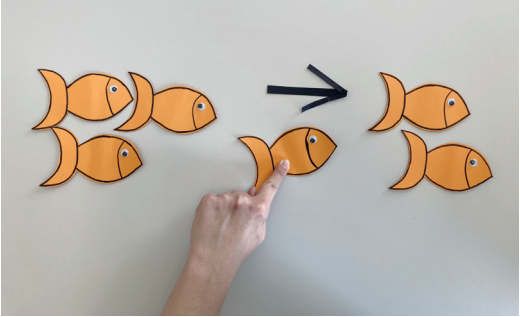
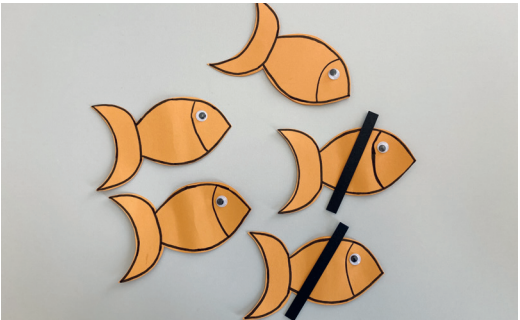
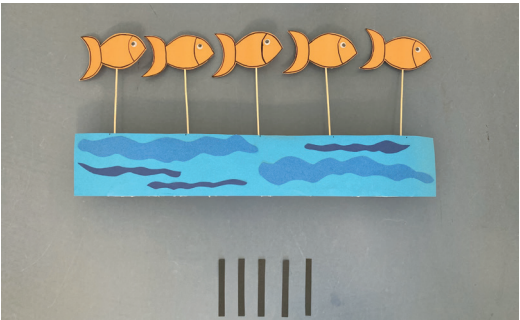
### Förderung von Zählstrategien

Es können Objekte in einer strukturierten Anordnung, ungeordnete Objekte, bewegliche oder unbewegliche Objekte gezählt werden.

Es ist hilfreich, die Schülerinnen und Schüler zunächst Objekte in einer strukturierten Anordnung zählen zu lassen und dann die gleiche Anzahl an ungeordneten Objekten (vgl. GAIDOSCHIK 2013, 19).

Wichtig ist auch, die Schülerinnen und Schüler an verschiedene Zählstrategien heranzuführen und sie diese ausprobieren zu lassen. Je nach Leistungspotenzial der Kinder und Jugendlichen kann in einer Rechenkonferenz, darüber gesprochen werden, welche Zählstrategie für welche Zähl-situation günstig erscheint oder welche Schülerinnen und Schüler welche Zählstrategien bevorzugen und warum (vgl. WALTER 2015, 6).

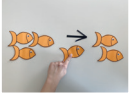


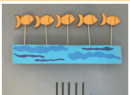
Folgende Zählstrategien sind bedeutsam für die Schülerinnen und Schüler:

<p>Mit dem Finger auf ein Zähl-objekt tippen oder deuten</p>  <p>Abbildung 15: Zählstrategie; ISB</p>	<p>Zähl-objekt von einer Stelle zu einer anderen umlegen</p>  <p>Abbildung 16: Zählstrategie; ISB</p>
<p>Zähl-objekte durchstreichen</p>  <p>Abbildung 17: Zählstrategie; ISB</p>	<p>Für jedes Zähl-objekt einen Strich in einer strukturierten Strichliste setzen</p>  <p>Abbildung 18: Zählstrategie; ISB</p>
<p>Mit den Augen Anzahl der Objekte erfassen</p>	

Es ist sinnvoll, verschiedene Ausgangslagen zu schaffen, um die Schülerinnen und Schüler dazu anzuregen, verschiedene Zählstrategien anzuwenden: z. B. leichte Gegenstände lassen sich von links nach rechts legen, schwere hingegen nicht, bewegliche oder weit entfernte Gegenstände lassen sich nicht wegstreichen, sondern müssen durch Deuten gezählt werden.

Beim Rechen-spiel „Zählen in die Zähl-schachtel“ legen die Schülerinnen und Schüler Objekte einzeln in eine blickdichte Kiste oder einen Sack und zählen diese dabei ab. Schließlich nennen sie die Gesamtanzahl und notieren diese. Danach nimmt eine andere Schülerin oder ein anderer Schüler die Objekte unter Zählen wieder heraus und nennt, wenn alle Objekte entnommen sind, die Gesamtanzahl. Die Kinder und Jugendlichen vergleichen die Ergebnisse (GAIDOSCHIK 2013, 19).

## Beispiel für einen Wortspeicher

Ich zähle, indem ich ...	weglege.	
	wegstreiche.	
	antippe.	
	mit den Augen schaue.	
	eine Strichliste mache.	

### Förderung des strukturierten Zählens

Das strukturierte Zählen, z. B. 2 – 4 – 6 oder 5 – 10 – 15 stellt eine zentrale Kompetenz für den Erwerb des Teil-Ganzes-Verständnisses von Zahlen, für die simultane und quasi-simultane Anzahl-erfassung und für eine Vorstellung der Rechenoperationen dar. Deshalb kommt ihm eine große Bedeutung im Anfangsunterricht zu.

Es kann initiiert werden, indem die Kinder unterschiedliche Gegenstände zählen, die bereits in Zweier-, Dreier- oder Fünfer-Schritten vorstrukturiert sind.

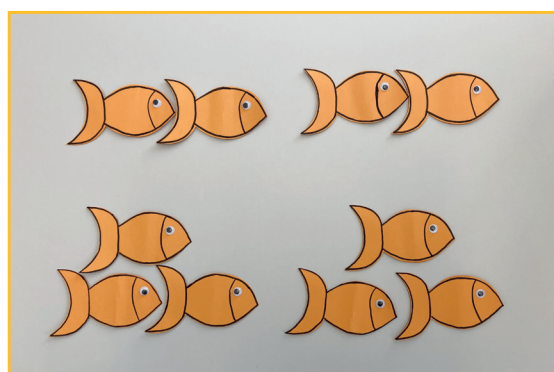


Abbildung 19: Strukturiertes Zählen; ISB

Würfelspiele eignen sich besonders für das strukturierte Zählen: Die Schülerinnen und Schüler gehen ohne abzuzählen die entsprechenden Schritte weiter oder nehmen sich die durch das Würfelbild genannte Anzahl an Muggelsteinen (vgl. WALTER 2015, 6).

Ein besonderes Augenmerk gilt den Fünfer- oder Zehnerschritten. Die Schülerinnen und Schüler legen z. B. immer fünf Gegenstände in einen Reifen, ordnen Elemente in eine Eierschachtel oder ein Rechenschiffchen und nehmen die Fünferstruktur ihrer Hände wahr.

### Vermittlung der Ordnungszahlen

Durch eine im Unterricht verwendete Versprachlichung werden die Begriffe, wie „der Erste“, „die Fünfte“, „der Letzte“ zunächst unreflektiert eingeführt. Somit wird die Entwicklung einer Ordnungsstruktur immanent gefördert.

Die Ordnungsstruktur umfasst zwei unterschiedliche Aspekte der Ordnungszahlen:

- Aspekt der Reihenfolge: z. B. Linus kommt als Erster ins Ziel, Jonas als Zweiter.  
Spielsituation zur Einführung: z. B. Autorennen: Spielzeugautos an einem Faden werden über eine Ziellinie gezogen
- Aspekt der Position innerhalb einer Reihe: z. B. die vierte Person in der Warteschlange trägt eine blaue Mütze.  
Spielsituation zur Einführung: z. B. Reihe an Spielzeugfiguren mit unterschiedlichen Merkmalen (z. B. blaue Mütze, Koffer in der Hand): Ein Kind beschreibt eine Figur, ein anderes Kind sucht diese in der Reihe und benennt ihre Position.

In einer Unterrichtseinheit zu den Ordnungszahlen wird zunächst nur einer der beiden Aspekte thematisiert. Erst wenn dieser verstanden ist, wird der zweite Aspekt in einer weiteren Unterrichtseinheit eingeführt. Dabei werden die Situationen zuerst handelnd (enaktiv) erlebt, bevor sie auf bildlicher Ebene (ikonisch) vertieft werden.

Auch im Zusammenhang mit dem Datum kann die Kompetenz, die Ordnungszahlen anzuwenden, auf anspruchsvollem Niveau trainiert werden, wenn das Datum nicht automatisiert vorgelesen wird, sondern die Tage oder Monate zur Reihenfolge in der Woche oder im Jahr in Beziehung gesetzt werden.

- Das Datum mithilfe eines Perlenbandes visualisieren, z. B. „Heute sind fünf Perlen darauf, heute ist der fünfte Tag im Februar.“
- „Der Februar ist der zweite Monat im Jahr.“
- „Manuel hat am fünften Tag im Februar Geburtstag.“

### Weiterführende Informationen des DZLM:



<https://mahiko.dzlm.de/node/45>



## 4.1.5 Haben die Schülerinnen und Schüler die Teilkompetenz des Zählens erfolgreich erworben?

Diagnostische Leitfragen:

- Zählt die Schülerin oder der Schüler auswendig (verbales Zählen) „einszweidreivier...“ oder zählt sie bzw. er bewusst (resultatives Zählen)?
- Kann die Schülerin oder der Schüler im Zahlenraum 10 (oder auch 20) fehlerfrei vorwärts und rückwärts zählen? Stockt sie bzw. er bei Übergängen oder verwechselt Zahlwörter?
- Ist es der Schülerin oder dem Schüler möglich, von einer beliebigen Zahl aus weiterzuzählen oder beginnt sie bzw. er immer wieder leise bei der 1?
- Bestimmt die Schülerin oder der Schüler zuverlässig Vorgänger und Nachfolger einer Zahl?
- Kann die Schülerin oder der Schüler geordnete und ungeordnete Objekte korrekt abzählen? Gelingt dies nicht, hat sie bzw. er Schwierigkeiten bei der motorischen Koordination?
- Verwendet die Schülerin oder der Schüler die Strategie des strukturierten Zählens (z. B. immer zwei), um eine Menge zu bestimmen?
- Gelingt es der Schülerin oder dem Schüler, die verwendeten Zählstrategien oder Strukturierungen zu verbalisieren?
- Weiß die Schülerin oder der Schüler nach dem Abzählen die gezählte Zahl oder muss sie bzw. er noch einmal von vorne mit dem Zählen beginnen?
- Verwendet die Schülerin oder der Schüler Ordnungszahlen korrekt (passiv oder auch aktiv) und verbindet sie mit der entsprechenden Stelle?
- Verbindet die Schülerin oder der Schüler das Fehlen von Objekten mit der Zahl Null?

## 4.2 Teilkompetenz: Mengen vergleichen und Relationszeichen nutzen

### 4.2.1 Was versteht man unter Mengen vergleichen und Relationszeichen nutzen?

Beim Vergleichen von Mengen werden deren Mächtigkeiten durch verschiedene Strategien (Eins-zu-Eins-Zuordnung oder Bestimmen von Anzahlen) einander gegenübergestellt und ihre Beziehung zueinander ausgedrückt:

- sprachlich durch die Begriffe „mehr als“, „weniger als“, „gleich viel“ bzw. „größer als“, „kleiner als“, „ist gleich“,
- symbolisch durch die Relationszeichen  $</>/=$  (vgl. <https://pikas.dzlm.de/node/1304>, abgerufen am 29.12.2022).

Dabei liegt der Fokus bewusst auf der Mächtigkeit der Mengen, was einen sensiblen Umgang mit den genannten Relationsbegriffen erfordert. So eignet sich die Verwendung der Termini „größer als“ bzw. „kleiner als“ eher für eine aufeinander aufbauende Darstellung (Turmdarstellung) von gleichen Gegenständen oder von deren Abbildungen. Andernfalls besteht die Gefahr, dass statt der Mächtigkeit der Mengen die Größe der einzelnen Elemente zueinander in Beziehung gesetzt wird. Dieser Aspekt entfällt bei Bevorzugung der Begriffe „mehr als“ oder „weniger als“, da dadurch sprachlich klar der Bezug zur Anzahl der Mengenelemente ausgedrückt wird. Das Gleiche gilt für den Ausdruck der Gleichmächtigkeit von Mengen durch den Begriff „gleich viel“. Bei Verwendung des Relationsbegriffs „ist gleich“ dagegen ist wieder darauf zu achten, dass nicht anstelle der gleichen Anzahl von Elementen eher gemeinsame optische Merkmale in den Mittelpunkt gerückt werden.

#### **4.2.2 Welche Bedeutung haben das Vergleichen von Mengen und das Nutzen von Relationszeichen für das Rechnenlernen?**

Dem Vergleichen von Mengen als Teil der sog. „Zahlenfertigkeiten“ (vgl. LORENZ 2016, 102) gilt es – neben der simultanen bzw. quasi-simultanen Anzahlerfassung und dem Zählen – besondere Aufmerksamkeit zu widmen. Nach KRAJEWSKI verfügen Kinder dabei schon sehr früh, noch bevor sie sich sprachlich ausdrücken können, über das kognitive Schema des Vergleichens von Mengen, wobei die Vorstellungen der Kinder nach RESNICK noch keinen numerisch präzisen Anzahlbezug aufweisen (vgl. HILDENBRAND 2016, 21). Das bedeutet, dass Quantitäten zwar von den Kindern wahrnehmungsgebunden miteinander verglichen werden können, aber die Bestimmung der genauen Anzahl noch unterbleibt. Erst im weiteren Verlauf – durch die Entwicklung der sprachlichen Kompetenz und auch des Zahlbegriffs – werden Mengen und Zahlen schließlich zunehmend komplexer in Beziehung gesetzt, und auch der relationale Zahlaspekt, z. B. beim Bestimmen der Differenzmenge, wird berücksichtigt (vgl. HILDENBRAND 2016, 26).

#### **4.2.3 Besitzen die Schülerinnen und Schüler die notwendigen Vorläuferfähigkeiten für das Vergleichen von Mengen und das Nutzen von Relationszeichen?**

Diagnostische Leitfragen:

- Haben die Schülerinnen und Schüler die Irrelevanz der Anordnung von Elementen einer Menge (Mengeninvarianz) verinnerlicht?
- Zählen die Schülerinnen und Schüler Mengen sicher ab?
- Verfügen die Schülerinnen und Schüler über eine präzise Größenrepräsentation der Zahlen?

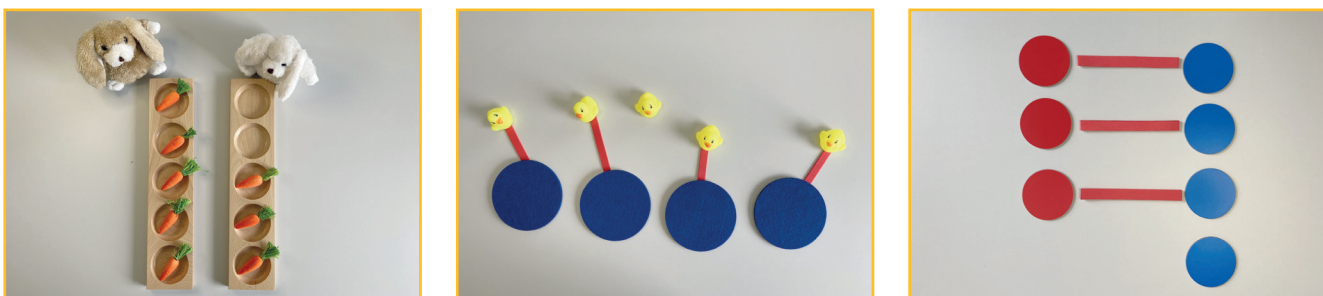
## 4.2.4 Wie fördert man das Vergleichen von Mengen und das Nutzen von Relationszeichen?

Grundsätzlich sollten zunächst Mengen aus konkretem Material in einem handelnden Setting einander gegenübergestellt werden. Dies hilft „den Kindern eine Handlungs-idee aufzubauen und so den statischen Vergleich über eine Eins-zu-eins-Zuordnung gedanklich auszulösen“ (NÜHREN-BÖRGER 2017a, 31). Erst dann kann die Abstraktion auf der ikonischen bzw. symbolischen Ebene erfolgen.

Um zwei Mengen miteinander zu vergleichen, stehen prinzipiell zwei Strategien zur Verfügung. Zum einen kann ein Vergleich ohne das Bestimmen einer Zahl über eine Eins-zu-eins-Zuordnung der Elemente erfolgen, zum anderen über das Abzählen von deren Elementen.

### Vergleich von Mengen über eine Eins-zu-eins-Zuordnung

Beim Mengenvergleich über eine Eins-zu-eins-Zuordnung wird jedem Element aus der einen Menge genau ein Element der anderen Menge zugeordnet. Geht die Zuordnung auf, dann enthalten beide Mengen die gleiche Anzahl von Elementen – die Mengen sind also gleichmächtig. Kann nicht jedem Element ein Element der anderen Menge zugeordnet werden, dann sind in einer Menge mehr bzw. weniger Elemente als in der anderen Menge.



Abbildungen 20 – 22: Möglichkeiten der Eins-zu-eins-Zuordnung; ISB

Bei diesem Verfahren steht das Bestimmen der qualitativen Beziehung der Mengen im Mittelpunkt (vgl. SCHÄFER 2020, 100). Es geht dabei also lediglich um die Feststellung, welche Menge mehr, weniger oder gleich viele Elemente hat. Nach GAIDOSCHIK muss dieses Verfahren nicht auf den bekannten Zahlenraum der Schülerinnen und Schüler beschränkt bleiben, sondern darf auch deren individuelle Zahlenraumgrenzen überschreiten (vgl. GAIDOSCHIK 2021, 25).

Eine Steigerung im fortlaufenden Lernprozess stellt schließlich das Vergleichen von Anzahlen ohne sichtbare Zuordnungslinien dar. Hierfür ist nach GAIDOSCHIK allerdings eine strukturierte Vergleichsanordnung unabdingbar.



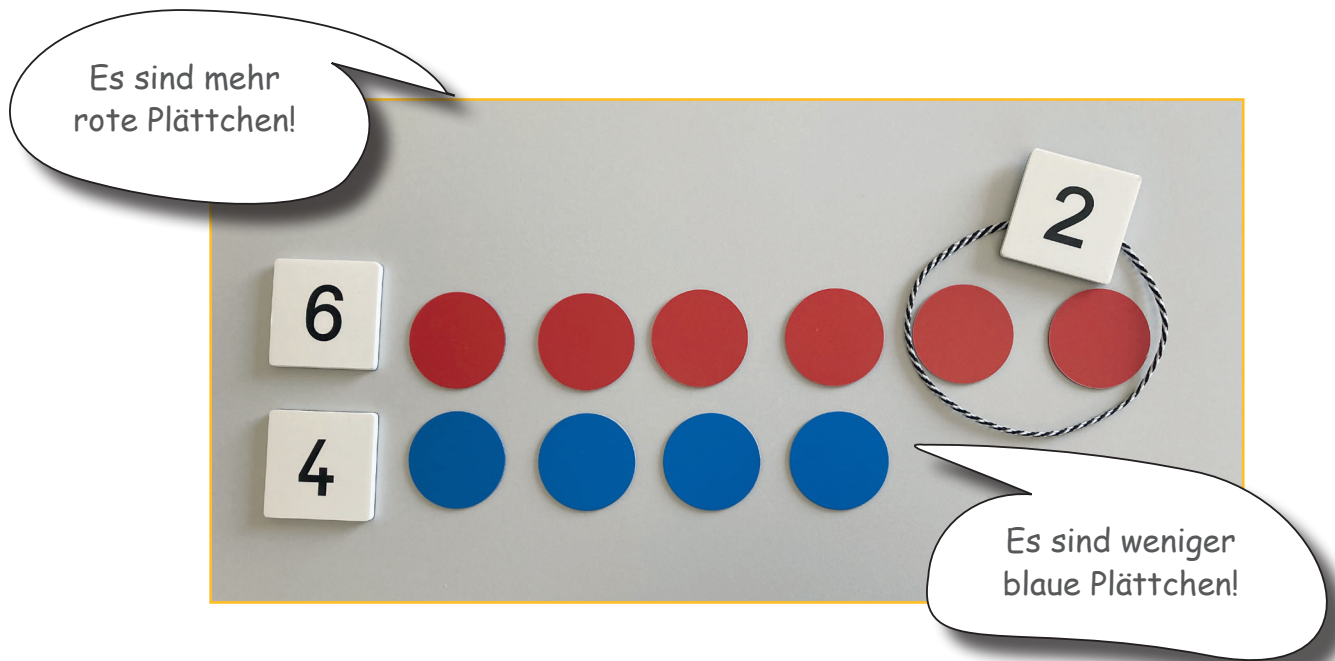


Abbildung 23: Feststellung der qualitativen Beziehung zweier Mengen zueinander; ISB

### Vergleich von Mengen über das Bestimmen der (An)Zahlen

Eine weitere Strategie, um die Mächtigkeit von Mengen zu vergleichen, stellt das Abzählen der Elemente dar.

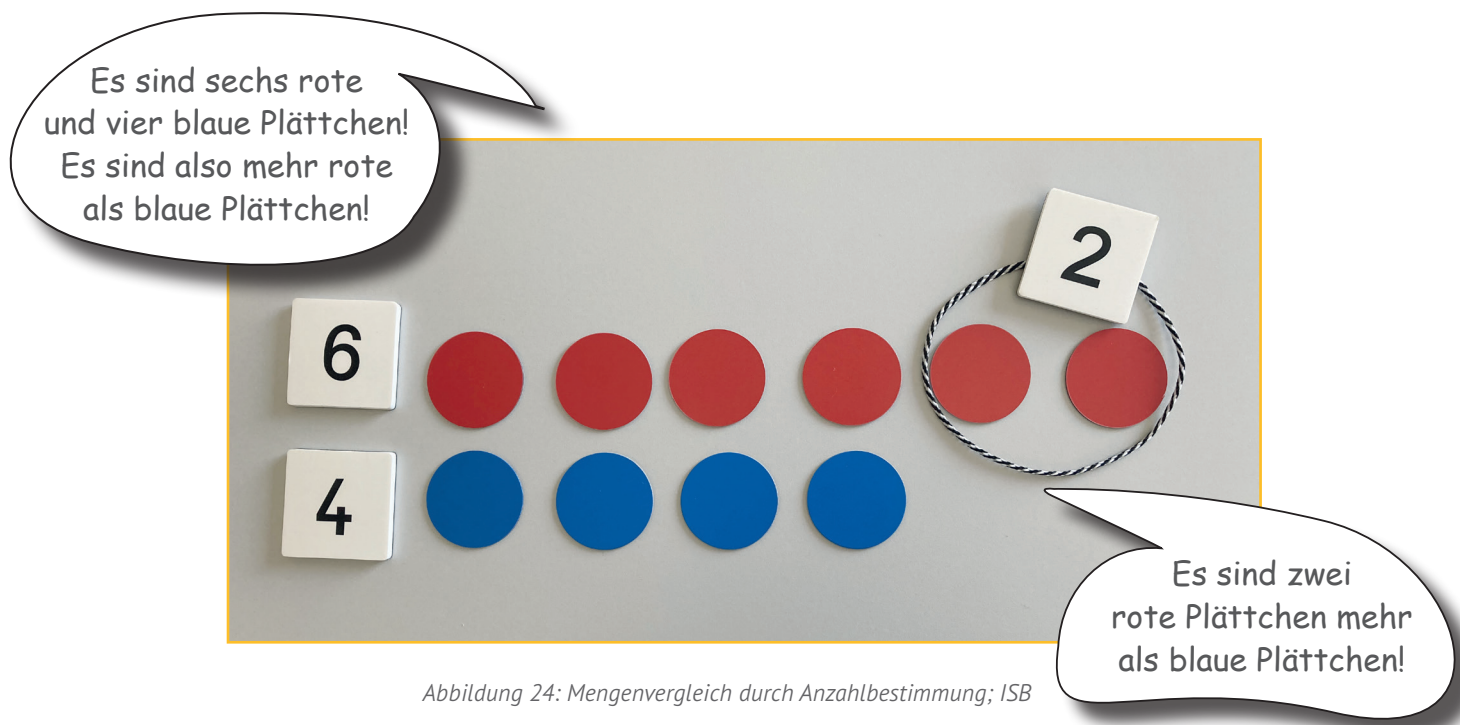


Abbildung 24: Mengenvergleich durch Anzahlbestimmung; ISB

In diesem Zusammenhang stellt das Bestimmen der sog. Differenzmengen, also das Feststellen der quantitativen Beziehung der Mengen, einen wichtigen Teilaspekt dar und soll den Schülerinnen und Schülern eine tiefere Erkenntnis in die Zahlbeziehungen ermöglichen (vgl. SCHÄFER 2020, 100).

Hierbei geht es also insbesondere um die Erkenntnis, dass z. B. die Differenz zwischen den Mengen 6 und 4 ebenso 2 beträgt wie z. B. die Differenz zwischen 7 und 5. Dabei sind wieder Vergleichsanordnungen, bei denen die Anzahlen leicht mit den Augen erfasst werden können, von erheblichem Vorteil.

Ist die Mengeninvarianz noch nicht gesichert, kann die räumliche Anordnung von Objekten zu falschen Ergebnissen führen (vgl. WITTMANN 2022, 25).

Mehr ist dann das, was nach mehr aussieht (vgl. GAIDOSCHIK 2021, 22).

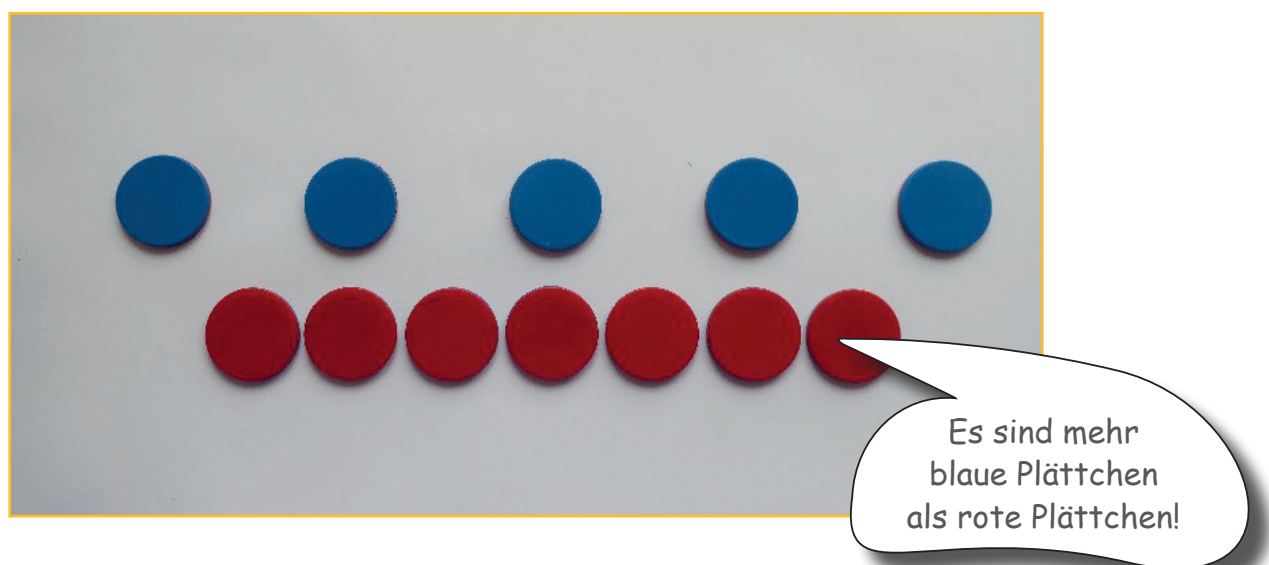


Abbildung 25: Fehlerquelle durch räumliche Anordnung von Mengen; ISB

In diesem Fall fordert die Lehrkraft die Schülerinnen und Schüler auf, die Elemente der zu vergleichenden Mengen genau parallel zueinander anzuordnen und den Vergleich noch einmal zu wiederholen bzw. durch eine Eins-zu-eins-Zuordnung zu verifizieren. Im Anschluss besprechen die Lehrkraft und die Schülerinnen und Schüler die beiden Ergebnisse und die verschiedenen Lösungswege.

Die Schülerinnen und Schüler können aber auch zu einem falschen Ergebnis kommen, da sie beim Abzählen der weiter auseinanderliegenden Menge „eine weitere Strecke zurücklegen“ (vgl. GAIDOSCHIK 2021, 24). Dies lässt darauf schließen, dass die Kinder oder Jugendlichen noch keine gesicherte Mengenvorstellung besitzen und die Fragestellung daher nicht nachvollziehen können.

## Beispiel für einen Wortspeicher



### Das muss man im Blick behalten:

Durch die Relationsbegriffe soll die Beziehung von Anzahlen zweier Mengen ausgedrückt werden (vgl. NÜHRENBÖRGER 2017b, 42). In diesem Zusammenhang ist besonders auch auf alltagssprachliche Bedeutungsinterferenzen zu achten, die zu Verwirrungen führen können. Beispiele hier-für sind z.B. „Ich habe keine Lust mehr.“, „Die Uhr geht nicht mehr.“ oder auch „Du hast die gleiche Hose an wie gestern.“ (vgl. NÜHRENBÖRGER 2017b, 43).

### Verknüpfung der Relationsbegriffe mit den mathematischen Symbolen $>/</=$ und deren Notation

Beherrschen die Schülerinnen und Schüler die Grundlagen des Mengenvergleichs, können auch die entsprechenden Relationszeichen notiert werden.

Zur Einführung eignen sich z. B. Figuren wie Krokodile oder auch kleine Monsterchen mit einer entsprechenden Gestaltung der Mundpartie. Im Mittelpunkt einer möglichen Rahmengeschichte kann z. B. der Appetit auf die Menge mit der größeren Mächtigkeit stehen. Im fortlaufenden Lernprozess stehen diese Figuren dann den Schülerinnen und Schülern entweder als entsprechendes Bild zum Einkleben oder auch als Schreibschablone zum selbstständigen Notieren der Relationszeichen zur Verfügung. Um das abstrakte Symbol schließlich von der bildlichen Vorlage abzulösen, eignen sich anfangs insbesondere ausreichend große Stempel. Begleitend dazu können die Symbole im Rahmen des Schreiblehrgangs isoliert geübt und schließlich automatisiert werden. Ein mögliches Vorgehen könnte sein:

## Einführung

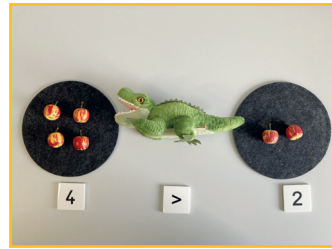


Abbildung 26: Spielerische Einführung des Relationszeichens; ISB

## Erarbeitung an der Tafel

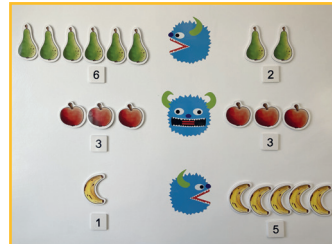


Abbildung 27: Einprägsame Bilder für Relationszeichen; ISB

Arbeiten auf der enaktiven, ikonischen und symbolischen Ebene

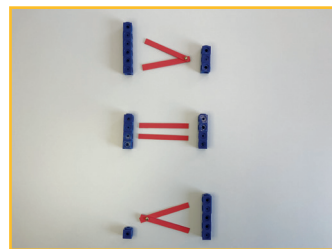
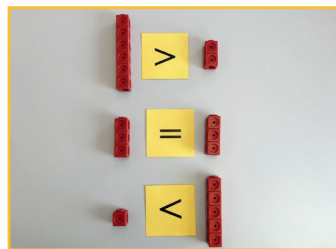


Abbildung 28 – 30: Möglichkeiten der Darstellung der Relationszeichen; ISB

## 4.2.5 Haben die Schülerinnen und Schüler die Teilkompetenz des Vergleichens von Mengen und des Nutzens von Relationszeichen erfolgreich erworben?

Diagnostische Leitfragen:

- Ist die Schülerin oder der Schüler in der Lage, die Menge mit der größeren/kleineren/gleichen Mächtigkeit durch eine Eins-zu-eins-Zuordnung bzw. durch das Abzählen der Elemente zu bestimmen?
- Ist die Schülerin oder der Schüler in der Lage, die Begriffe wie „weniger/kleiner als“, „mehr/größer als“, „gleich viele/ist gleich“ fachgerecht zu verwenden?
- Ist die Schülerin oder der Schüler in der Lage, die Unterschiede zweier Anzahlen (Differenzmenge) genau zu bestimmen?
- Ist die Schülerin oder der Schüler in der Lage, die Relationszeichen „<, >, =“ korrekt zu notieren?

## 4.3 Teilkompetenz: Anzahlen simultan und quasi-simultan erfassen

### 4.3.1 Was versteht man unter simultaner und quasi-simultaner Anzahlerfassung?

#### Simultane Anzahlerfassung

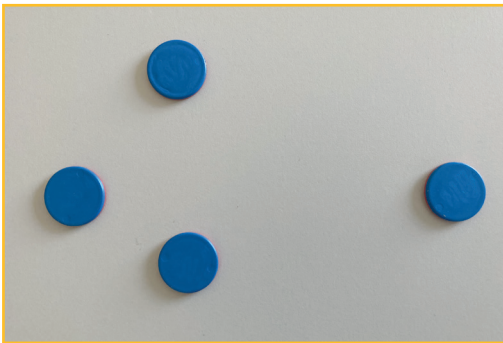


Abbildung 31: Simultane Anzahlerfassung mit blauen Plättchen; ISB

Ermitteln der Anzahl einer Menge an Objekten auf einen Blick, wobei diese „weder eine klar erkennbare Struktur noch einen erkennbaren Bezugsrahmen haben“ (GAIDOSCHIK 2019, 58).

Dies gelingt Menschen in der Regel bis zu einer Menge von maximal fünf, allerhöchstens sechs Elementen und gilt als angeborene Fähigkeit (vgl. SCHÄFER 2020, 101; HASEMANN & GASTEIGER 2020, 18; RATZ & WITTMANN 2011, 140).

#### Quasi-simultane Anzahlerfassung

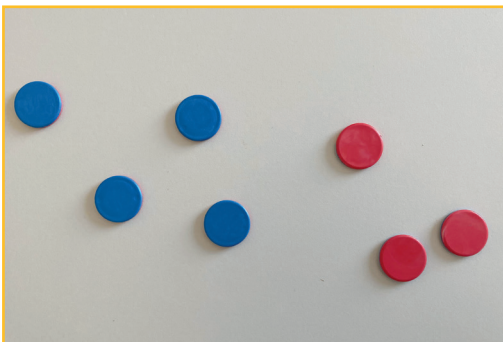


Abbildung 32: Quasi-simultane Anzahlerfassung mit blauen und roten Plättchen; ISB

Ermitteln der Anzahl einer größeren Menge an Objekten „durch geschicktes Aufteilen und Strukturieren in simultan erfasste Teilmengen, die durch wiederum gedankliches Zusammenführen zur Gesamtmenge zusammengeführt werden“ (SCHERER & MOSER OPITZ 2021, 95 ff., zitiert nach SCHÄFER 2020, 101)

Sowohl die simultane als auch die quasi-simultane Anzahlerfassung schließt zwei Schritte bei der Lösungsfindung ein, nämlich den Prozess der Wahrnehmung der Anzahl sowie den Prozess der Bestimmung der Anzahl. Für das mathematische Verständnis ist es wichtig, sowohl beide Prozesse einzeln zu üben als auch deren Integration zu fördern (vgl. SCHÄFER 2020, 101). Der erste Schritt ist der der Anzahlwahrnehmung. Dazu gehören die Wahrnehmung der Objekte als Menge einzelner Elemente sowie als Ganzes und somit als Zusammensetzung verschiedener Teilmengen, die zu strukturieren sind. Der zweite Schritt ist der der Anzahlbestimmung. Hierbei werden die einzelnen Objekte gezählt bzw. ab einer Menge von drei bis vier Elementen oder aufgrund der Kenntnis

einer Figur (z. B. Würfelbild) simultan erfasst. Durch Rechnen und Wissen wird somit die Menge quasi-simultan erfasst und benannt (vgl. BENZ u. a. 2015, 134, zitiert nach PETER-KOOP 2016, 8).

Eine Integration der beiden Prozesse der Anzahlwahrnehmung und Anzahlbestimmung ist bei der Förderung der quasi-simultanen Anzahlerfassung zu berücksichtigen und nicht als selbstverständlich voraussetzbar (vgl. SCHÄFER 2020, 101).

Während die simultane Anzahlerfassung angeboren und weitgehend von Persönlichkeitsmerkmalen bestimmt ist und sich somit nur bedingt für eine Förderung eignet, gilt die quasi-simultane Anzahlerfassung als Ansatzpunkt für mathematische Förderung (vgl. DÖNGES 2016, 13 f.), denn sie ist trainierbar (vgl. SINNER 2016, 5).

Die Wahrnehmungskapazität der Schülerinnen und Schüler mit dem Förderschwerpunkt geistige Entwicklung ist teilweise begrenzt, was zu einer verminderten Fähigkeit bzgl. der Simultanerfassung führen kann, d. h. auch eine Menge von drei Elementen kann beispielsweise nicht simultan erfasst werden, sondern muss durch Zählen bestimmt werden (vgl. GAIDOSCHIK 2019, 60; SINNER 2016, 5). Allerdings können fast die Hälfte der Schülerinnen und Schüler mit dem Förderschwerpunkt geistige Entwicklung Mengen bis fünf simultan erfassen (vgl. RATZ 2012, 138).

### **4.3.2 Welche Bedeutung hat die simultane und quasi-simultane Anzahlerfassung für das Rechnenlernen?**

Die simultane und quasi-simultane Anzahlerfassung ermöglichen das schnelle Erfassen von Mengen und den Aufbau tragfähiger mentaler Vorstellungen von Mengen (vgl. SCHÄFER 2020, 100). Damit bilden sie eine Grundlage für die Entwicklung eines Teil-Ganzes-Konzepts von Mengen. Gleichzeitig bedingt ein erstes Verständnis des Teil-Ganzes-Konzepts die quasi-simultane Anzahlerfassung. Beide Teilkompetenzen zusammen stellen die Voraussetzungen für strukturiertes Zählen (vgl. SCHÄFER, PETER-KOOP, WOLLRING 2019, 490) und für die Ablösung vom zählenden Rechnen dar (vgl. PETER-KOOP 2016, 8).

### **4.3.3 Besitzen die Schülerinnen und Schüler die notwendigen Vorläuferkompetenzen für das Erlernen der quasi-simultanen Anzahlerfassung?**

Diagnostische Leitfragen:

- Beherrscht die Schülerin oder der Schüler die Mengen-Größen-Verknüpfung sicher?
- Welche Menge kann die Schülerin oder der Schüler simultan erfassen?
- Die Fähigkeit zur Simultanerfassung wird teilweise isoliert ausgebildet, was dazu führen kann, dass eine Anzahl an Elementen richtig benannt, jedoch nicht abgezählt werden kann (vgl. RATZ & WITTMANN 2011, 140). Trifft dies auf die Schülerin oder den Schüler zu?

- Zählt die Schülerin bzw. der Schüler Objekte korrekt ab?
- Hat die Schülerin oder der Schüler das Teil-Ganzes-Konzept in Ansätzen verstanden? Also versteht sie oder er, dass eine Menge in verschiedene Elemente aufgeteilt und wieder zusammengesetzt werden kann?

#### 4.3.4 Wie fördert man die quasi-simultane Anzahlerfassung?

Das Ziel von Übungen der quasi-simultanen Anzahlerfassung ist es, sowohl mathematisch vorstrukturierte Mengen (z. B. Würfelbilder, „Kraft der 5“) als auch unstrukturierte Mengen schnell auf einen Blick erfassen zu können (vgl. GERLACH, FRITZ, RICKEN, SCHMIDT 2007, 93).

##### Das muss man im Blick behalten:

- Übungen zur quasi-simultanen Anzahlerfassung sollen immer wieder über längere Phasen im Unterricht implementiert werden (vgl. SCHÄFER 2020, 101).
- Es ist wichtig, zuerst verschiedene mathematisch vorstrukturierte Mengendarstellungen, wie z. B. Würfelbilder, die „Kraft der 5“ oder die Dezimalstruktur im Zehner- oder Zwanzigerfeld, zu thematisieren und die Anordnungen der Mengen gemeinsam genau zu besprechen. Erst daran anschließend werden unstrukturierte Mengenbilder, die die Schülerinnen und Schüler im Kopf selbst strukturieren müssen, betrachtet (siehe auch Übungsabfolge untenstehend).
- Besondere Bedeutung kommt auch und gerade im Förderschwerpunkt geistige Entwicklung dem Verbalisieren von quasi-simultan erfassten Mengen zu. Erst die Aufforderung zu diesem Verbalisieren ermöglicht den Schülerinnen und Schülern das bewusste Zugreifen auf Strukturen. Der Prozess des Versprachlichens hilft, den Prozess der quasi-simultanen Anzahlerfassung zu verinnerlichen.

## Beispiel für einen Wortspeicher

darüber  
darunter

obere Reihe  
untere Reihe

Ich sehe schnell, dass es ... Plättchen sind, weil...

... ich es auf einen Blick sehe.  
... es aussieht, wie ein Würfelbild.  
... am Zwanzigerfeld ...Felder leer sind.

## Beispielhafte Abfolge von Übungen

In der Tabelle verwendete Abkürzungen:

SuS = Schülerinnen und Schüler

L = Lehrkraft

### Analyse von und Austausch zu Würfelbildern

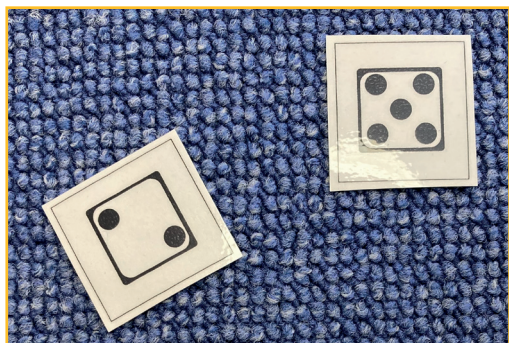


Abbildung 33: Würfelbilder; ISB

L zeigt Würfelbild 5.

SuS bestimmen die Anzahl, z. B. durch Zählen.

L und SuS tauschen sich zur Anordnung der Punkte auf dem Würfelbild aus:

„In jeder Ecke ist ein Punkt und in der Mitte ist auch ein Punkt. Das sind zusammen fünf Punkte.“

„Das schaut aus wie ein Viereck aus Punkten mit einem Punkt in der Mitte.“



## Analyse und Austausch zu unstrukturierten Mengen

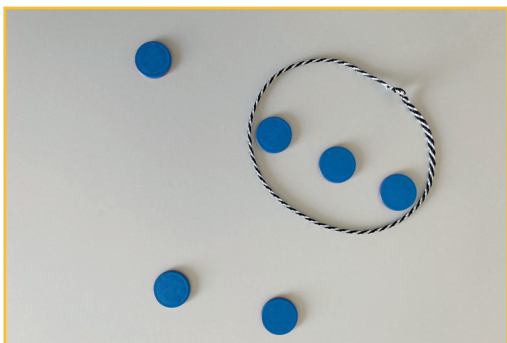


Abbildung 34: Unstrukturierte Mengen; ISB

L nimmt eine Hand voll Muggelsteine (die Menge soll nicht simultan erfassbar sein, es sollten also mindestens sechs Steine sein) und lässt diese auf ein großes weißes Blatt, Tablett oder eine Teppichfliese fallen.

L und SuS tauschen sich zur Anordnung der Muggelsteine aus:

„Ich sehe drei Steine, weil die drei Steine wie auf einem Würfel in einer Reihe liegen. Und dann noch einen oben und zwei unten.“

Ggf. können die SuS ihre „Bilder“ mit einem Stift oder mit dem Finger umfahren oder einen Faden darumlegen.

L: „Wie viele sehen wir also insgesamt? Wir sehen drei plus zwei plus eins. Das sind sechs.“

SuS übernehmen zunehmend auch das Bestimmen der Gesamtmenge.

## Zeigen von Finger-Anzahlen „auf einen Sitz“



Abbildung 35: Finger-Anzahlen; ISB

L betrachtet mit den SuS die eigene Hand und stellt im Gespräch klar, dass jedes Kind sicher und dauerhaft weiß, dass an einer Hand fünf, an beiden Händen zehn Finger sind.

L: „Wie viele Finger hast du an einer Hand?“

Wenn die SuS dieses Wissen nicht mitbringen, können sie nachzählen.

L: „Du hast gezählt, es sind fünf Finger an einer Hand. Wenn du nochmal zählst, wie viele Finger werden es sein? Wenn du dir nicht sicher bist, kannst du nochmal nachzählen. Sind es an beiden Händen gleich viele Finger?“

Wenn die SuS dieses Wissen verinnerlicht haben, üben sie das Zeigen der Zahlen bis zehn auf einmal.

L stellt verschiedene Zeigeaufgaben

„Zeige drei Finger auf einmal.“

„Zeige fünf Finger auf einmal.“

„Zeige acht Finger auf einmal.“

L reagiert ggf. auf Schwierigkeiten und bespricht mit den SuS: „Halte deine drei Finger eine Zeit lang ausgestreckt. Welche Finger sind ausgestreckt? Braucht man dafür zwei Hände oder genügt eine?“

Kann man die drei auch mit anderen Fingern zeigen? Wie viele Finger sind noch eingezogen? Ziehe deine drei Finger kurz ein und strecke sie nochmal mit einer Bewegung aus.“

L lässt unterschiedliche Anzahlen mit den Fingern zeigen (auch auf verschiedene Arten).

SuS beschreiben, wie sie die Zahlen zeigen. Bei Anzahlen größer als fünf, sprechen die SuS: „Ich zeige fünf und noch...“

Daran kann ein Blitzlesen mit Fingerbildern anschließen.

### Blitzgucken mit Würfelbildern

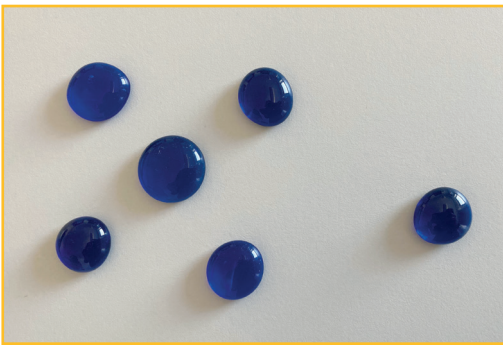


Abbildung 36: Muggelsteine in Form von Würfelbildern angeordnet; ISB

Ohne dass die SuS einen Blick darauf haben, ordnet L Plättchen wie Würfelbilder an.

L gibt den Blick auf die Anordnung für einige Sekunden frei.

S: „Es sind sechs Muggelsteine.“

L: „Wie hast du das so schnell gesehen?“

S: „Diese Muggelsteine sehen aus wie die Fünf auf dem Würfel. Und da ist noch einer. Dann sind alle zusammen sechs Muggelsteine.“

L: „Richtig. Pass gut auf! Ich lege die Muggelsteine nun anders nebeneinander.“

SuS beschreiben nochmals, welche Anordnungen und Gesamtmenge sie gesehen haben.

### Blitzgucken mit Plättchen in zwei Farben

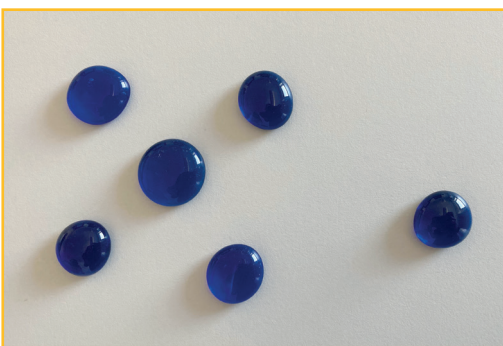


Abbildung 37: Blitzlesen mit zweifarbigen Plättchen; ISB

L: „Du siehst gleich eine Menge an Plättchen. Überlege schnell, wie viele Plättchen es sind. Ich zeige dir die Menge nur ganz kurz. Wie viele Plättchen siehst du?“

L zeigt die eine Menge an Plättchen, die durch Lage oder Farbe in simultan zu erfassende Teilmengen strukturiert ist (z. B. vier blaue und drei rote Plättchen), für einige Sekunden und verdeckt diese dann wieder.

Mögliche Fragen der Lehrkraft, um die SuS zum Versprachlichen zu animieren:

„Wie viele Plättchen hast du gesehen?“

„Wie hast du sie so schnell gesehen?“

„Waren es mehr rote oder mehr blaue Plättchen?“

„Wie viele blaue Plättchen waren es? Wie viele rote?“

„Wie viele Plättchen waren es zusammen?“



<https://mahiko.dzlm.de/node/328>



### Blitzgucken mit Punktedarstellungen am Zwanzigerfeld

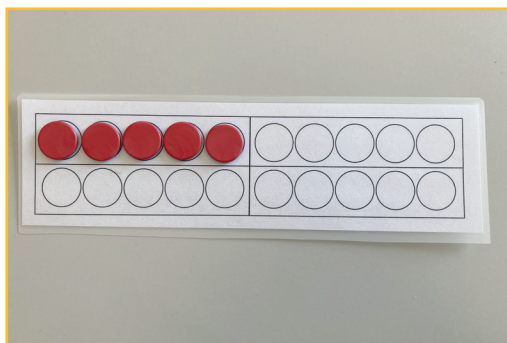


Abbildung 38: Zwanzigerfeld zur schnellen Anzahl-  
erfassung; ISB

L: „Ich zeige dir gleich ein Zwanzigerfeld mit roten Punkten. Du siehst das Zwanzigerfeld nur ganz kurz. Schau genau hin. Wie viele rote Punkte siehst du?“

L zeigt ein Zwanzigerfeld mit einer Menge an rot markierten Punkten, für einige Sekunden und verdeckt diese dann wieder.

Die SuS beschreiben, was sie gesehen haben.

### Zügiges Markieren einer Menge am Abaco

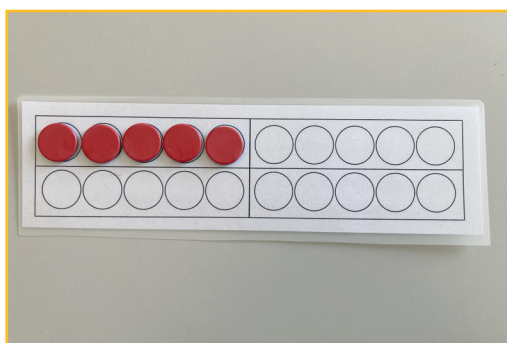


Abbildung 39: Abaco zum schnellen Anzahlerfassen;  
ISB

L nennt eine Zahl im Zahlenraum bis zehn. SuS stellen zügig und auf einmal (ohne die einzelnen Kugeln zu wenden) die Menge auf dem Abaco ein und erklären, weshalb sie diese so schnell einstellen konnten.



<https://mahiko.dzlm.de/node/43>



### 4.3.5 Haben die Schülerinnen und Schüler die Teilkompetenz der quasi-simultanen Anzahlerfassung erfolgreich erworben?

Diagnostische Leitfragen:

- Benennt die Schülerin oder der Schüler die Anzahl einer quasi-simultan zu erfassenden Menge, ohne sie durch Antippen oder mit den Augen abzuzählen?
- Nutzt die Schülerin oder der Schüler besprochene Strukturen, wie Würfelbilder oder Zwanzigerfeld, für die quasi-simultane Anzahlerfassung?
- Erklärt die Schülerin oder der Schüler schlüssig, welche Strukturen sie oder er erkennt und zur Anzahlbestimmung verwendet?
- Nutzt die Schülerin oder der Schüler Strukturen, um quasi-simultan zu erfassende Teilmengen selbständig zu bilden (z. B. schiebt sie immer fünf Plättchen auf ein Häufchen zusammen)? Bzw. setzt die Schülerin oder der Schüler nach einem entsprechenden Hinweis geeignete Strukturierungen um?
- Legt die Schülerin oder der Schüler Anzahlen auf verschiedene Arten strukturiert?
- Fällt mir eine Schülerin oder ein Schüler auf, die oder der beim Blitzlesen nie als Erste oder Erster das Ergebnis nennt? Woran liegt das? Hat sie oder er das Prinzip der quasi-simultanen Anzahlerfassung verstanden? Dauert es so lange, weil die Schülerin oder der Schüler abzählt oder benötigt ein anderer Denkprozess mehr Zeit und damit ggf. mehr Automatisierung?

## 4.4 Teilkompetenz: Das Teil-Ganzes-Konzept nutzen

### 4.4.1 Was versteht man unter dem Teil-Ganzes-Konzept?

Das „Teil-Ganzes-Konzept“, auch als Teil-Ganzes-Verständnis oder Teil-Ganzes-Beziehungen bezeichnet, beschreibt „die Erkenntnis [...], dass Zahlen zerlegbar und aus anderen Zahlen zusammengesetzt sind“ (<https://pikas-mi.dzlm.de/node/123>, abgerufen am 25.06.2022) sowie „die Fähigkeit, Zahlen aus anderen Zahlen zusammensetzen zu können“ (PETER-KOOP 2016, 9). Diese „zentrale gedankliche Leistung“ (PETER-KOOP 2016, 9, mit Bezug auf RESNICK 1983) vollzieht sich also im Erkennen von Beziehungen zwischen Zahlen.

Zum Teil-Ganzes-Konzept gehören die Zahlzerlegungen und die Zahlzusammensetzungen. Dabei stellt die Zahlzusammensetzung stets eine Umkehrung der Zahlzerlegung dar.

Für die Entwicklung arithmetischer Kompetenzen (vgl. DÖNGES 2016, 14) ist es wichtig, dass Schülerinnen und Schüler verstehen, dass eine Zahl eine Gesamtmenge repräsentiert, die aus Teilmengen besteht und diese wiederum in enger Beziehung zueinander stehen. Man nennt dieses

Prinzip triadische Struktur oder Zahlentripel, wie z. B. bei den Zahlen 3 – 2 – 5, die in verschiedenen Beziehungen zueinanderstehen (FRITZ et al. 2007, 16).

Die Zahlzerlegung als zentrale Kompetenz des Teil-Ganzes-Konzepts „bezeichnet die Ausbildung der Fähigkeit, Zahlen zu zerlegen und die Beziehungen zwischen Zahlen und ihren Teilen numerisch zu erfassen“ (<https://pikas-mi.dzlm.de/node/123>, abgerufen am 25.06.2022).

Das nachfolgende Beispiel verdeutlicht das Prinzip der Zahlzerlegung:

„Jede Zahl größer als 1 lässt sich aus verschiedenen Kombinationen [mindestens] zweier anderer Zahlen bilden. [...] So setzt sich bspw. die 8 aus 4 und 4 oder 6 und 2 usw. zusammen“ (DÖNGES 2016, 14).

Dabei bleibt die Gesamtmenge, unabhängig von deren Aufteilung, immer gleich groß. Dies wird als Mengeninvarianz oder Mengenkonzanz bezeichnet.

#### 4.4.2 Welche Bedeutung hat das Teil-Ganzes-Konzept für das Rechnenlernen?

In der Mathematikdidaktik wird die Zahlzerlegung als eine „Schlüsselkompetenz“ (DÖNGES 2016, 14) verstanden, die als Voraussetzung für höhere mathematische Kompetenzen gilt. Die Erkenntnis, Mengen als vielfältige Zahl-Zusammensetzungen zu begreifen, gleicht einer „Revolution im Zahlendenken eines Kindes“ (GAIDOSCHIK 2016, 23).

Aufgrund der Komplexität der gedanklich zu vollziehenden Schritte stellt die Zahlzerlegung eine große Herausforderung für Schülerinnen und Schüler mit dem Förderbedarf geistige Entwicklung dar (vgl. GAIDOSCHIK 2016, 23). Für diesen qualitativ großen Erkenntnissprung müssen bisher erlernte Teilkompetenzen (Beherrschen der Zahlwortreihe, Erfassen von Mengen in ihren Größenrelationen, anzahlerfassendes Zählen) verstanden und miteinander verknüpft werden (vgl. RATZ & MOSER OPITZ 2016, 402 f.). Das Verständnis für Zahlzerlegungen bzw. Zahlzusammensetzungen bietet eine Vorbereitung auf Additionen, Subtraktionen sowie auf Operationen mit einem Zehnerübergang und kann diese erleichtern (vgl. GAIDOSCHIK 2016, 23). Werden Teil-Ganzes-Beziehungen intensiv erarbeitet und geübt (vgl. PETER-KOOP 2016, 9), können sie die Leistung beim Rechnen erhöhen (vgl. RATZ & MOSER OPITZ 2016, 402f) und eine Alternative zum zählenden Rechnen anbahnen (vgl. GAIDOSCHIK 2016, 23).

*„Ein Kind, das die Zahl 7 mit dem Gedanken ‚das besteht aus fünf und zwei‘ verbindet, kann auf dieser Grundlage zumindest zwei Additionsaufgaben und zwei Subtraktionsaufgaben lösen, ohne zählen zu müssen.“ (GAIDOSCHIK 2016, 22)*

Können Zahlen bis zehn in allen Varianten zusammengesetzt und zerlegt werden, ist die „wesentliche Grundlage für das erfolgreiche Operieren mit beliebig großen natürlichen Zahlen erworben“ (GAIDOSCHIK 2016, 23).

Ein gesichertes Teil-Ganzes-Verständnis kann der Ebene des „tiefen Zahlverständnisses“ zugeordnet werden, wie es im Zahlen-Größen-Verknüpfungsmodell nach KRAJEWSKI und ENNEMOSER dargestellt wird (vgl. KRAJEWSKI, ENNEMOSER 2013, 43).

#### 4.4.3 Besitzen die Schülerinnen und Schüler die notwendigen Vorläuferkompetenzen für das Erlernen des Teil-Ganzes-Konzepts?

Diagnostische Leitfragen:

- Beherrscht die Schülerin bzw. der Schüler die Zahlwortreihe flexibel?
- Ermittelt die Schülerin oder der Schüler Anzahlen als Gesamtheiten zählend?
- Bestimmt die Schülerin bzw. der Schüler Mengen entsprechend ihrer Mächtigkeiten als „größer“, „kleiner“ oder „gleich groß“?
- Unterscheidet die Schülerin oder der Schüler zwei Anzahlen genau (Differenzmenge)?
- Bestimmt die Schülerin bzw. der Schüler kleinere Anzahlen quasi-simultan und beschreibt die wahrgenommenen Teilmengen?

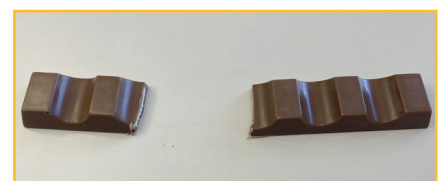
#### 4.4.4 Wie fördert man das Teil-Ganzes-Konzept?

Um das Verständnis des Teil-Ganzes-Konzepts anzubahnen, ist es mathematisch sinnvoll, dies in folgenden Schritten zu tun:

- Begriffe „Zerlegen“, „Ganzes“ und „Teile“ einführen
- Notationen einführen (z. B. Hütchenschreibweise, Zahlenhaus, Addition)
- verschiedene Zahlzerlegungen durch freies Experimentieren entdecken (GAIDOSCHIK 2019, 84)
- Zahlzerlegungen mit strukturiertem Material finden
- alle Zahlzerlegungen einer Zahl mit System finden (Prinzip der gegenseitigen Veränderung)
- Anzahlen zerlegen mit verdecktem Materialeinsatz
- Zahlzerlegungen in Zahlzusammensetzungen umkehren und andersherum
- Zahlzerlegungen automatisieren

##### Begriffe „Zerlegen“, „Ganzes“ und „Teile“ einführen

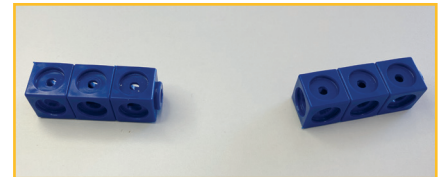
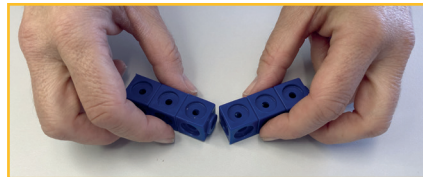
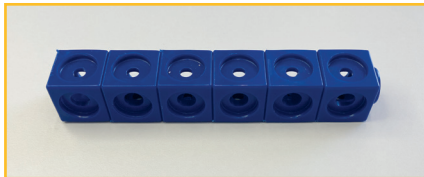
Die Schülerinnen und Schüler zerteilen einen Schokoriegel, der aus fünf Stückchen besteht, beliebig in zwei Teile (vgl. <https://mahiko.dzlm.de/node/217>, abgerufen am 05.10.2022). Die Lehrkraft benennt diese als „Teile“, den Schokoriegel als „Ganzes“ und den Prozess als „Zerlegung“.



Abbildungen 40 – 42: Einführung der Begriffe „Ganzes“, „Zerlegen“ und „Teile“; ISB

Stehen mehrere Schokoriegel zur Verfügung können verschiedenartige Zerlegungen vorgenommen werden, die mit den Schülerinnen und Schülern thematisiert werden, wie z. B. eine Zerlegung in drei und zwei oder in ein und vier Stückchen. Die Schülerinnen und Schüler erkennen, dass ausgehend von einem Ganzen verschiedene Zerlegungen möglich sind. Sie übernehmen die Sprechweise: „Ich zerlege die Fünf in drei und zwei Teile.“

Diese Erkenntnis wird nun auf die Arbeit mit mathematisch strukturierten Materialien übertragen.



Abbildungen 43 – 45: Übertrag der Begriffe auf mathematische Situationen; ISB



<https://mahiko.dzlm.de/node/217>



### Notationen einführen

Haben die Schülerinnen und Schüler das Prinzip der Zahlzerlegungen verstanden, können bildliche und symbolische Notationen eingeführt werden.

Je nach Lernstand können verschiedene Notationsformen gewählt oder kombiniert werden. Es ist sinnvoll, die gefundenen Zerlegungen durch die Schülerinnen und Schüler dokumentieren zu lassen. Dies trägt zur Verinnerlichung der Zahlzerlegungen bei.

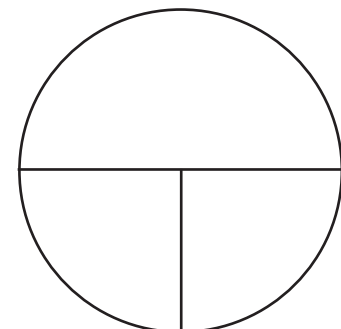
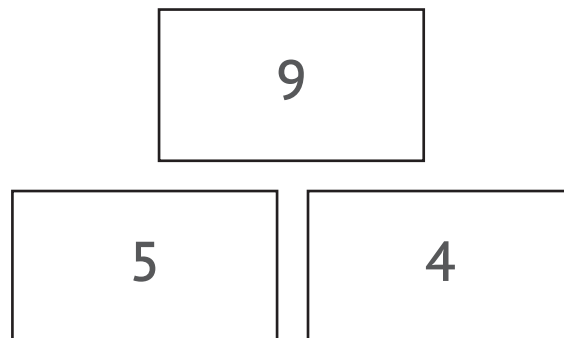
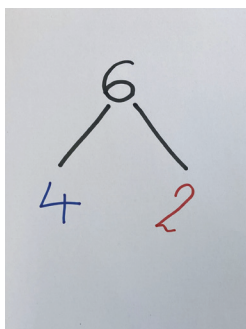


Abbildung 46 – 48: Schreibweisen für Zahlzerlegungen; ISB

Die „Hütchenschreibweise“ (GAIDOSCHIK 2019, 84) bietet sich für den Anfang ebenso an wie ein reduziertes Zahlenhaus. Dabei steht das „Ganze“ oben und die „Teilmengen“ werden darunter notiert. So werden in einprägsamer Form die Beziehungen der ganzen Zahl zu den Teilmengen verdeutlicht.

Es muss zu diesem Zeitpunkt noch kein Rechenzeichen verwendet werden, da der Schwerpunkt auf den Zusammensetzungen und Zerlegungen liegt und nicht auf Operationen mit Rechenzeichen (GAIDOSCHIK und WALTER 2015,122).

### Verschiedene Zahlzerlegungen durch freies Experimentieren entdecken

Um die Frage „Wie kannst du die Menge Sechs zerlegen?“ zu beantworten, experimentieren die Schülerinnen und Schüler mit Materialien, die sie in zwei Teilmengen zerlegen können. Sogenannte dreigeteilte Teller veranschaulichen das Prinzip des Ganzen und der Teile.



Abbildungen 49 und 50: Zerlegungsteller; ISB

Die Schülerinnen und Schüler vergleichen ihre gefundenen Lösungen und erkennen, dass es verschiedene Zerlegungen für das gleiche Ganze gibt. Gemeinsam können sie alle gefundenen Zerlegungen notieren.

### Das muss man im Blick behalten:

Ein beliebtes Material im Rahmen der Zahlzerlegung sind auch Schüttelboxen. Um das Prinzip der Zahlzerlegung zu verdeutlichen, können diese anfangs sinnvoll eingesetzt werden. Allerdings fördert die durch das Schütteln zufällig herbeigeführte Zerlegung nicht das Nachdenken darüber, welche weiteren Zerlegungen noch vorgenommen werden könnten. Schüttelboxen, die die „Kraft der 5“ durch ein aufgedrucktes Raster abbilden, stellen für diese Übung eine sinnvolle Alternative dar. w





### Zahlzerlegungen mit strukturiertem Material finden

Beim freien Experimentieren gefundene Lösungen (wie beim dreigeteilten Teller) werden nun in mathematische Strukturen, wie das Punktfeld, übertragen.

Die Schülerinnen und Schüler nutzen einen Punktestreifen mit sechs blauen Punkten und markieren mit einem Strich verschiedene Zerlegungen, die sie parallel notieren.

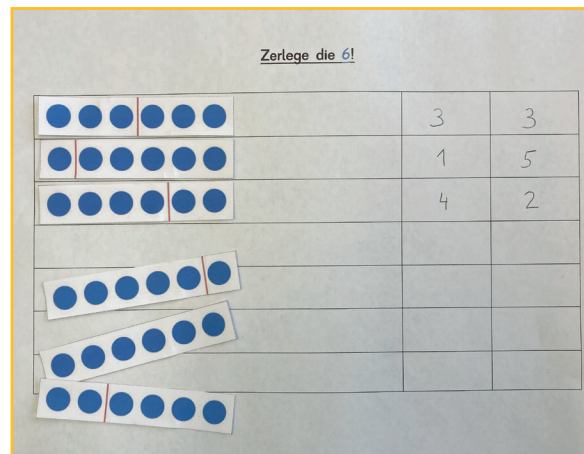


Abbildung 52: Punktestreifen; ISB

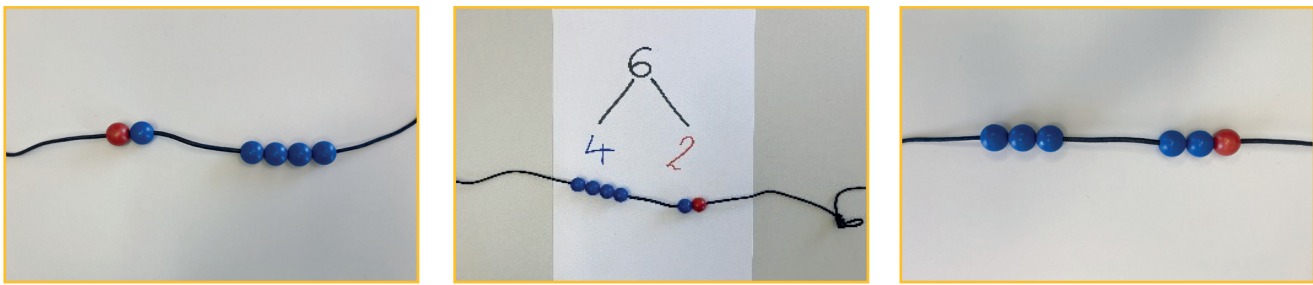
Durch gezielte Forschungsfragen bzw. Frageimpulse (vgl. GAIDOSCHIK 2019, 85) werden die Schülerinnen und Schüler dazu angehalten, möglichst alle Zerlegungen zu finden. Später werden die dabei gemachten Erfahrungen beim „Zerlegungen finden mit System“ bzw. der gegensinnigen Veränderung wieder aufgegriffen (siehe unten).

- „Wie viele Zerlegungen findest du?“
- „Glaubst du, dass du alle Zerlegungen gefunden hast, die es gibt?“
- „(Wie) Kannst du dir sicher sein, dass du alle Aufgaben gefunden hast?“ (Vgl. GAIDOSCHIK 2019, 85)

Wird statt eines Punktestreifens mit nur sechs Feldern ein Zehnerfeld genutzt, werden die Schülerinnen und Schüler dazu hingeführt, die Zahlzerlegungen in Beziehung zur „Kraft der 5“ und der Dezimalstruktur zu setzen. So wird eine gegliederte Mengenvorstellung angebahnt (vgl. GAIDOSCHIK 2019, 85).

### Alle Zahlzerlegungen einer Zahl mit System finden (Prinzip der gegensinnigen Veränderung)

Um die Schülerinnen und Schüler dazu anzuleiten, systematisch alle möglichen Zahlzerlegungen zu finden, bietet es sich an, mit Kugelketten zu arbeiten. Soll die Anzahl 6 zerlegt werden, nutzt man eine Kugelkette, auf die genau sechs Kugeln aufgefädelt sind. Dabei wird die „Kraft der 5“ mit unterschiedlich farbigen Kugeln berücksichtigt.



Abbildungen 53 – 55: Das Prinzip der gegenseitigen Veränderung gezeigt anhand einer Kugelkette; ISB

Mithilfe der Kugelkette demonstriert die Lehrkraft zur Einführung die gegenseitige Veränderung. Dabei wird eine Kugel von einer Seite auf die andere geschoben und so die „Nachbarzerlegung“ herbeigeführt. Auf der einen Seite wird es eine Kugel weniger, auf der anderen eine mehr, ohne dass sich die Gesamtzahl verändert (vgl. GAIDOSCHIK 2016, 24 f.). Durch Fortführung dieses Prinzips können die Kinder und Jugendlichen die gegenseitige Veränderung erkennen und sie als Strategie für das systematische Finden aller Zerlegungen nutzen.

Eine korrekte Versprachlichung hilft, das Prinzip zu verstehen:

„Ich zerlege sechs in fünf Kugeln und eine Kugel.“

„Ich schiebe eine Kugel rüber. Jetzt ist es hier eine Kugel weniger und da eine Kugel mehr.“

„Ich habe immer noch sechs Kugeln. Ich zerlege die Sechs in vier und zwei.“ (Vgl. GAIDOSCHIK 2016, 24 f.)

Um die Zerlegungen auf ikonischer Ebene festzuhalten, können die Lernenden auf einem Arbeitsblatt die Kugeln auf untereinander angeordneten Schnurdarstellungen einzeichnen.

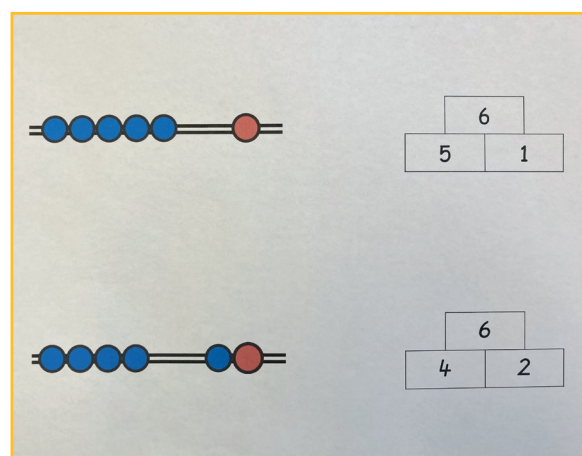


Abbildung 56: Notation der gegenseitigen Veränderung; ISB

Haben die Schülerinnen und Schüler das Prinzip der gegenseitigen Veränderung verstanden, können sie dieses am Zehnerfeld mit verschiedenen Anzahlen anwenden. Sie können Zehnerstreifen zerschneiden, knicken oder die Punkte darauf anmalen.

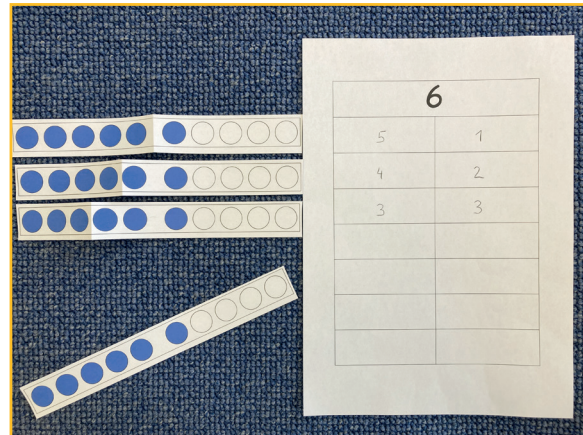
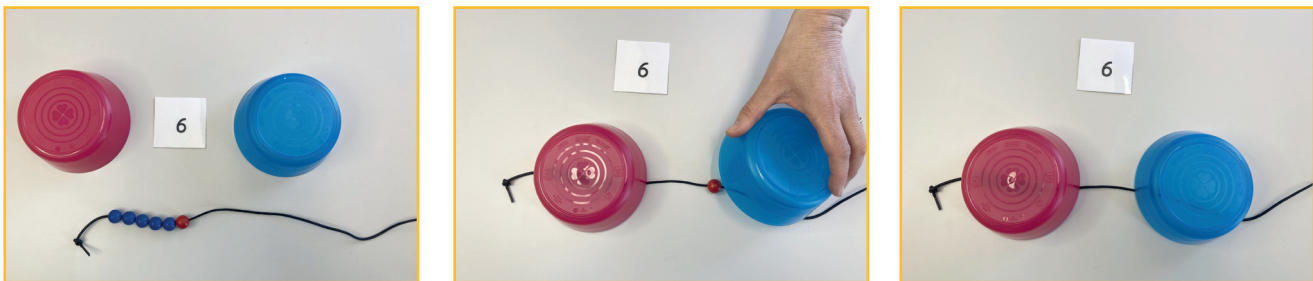


Abbildung 57: Gegensinnige Veränderung gezeigt anhand von Zehnerstreifen; ISB

### Anzahlen zerlegen mit verdecktem Materialeinsatz

Es stellt eine herausragende Leistung dar, konkrete Handlungen auf geistiger Ebene (vor dem inneren Auge) nachzuvollziehen. Führt man die Zerlegungshandlungen durch, ohne dass das Material für die Kinder und Jugendlichen sichtbar ist, regt dieser „verdeckte“ Materialeinsatz dazu an, sich die Zerlegungen im Kopf vorzustellen (vgl. GAIDOSCHICK 2019, 88 und WALTER 2015, 133).



Abbildungen 58 – 60: Verdeckter Materialeinsatz; ISB

Unter einem roten Becher liegen alle Kugeln einer Sechser-Kugelnkette, das Schnurende schaut hervor. Die Schülerinnen und Schüler werden aufgefordert, eine Kugel unter dem roten Becher hervorzuholen und diese unter einem blauen Becher verschwinden zu lassen. Ohne dass die Kugeln nun sichtbar sind, beschreiben die Kinder und Jugendlichen, unter welchem Becher es mehr und unter welchem es weniger Kugeln sind, bzw. im zweiten Schritt, wie viele Kugeln unter dem roten und wie viele unter dem blauen Becher sind (vgl. GAIDOSCHICK 2019, 88 und WALTER 2015, 133).

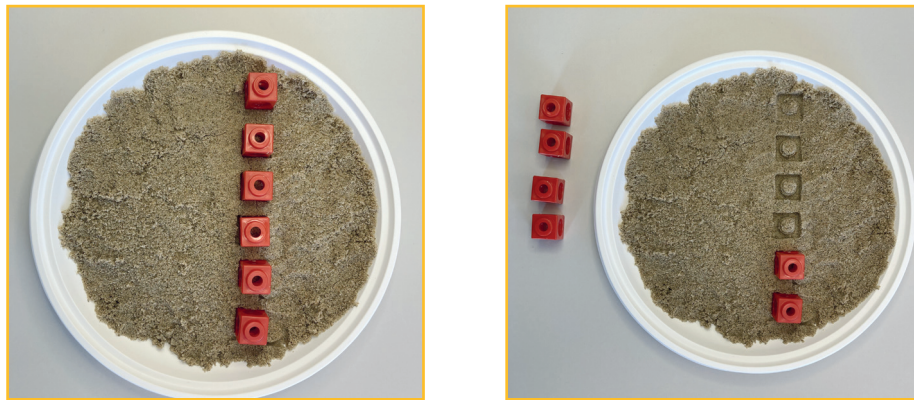
### Zahlzerlegungen in Zahlzusammensetzungen umkehren und andersherum

Durch die vielfältigen Auseinandersetzungen mit Zahlzerlegungen wurde das reversible Teil-Ganzes-Konzept bzw. die triadische Struktur bereits vielfach thematisiert.

Dennoch ist es sinnvoll, dieses einmal explizit anzusprechen und zu verdeutlichen.

Dazu eignet sich die Demonstration einer Anzahlzerlegung mithilfe eines Tellers, in dem eine Sand- oder Knetschicht liegt.

In diese werden z. B. sechs Steckwürfel eingedrückt, die dann in zwei Teilmengen zerlegt werden. Auch nach der Entnahme der Steckwürfel für die Zerlegung bleiben deren Abdrücke sichtbar. Es bleibt also die Ausgangsmenge zusätzlich zu den Teilmengen erkenntlich. Außerdem können die einzelnen Elemente der Teilmengen in einem reversiblen Vorgang wieder in die Mulden in der Knetschicht zurückgesetzt werden. Die Beziehungen zwischen Ganzem und Teilmengen werden so visualisiert.



Abbildungen 61 und 62: Sandteller mit Abbildung der Ausgangsmenge; ISB

### Zahlzerlegungen automatisieren

Da Zahlzerlegungen und Zahlzusammensetzungen eine enorme gedankliche Leistung darstellen, bedürfen sie intensiver Übung und müssen automatisiert werden. „Automatisieren“ meint nicht Auswendiglernen. Automatisiert werden „kann [...] nur, was zuvor verstanden wurde“ (GAIDOSCHIK 2019, 95). Für die Zerlegung bedeutet dies, die Schülerinnen und Schüler können „ohne weiteren Denk- und Vorstellungsaufwand“ (GAIDOSCHIK 2019, 95) eine Zerlegung nennen, sind aber ebenso in der Lage, die Zerlegung mit Material zu legen und sie in Operationen anzuwenden. Es geht hierbei um das Benutzen von Strukturen. Das Nutzen von Strukturen bedeutet, diese zu festigen. Für Rechnungen mit einer Zehnerüberschreitung oder -unterschreitung sind die Zerlegungen der Zahl 10 besonders relevant. Sie werden intensiv geübt, da eine innere Repräsentation der verschiedenen Zerlegungen, das Lösen von Additions- und Subtraktionsaufgaben erleichtert. Beliebt ist es, die Zerlegungen der Zahl 10 mithilfe von „verliebten Zahlen“ darzustellen.

### Beispielhafte Übungen, die die Automatisierung der Zahlzerlegungen und Zusammensetzungen fördern:

- Spielen mit Zerlegungskarten:  
Eine Schülerin zeigt eine Zerlegungskarte, auf der in einem Kreis in der oberen Kartenecke die Gesamtmenge (z. B. 6) und in der Mitte der Karte eine Teilmenge (z. B. 5) zu sehen sind. Ein anderer Schüler sucht aus seinen Karten die entsprechende Ergänzungskarte, in diesem Fall die Eins, heraus.

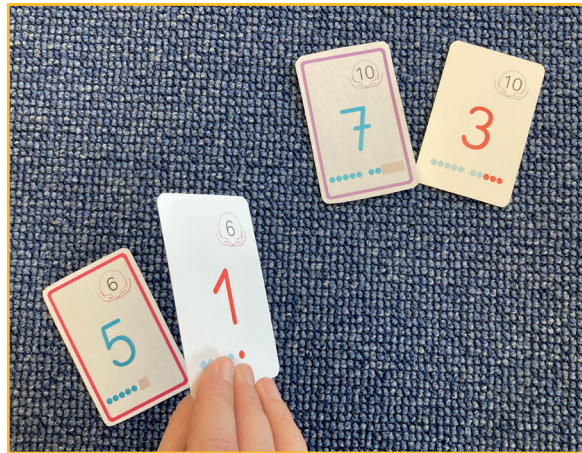


Abbildung 63: Zerlegungskarten; ISB

- Würfelspiel nach DZLM:



<https://mahiko.dzlm.de/node/85>



- Zeigen von Fingerbildern:

Die Hände sind hilfreich, um Zahlzerlegungen bzw. -zusammensetzungen begreifbar zu machen, da durch die Finger an einer Hand optisch und haptisch die Zahl 5 gut und sicher darstellbar ist (vgl. GAIDOSCHIK 2016, 23). Die Verwendung von Fingerbildern bedeutet, dass die Schülerinnen und Schüler „ihre Finger nicht einzeln abzählend einsetzen“ (GAIDOSCHIK 2019, 48), sondern als „Handpakete“ in einer Bewegung dazugeben bzw. wegnehmen. Die Hände werden als sog. statische Fingerbilder eingesetzt.

Hilfreich kann es sein, Zahlzusammensetzungen von Zahlen größer als fünf vorzuüben und hierbei auf eine „Haupt-Zeigeweise“ für diese Zahlen zu achten. Sie können jeweils aus fünf – also einer Hand – und weiteren Fingern gebildet werden. Die Kinder und Jugendlichen üben, die Zahlen mit ihren Händen schnell zu zeigen.

Später können andere Zusammensetzungen erarbeitet werden, wie beispielsweise „acht kann aus vier Fingern der einen Hand und vier Fingern der zweiten Hand gebildet werden“ (GAIDOSCHIK 2016, 24).



Abbildung 64: Zahlzusammensetzungen mit Fingerbildern; ISB


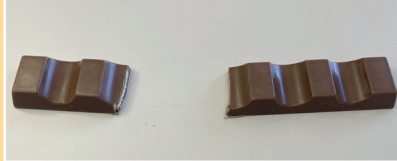
Auch die Zahlzusammensetzung kann mit den Fingerbildern geübt werden:

„Zeige mit einer Hand fünf, mit der anderen Hand drei – welche Zahl ergibt das?“ – „Acht“. (GAIDO-SCHIK 2019, 48)

Oder als Umkehrung der vorigen Aufgabe: „Nimm von acht fünf weg!“

Dabei ist es wichtig, dass die Schülerin oder der Schüler die „fünf“ als eine ganze Hand erkennt und wegnimmt.

### Beispiel für einen Wortspeicher

Ganzes	zerlegen	Teil - Teile
		
Ich zerlege 5 in 2 und 3.		

### Weiterführende Informationen des DZLM:



<https://mahiko.dzlm.de/node/44>



#### 4.4.5 Haben die Schülerinnen und Schüler die Teilkompetenz des Teil-Ganzen-Konzepts erfolgreich erworben?

Diagnostische Leitfragen:

- Zerlegt die Schülerin oder der Schüler eine Menge in verschiedene mögliche Teilmengen und beschreibt ihr Tun?
- Macht die Schülerin bzw. der Schüler die Zerlegung auch in einer Zusammensetzung rückgängig?
- Findet die Schülerin bzw. der Schüler auch systematisch alle möglichen Zerlegungen?
- Notiert die Schülerin oder der Schüler die Zerlegungen mit passenden Notationsformen?
- Nennt die Schülerin bzw. der Schüler Zerlegungen automatisiert?

### 4.5 Teilkompetenz: Bündeln

*Hinweis: Das Verständnis des Bündelns stellt einen Übergang zwischen dem Zahlenraum 20 und einem erweiterten Zahlenraum dar. Aus diesem Grund wurden im Folgenden auch größere Zahlen als 20 verwendet.*

#### 4.5.1 Was versteht man unter Bündeln?

„Bündeln bedeutet, eine Menge größer als 10 zu zehn zusammenzufassen, um große Anzahlen schneller erfassen zu können. Das Bündeln lässt sich auf weitere Zahlenräume übertragen.“ (<https://pikas.dzlm.de/distanzunterricht/zentrale-themen-2-schuljahr/b%C3%BCndeln>, abgerufen am 05.01.2022). Dabei wird im Sinne des dezimalen Stellenwertsystems die Zahl Zehn als Basis gesehen (vgl. SELTER et al. 2014, 30).

Die Umkehrung des Bündelns wird als Entbündeln bezeichnet. Das mathematische Verständnis des Entbündelns ist Voraussetzung für die Subtraktion mit Zehnerunterschreitung. Deshalb wird das Entbündeln im Unterricht erst in diesem Zusammenhang thematisiert. Dennoch wird hier bereits die Definition des Entbündelns angefügt:

„Bei der Entbündelung von Zahlen wird der Vorgang des Bündelns umgekehrt, um eine größere Einheit in zehn Elemente der nächst kleineren Einheit zu tauschen.“ (SELTHER et al. 2014, 30).

Alle Bündelungsvorgänge sind reversibel. Das bedeutet, dass Einheiten in kleinere Einheiten getauscht werden können und umgekehrt (vgl. <https://pikas-mi.dzlm.de/node/529>, abgerufen am 27.01.2022).

Das Bündeln wird mit der Erschließung des Zahlenraums 20 notwendig. Wird der Zahlenraum auf 100 erweitert, bietet es sich zunächst an, die Zehnerzahlen als besondere Bündelungen zu thematisieren und mit ihnen zu rechnen. Daran anschließend werden Bündelungen mit Einern, Zehnern und Hundertern vorgenommen und die Stellenwerte eingeführt.

### 4.5.1 Welche Bedeutung hat das Bündeln für das Rechnenlernen?

Das Bündeln von zehn einzelnen Elementen zu einer neuen mathematischen Einheit ist eine wichtige Voraussetzung für ein Verständnis des Stellenwertsystems.

Außerdem ist das Bündeln eine Vorläuferkompetenz für symbolische Bündelungs- und Entbündelungshandlungen in Form von einfachen Additions- und Subtraktionsaufgaben (vgl. SELTER et al. 2014, 31). So werden beispielsweise in der Aufgabe  $19 + 1$  die neun plus ein Einer symbolisch zu einem Zehner gebündelt, so dass das Ergebnis aus zwei Zehnern und keinem Einer (= 20) besteht. Das Erkennen der dekadischen Struktur und das Verständnis des Bündelns ermöglichen es den Kindern und Jugendlichen, den Zahlenraum über die 20 hinaus beliebig zu erweitern.

### 4.5.2 Besitzen die Schülerinnen und Schüler die für das Bündeln notwendigen Vorläuferkompetenzen?

Diagnostische Leitfragen:

- Zählt die Schülerin bzw. der Schüler Mengen bis zehn ab?
- Sagen die Schülerinnen und Schüler die Zahlwortreihe bis zwanzig flexibel auf?
- Beherrschen sie die im deutschen Sprachraum unregelmäßige Zahlwortbildung der mehrstelligen Zahlen mit der inversen Sprechweise ab der Zahl 13 (= zuerst Nennung des Einers, dann Nennung des Zehners)?
- Stellt die Schülerin bzw. der Schüler Mengen bis zehn korrekt her?
- Versteht die Schülerin bzw. der Schüler, dass Mengen aus Teilmengen zusammengesetzt werden können (Teil-Ganzes-Konzept)?

### 4.5.3 Wie fördert man das Bündeln?

Um die Kompetenz des Bündelns anzubahnen, ist es mathematisch sinnvoll, dies zunächst handelnd einzuführen und später den Schülerinnen und Schülern Aufgaben auf ikonischer und auch symbolischer Ebene anzubieten. Dabei kann man sich an folgenden Abläufen orientieren:

- Einführung des Begriffs „Bündeln“ durch eine Lehrerdemonstration
- Bündeln von nicht mathematischem, unstrukturiertem Material
- Bündeln von nicht mathematischem, unstrukturiertem Material mithilfe einer mathematischen Strukturierungshilfe
- Bündeln und Tauschen von mathematisch vorstrukturiertem Material
- Übertrag der Kompetenz des Bündelns von der handelnden Ebene auf die ikonische Ebene und die symbolische Ebene



Zunächst wird das Prinzip des Bündelns eingeführt, bevor dann die Zehnerzahlen bis 100 erarbeitet werden.

### Einführung des Begriffs „Bündeln“ durch eine Lehrerdemonstration

Um den alltagssprachlich nicht gängigen Begriff des Bündels einzuführen, zählt die Lehrkraft z.B. aus einer Menge von 13 Stiften zehn ab und bindet sie mit einem Band zusammen. Dabei versprachlicht sie ihr Tun: „Ich habe zehn Stifte zusammengebunden. Das ist nun ein Bündel, ein Zehnerbündel. Wir bündeln immer zehn zu einem Zehnerbündel.“ Im Anschluss lenkt die Lehrkraft die Aufmerksamkeit der Schülerinnen und Schüler auf die noch verbleibenden drei Stifte: „Drei Stifte sind noch übrig. Drei Einzelne sind noch übrig. Wir können die Einzelnen auch Einer nennen.“

Die entscheidende erste Erkenntnis, die angebahnt wird, ist, dass immer nur zehn Elemente, nicht mehr und nicht weniger, ein Bündel ausmachen. Für diese Bündelung muss den Schülerinnen und Schülern bewusst der Begriff „Zehnerbündel“ angeboten werden. Alle übrigen Elemente werden als „Übrige“ oder „Einzelne“ wahrgenommen und benannt. Für diese Elemente wird den Schülerinnen und Schülern der Begriff „Einer“ angeboten.

Eine zweite Erkenntnis ist, dass dieser Vorgang beliebig oft wiederholt werden kann, solange noch mindestens zehn einzelne Elemente übrig sind. Deshalb ist es wichtig, dass die Lehrkraft große Mengen an Material bereitstellt, sodass der Bündelungsvorgang wiederholt durchgeführt werden kann. Durch dieses strukturierte Zusammenfassen größerer Anzahlen zu Bündeln wird die Bedeutung des „Zehners“ und der „Einer“ deutlich visualisiert und so erfahrbar (GAIDOSCHIK 2019, 163, 167).

Die dritte wichtige Erkenntnis ist, dass es möglich sein kann, dass nach einem abgeschlossenen Bündelungsvorgang keine einzelnen Elemente übrigbleiben, es also null Einer gibt, z. B. bei der Menge 30. Wichtig ist bei ersten Bündelaufgaben, auch eine solche Situation gleich anzubieten.

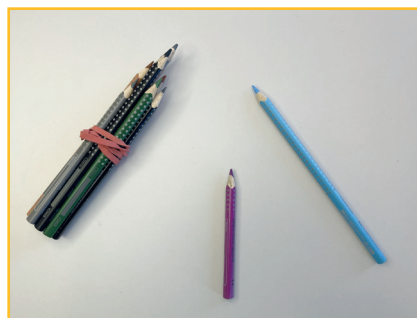
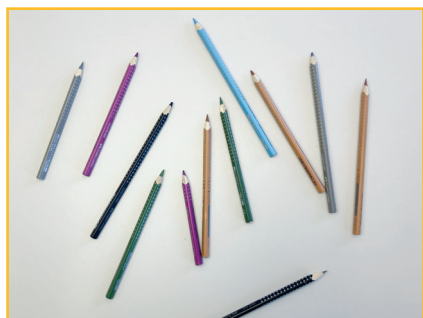
Von Anfang an wird beim Bündeln die richtige Schreibweise der Zahlen angebahnt. Dazu folgt man folgendem Ablauf; hier beschrieben beim handelnden Bündeln der Menge 13:

1. Das Zehnerbündel wird als „Zehner“ und die Einzelnen als „Einer“ bezeichnet. Die Schülerinnen und Schüler sprechen: „Es sind ein Zehner und drei Einer.“
2. Die Schülerinnen und Schüler schreiben auf vorbereitete Kärtchen 1 Z (für Zehner) und 3 E (für Einer) und ordnen sie dem Zehnerbündel und den Einzelnen zu.
3. Nun legt die Lehrkraft das Montessorizahlenkärtchen 10 zum Bündel und das Montessorizahlenkärtchen 3 zu den Einern.
4. Im letzten Schritt fügt sie die beiden Zahlenkärtchen zur Zahl 13 zusammen, wobei die Einerkarte auf die Zehnerkarte gelegt und als Zahl 13 benannt wird.

### Bündeln von nicht mathematischem, unstrukturiertem Material

Die Schülerinnen und Schüler führen Bündelungsaufgaben mit verschiedenen unstrukturierten Materialien durch und beschriften diese wie oben beschrieben mit den entsprechenden Zahlenkärtchen, z. B.:

- 13 Stifte (oder Holzstäbchen, Wäscheklammern) werden mit einem Band oder Einweggummi zu einem Zehnerbündel und drei einzelnen Stiften gebündelt.



Abbildungen 65 und 66: Einführung des Begriffs „bündeln“; ISB

- 13 Muggelsteine (oder Nüsse, Knöpfe etc.) werden zu einem Zehnerhäufchen zusammgelegt und daneben die drei einzelnen Muggelsteine gelegt.
- In einem weiteren Schritt kann das Häufchen in eine Zehnerreihe mit einem kleinen Abstand nach fünf Muggelsteinen gelegt werden.

### Bündeln von nicht mathematischem, unstrukturiertem Material mithilfe einer mathematischen Strukturierungshilfe

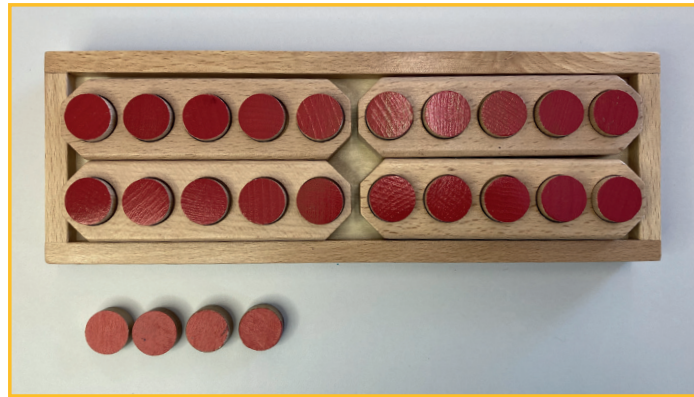
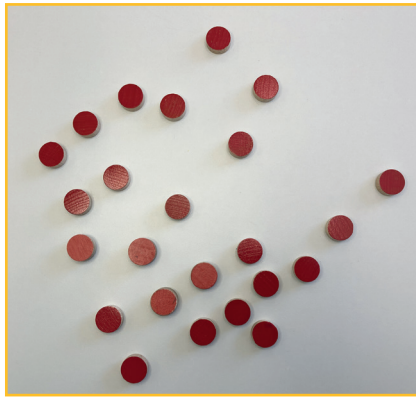


<https://mahiko.dzlm.de/node/306>



Die Schülerinnen und Schüler bündeln unstrukturiertes Material mithilfe einer mathematisch sinnvollen Strukturierungshilfe, die das Dezimalsystem repräsentiert, z. B.:

- 24 Holzplättchen werden in ein Rechenschiffchen gelegt zu 20 Plättchen im Schiffchen und vier einzelnen Plättchen darunter.
- 24 Knöpfe werden in zwei Eierkartons (Zehner-Kartons) verteilt, immer ein Knopf wird in eine Mulde gelegt. Wenn ein Karton voll ist, wird dieser geschlossen und ein weiterer Karton wird herangezogen. Vier einzelne Knöpfe bleiben liegen oder werden alternativ in einen dritten offenen Eierkarton gelegt.



Abbildungen 67 und 68: Ungebündelte und gebündelte Menge mit Zwanzigerschiffchen; ISB

### Bündeln und Tauschen von mathematisch vorstrukturiertem Material

Diese Phase des Bündelns fördert die Erkenntnis, dass zehn einzelne Elemente in ein Element der nächstgrößeren Einheit getauscht werden können. Der Wert bleibt dabei gleich. So können zehn einzelne Würfel in eine Zehnerstange umgewechselt werden, sowie zehn Zehnerstangen in eine Hunderterplatte.

Dies kann beispielsweise spielerisch mit dem Bankspiel nach Montessori erfolgen.

24 einzelne Holzwürfel werden gebündelt und getauscht.

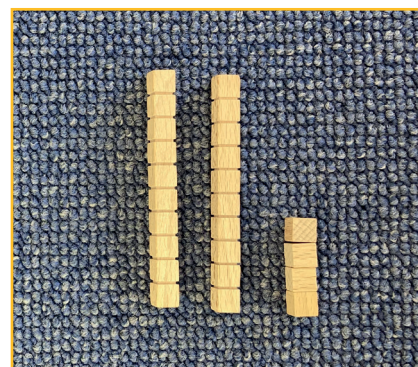
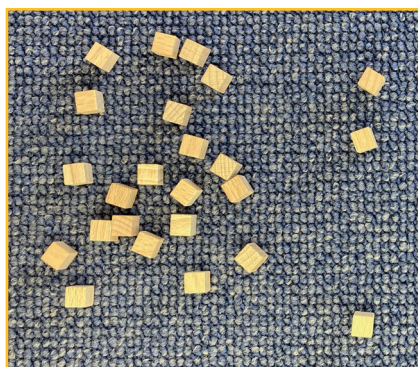
S: „Das sind zehn Einerwürfel. Dafür hätte ich gerne eine Zehnerstange.“

L: „Ah, das sind zehn Einerwürfel, dafür bekommst du eine Zehnerstange, bitte schön.“

S: „Das sind noch einmal zehn Einerwürfel. Dafür möchte ich bitte noch eine Zehnerstange.“

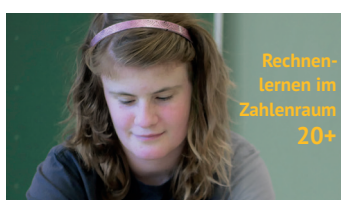
L: „Hierfür bekommst du noch eine Zehnerstange.“

S: Jetzt bleiben vier Einerwürfel übrig.“ Also habe ich zwei Zehnerstangen und vier Einerwürfel. Das sind 20 und 4, also 24.“



Abbildungen 69 und 70: Ungebündelte und gebündelte Menge mit Zehnersystemsatz; ISB

Dieser Vorgang wird mit verschiedenen Mengen wiederholt.



<https://www.isb.bayern.de/schularten/foerderschulen/fz-und-fs/ge/rechnenlernen-im-zahlenraum-20/erklaervideo-mit-schueler-tauschen-und-buendeln/>



Es können Zahlenkärtchen gelegt werden und die Schülerinnen und Schüler legen die entsprechende Menge mit Zehnerstangen und Einerwürfeln dazu.

### Übertrag der Kompetenz des Bündelns von der handelnden Ebene auf die ikonische Ebene und die symbolische Ebene

Im nächsten Schritt wird die Kompetenz des Bündelns auf die ikonische Ebene mittels eines Arbeitsblatts übertragen.

Hier werden Abbildungen von Gegenständen in Zehnerbündel und Einzelne geordnet. Dazu gibt die Lehrkraft den Schülerinnen und Schülern die Hilfestellungen, zehn einzelne nahe beieinander liegende Elemente anzustreichen und schließlich einzukreisen.

Beim Bündeln auf der symbolischen Ebene wandeln die Schülerinnen und Schüler Angaben von z. B. 3 Z (Zehnern) und 2 E (Einern) in Zahlen um, also 32.

### Beispiel für einen Wortspeicher

Wir bündeln.

Einer

Einerwürfel

Zehner

Zehnerstange

### Zehnerzahlen bilden

Haben die Schülerinnen und Schüler die Kompetenz des Bündelns erworben, können die Zehnerzahlen eingeführt werden.

Ausgehend von dem bereits bekannten mathematischen Material, mit dem Zehner bislang dargestellt wurden, werden die bereits bekannten Zehnerzahlen 10 und 20 noch einmal gemeinsam analysiert. Dabei verbalisieren die Kinder und Jugendlichen wiederholend, dass null Einer vorhanden sind sowie ein bzw. zwei Zehner und visualisieren dies mithilfe einer Stellenwerttafel. Zusätzlich werden die Anzahlen als Zahlen sowie Zahlwörter neben die Mengen notiert. Anhand dieser Notation können später Regelmäßigkeiten (-zig) und Besonderheiten (dreißig) in der Reihe der Zehnerzahlen erkannt werden.

Mit dem Hinzufügen eines weiteren Zehners (z. B. eine mit zehn Eiern gefüllten Eierschachtel oder eine Zehnerschachtel) stellt sich die Frage, wie viele Zehner und Einer nun vorhanden sind und wie die zugehörige Zahl benannt wird. Die Schülerinnen und Schüler tragen drei Zehner und null Einer in die Stellenwerttafel ein und formulieren Vorschläge für die Benennung der Zahl. Es ist durchaus wahrscheinlich, dass einzelne Schülerinnen und Schüler aus ihrer Lebensumwelt bereits den Begriff „dreißig“ kennen und diesen nennen. Es kann aber auch der Begriff „dreizig“ genannt werden, der in der Logik der Reihe liegen würde. Die Besonderheit der Zahl dreißig greift die Lehrkraft bei der gemeinsamen Besprechung der Regelmäßigkeiten auf.

Für diese Analyse ist es sinnvoll, alle Mengen und deren Notationen untereinander (z. B. auf dem Boden) zu arrangieren. So können die Schülerinnen und Schüler die Erkenntnisse gewinnen,

- dass alle Zahlen bis auf die Zehn und die Dreißig auf -zig enden,
- ab vierzig die Bezeichnung des Einers plus -zig die Zehnerzahl bildet,
- anstatt „zweizig“ zwanzig, anstatt „sechszig“ sechzig und anstatt „siebenzig“ siebzig gesagt wird,
- zehn und hundert aus der Systematik mit -zig am Ende herausfallen.

Die Lehrkraft führt für diese Zahlenfolge den Begriff der Zehnerzahlen ein.

Da die Endung -zig vor allem bei der Notation drei- und mehrstelliger Zahlen eine hilfreiche Orientierung für den Stellenwert gibt, ist es sinnvoll, diese Endung beim Sprechen deutlich zu betonen und das Sprechen auch zu üben.

In Übungen auf enaktiver, ikonischer und symbolischer Ebene wechseln die Schülerinnen und Schüler zwischen verschiedenen Darstellungsformen der Zehnerzahlen und ordnen diese einander zu. Dabei ist wichtig zu beachten, dass die Notation der Zahlwörter – zwanzig, dreißig etc. – für die Analyse der Regelmäßigkeiten sinnvoll war, diese aber nicht aktiv von den Kindern und Jugendlichen geschrieben werden müssen.

#### **4.5.4 Haben die Schülerinnen und Schüler die Teilkompetenz des Bündelns erfolgreich erworben?**

Diagnostische Leitfragen:

- Bündelt die Schülerin bzw. der Schüler konstant immer genau zehn Elemente?
- Benennt sie oder er das Bündel mit dem Begriff „Zehner“, „Zehnerbündel“ oder „Zehnerstange“ und die einzelnen Elemente zunächst mit dem Begriff „Einzelne“ und schließlich mit „Einer“?
- Benennt die Schülerin oder der Schüler die Zehnerzahlen regelkonform und erkennt diese in verschiedenen Darstellungsformen?

## 4.6 Teilkompetenz: Stellenwerte verstehen

*Hinweis:* Das Verständnis des Bündelns stellt einen Übergang zwischen dem Zahlenraum 20 und einem erweiterten Zahlenraum dar. Aus diesem Grund wurden im Folgenden auch größere Zahlen als 20 verwendet.

### 4.6.1 Was versteht man unter Stellenwertverständnis?

Nach FROMME gilt die flexible Übersetzung zwischen verschiedenen Darstellungen bzw. Repräsentationstypen als Hauptmerkmal des Stellenwertverständnisses (vgl. FROMME 2017, 43). Diese sind Zahldarstellung (anschauliche Materialdarstellung), Zahlwort (verbale Äußerungen) und Zahlzeichen (schriftlich-symbolische Schreibweisen) (FROMME: <https://mahiko.dzlm.de/node/64>, abgerufen am 05.04.2022).

Ist der Aufbau des Stellenwertsystems einmal verstanden, können bei den Schülerinnen und Schülern Zahlvorstellungen zu Zahlen beliebiger Größe entstehen (vgl. <https://pikas-mi.dzlm.de/node/529>, abgerufen am 05.04.2022). Zudem trägt das Verständnis des Dezimalsystems zu einer Vereinfachung von Rechenwegen bei und ist insbesondere bei schriftlichen Rechenverfahren bedeutsam (vgl. <https://mahiko.dzlm.de/node/195>, abgerufen am 05.04.2022).

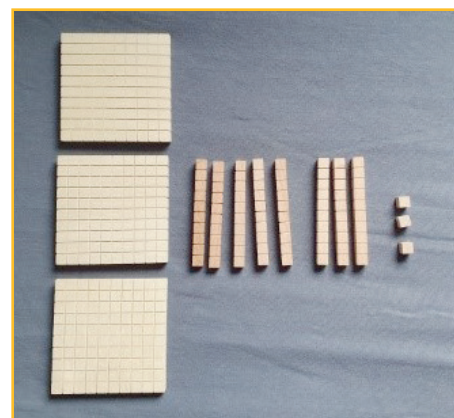
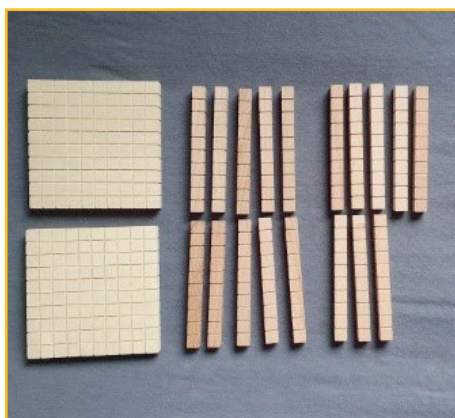
Dem Stellenwertsystem liegen folgende vier Prinzipien zugrunde:

#### Stellenwert- oder Positionsprinzip

Der Wert einer Ziffer wird durch ihre Position innerhalb einer Zahl bestimmt (z. B. hat die 5 in 52 einen anderen Wert als in 35) (vgl. <https://pikas-mi.dzlm.de/node/529>, abgerufen am 11.06.2022).

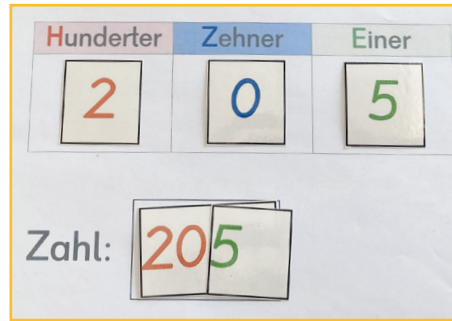
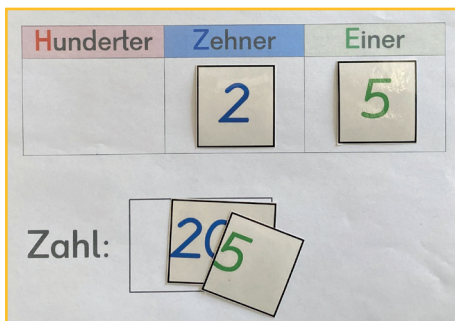
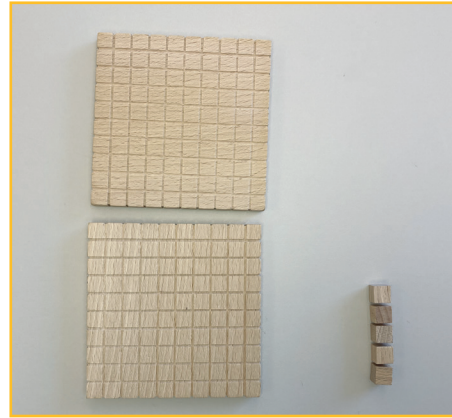
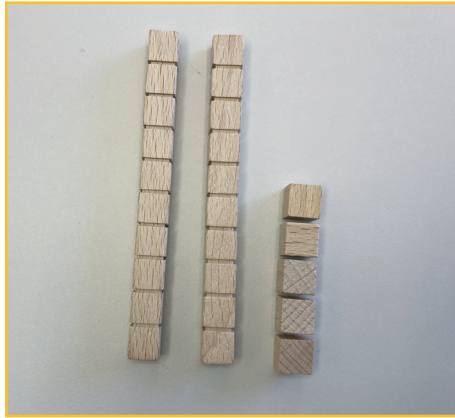
#### Bündelungsprinzip

Zehn Elemente werden zu einem Bündel höherer Ordnung zusammengefasst. Dies wird so lange wiederholt, bis es keine weiteren Bündelungen mehr gibt (fortgesetzte Bündelung) (vgl. SCHÄFER 2020, 110 f.).



Abbildungen 71 und 72: Tausch von zehn Zehnerstangen in eine Hunderterplatte; ISB

Jede Ziffer transportiert also Informationen über die Anzahl der einzelnen Bündel sowie über die Mächtigkeit der jeweiligen Bündel. Wird eine Stelle nicht besetzt, so fungiert die Null als Platzhalter (z. B. 25 oder 205) (<https://pikas-mi.dzlm.de/node/529>, abgerufen am 05.04.2022).



Abbildungen 73 – 76: Bedeutung der Null im Stellenwertsystem; ISB

### Additives Prinzip

Die Summe der Einzelwerte der Stellen ergibt die Gesamtsumme der Zahl, z. B.  $20 + 5 = 25$ .

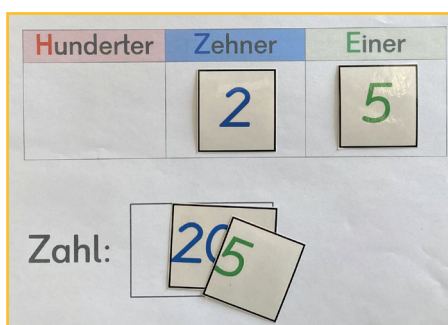


Abbildung 77: Additives Prinzip des Stellenwertsystems; ISB

### Multiplikatives Prinzip

Die Mächtigkeit der einzelnen Bündel wird durch jede Ziffer einer Zahl dargestellt. In 25 symbolisiert die 2 zwei Zehnerbündel und die 5 fünf ungebündelte Einer.  $25 = 2 \cdot 10 + 5 \cdot 1$  (vgl. ROSS 1989, zitiert nach SELTER et al. 2014, 30).

## 4.6.2 Welche Bedeutung hat das Verständnis des Stellenwertsystems?

*„Das Besondere, Fundamentale an der Stellenwertdarstellung von Zahlen als Symbolik ist ihre höchst effiziente Systematik. Mit einer endlichen Anzahl von Ziffern (in unserem Dezimalsystem zehn) kann jede Zahl (bis ins Unendliche) unter Nutzung des Schreibraumes (Stelle) eindeutig dargestellt werden. Die Kinder können hier eine Ahnung von der Unendlichkeit der Zahlenwelt verspüren.“ (WINTER 2001, 2)*

## 4.6.3 Besitzen die Schülerinnen und Schüler die notwendigen Vorläuferkompetenzen für das Stellenwertverständnis?

Diagnostische Leitfragen:

- Benennt die Schülerin bzw. der Schüler die Ziffern 0 bis 9 richtig und erkennt sie als geschriebene Zahlen?
- Stellt die Schülerin bzw. der Schüler Mengen bis 10 korrekt her?
- Zählt die Schülerin bzw. der Schüler Mengen bis 10 ab?
- Verbindet die Schülerin bzw. der Schüler „nichts“ mit der Zahl Null?
- Versteht die Schülerin bzw. der Schüler, dass Mengen aus Teilmengen zusammengesetzt werden können (Teil-Ganzes-Konzept)?

Es ist zu beachten: Es ist nicht notwendig, dass die Schülerin bzw. der Schüler den Zahlenraum bis 10 bereits automatisiert hat, um sich ein Verständnis des Stellenwertsystems erarbeiten zu können. Im Gegenteil können große Zahlenräume sogar motivieren, sich weiterhin intensiv mit Zahlen und Zählen zu befassen, anstatt über mehrere Jahre im Zahlenraum bis 10 zu verharren.

## 4.6.4 Wie fördert man das Stellenwertverständnis?

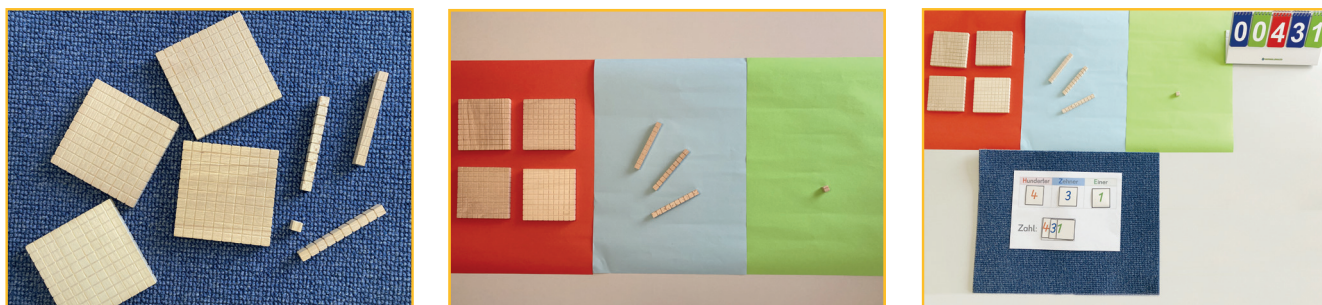
GAIDOSCHIK empfiehlt grundsätzlich eine Trennung von Schreib- und Sprechweise (2019, 168). Zunächst sollte sich darauf konzentriert werden, wie gebündelte Mengen notiert werden können, bevor thematisiert wird, wie die Zahlen heißen und ausgesprochen werden.

Die Lehrkraft hält die Schülerinnen und Schüler dazu an, folgendermaßen zu sprechen: „Das sind zwei Zehner und fünf Einer.“ Das Prinzip, dass diese Zahl als 25 bezeichnet wird, sollte zunächst vernachlässigt werden. Nennt eine Schülerin oder ein Schüler die korrekte Zahlbezeichnung, so bestätigt die Lehrkraft diese, geht jedoch nicht tiefer darauf ein.

Das Material sollte immer sortiert werden: Einer ganz rechts, dann links davon Zehner, dann Hunderter etc. (<https://pikas-mi.dzlm.de/node/636>, abgerufen am 05.04.2022).



Hilfreich sind farbige Sortiervorlagen, z. B. nach Montessori. Auch beim Eintragen in eine Stellenwerttafel können die Farben bei der Strukturierung helfen.



Abbildungen 78 – 80: Strukturierungshilfen für die Arbeit mit Stellenwertsystemen; ISB

Es sollte beim Notieren der Zahlen unbedingt auf die Schreibrichtung von links nach rechts geachtet werden (Einer zum Schluss schreiben), da dies wichtig für die Arbeit mit dem Taschenrechner ist. Hierbei wird der Vorgang versprachlicht und die inverse Sprechweise (s. u.) kann thematisiert werden. Zum Beispiel: „Ich habe zwei Zehner und fünf Einer. Ich schreibe eine Zwei und eine Fünf. Die Zahl heißt Fünfundzwanzig.“

Nicht nur zu Motivationszwecken, sondern vor allem um ein tiefes Verständnis für das Stellenwertsystem zu erreichen, sollte das Bündeln und Notieren nicht rein auf den Zahlenraum bis 20 beschränkt werden. Sobald die Ziffern bis 9 verinnerlicht sind, kann das Ergebnis auch bei mehr als zwei Zehnern notiert werden (GAIDOSCHIK 2019, 167). Ein Alltagsbezug zu größeren Mengen kann z. B. bei der täglichen Thematisierung des Datums hergestellt werden.

Das Prinzip der fortgesetzten Bündelung ist insbesondere in großen Zahlenräumen (ab 1 000) erkennbar (GAIDOSCHIK 2019, 162; <https://pikas-mi.dzlm.de/node/529>, abgerufen am 05.04.2022).

Um zwischen den Zahldarstellungen zu wechseln, ist eine große Flexibilität vonnöten. Diese stellt für Schülerinnen und Schüler mit dem Förderbedarf geistige Entwicklung mitunter eine Herausforderung dar.

Ist nicht verstanden, dass die Null „nichts“ symbolisiert, kann die Dringlichkeit der Null als Platzhalter nicht nachvollzogen werden.



Abbildungen 81 – 83: Bedeutung der Null an verschiedenen Positionen im Stellenwertsystem; ISB

### Das muss man im Blick behalten:

Eine große Hürde stellt im Deutschen die inverse Sprechweise (**fünf-und-achtzig = 85**) dar. Diese birgt vor allem die Gefahr von Zahlendrehern (GAIDOSCHIK 2019, 171 f.; <https://primakom.dzlm.de/node/283>, abgerufen am 05.04.2022). Um Fehlern entgegenzuwirken, können die Lernenden zunächst die Zahl in die Stellenwerte zerlegen („37 – ich höre 30, also drei Zehner und sieben, also sieben Einer“ → 3Z 7E → 37).

Auch wenn die Bildung der Zahlwörter einer gewissen Regelmäßigkeit folgt, gibt es einige Ausnahmen (z. B. zwanzig – dreißig, elf, zwölf, sechzehn – sechsundzwanzig) (vgl. <https://pikas-mi.dzlm.de/node/529>, abgerufen am 05.04.2022).



<https://mahiko.dzlm.de/node/321>



Auch wenn der Zahlenstrahl zunächst nicht die „Kraft der 10“ bedient, kann er zum Stellenwertverständnis beitragen, wenn an ihm Strecken mithilfe von Zehner- bzw. Einerstrecken gelegt werden. So können beispielsweise zwei Zahlen verglichen werden:

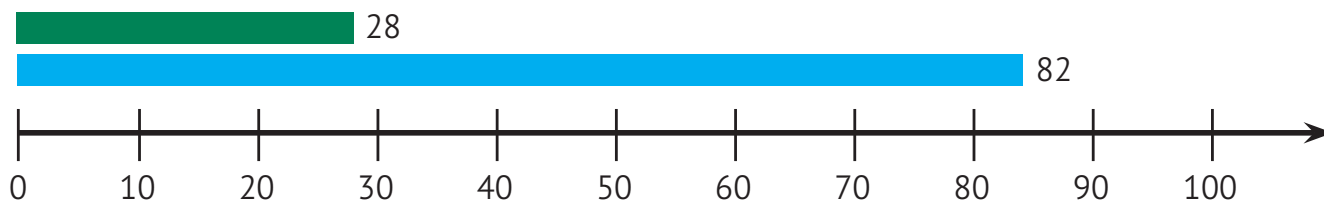


Abbildung 84: Zahlenstrahl: <http://www.recheninstitut.at/wp-content/uploads/2011/10/Abb-ZR100-4.jpg>, abgerufen am 05.04.2022

Im obenstehenden Beispiel werden zwei Zehner- und acht Einerstrecken mit acht Zehner- und zwei Einerstrecken verglichen (<http://www.recheninstitut.at/mathematische-lernschwierigkeiten/fordertips/zahlenraum-100/>, abgerufen am 05.04.2022).

Sehen Schülerinnen und Schüler Ziffern lediglich als Teil einer Zahlenreihe, so „unterscheidet sich ‚10‘ nicht grundsätzlich von ‚9‘ oder ‚11‘“ (<http://www.recheninstitut.at/mathematische-lernschwierigkeiten/fordertips/zahlenraum-100/>, abgerufen am 05.04.2022). Es wird in der Reihe weitergezählt, jedoch nicht verinnerlicht, was ein „Zehner“ ist.

Wird permanent mit einer Farbcodierung für die Stellenwerte gearbeitet, besteht die Gefahr, dass diese lediglich auswendig gelernt wird, ohne den Sinn der Sortierung zu verstehen. Im Lauf des

Lernprozesses sollten die Schülerinnen und Schüler sich also von farblichen Codierungen und vom Material ablösen (vgl. 4-Phasen-Modell nach WARTHA & SCHULZ). Um die Verknüpfung zwischen den Repräsentationsebenen zu schulen, sollten die Werte auch abstrahiert dargestellt werden.

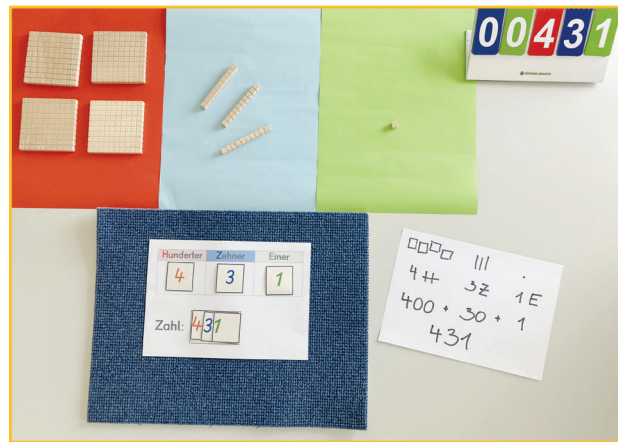


Abbildung 85: Beispiele verschiedener Repräsentationsebenen; ISB

### Beispielhafte Übungen

- Strukturierte Materialien nach Stellenwerten sortieren



<https://www.isb.bayern.de/schularten/foerderschulen/fz-und-fs/ge/rechnenlernen-im-zahlenraum-20/erklervideo-mit-schueler-stellenwert-sortieren/>



- Strukturiertes Material nach Zahlenkärtchen legen
- Arbeit mit Stellenwert-Würfeln: Es wird gewürfelt und die passende Anzahl mit Material gelegt, die Wertigkeit wird in die Stellenwerttafel eingetragen und die Zahl notiert.



Abbildung 86: Arbeiten mit Stellenwertwürfeln; ISB



<https://www.isb.bayern.de/schularten/foerderschulen/fz-und-fs/ge/rechnenlernen-im-zahlenraum-20/erklaervideo-mit-schueler-stellenwerte-wuerfeln/>



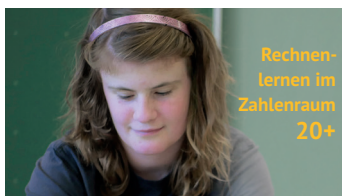
- Zahlen einstellen nach Mengenvorgabe



<https://www.isb.bayern.de/schularten/foerderschulen/fz-und-fs/ge/rechnenlernen-im-zahlenraum-20/erklaervideo-mit-schueler-zahlen-einstellen-nach-mengenvorgabe/>



- Zahlen einstellen mit Augenmerk auf der Null



<https://www.isb.bayern.de/schularten/foerderschulen/fz-und-fs/ge/rechnenlernen-im-zahlenraum-20/erklaervideo-mit-schueler-zahlen-einstellen-mit-der-null/>



- „Rätsel“, z. B. in Partnerarbeit: Es wird eine Zahl beschrieben (z. B. „Meine Zahl hat vier Zehner und keinen Einer. Wie heißt sie?“) oder umgekehrt wird eine Zahl gesagt und vom Ratenden die Anzahl an Zehnern und Einern genannt („34.“ → „Da braucht man drei Zehner und vier Einer.“).



<https://www.isb.bayern.de/schularten/foerderschulen/fz-und-fs/ge/rechnenlernen-im-zahlenraum-20/erklaervideo-mit-schueler-zahlen-einstellen-und-mengen-legen-nach-akustischer-ansage/>



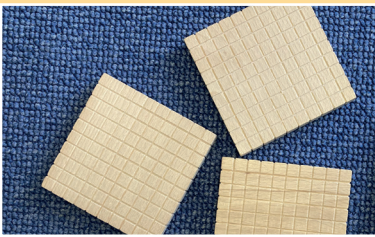

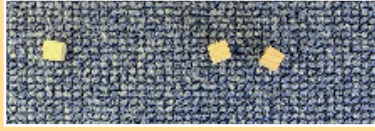
- Quartett: Es werden Quartettkärtchen erstellt, um die Flexibilität der Übersetzung zwischen den Darstellungen zu fördern.

199	<table border="1"> <tr><th>T</th><th>H</th><th>Z</th><th>E</th></tr> <tr><td>1</td><td>9</td><td>9</td><td></td></tr> </table>	T	H	Z	E	1	9	9		$100 + 90 + 9$	
T	H	Z	E								
1	9	9									
330	<table border="1"> <tr><th>T</th><th>H</th><th>Z</th><th>E</th></tr> <tr><td></td><td>3</td><td>3</td><td>0</td></tr> </table>	T	H	Z	E		3	3	0	$300 + 30$	
T	H	Z	E								
	3	3	0								

Abbildung 87: Quartettkärtchen (SELTNER et al. 2014, 23)

### Beispiel für einen Wortspeicher

Wir bündeln.

Hunderter

Zehner


Einer

Hunderterplatte


Zehnerstange

Einerwürfel


<b>H</b> underter	<b>Z</b> ehner	<b>E</b> iner



Spalte



Spalte



Spalte

## Weiterführende Informationen des DZLM:



<https://mahiko.dzlm.de/node/64>



<https://mahiko.dzlm.de/node/195>



### 4.6.5 Haben die Schülerinnen und Schüler die Teilkompetenz des Stellenwertverständnisses erfolgreich erworben?

Diagnostische Leitfragen:

- Bündelt und entbündelt die Schülerin bzw. der Schüler korrekt?
- Sortiert die Schülerin bzw. der Schüler didaktisches Material nach Stellenwerten? Gelingt ihr bzw. ihm dies auch ohne eine Farbcodierung?
- Verwendet die Schülerin bzw. der Schüler Fachbegriffe (Einerwürfel, Zehnerstange etc.) sowohl passiv als auch aktiv korrekt?
- Orientiert sich die Schülerin bzw. der Schüler in den einzelnen Stellen der Stellenwerttafel?
- Wandelt die Schülerin bzw. der Schüler Mengendarstellungen (konkretes Material oder bildliche Darstellung davon) in abstrahierte Zahldarstellungen mit Strichen und Punkten um?
- Legt die Schülerin bzw. der Schüler gesprochene Zahlen mit konkretem Material nach oder zeichnet sie als ikonische oder symbolische Darstellungen?
- Benennt die Schülerin bzw. der Schüler die Zahlen entsprechend der Stellenwerte ohne „Zahlendreher“ richtig?
- Notiert die Schülerin bzw. der Schüler Zahlen in Schreibrichtung von links nach rechts, beginnend mit dem höchsten Stellenwert, ohne dass „Zahlendreher“ auftreten?
- Tippt die Schülerin bzw. der Schüler Zahlen korrekt in den Taschenrechner ein?

## 4.7 Teilkompetenz: Grundvorstellungen von Rechenoperationen nutzen: Addition und Subtraktion

### 4.7.1 Was versteht man unter Grundvorstellungen von Rechenoperationen?

Als Grundvorstellungen von Rechenoperationen bezeichnet man die „Fähigkeit, die Bedeutungsvielfalt von Rechenoperationen zu erfassen“ (SELTER, ZANNETIN 2021, 45).

Zu jeder Operation gibt es verschiedene Grundvorstellungen (vgl. FROMME, WARTHA, BENZ 2011), die durch Situationen, Rechengeschichten oder bildliche Darstellungen angemessen repräsentiert werden sollten (vgl. GÖTZE, SELTER, ZANNETIN 2020, 43).

Die Rechenoperationen Addition und Subtraktion werden als Veränderungen von Mengen verstanden.

In der folgenden Übersicht werden die zentralen Grundvorstellungen zu den zwei Grundrechenarten Addition und Subtraktion anhand von Beispielen aufgeführt. Es existieren noch weitere, hier werden aber nur die für Schülerinnen und Schüler relevanten Grundvorstellungen angeführt.

ADDITION	SUBTRAKTION
<p>Beim Hinzufügen wird einer Menge von Objekten eine weitere hinzugefügt.</p> <p><i>Finn hat zwei Steine. Er bekommt drei Steine geschenkt. Wie viele Steine hat er jetzt?</i></p>	<p>Beim Abziehen werden Objekte von einer Menge weggenommen, so dass ein Rest entsteht.</p> <p><i>Marilena hat 15 Stifte. Sie verschenkt fünf davon. Wie viele Stifte hat sie jetzt?</i></p>
<p>Beim Zusammenfassen werden zwei Mengen zusammengelegt.</p> <p><i>Finn hat zwei Steine. Mila hat drei Steine. Wie viele Steine haben sie zusammen?</i></p>	<p>Beim Ergänzen wird ein Unterschied dynamisch bestimmt.</p> <p><i>Marilena hat zehn Puzzleteile zusammengesetzt. Das Puzzle hat insgesamt 15 Teile. Wie viele Teile fehlen noch?</i></p>
<p>Beim Vergleichen werden zwei Mengen durch Addition verglichen.</p> <p><i>Finn baut einen Turm aus zwei Steinen. Mila hat einen Stein mehr auf ihrem Turm. Wie viele Steine hat Mila?</i></p>	<p>Beim Vergleichen wird ein Unterschied statisch bestimmt.</p> <p><i>Marilena hat vier Kekse. Emilian hat sechs Kekse. Wie viele Kekse hat Marilena mehr als Emilian?</i></p>

(Vgl. SELTER, ZANNETIN 2021, 47)

Kinder und Jugendliche müssen diese Grundvorstellungen nicht aktiv unterscheiden können. Allerdings sollten sie Aufgaben, denen diese Grundvorstellungen zugrunde liegen, lösen können.

Wichtig ist auch, dass Kinder und Jugendliche Additions- oder Subtraktionsaufgaben nicht nur automatisiert wiedergeben, sondern in verschiedenen Darstellungsformen erkennen oder selbst abbilden können. Dafür müssen sie zwischen den Darstellungsformen „Handlung“, „Bilder“, „Sprache“ und „Mathesprache“ wechseln können. Die Fähigkeit zum Darstellungswechsel zeigt sich darin, „zwischen [...] verschiedenen „Sprachen“ hin- und herübersetzen zu können, also Verbindungen herstellen zu können zwischen konkreten, häufig in Alltagssprache beschriebenen, (Alltags-) Situationen und mathematischen Symbolen und Rechenoperationen“ (GERSTER, SCHULTZ 2004, 388).

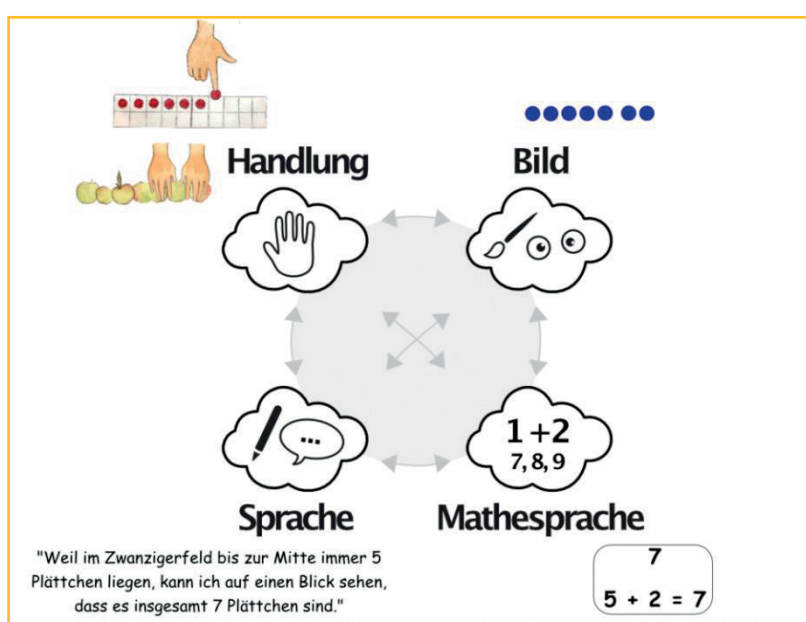


Abbildung 88: Wechsel zwischen mathematischen Darstellungen (<https://pikas-kompakt.dzlm.de/node/41>, abgerufen am 05.10.2022)

Wichtig bei allen Aktivitäten zum Darstellungswechsel ist es, über diese zu reflektieren und zu reden. Man könnte also sagen, man leitet die Schülerinnen und Schüler zum „lauten Denken“ an. Denn eine Handlung mit Material oder das Zeichnen eines Bildes allein entwickelt noch keine tragfähige Vorstellung, sondern erst das Nachdenken darüber. Dabei ist es sinnvoll, Kinder Abbildungen selbst deuten zu lassen und keinesfalls eine Deutung als „die richtige“ vorzugeben. Zu einer Abbildung können sich auch verschiedene Rechnungen finden lassen, die mit einer entsprechenden Begründung alle ihre Berechtigung haben können (vgl. GAIDOSCHIK 2007, 79 f.).



#### 4.7.2 Welche Bedeutung haben die Grundvorstellungen der Rechenoperationen Addition und Subtraktion für das Rechnenlernen?

Die Grundvorstellungen von Addition und Subtraktion ermöglichen erst den Umgang mit Mengenveränderungen. Auf ihnen bauen außerdem die Grundvorstellungen für die Rechenoperationen von Multiplikation und Division sowie für halbschriftliche und schriftliche Rechenverfahren in größeren Zahlenräumen auf.

#### 4.7.3 Besitzen die Schülerinnen und Schüler die für das Operationenverständnis notwendigen Vorläuferkompetenzen?

Diagnostische Leitfragen:

- Ist das Teil-Ganzes-Konzept bei der Schülerin bzw. dem Schüler bereits ausgebildet?
- Erkennt die Schülerin bzw. der Schüler an verschiedenen Begriffen (z. B. dazulegen), welche Handlungen beschrieben werden?
- Kann die Schülerin bzw. der Schüler Mengen mit Material herstellen bzw. Objekte korrekt abzählen?
- Hat die Schülerin bzw. der Schüler tragfähige mentale Mengenvorstellungen?

#### 4.7.4 Wie fördert man die Grundvorstellungen der Rechenoperationen Addition und Subtraktion?

Es ist wichtig darauf zu achten, die einzelnen Grundvorstellungen klar voneinander getrennt zu behandeln (vgl. Tabelle oben).

- Um die Schülerinnen und Schüler mit einer Grundvorstellung (z. B. Zusammenfassen) vertraut zu machen, führt die Lehrkraft die dazugehörige Operation mit wenig Material (zwei blaue Steine von Finn und drei rote Steine von Mila) und in einer übersichtlichen Situation durch und begleitet ihre Handlungen sprachlich („Zusammen haben sie ...“). Die Kinder und Jugendlichen beobachten die Handlung und beschreiben sie im Anschluss zunächst mit ihren eigenen Worten, bevor sie unter Anleitung der Lehrkraft zunehmend die zentralen Fachbegriffe („zusammen“) verwenden.
- Es ist wichtig, dass die Schülerinnen und Schüler im Anschluss daran selbst tätig werden und sowohl Handlungen und Darstellungen interpretieren als auch solche erfinden, erzählen oder malen. Dabei ist zu beachten, dass Darstellungen selten eindeutig zu verstehen sind. Im Sprechen über die Rechensituation können die Kinder und Jugendlichen ihre eigenen Interpretationen erläutern und der Lehrkraft dadurch wichtige Rückmeldungen zum Verständnis der Grundvorstellung geben.

- Das Aufzeichnen von Handlungen bedarf bei Schülerinnen und Schülern mit geistiger Behinderung sicherlich einer besonderen Übung und didaktischen Reduktion. Hier ist es sinnvoll, wenn beispielsweise ein fester Rahmen vorgegeben wird, z. B. ein Tisch, auf den Teller eingezeichnet werden oder ein Schwimmbecken, in das Köpfe gemalt werden. Zudem können vereinfachte Formen zum Zeichnen angeboten werden: Kreise als Symbol für Menschen (Kopf) oder Striche für z. B. Besteck. Alternativ könnten auch Situationen konkret gelegt und dann mit einem digitalen Endgerät fotografiert werden.
- Die Lehrkraft verwendet ausreichend Zeit für die Handlungen, deren bildliche Darstellung und vor allem deren verbale Beschreibung, bevor sie die zur Grundvorstellung passende Notation mit Rechenzeichen thematisiert. Dabei wird die Notation ( $2 + 3 = 5$ ) sozusagen als Protokoll der Handlung oder Situation verstanden und vermittelt.
- Haben die Schülerinnen und Schüler eine Grundvorstellung stabil verinnerlicht, bietet die Lehrkraft ihnen eine weitere an.
- Außerdem werden die Grundvorstellungen und Rechenoperationen in sinnvoll strukturierten Übungen trainiert. Dazu gehört auch, Tausch-, Umkehr-, und Platzhalteraufgaben zu üben, um mechanischem Rechnen vorzubeugen und die Grundvorstellungen der Rechenoperationen tiefer zu durchdringen.

$4 + 2 = 6$		$4 - 2 = 2$	
plus	zusammen sind es	minus	
dazutun	jetzt sind es	wegnehmen	jetzt sind es
dazukommen	ist gleich	abziehen	ist gleich
	Ergebnis		Ergebnis

#### Weiterführende Informationen des DZLM:



<https://mahiko.dzlm.de/node/307>





<https://mahiko.dzlm.de/node/109>



<https://mahiko.dzlm.de/node/104>



#### 4.7.5 Haben die Schülerinnen und Schüler die Teilkompetenz „Grundvorstellungen von Rechenoperationen nutzen“ erfolgreich erworben?

Diagnostische Leitfragen:

- Verknüpft die Schülerin bzw. der Schüler mit den Rechenzeichen entsprechende Handlungen?
- Benennt die Schülerin bzw. der Schüler die Rechenzeichen richtig?
- Übersetzt die Schülerin bzw. der Schüler Rechensituationen in verschiedene Darstellungsformen?
- Hält die Schülerin bzw. der Schüler die korrekte Notationsform von Operationen ein?
- Geht die Schülerin bzw. der Schüler flexibel mit Platzhalteraufgaben um?

### 4.8 Teilkompetenz: Rechenstrategien anwenden

#### 4.8.1 Was versteht man unter dem Anwenden von Rechenstrategien?

SCHÄFER spricht in Bezug auf die Addition und Subtraktion von drei wesentlichen Grundstrategien, die bei der Lösung der Operationen genutzt werden können.

Dies sind

- sog. informelle Strategien,
- heuristische Strategien und auch
- das Anwenden von Auswendigwissen sowie
- Mischformen aus den genannten mathematischen Vorgehensweisen.

Dabei ist zu beachten, dass hier nicht hierarchisch von einer „Abfolge einander ablösender Strategien“ (SCHÄFER 2020, 112) auszugehen ist, jedoch in der Regel anfangs das informelle Vorgehen beim Lösen von Additions- und Subtraktionsaufgaben im Mittelpunkt steht. Geschicktes Rechnen anhand von heuristischen Strategien muss aufgrund der höheren kognitiven Anforderung nach SCHÄFER gezielt initiiert und mit den Schülerinnen und Schülern intensiv geübt und angewendet werden (vgl. SCHÄFER 2020, 112 und GAIDOSCHIK 2021, 131).

#### **4.8.2 Welche Bedeutung haben Rechenstrategien für das Rechnenlernen?**

Mithilfe von Rechenstrategien lässt sich das Tempo beim Lösen von Aufgaben erhöhen und lassen sich komplexere Aufgaben auch ohne halbschriftliche oder schriftliche Rechenverfahren im Kopf lösen.

#### **4.8.3 Besitzen die Schülerinnen und Schüler die für das Anwenden von Rechenstrategien notwendigen Vorläuferkompetenzen?**

Diagnostische Leitfragen:

- Ist das Teil-Ganzes-Konzept bei der Schülerin bzw. dem Schüler bereits ausgebildet?
- Erkennt die Schülerin bzw. der Schüler an verschiedenen Begriffen (z. B. dazulegen), welche Handlungen beschrieben werden?
- Kann die Schülerin bzw. der Schüler Mengen mit Material herstellen bzw. Objekte korrekt abzählen?
- Hat die Schülerin bzw. der Schüler tragfähige mentale Mengenvorstellungen?

#### **4.8.4 Wie fördert man das Anwenden von Rechenstrategien?**

Folgende Rechenstrategien sind geläufig für das Rechnen im Zahlenraum 20+. Die zählenden Strategien können als die leichtesten angesehen werden, während die heuristischen deutlich anspruchsvoller sind und vor allem das Prinzip des gegensinnigen Veränderns eine große intellektuelle Flexibilität verlangt.

## Rechenstrategien zur Lösung von Additionsaufgaben

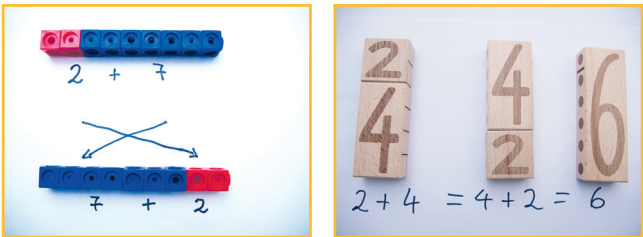
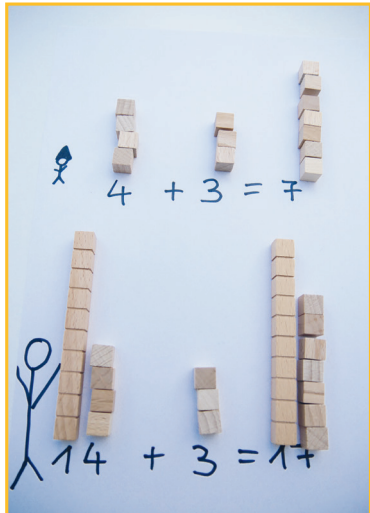
Informelle Strategien	
Alles Zählen	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Vollständiges Auszählen: Die Summe wird durch vollständiges Auszählen der Teilmengen bestimmt.</li> </ul>
Weiterzählen	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Weiterzählen vom ersten Summanden aus</li> <li>• Weiterzählen vom größeren Summanden aus (nach Anwendung des Kommutativgesetzes)</li> <li>• Weiterzählen vom größeren Summanden aus in größeren Schritten, z. B. in Zweierschritten:</li> <li>• <math>6 + 8 = 8 + 2 + 2 + 2 = 14</math></li> </ul>
Heuristische Strategien	
Anwenden des Kommutativgesetzes 	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Nutzen von Tauschaufgaben: Die Positionen der Summanden werden getauscht, da es leichter ist, vom größeren Summanden aus weiterzuzählen, z. B.: <math>2 + 7 = 7 + 2</math>.</li> </ul>
Anwenden von Analogieaufgaben 	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Nutzen von analogen Aufgabenstrukturen (kleine Aufgabe – große Aufgabe), z. B.: <math>4 + 3 = 7</math> und <math>14 + 3 = 17</math></li> </ul>

Abbildung 91: Darstellung von Analogien; ISB

## Verdoppeln

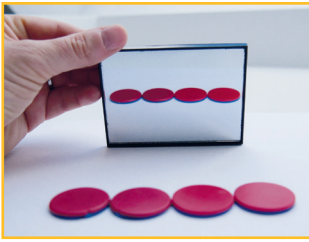


Abbildung 92: Verdoppeln mit Hilfe eines Spiegels; ISB

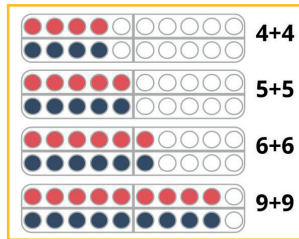


Abbildung 93: Zwanzigerfeld (<https://mahiko.dzlm.de/1-schuljahr-%E2%80%93-%C3%BCberblick/sicher-im-1-plus-1/grundlagen>, abgerufen am 04.05.2023)

- Nutzen der Ergebnisse von Verdoppelungsaufgaben, da diese aufgrund ihrer Prägnanz gut auswendig gelernt werden können, z. B.:  $4 + 4 = 8$  oder  $5 + 5 = 10$ .

## Nutzen von Nachbaraufgaben

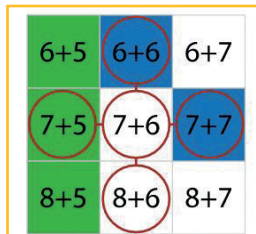


Abbildung 94: Ausschnitt aus 1+1-Tafel (<https://mahiko.dzlm.de/1-schuljahr-%E2%80%93-%C3%BCberblick/sicher-im-1-plus-1/grundlagen>, abgerufen am 04.05.2023)

- Nutzen eines bekannten Rechenergebnisses einer Nachbaraufgabe, z. B.:  $6 + 6 = 12$  dann ist  $7 + 6 = 13$

## Nutzen von Partneraufgaben

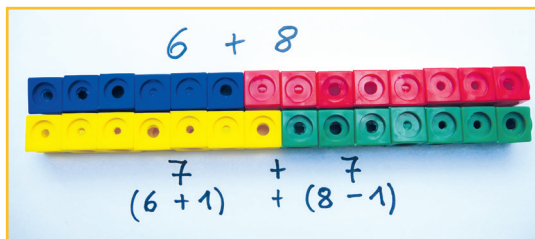


Abbildung 95: Material zur Erklärung von Nachbaraufgaben; ISB

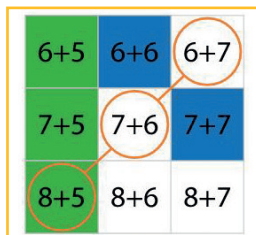


Abbildung 96: Ausschnitt aus 1+1-Tafel: <https://mahiko.dzlm.de/1-schuljahr-%E2%80%93-%C3%BCberblick/sicher-im-1-plus-1/grundlagen>, abgerufen am 04.05.2023

- Nutzen eines bekannten Ergebnisses einer Partneraufgabe mithilfe gegensinniger Veränderung: Der erste Summand wird z. B. um 1 erhöht und der zweite Summand um 1 reduziert, das Ergebnis bleibt gleich ( $+1 / -1$ ), z. B.:  $7 + 7 = 14$ , dann ist  $8 + 6 = 14$

### Schrittweises Rechnen

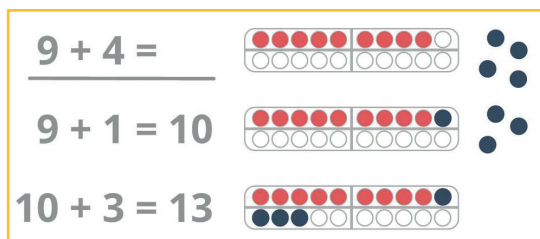


Abbildung 97: Schrittweises Addieren: <https://mahiko.dzlm.de/1-schuljahr-%E2%80%93-%C3%BCberblick/zahlen-zerlegen/grundlagen>, abgerufen am 04.05.2023

- Ergänzen bis zum vollen Zehner (Zehnerstopp) und dann Addieren der Restmenge, z. B.:  $9 + 4 = 9 + 1 + 3$
- Lösen der Aufgabe durch Anwenden von erlernten Strategien, z. B. Verdoppeln:  $6 + 8 = 6 + 6 + 2$

### Auswendigwissen

#### Anwenden von Auswendigwissen

- Lösen von Operationen mittels automatisierter Rechenergebnisse (meist im Zahlenraum bis 10)

(Vgl. GAIDOSCHIK 2021, 108 ff. und SCHÄFER 2020, 112 ff.)

### Rechenstrategien zur Lösung von Subtraktionsaufgaben

#### Informelle Strategien

##### Zählen mit Materialeinsatz

- Wegnehmen: Vom Minuenden wird der Subtrahend weggenommen und die verbleibende Menge ausgezählt.
- Ergänzen: Der Subtrahend wird bis zum Minuenden ergänzt und die gelegte Differenz bestimmt.
- Rückwärtszählen (um eine gegebene Anzahl von Schritten)
- Rückwärtszählen (bis zu einer gegebenen Zahl)
- Vorwärtszählen

##### Reines Zählen

#### Heuristische Strategien

##### Nutzen von Analogieaufgaben

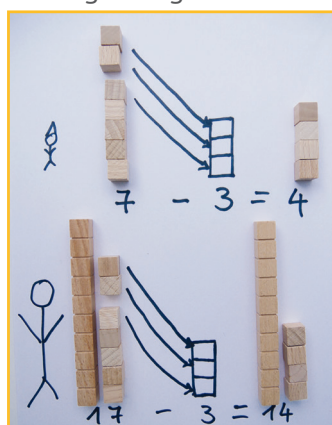


Abbildung 98: Darstellung zur Erklärung von Analogien; ISB

- Nutzen von analogen Aufgabenstrukturen (kleine Aufgabe – große Aufgabe), z. B.:  $7 - 3 = 4$ , dann ist  $17 - 3 = 14$

## Halbieren

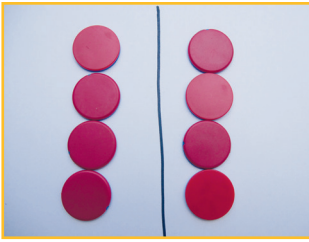


Abbildung 99: Darstellung zur Erklärung des Halbierens; ISB

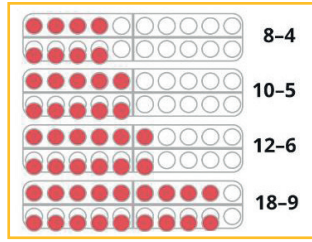


Abbildung 100: Zwanzigerfeld: <https://mahiko.dzlm.de/1-schuljahr-%E2%80%93-%C3%BCberblick/sicher-im-1-minus-1/grundlagen>, abgerufen am 04.05.2023

- Nutzen der Ergebnisse von Halbierungsaufgaben, da diese aufgrund ihrer Prägnanz gut auswendig gelernt werden können, z. B.:  
 $8 - 4 = 4$  oder  $10 - 5 = 5$

## Nutzen von Nachbaraufgaben

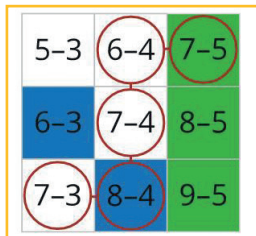


Abbildung 101: Ausschnitt aus 1-1-Tafel: <https://mahiko.dzlm.de/1-schuljahr-%E2%80%93-%C3%BCberblick/sicher-im-1-minus-1/grundlagen>,

- Nutzen eines bekannten Rechenergebnisses einer Nachbaraufgabe, z. B.:  $7 - 5 = 2$ , dann ist  $7 - 4 = 3$  oder  $8 - 4 = 4$ , dann ist  $8 - 5 = 3$

## Nutzen von Partneraufgaben

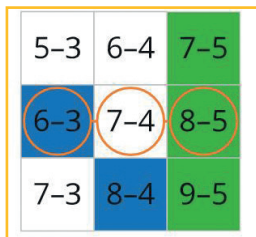


Abbildung 102: Ausschnitt aus 1-1-Tafel: <https://mahiko.dzlm.de/1-schuljahr-%E2%80%93-%C3%BCberblick/sicher-im-1-minus-1/grundlagen>,

- Nutzen eines bekannten Ergebnisses einer Partneraufgabe mithilfe gleichsinniger Veränderung (-1 / -1): Der Minuend und der Subtrahend werden um die gleiche Zahl vermindert, das Ergebnis bleibt gleich, z. B.:  
 $8 - 5 = 3$  und  $7 - 4 = 3$

## Schrittweises Rechnen

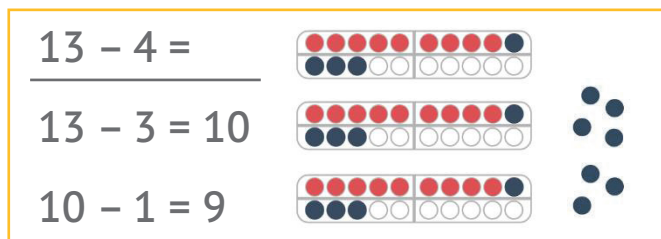


Abbildung 103: Schrittweises Subtrahieren (in Anlehnung an: <https://mahiko.dzlm.de/1-schuljahr-%E2%80%93-%C3%BCberblick/zahlen-zerlegen/grundlagen>, abgerufen am 04.05.2023)

- Vermindern zum vollen Zehner (Zehnerstopp) und dann Restmenge subtrahieren, z. B.:  
 $13 - 4 = 13 - 3 - 1$



## Auswendigwissen

Anwenden von Auswendigwissen

- Lösen von Operationen mittels automatisierter Rechenergebnisse (meist im Zahlenraum bis 10)

(Vgl. GAIDOSCHIK 2021, 108 ff. und SCHÄFER 2020, 112 ff.)

### Das muss man im Blick behalten:

SCHÄFER weist im Hinblick auf die aufgeführten Strategien darauf hin, dass sich viele Schülerinnen und Schüler mit dem Förderbedarf geistige Entwicklung schwertun, „sich vom zählenden Rechnen zu lösen und geschickte, effiziente Strategien zu nutzen“ (vgl. SCHÄFER 2020, 113). Hier sind eine gute individualpädagogische Entwicklungsplanung und auch extrinsische Impulse unabdingbar, um diese Entwicklung zu unterstützen (vgl. SCHÄFER 2020, 115). Günstig ist in jedem Fall, wenn den Schülerinnen und Schülern „genügend Zeit für die Erkundung des Zahlenraums und den Aufbau des Zahlenverständnisses gelassen wird“ (PADBERG, BENZ in SCHÄFER 2020, 114) und sie bereits im kleineren Zahlenraum Erfahrungen mit der simultanen Zahlerfassung am strukturierten Material machen können. Auch wenn vielfältige mathematische Rechenwege erarbeitet und besprochen werden, so muss davon ausgegangen werden, dass einige Schülerinnen und Schüler dabei an ihre Grenze stoßen werden (vgl. SCHÄFER 2020, 114)

### Weiterführende Informationen des DZLM:



<https://mahiko.dzlm.de/node/49>



<https://mahiko.dzlm.de/node/50>



---

### 4.8.5 Haben die Schülerinnen und Schüler die Teilkompetenz „Anwenden von Rechenstrategien“ erfolgreich erworben?

Diagnostische Leitfragen:

- Kann die Schülerin bzw. der Schüler nachvollziehen, wenn die Lehrkraft eine Rechenstrategie assistierend anwendet?
- erinnert sich die Schülerin bzw. der Schüler an die Möglichkeit, Rechenstrategien anwenden zu können?
- Wendet die Schülerin bzw. der Schüler eine von der Lehrkraft vorgeschlagene Rechenstrategie verstehend an?
- Wählt die Schülerin bzw. der Schüler eigeninitiativ eine Rechenstrategie aus und wendet sie gewinnbringend an?

## 5 Hilfreiche Materialien zum Rechnenlernen

Materialien zum Rechnenlernen lassen sich beschreiben als Materialien,

- die zur Veranschaulichung von mathematischen Situationen eingesetzt werden,
- an denen mathematische Handlungen nachvollzogen werden und
- die als Hilfsmittel zum Rechnen eingesetzt werden (nach SCHERER, MOSER OPITZ 2010, 75, in KOVAC 2016, 20).

Hierzu zählen Materialien

- in gegenständlicher Form (z. B. Wendeplättchen, Zehnersystemsatz),
- Bilder (z. B. Punktebilder, Würfelbilder) und
- Symbole (z. B. Zahlenkärtchen), die für einen mathematischen Sachverhalt stehen.

Materialien können eingeteilt werden in unstrukturierte und strukturierte Materialien (vgl. SCHIPPER et al. 2015, 41ff., in HASEMANN & GASTEIGER 2020, 125). Unstrukturierte Materialien besitzen keine und strukturierte Materialien eine vorgegebene, feste Struktur.

Des Weiteren gibt es Materialien, die sich eher zur Veranschaulichung des Kardinalzahlaspekts eignen und solche die eher den Ordinalzahlaspekt betonen.

Aufgabe der Arbeitsmittel ist es, zur Entwicklung von Zahlvorstellungen sowie von mathematischen Handlungen beizutragen. Durch den Umgang mit ihnen sollen Schülerinnen und Schüler angeregt werden, mathematische Muster oder Beziehungen zu erkennen (vgl. HASEMANN & GASTEIGER 2020, 125).

„Die Intelligenz ist ein System von Operationen; die ganze Mathematik ist ein System von Operationen. Die Operation ist nichts anderes als ein Handeln; es ist ein wirkliches Handeln, das sich innerlich vollzieht (...). [Das Kind] muss gehandelt, experimentiert haben, aber nicht nur mit Zeichnungen, sondern mit wirklichem Material, mit körperlichen Gegenständen. Dann verinnerlichen sich diese Handlungen.“ (PIAGET 1958, 367, zitiert nach HASEMANN & GASTEIGER 2020, 124)

Nach PIAGET (1958) ist „Denken ein verinnerlichtes Handeln“. Somit bildet das Handeln mit konkretem Material im Mathematikunterricht die Grundlage und Voraussetzung für innere Vorstellungshandlungen, folglich für die Entwicklung des logischen Denkens (vgl. HASEMANN & GASTEIGER 2020, 124).

Konkrete Arbeitsmaterialien und der richtige Umgang damit sind deshalb essenziell für das Lernen und Erkennen mathematischer Strukturen. MOSER OPITZ (2008) belegt in einer Studie zum Förderschwerpunkt Lernen einen Zusammenhang zwischen den mathematischen Fähigkeiten der Schülerinnen und Schüler und der Qualität der im Unterricht eingesetzten Arbeitsmaterialien. Es kann angenommen werden, dass diese Ergebnisse auf Schülerinnen und Schüler mit dem Förderschwerpunkt geistige Entwicklung übertragen werden können (vgl. RATZ & MOSER OPITZ 2016, 405).

## Einsatz von mathematischen Materialien

Mathematische Materialien können eingesetzt werden

- in Lehrerdemonstrationen zu mathematischen Handlungen, damit Schülerinnen und Schüler diese leichter nachvollziehen können,
- ,indem die Schülerinnen und Schüler sie in problemorientierten Aufgabenstellungen zum aktiv-entdeckendem Lernen nutzen,
- zum sinnvollen Üben.

Ein wichtiges Ziel beim Einsatz von Rechenmaterialien ist es, dass sich die Kinder und Jugendlichen auch zunehmend wieder vom Rechnen mit Material lösen und innere Repräsentationen nutzen (vgl. Abstraktionsstufen nach WARTHA und SCHULZ). Allerdings ist zu berücksichtigen, dass gerade diese Abstraktionsleistung für Schülerinnen und Schüler mit dem Förderbedarf geistige Entwicklung eine große Herausforderung darstellt.

## Auswahl geeigneter Materialien zum Rechnenlernen

*„Im Zentrum der Überlegungen steht also die Frage, welches konkrete Material geeignet erscheint, das mathematische Denken der Kinder anzuregen, zu stützen und zu fördern.“ (HASEMANN & GASTEIGER 2020, 124)*

Es ist notwendig, eine übersichtliche, aber auf die jeweilige Schülerschaft und den jeweiligen Lerngegenstand abgestimmte Auswahl an Materialien zu treffen. Im Idealfall verwendet das Kollegium einer Schule eine einheitliche Auswahl an Materialien.

Die Eignung eines Materials hängt ab

- von dessen Beschaffenheit,
- von der Art und Weise des Einsatzes und des Umgangs damit sowie
- dem Kontext, in dem es verwendet wird (vgl. HASEMANN & GASTEIGER 2020, 125).

Bei der Auswahl des Materials gilt es zu beachten, dass mittels der Materialien verschiedene Einsichten gewonnen werden können, aber dies „nicht von selbst geschieht, sondern bei jedem Kind Ergebnis eigener gedanklicher Anstrengungen ist“ (HASEMANN & GASTEIGER 2020, 125) und somit auch zu anderen als den von den Lehrkräften intendierten Einsichten führen kann (vgl. HASEMANN & GASTEIGER 2020, 125). So können die zur Veranschaulichung einer Aufgabe eingesetzten Spielzeugautos mit hohem Aufforderungscharakter die Schülerinnen und Schüler möglicherweise eher zum Spielen als zum Lösen einer mathematischen Aufgabe anregen.

Es sind Materialien zu bevorzugen, die „den zentralen mathematischen Aspekt abbilden und fokussieren“ (zitiert nach SCHMASSMANN & MOSER OPITZ, 2008, in RATZ & MOSER OPITZ 2016, 405).

### Mathematische Kriterien für die Auswahl geeigneter Materialien:

- Bildet das Material eine Fünfer- bzw. eine Zehner-Struktur ab, um ein Verständnis für das Dezimalsystem zu fördern?
- Ermöglicht das Material durch seine Strukturierung, Mengen quasi-simultan zu erfassen, um Zahlenräume und Mengen mit einem schnellen Blick zu strukturieren?
- Fördert das Material die Ablösung vom zählenden Rechnen, um tragfähige mathematische Grundvorstellungen aufbauen zu können?
- Lassen sich durch das Material Rechenstrategien nachvollziehen, entdecken und anwenden?
- Ermöglicht das Material unterschiedliche individuelle Rechenwege, um zu einem Ergebnis zu kommen?
- Lässt sich das Material in verschiedenen mathematischen Situationen einsetzen?
- Ist das Material auch in größeren Zahlenräumen einsetzbar, sodass Schülerinnen und Schüler mathematische Einsichten von einem Zahlenraum auf einen anderen übertragen können (vgl. SCHIPPER 1996, 39, in KOVAC 2016, 20, HASEMANN & GASTEIGER 2020, 125)?

### Organisatorische Kriterien für die Auswahl geeigneter Materialien:

- Lassen sich die Materialien auch für Schülerinnen und Schüler mit motorischen bzw. visuellen Einschränkungen gut greifen?
- Lassen sich die Materialien auf dem Schülertisch verwenden, ohne dass diese zu viel Platz benötigen oder vom Tisch rollen?
- Sind die Materialien so leicht und gut verstaubar, dass die Schülerinnen und Schüler sie im Schulranzen regelmäßig zwischen der Schule und dem Wohnort transportieren können?
- Sind die Materialien für Kinder und Jugendliche altersangemessen?
- Sind die Anschaffungskosten für das Material vertretbar? Können verlorengegangene Einzelteile einfach ersetzt werden?

#### Tipps für den Einsatz von Teppichfliesen und Zahlenkärtchen

Es ist sinnvoll, den Schülerinnen und Schülern das Material auf einer einfarbigen Teppichfliese anzubieten. Teppichfliesen, die im Fachhandel als Teppichmuster verwendet wurden, können z. T. kostenlos in Geschäften erfragt werden.

1. Sie bietet folgende Vorteile:

- Der Fokus wird verstärkt auf das Material gerichtet und der Handlungsbereich begrenzt.
- Das Material rollt nicht weg.
- Die Schülerinnen und Schüler können das Material besser greifen.

2. Außerdem ist es empfehlenswert, stets einen Satz Zahlenkarten für den entsprechenden Zahlenraum zur Hand zu haben. Vor der Anschaffung oder eigenen Gestaltung von Zahlenkärtchen ist es sinnvoll, sich Gedanken über deren Farbcodierung für die verschiedenen Stellenwerte (z. B. nach MONTESSORI: E = grün, Z = blau, H = rot, T = grün etc.) zu machen:

- Wichtig: Eine Farbcodierung sollte stets für E und T die gleiche sein, sowie für Z und ZT bzw. H und HT, um die sich wiederholende Struktur der Zahlenräume abzubilden. Farbcodierungen, die für die T-Stelle eine vierte Farbe verwenden, sind mathematisch nicht sinnvoll.
- Gibt es an der Einsatzschule bereits eine festgelegte Farbgebung für die verschiedenen Stellenwerte?
- Ist die Farbgebung der Kärtchen mit der des verwendeten Arbeitsheftes identisch?
- Ist es möglich, mehrere Zahlenkarten-Sätze zur Verfügung zu haben, damit auch die Schülerinnen und Schüler diese selbst nutzen können?



<https://mahiko.dzlm.de/node/59>



Die folgende Übersicht stellt eine beispielhafte Sammlung an geeigneten mathematischen Materialien dar, aus der eine sinnvolle Auswahl getroffen werden muss.

### Einsatz unstrukturierter Alltagsmaterialien



Abbildung 104: Unstrukturierte Alltagsmaterialien; ISB

Gegenstände, die aus der Lebensumwelt der Schülerinnen und Schüler stammen (Perlen, Stifte, Kastanien, Muggelsteine etc.)

Als Gemeinsamkeit kann eine „Merkmalsarmut“ benannt werden, die den Vorteil hat, dass sie als Repräsentanten für viele Problemstellungen verwendet werden können (vgl. HASEMANN & GASTEIGER 2020, 126).

Einsatzbereich:

- Bestimmen der Anzahl
- Festigen der Zahlwortreihe/Zählfähigkeiten
- Anbahnen eines Verständnisses für Mächtigkeit von Mengen (Kardinalzahlaspekt, Vorstellung von Mengen, Mengenvergleiche)
- Erfassen simultaner Mengen
- Bündeln von Mengen

Vorteile:

- sind i. d. R. verfügbar und müssen nicht kostenpflichtig angeschafft werden
- sind in vielfältigen Unterrichtssituationen einsetzbar (auch in anderen Fächern und Kontexten)
- können emotional ansprechend sein und für die Schülerinnen und Schüler einen hohen Aufforderungscharakter besitzen (z. B. Spielzeugautos, Tierfiguren, Gummibärchen)

Nachteile:

- keine vorgegebene Strukturierung des Zahlenraums (Struktur muss selbst hergestellt werden)
- begünstigt zählendes Rechnen

### Einsatz unstrukturierter mathematischer Materialien

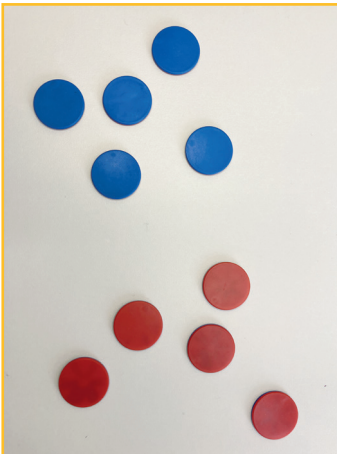


Abbildung 105: Wendeplättchen; ISB



Abbildung 106: Steckwürfel; ISB

Didaktisches Material (z. B. Wendeplättchen oder Steckwürfel ohne Rechenschiffchen)

Einsatzbereich:

- Bestimmen der Anzahl
- Festigen der Zahlwortreihe
- Anbahnen eines Verständnisses für Mächtigkeit von Mengen (Kardinalzahlaspekt, Vorstellung von Mengen, Mengenvergleiche)
- Erfassen simultaner Mengen
- Bündeln von Mengen

Vorteile:

- Heranführen an mathematisches Material
- gute Darstellungsweise bei Additionen und Zerlegungen durch Verwenden von zwei Farben (z. B. rote und blaue Wendeplättchen)

Nachteile:

- keine vorgegebene Struktur des Zahlenraums (Struktur muss selbsthergestellt werden)
- begünstigt zählendes Rechnen
- Unübersichtlichkeit

## Einsatz mathematisch strukturierter Arbeitsmaterialien

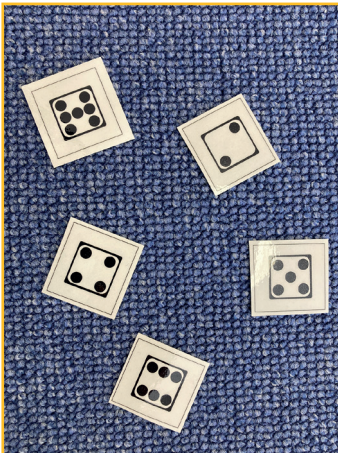


Abbildung 107: Würfelnbilder; ISB

Einsatzbereich:

- Anzahlbestimmung
- simultane und quasi-simultane Anzahlerfassung
- Zahlzerlegung

Vorteile:

- aus Alltagswirklichkeit bekannt
- fördert Lebenspraxis und Spielkompetenz

Nachteile:

- nicht auf große Zahlenräume erweiterbar



Abbildung 108: Fingerbilder; ISB

Fingerbilder werden zur Anzahlbestimmung sowie zur Zahlzerlegung eingesetzt. Um Zahlen darzustellen, werden Finger als „Handpakete“ dargestellt und als Ganzes gezeigt.

Achtung: Finger müssen auf einen Sitz, als Ganzes gezeigt werden (vgl. GAIDOSCHIK 2019, 48)! Unseren Fingern verdanken wir unser Dezimalsystem.

Vorteile:

- immer verfügbar

Nachteile:

- wenn nicht mit statischen Fingerbildern gearbeitet wird, erfolgt zählendes Rechnen.
- nicht auf größere Zahlenräume erweiterbar



Abbildung 109: Mengen-Zahlen-Bausteine; ISB

Mengen-Zahlen-Bausteine, auf die auf einer Seite Mengendarstellungen in strukturierter Form aufgedruckt sind und auf einer anderen die entsprechenden Zahlen, eignen sich dafür, das Teil-Ganzes-Verständnis aufzubauen oder Rechengesetze (siehe Kapitel Rechenstrategien) zu veranschaulichen.

Vorteile:

- anregendes Material
- intuitiver Erkenntnisgewinn durch Größenrelationen und Gewicht der Einzelteile
- auch für Schülerinnen und Schüler mit motorischen Einschränkungen gut handhabbar





Abbildung 110: Mengen-Zahlen-Bausteine; ISB

Nachteil:

- nicht auf größere Zahlenräume erweiterbar
- nicht flexibel einsetzbar

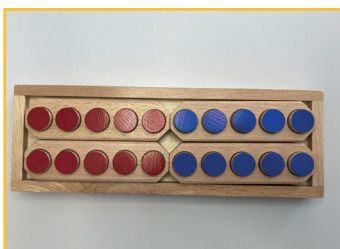


Abbildung 111: Rechenschiffchen aus Holz; ISB

Das Zehnerfeld wie auch das Zwanzigerfeld unterstützen den Aufbau des Dezimalsystems.

Das Zehnerfeld ist in einer Reihe zu zehn, das Zwanzigerfeld ist in zwei Reihen zu je zehn angeordnet. Zu bevorzugen sind Ausführungen, die nach dem fünften Punkt eine optische Trennung aufweisen, um die „Kraft der 5“ zu nutzen. Durch Plättchen bzw. Steine in zwei Farben können Rechenoperationen gut dargestellt werden.

Es gibt verschiedene Ausführungen, die sich auch bei motorischen oder visuellen Einschränkungen eignen (z. B. Stöpselfeld mit deutlich erhabenen zylinderförmigen Steckern aus Moosgummi).

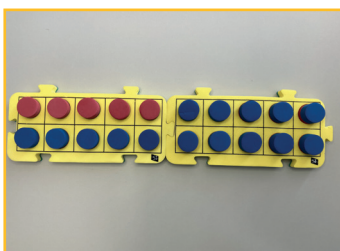


Abbildung 112: Rechenschiffchen aus Moosgummi; ISB

Einsatzbereich:

- Verdeutlichen des kardinalen Zahlaspekts
- strukturiertes Darstellen von Anzahlen nach der Kraft der 5 und „Kraft der 10“
- Darstellen von Zahlbeziehungen
- Verdoppeln und Halbieren
- quasi-simultanes Erfassen von Anzahlen
- Ergänzen zur zehn
- Veranschaulichen der Rechenoperationen Addition und Subtraktion auch mit Zehnerüberschreitung und -unterschreitung
- Erarbeiten von Rechenstrategien

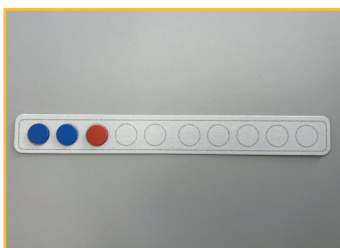


Abbildung 113: Zehnerfeld aus Pappe; ISB

Vorteile:

- sehr flexibel einsetzbar (auch für den häuslichen Gebrauch der Schülerinnen und Schüler)
- eine Erweiterung des Zahlenraumes bis 100 ist möglich, sowie eine fortgesetzte Verwendung des Materials
- bei richtiger Verwendung kein Begünstigen von zählendem Rechnen



Abbildung 114: Magnetische Wendeplättchen in Aluchachtel; ISB

Nachteil:

- Material kann bei fehlerhafter Anwendung zählendes Rechnen unterstützen. Beim Abaco sind in einem festen Kunststoffgehäuse

## Abaco

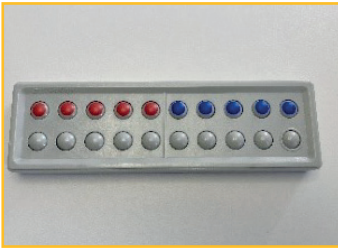


Abbildung 115: Abaco; ISB

Beim Abaco sind in einem festen Kunststoffgehäuse zwanzig Kugeln integriert. Die Anordnung der Kugeln erfolgt in zwei Zehnerreihen. Die Kugeln lassen sich auf drei Seiten (rot, blau, neutral) drehen, um Aufgaben zu lösen. Zu bevorzugen sind Ausführungen, die nach der fünften Kugel eine optische Trennung zeigen (Kraft der 5) und keine Zahlen aufgedruckt haben. Rechenprozesse werden durch unterschiedliche Farben visualisiert.

Einsatzbereich:

- siehe Zwanzigerfeld

Vorteile:

- Das Material ist immer vollständig.

Nachteile:

- Die Handhabung ist für manche Schüler mit feinmotorischen Problemen schwierig, da sie für die Rechnungen erst die entsprechende Drehrichtung der Kugeln finden müssen.
- Bei fehlerhafter Verwendung wird zählendes Rechnen begünstigt.

## Rechenrahmen

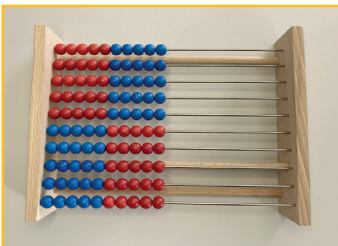


Abbildung 116: Rechenrahmen; ISB

Ein Rechenrahmen ist ein meist aus Holz gefertigter Rahmen, in dem auf zwei bzw. zehn untereinander angeordneten Metallstangen jeweils zehn Kugeln befestigt sind. Zu bevorzugen sind Rechenrahmen, bei denen jeweils fünf Kugeln in einer Farbe („Kraft der 5“) sowie die weiteren fünf Kugeln in einer anderen Farbe dargestellt werden und ab der Menge 50 ein Farbwechsel erfolgt (siehe Abbildung).

Beim Rechenrahmen sollen Mengen hergestellt werden, indem die Kugeln als Zahlenpäckchen (unter Nutzung der Fünfer- bzw. Zehnerstruktur) auf einmal verschoben werden. Dabei wird die erste Zahl einer Rechenaufgabe nach links geschoben.

Es wichtig, eine gezielte und zügige Handhabung des Rechenrahmens mit den Schülerinnen und Schülern zu üben (z. B. Kippen des Rechenrahmens nach rechts um alle Kugeln schnell auf die rechte Seite zurückzuführen und eine neue Rechnung beginnen zu können).

Einsatzbereich:

- Verdeutlichen des kardinalen Zahlaspekts
- strukturiertes Darstellen von Anzahlen im Zahlenraum 20 und 100 unter Berücksichtigung der „Kraft der 5“ und der „Kraft der 10“

- Darstellen von Zahlbeziehungen
- quasi-simultanes Erfassen von Anzahlen
- Ergänzen zum nächstgrößeren Zehner
- Veranschaulichen der Rechenoperationen Addition und Subtraktion auch mit Zehnerüberschreitung und -unterschreitung

Vorteil:

- Das Material ist immer vollständig.

Nachteile:

- Additions- und Subtraktionsaufgaben mit ZE +/- Z sowie ZE +/- ZE mit Überschreitung lassen sich nicht sinnvoll abbilden.
- Wenn Kugeln einzeln verschoben werden, wird zählendes Rechnen begünstigt.
- Der Rechenrahmen besitzt ein relativ hohes Gewicht, was vor allem beim Transport im Schulranzen nachteilig ist.
- Flexible Rechenstrategien sind kaum möglich.
- Die Kugeln sind immer sichtbar, auch wenn sie für eine Rechnung nicht „gebraucht werden“, dies kann zu Irritationen führen.

### Hunderterfeld Hunderterrahmen

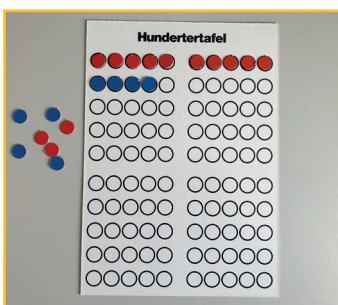


Abbildung 117: Hunderterfeld aus Pappe; ISB

Das Hunderterfeld ist eine Fortführung des Zwanzigerfeldes. Es ist in zehn Reihen zu je zehn Punkten angeordnet. Augenfällig ist eine optische Trennlinie nach dem fünften Punkt und nach der fünften Reihe, es werden die „Kraft der 5“ und die „Kraft der 10“ genutzt. Zum Rechnen ist es wichtig, ein Hunderterfeld zu nutzen, in das keine Zahlen in die Punktefelder eingetragen sind.

Ein Hunderterfeld mit eingetragenen Zahlen eignet sich zum Entdecken von Strukturen und Zahlbeziehungen im Zahlenraum bis 100.

Einsatzbereich:

- siehe Zwanzigerfeld; allerdings für den ZR 100

Vorteile:

- Analogien innerhalb einzelner Zehner können erkannt werden

Nachteile:

- Material kann bei fehlerhafter Anwendung zählendes Rechnen unterstützen
- Flexible Rechenstrategien sind kaum möglich.

**Goldenes Perlenmaterial nach MONTESSORI**  
**Dienes-Material**  
**Zehnersystemsatz**

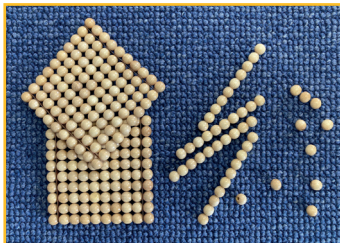


Abbildung 118: Goldenes Perlenmaterial nach MONTESSORI, ISB

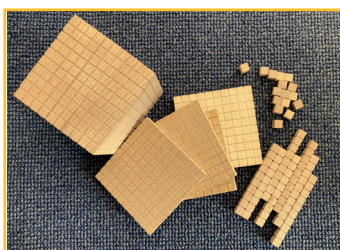


Abbildung 119: Multibase Arithmetic Blocks nach DIENES; ISB

Das ursprünglich von Maria Montessori (1870 – 1952) entwickelte goldene Perlenmaterial besteht aus goldenen Perlen, die zehnerweise auf Stangen aufgezogen und zu Hunderterplatten bzw. Tausenderwürfeln verbunden werden.

Das auf Zoltan Dienes (1916 – 2014) zurückgehende Material „Multibase Arithmetic Blocks“ nutzt den Würfel als Grundform, welcher ebenfalls zu Zehnerstangen, Hunderterplatten oder Tausenderblöcken zusammengesetzt wird.

Beide Materialien wurden zum gleichen Zweck entwickelt, Kindern und Jugendlichen eine anschauliche Vorstellung von erweiterten Zahlenräumen durch das Handeln mit diesem Material zu ermöglichen.

Heutzutage werden solche Materialien allgemein als Zehnersystemsätze bezeichnet. Neuere Ausführungen betonen durch eine Markierung nach dem fünften Würfel die „Kraft der 5“.

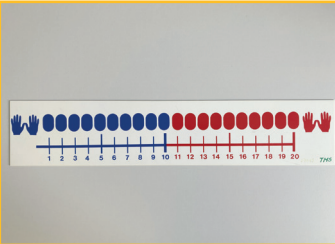
**Tipps zur Anschaffung eines Zehnersystemsatzes**

1. Im Gegensatz zu den Einerperlen oder Zehnerstangen rollt das Material mit dem Würfel als Grundform nicht weg und ist leichter zu greifen.
2. Es ist wichtig, darauf zu achten, dass der Tausenderblock vom Gewicht tausend Einerwürfeln oder -perlen entspricht, damit die Schülerinnen und Schüler die Beziehung zwischen Einern, Zehnern, Hundertern und Tausendern auch über den Gewichtssinn wahrnehmen können. Gerade Tausenderblöcke aus Kunststoff sind innen hingegen oft hohl und daher nicht geeignet.

Bei Aufgaben mit Zehnerüberschreitung müssen beim handelnden Rechnen z. B. Einerwürfel in Zehnerstangen getauscht werden bzw. bei einer Zehnerunterschreitung z. B. eine Hunderterplatte in zehn Zehnerstangen und eine Zehnerstange möglicherweise noch in zehn Einerwürfel getauscht werden.

Das Material sollte stellenwertgerecht gelegt werden, das heißt die Einer liegen ganz rechts, die Zehner und weitere Stellen folgen links davon.

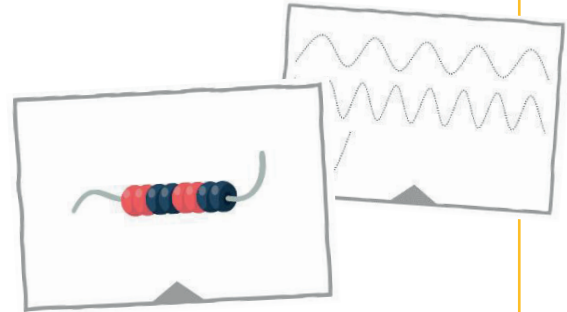
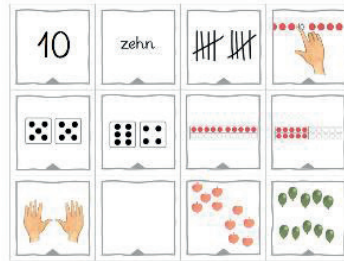
	<p>Einsatzbereich:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Veranschaulichen von erweiterten Zahlenräumen (Auch die Menge 1 000 000 kann durch das Anzeichnen eines Kubus' in der Größe von tausend Tausenderwürfel greifbar werden.)</li> <li>• Aufbauen des Dezimalsystems</li> <li>• Rechenoperationen mit Zehnerüberschreitung und -unterschreitung in erweiterten Zahlenräumen</li> <li>• Einführen der schriftlichen Addition und Subtraktion</li> </ul> <p>Vorteile:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• erweiterbar auf höhere Zahlenräume</li> </ul> <p>Nachteile:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• keine Fünferstruktur (außer neue Varianten)</li> <li>• Müssen Zahlen z. B. bei einer Rechnung mit Zehnerunterschreitung zerlegt werden, ist immer ein Entbündeln durch Tauschen notwendig.</li> </ul>
<p><b>Stellenwerttabelle und Stellenwertkarten</b></p>  <p>Abbildung 120: Stellenwerttabelle und Stellenwertkarten; ISB</p>	<p>Bei der Stellenwerttabelle sind von links nach rechts, entsprechend unserer Zahlenschreibweise Spalten für Tausender (T), Hunderter (H), Zehner (Z) und Einer (E) angeordnet. Mittels zugehöriger Stellenwertkarten auf denen Einer-, Zehner-, Hunderter- sowie Tausenderzahlen aufgedruckt sind – dabei hat jede Stellenwertkategorie eine eigene Farbe – ordnen die Schülerinnen und Schüler die Karten auf der Tabelle richtig ein.</p> <p>Vorteile:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• verdeutlichen Stellenwerte und Stellenschreibweise</li> </ul> <p>Nachteile:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• erfolgt der Einsatz von Stellenwerten ohne veranschaulichendes Material, fehlt Schülern Bezug zur Mengen- und Größenrelation</li> </ul>
<p><b>Perlen- bzw. Kugelketten</b></p>  <p>Abbildung 121: Kugelkette; ISB</p>	<p>Kugelketten eignen sich besonders für den Anfangsunterricht. Es gibt sie in verschiedenen Längen. Meist sind sie zweifarbig, das heißt nach fünf gleichfarbigen Kugeln erfolgt ein Wechsel zu fünf Kugeln einer anderen Farbe. Die „Kraft der 5“ und die „Kraft der 10“ werden durch diese optische Differenzierung genutzt. Kugelketten verdeutlichen einen linearen Zahlaspekt.</p> <p>Sie können als Vorläufer für die Arbeit mit dem Zahlenstrahl dienen, um lineare Zahlvorstellungen anzubahnen (vgl. HASEMANN &amp; GASTEIGER 2020, 131).</p>

	<p>Einsatz:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Darstellen von Zahlbeziehungen</li> <li>• Verdeutlichen des ordinalen Zahlaspekts</li> <li>• Vorbereitung auf die Arbeit mit dem Zahlenstrahl</li> </ul> <p>Nachteile:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• begünstigt zählendes Rechnen, da bei Rechenoperationen die zweite Zahl immer zählend hinzugefügt bzw. weggeschoben werden muss</li> </ul>
<p><b>Zahlenstrahl</b></p>  <p>Abbildung 122: Zahlenstrahl; ISB</p>	<p>Arbeitsmittel mit linearer Anordnung der Zahlen von links nach rechts. Eine Struktur innerhalb der Zahlenreihe lässt sich durch Hervorhebungen z. B. der Zehnerzahlen erkennen. Ein ordinaler Zahlaspekt wird verdeutlicht.</p> <p>Es empfiehlt sich, mit Vorläuferformen des Zahlenstrahls zu arbeiten (z. B. Kugelketten, Zahlenband bis 20).</p> <p>Einsatzbereich:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Thematisieren von Beziehungen zwischen einzelnen Zahlen</li> <li>• Entdecken von Vorgängern und Nachfolgern</li> <li>• Beschreiben von Kleiner-/Größer-Relationen</li> <li>• Darstellen von Addition und Subtraktion mit Pfeilen</li> </ul> <p>Vorteile:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• klar ersichtliche Position der Zahlen in der Reihe</li> <li>• verbindet in „idealer Weise die Aspekte Zählzahl, Ordnungszahl, Maßzahl, Kardinalzahl sowie den Operatoraspekt“ (vgl. HASEMANN &amp; GASTEIGER 2020, 131)</li> <li>• Zahlenstrahl kann erweitert werden bis zum Zahlenraum eine Million</li> <li>• entfaltet Potenzial in höheren Zahlenräumen</li> </ul> <p>Nachteile:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Menge als Repräsentant für Kardinalzahl nicht bzw. nur bedingt ersichtlich</li> <li>• Gefahr des zählenden Rechnens</li> <li>• Schwierigkeiten beim Lesen des Zahlenstrahls, wenn Schülerinnen und Schüler nicht verstehen, weshalb die Null anstatt der Eins die erste Zahl auf dem Zahlenstrahl ist</li> </ul>

## Materialien vom DZLM für den arithmetischen Anfangsunterricht zum kostenlosen Download



[pikas.dzlm.de/node/2315](https://pikas.dzlm.de/node/2315)



## 6 Literatur

- Bayerisches Staatsministerium für Unterricht und Kultus: Kinder mit besonderen Schwierigkeiten beim Rechnenlernen. So unterstützen Lehrkräfte in der Grundschule. München 2018
- Fritz, A.; Gerlach, M.; Ricken, G.; Schmidt, S.: Trainingsprogramm Kalkulie. Diagnose- und Trainingsprogramm für rechenschwache Kinder. Baustein 2. 2007
- Fromme, M.: Stellenwertverständnis im Zahlenraum bis 100. Theoretische und empirische Analysen. Wiesbaden 2017
- Fromme, M.; Wartha, S.; Benz, C.: Tragfähiges Operationsverständnis durch flexible Übersetzungen – Grundvorstellungen zur Subtraktion. In: Grundschulmagazin (4) 2011
- Dönges, Ch.: Didaktische Ansatzpunkte mathematischer Förderung im FgE. In: Lernen konkret 4/2016, S. 12 – 15
- Gaidoschik, M.: Rechenschwäche vorbeugen – Erstes Schuljahr: Vom Zählen zum Rechnen. Wien 2007
- Gaidoschik, M.: Rechenschwäche verstehen – Kinder gezielt fördern. Ein Leitfaden für die Unterrichtspraxis. Hamburg 2013
- Gaidoschik, M.: Ein Plädoyer für das – fachlich geleitete – Fingerrechnen. In: Lernen konkret (4) 2016
- Gaidoschik, M.: Hilfestellungen für die Erarbeitung eines Grundverständnisses zweistelliger Zahlen. Verfügbar unter: <http://www.recheninstitut.at/mathematische-lernschwierigkeiten/fordertips/zahlenraum-100/> (abgerufen am 05.04.2022)
- Gerlach, M.; Fritz, A.; Ricken, G.; Schmidt, S.: Trainingsprogramm Kalkulie. Diagnose- und Trainingsprogramm für rechenschwache Kinder. Baustein 1. Fertigkeitsspezifische Voraussetzungen. Berlin 2007
- Gerster, H.-D.; Schultz, R.: Schwierigkeiten beim Erwerb mathematischer Konzepte im Anfangsunterricht. Freiburg 2004. Verfügbar unter: <http://opus.bsz-bw.de/phfr/volltexte/2007/16/pdf/gerster.pdf> (abgerufen am 28.03.2022)
- Götze, D.; Selter, Ch.; Zannetin, E.: Das KIRA-Buch: Kinder rechnen anders. Verstehen und Fördern im Mathematikunterricht. Hannover 2020
- Hasemann, K.; Gasteiger, H.: Anfangsunterricht Mathematik. Berlin 2020
- Hildenbrand, C.: Förderung früher mathematischer Kompetenzen. Eine Interventionsstudie zu den Effekten unterschiedlicher Förderkonzepte. Münster, New York 2016
- Kovac, D.: Rechnen an Punktfeldern. In: Lernen konkret 4/2016
- Kovac, D.: Mathematik im FgE. In: Lernen konkret 4/2016
- Lorenz, J.: Kinder begreifen Mathematik. Frühe mathematische Bildung und Förderung. Stuttgart 2016
- <https://mahiko.dzlm.de/>
- Manske, Ch.: Inklusiver Mathematikunterricht. Berlin 2018
- Nührenbörger, M.; Schwarzkopf, R. (Hrsg): Das Zahlenbuch. Förderkommentar Lernen zum 1. Schuljahr. Stuttgart 2017a



- Nührenbörger, M.; Schwarzkopf, R. (Hrsg): Das Zahlenbuch. Förderkommentar Sprache zum 1. Schuljahr. Stuttgart 2017b
- Nührenbörger, M.; Schwarzkopf, R. (Hrsg): Das Zahlenbuch 1. Förderheft. Stuttgart 2017c
- Peter-Koop, A.: Zahlen bitte! Zur Bedeutung numerischer Kompetenzen für das Rechnenlernen. In: Lernen konkret 4/2016
- <https://pikas.dzlm.de/>
- Ratz, Ch.: Zur Bedeutung einer Fächerorientierung. In: Ratz, Ch. (Hrsg.): Unterricht im Förderschwerpunkt geistige Entwicklung. Fachorientierung und Inklusion als fachdidaktische Herausforderung. Oberhausen 2011
- Ratz, Ch.: Mathematische Fähigkeiten von Schülern mit dem Förderschwerpunkt geistige Entwicklung. In: Dworschak, W.; Kannewischer, S.; Ratz, Ch.; Wagner, M.: Schülerschaft mit dem Förderschwerpunkt geistige Entwicklung (SFGE). Eine empirische Studie. Oberhausen 2012
- Ratz, Ch.: Wie soll man Zahlen bis 10 darstellen? In: Lernen konkret 4/2016
- Ratz Ch.; Moser Opitz, E.: Mathematische Förderung von Schülerinnen und Schülern mit Down-Syndrom. In: Zeitschrift für Heilpädagogik 67/2016
- Ratz, Ch.; Wittmann, E.: Mathematisches Lernen im Förderschwerpunkt geistige Entwicklung. In: Ratz, Ch. (Hrsg.): Unterricht im Förderschwerpunkt geistige Entwicklung. Fachorientierung und Inklusion als fachdidaktische Herausforderung. Oberhausen 2011, S.129 – 151
- Rinkens, H.; Hönisch, K.; Träger, G. (Hrsg.): Welt der Zahl 1. Mathematisches Unterrichtswerk für die Grundschule Bayern. Braunschweig 2014
- Schäfer, H.; Peter-Koop, A.; Wollring, B.: Grundlagen der Mathematik. In: Schäfer, H.: Handbuch Förderschwerpunkt geistige Entwicklung. Weinheim 2019, S.478 – 497
- Schäfer, H.: Mathematik und geistige Behinderung. Grundlagen für Schule und Unterricht. Stuttgart 2020
- Schäfer, H.: Arithmetik im FgE – Anschlussfähige Gedanken und (Neu-) Ausrichtung. In: Lernen konkret 4/2016
- Schäfer, H.; Peter-Koop, A.; Wollring, B.: Handbuch Förderschwerpunkt geistige Entwicklung – Grundlagen, Spezifika, Fachorientierung, Lernfelder. Weinheim 2019
- Schäfer, H.: Mathematik und geistige Behinderung. Grundlagen für Schule und Unterricht. Stuttgart 2020
- Schnepel, S.; Krähenmann H.: Von ungefähr bis ganz genau. Förderung der Größenvorstellung. In: Lernen konkret 4/2016, S.10-11
- Selter, Ch.; Prediger, S.; Nührenbörger, M.; Hußmann, St.: Mathe sicher können. Handreichungen für ein Diagnose- und Förderkonzept zur Sicherung mathematischer Basiskompetenzen. Natürliche Zahlen. Berlin 2014. Verfügbar unter: [https://mathe-sicher-koennen.dzlm.de/mskfiles/uploads/Dokumente/mskgs\\_n1a\\_komplett.pdf](https://mathe-sicher-koennen.dzlm.de/mskfiles/uploads/Dokumente/mskgs_n1a_komplett.pdf) (abgerufen am 05.10.2022)
- Selter, Ch.; Zannetin, E.: Mathematik unterrichten in der Grundschule. Inhalte – Leitideen – Beispiele. Hannover 2021
- Selter, Ch.: Zahlen darstellen ZR 100. Verfügbar unter: [https://doprofil.padlet.org/christoph\\_selter/Zahlendarstellen100](https://doprofil.padlet.org/christoph_selter/Zahlendarstellen100) (abgerufen am 05.04.2022)

- 
- Siegemund, St.: Kognitive Lernvoraussetzungen und Mathematische Grundbildung von Schülerinnen und Schülern mit dem Förderschwerpunkt geistige Entwicklung. Oberhausen 2016
  - Sinner, D.: Zählendes Rechnen überwinden – Zahlenraum bis 20. Augsburg 2016
  - Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung: LehrplanPLUS. Verfügbar unter: <https://www.lehrplanplus.bayern.de/> (abgerufen am 28.06.2023)
  - Walter, S.: Komm mit ins ... Matheabenteuer mit Lisa und Ali - Arbeitsheft für Schüler 1A. Augsburg 2015
  - Wartha, S.; Schulz, A.: Aufbau von Grundvorstellungen (nicht nur) bei besonderen Schwierigkeiten im Rechnen. In: Handreichungen des Programms SINUS an Grundschulen. Verfügbar unter [http://www.sinus-an-grundschulen.de/fileadmin/uploads/Material\\_aus\\_SGS/Handreichung\\_WarthaSchulz.pdf](http://www.sinus-an-grundschulen.de/fileadmin/uploads/Material_aus_SGS/Handreichung_WarthaSchulz.pdf) (abgerufen am 10.01.2023)
  - <https://pikas-mi.dzlm.de/förderschwerpunkte/geistige-entwicklung/hintergrund> (abgerufen am 06.11.2022)
  - Wittmann, E.; Müller G.; Nührenbörger, M.; Schwarzkopf, R.: Das Zahlenbuch 1. Didaktischer Kommentar. Stuttgart, Leipzig, Dortmund 2022
  - Wittmann, E.; Müller G.; Nührenbörger, M.; Schwarzkopf, R.: Das Zahlenbuch 1. Stuttgart, Leipzig, Dortmund 2017a
  - Wittmann, E.; Müller G.; Nührenbörger, M.; Schwarzkopf, R.: Das Zahlenbuch. Arbeitsheft 1. Stuttgart, Leipzig 2017b

---

Notizen:

# Weitere Informationen

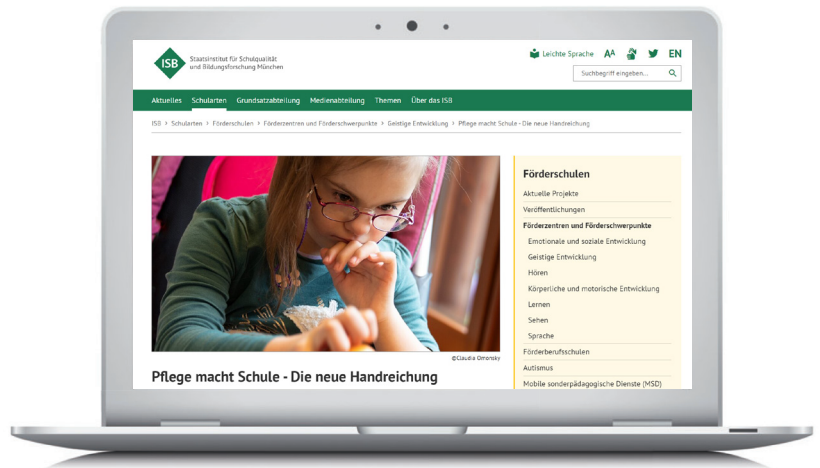
## Rechnenlernen im Zahlenraum 20+

[www.isb.bayern.de/schularten/foerderschulen/fz-und-fs/ge/rechnenlernen-im-zahlenraum-20](http://www.isb.bayern.de/schularten/foerderschulen/fz-und-fs/ge/rechnenlernen-im-zahlenraum-20)



## Pflege macht Schule

[www.isb.bayern.de/schularten/foerderschulen/fz-und-fs/ge/pflege-macht-schule](http://www.isb.bayern.de/schularten/foerderschulen/fz-und-fs/ge/pflege-macht-schule)



## Fokus Heterogenität

[www.isb.bayern.de/schularten/foerderschulen/fz-und-fs/kme/fokus-heterogenitaet](http://www.isb.bayern.de/schularten/foerderschulen/fz-und-fs/kme/fokus-heterogenitaet)

