STAATSINSTITUT FÜR SCHULQUALITÄT
UND BILDUNGSFORSCHUNG
MÜNCHEN

BERUFLICHE OBERSCHULE

HANDREICHUNG

Computeralgebrasysteme (CAS) im Mathematikunterricht an der Beruflichen Oberschule

Impressum

Erarbeitet im Auftrag des Bayerischen Staatsministeriums für Unterricht und Kultus

Leitung des Arbeitskreises
Dr. Christian Huber Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung
Andreas Schober Staatliche Fach- und Berufsoberschule Technik München

Mitglieder des Arbeitskreises
Andreas Schober Staatliche Fach- und Berufsoberschule Technik München
Gabriela Putton Staatliche Fach- und Berufsoberschule Technik München
Dr. Martin Plass Staatliche Fach- und Berufsoberschule Erlangen
Wolfgang Hager Staatliche Fach- und Berufsoberschule Friedberg

Herausgeber
Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung

Anschrift
Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung
Abteilung Berufliche Schulen
Schellingstr. 155 • 80797 München
Tel.: 089 2170-2211 • Fax: 089 2170-2215
E-Mail: *berufliche.schulen@isb.bayern.de*
Internet: *www.isb.bayern.de*

Titelbild
ClipDealer

Abbildungen
Arbeitskreismitglieder

Layout/Satz
PrePress-Salumae.com, Kaisheim

Stand
Oktober 2019

Die Handreichung ist kostenlos als Download über *www.isb.bayern.de* erhältlich.

STAATSINSTITUT FÜR SCHULQUALITÄT
UND BILDUNGSFORSCHUNG
MÜNCHEN

COMPUTERALGEBRASYSTEME (CAS) IM MATHEMATIKUNTERRICHT AN DER BERUFLICHEN OBERSCHULE

München 2019

Vorwort

Liebe Kolleginnen, liebe Kollegen,

seit dem Schuljahr 2012/13 wird im Rahmen eines Schulversuchs zum Einsatz von Computeralgebrasystemen (CAS) im Mathematikunterricht an Fachoberschulen (Ausbildungsrichtung Technik) in Bayern untersucht, wie derartige Systeme gewinnbringend im Unterricht und in Prüfungen verwendet werden können. Das aus den bisher gewonnenen Erfahrungen zu ziehende Fazit besagt klar, dass die Integration von CAS als Hilfsmittel im Mathematikunterricht positiv zu bewerten ist. So ist es folgerichtig, dass der Schulversuch fortgeführt und ausgeweitet wird.

Die vorliegende Handreichung möchte Lehrkräften eine Unterstützung bieten, bei denen Computeralgebrasysteme (CAS) im Rahmen des Schulversuchs fester Bestandteil des täglichen Unterrichts sind und die Schülerinnen und Schüler damit bis hin zur Abschlussprüfung führen. Gleichwohl richtet sie sich ausdrücklich an all jene Kolleginnen und Kollegen, welche CAS grundsätzlich als bereicherndes und didaktisch-unterstützendes Element in ihren Unterricht integrieren möchten bzw. dies bereits getan haben. Der Einsatz von CAS ist demnach nicht ausschließlich an der Fachoberschule in der Ausbildungsrichtung Technik sinnvoll, sondern bietet sich grundsätzlich im Mathematikunterricht an den Fach- und Berufsoberschulen in allen Jahrgangsstufen an.

Dieses Handbuch beschreibt zunächst einleitend die Situation an den Fachoberschulen in Bayern und die Bedeutung von CAS für das Lernen und Lehren. Eine Liste von Grundfertigkeiten, die im Umgang mit CAS von den Schülerinnen und Schülern erworben werden sollten, hilft Ihnen dabei, während der Förderung dieser Fertigkeiten den Überblick zu bewahren. Im Anschluss daran finden Sie gegliedert nach den Themengebieten Analysis, Analytische Geometrie und Stochastik viele Vorschläge zur Unterrichtsgestaltung, wie CAS innerhalb dieser Themengebiete effektiv eingesetzt werden können. Dabei sollen und können diese Vorschläge nicht den gesamten Lehrplan für das Fach Mathematik abdecken. Vielmehr sind sie als exemplarische Auswahl zu sehen, die zeigt, wo sich das Arbeiten mit einem CAS als lohnend erweisen kann.

Es sind bereits zwei Handreichungen zum Thema Computeralgebrasysteme (CAS) im Mathematikunterricht des Gymnasiums (Jahrgangsstufe 10 und Jahrgangsstufen 11, 12) erschienen. Die vorliegende Handreichung versteht sich als Ergänzung zu diesen bereits erschienenen gymnasialen Handreichungen. Alle drei Werke stehen unter www.isb.bayern.de zum Download bereit.

Im Rahmen dieser Handreichung wird die Software Geogebra verwendet. Sie steht als Open-Source-Software auf der Internetseite http://www.geogebra.org zur Verfügung. Sie kann auf zahlreichen gängigen Endgeräten wie Smartphones oder Tablets ohne Anschaffungskosten und großen Installationsaufwand genutzt werden. Diese „Sofortverfügbarkeit" gab unter anderem den Ausschlag, Geogebra als Grundlage für diese Handreichung zu wählen. In jedem Kapitel werden die wichtigsten Befehle mit ihrer Syntax vorgestellt. Da sich alle Computeralgebrasysteme in ihrer Syntax ähneln, können sämtliche in diesem Werk dargestellten Beispiele und Aufgaben vollständig auf andere CAS übertragen werden. Schnelleinstiege z. B. für die sog. Handhelds TI-Nspire CX CAS (Texas Instruments) bzw. ClassPad II FXCP400 (Casio) mit den wichtigsten Befehlsstrukturen finden Sie im Anhang der gymnasialen Handreichung für die Jahrgangsstufen 11 und 12.

Mein besonderer Dank gilt allen Lehrkräften des Arbeitskreises, insbesondere Herrn Andreas Schober für seine tatkräftige Unterstützung als Co-Leiter des Arbeitskreises.

Ebenso bedanke ich mich bei Herrn Achim Brunnermeier von der Abteilung Gymnasium am ISB für die Bereitstellung der Vorlage der gymnasialen Handreichungen zum Thema CAS und für die kollegiale Beratung des Arbeitskreises.

München, im Oktober 2019

Dr. Karin E. Oechslein

Direktorin des ISB

1 Einführende Hinweise

Die technische Entwicklung informationsverarbeitender Systeme ermöglicht es zunehmend, Computeralgebrasysteme (CAS) in den Schulunterricht einzubetten. Dadurch wird insbesondere der Mathematikunterricht um neue methodisch-didaktische Gesichtspunkte erweitert. CAS können insbesondere zur Schüleraktivierung beitragen, indem sie entdeckendes Lernen fördern.

CAS unterstützen die Schülerinnen und Schüler im eigenständigen und kreativen Arbeiten: weg vom Ausführen und von der Abarbeitung von Rechenrezepten hin zum Erkennen von Problemen, zur Formulierung von Fragen, zum Interpretieren von Lösungen, Erkennen der Richtigkeit oder Brauchbarkeit von Ergebnissen. Die Förderung von Fähigkeiten wie Denken in Zusammenhängen, Problemlösevermögen, Teamfähigkeit, Kommunikationsbereitschaft und Argumentationsfähigkeit kann durch den Einsatz eines CAS effektiv unterstützt werden.

1.1 Situation an Fachoberschulen in Bayern

Im Schuljahr 2012/2013 startete im Auftrag des Bayerischen Staatsministeriums für Unterricht und Kultus an ausgewählten Fachoberschulen ein Schulversuch mit dem Ziel, neue Medien im Mathematikunterricht, insbesondere die sich mit dem Einsatz von CAS ergebenden methodisch-didaktischen Möglichkeiten, zu erproben. Es wurde u. a. untersucht, ob mit der Verwendung von CAS im Unterricht das Verständnis mathematischer Zusammenhänge und die Problemlösefähigkeit gestärkt werden kann bzw. ob sich der Einsatz negativ auf die manuelle Rechenfertigkeit der Schülerinnen und Schüler auswirkt.

Schülerinnen und Schüler der Jahrgangsstufen 11, 12 und 13 können den Schulversuch freiwillig durchlaufen. Neun Fachoberschulen sind mit Klassen in der Ausbildungsrichtung Technik in den Schulversuch gestartet. Ein Arbeitskreis, welcher vom ISB betreut wurde, begleitete den Schulversuch in den ersten Jahren nach seinem Start. Der Arbeitskreis bestand aus Vertretern der teilnehmenden Schulen, Vertretern der Schulaufsicht und aus Beratern für die einzelnen Systeme. Nach vier Jahren wurde der Schulversuch evaluiert. Die Ergebnisse der Evaluation sind insgesamt in Hinblick auf Medienkompetenz, auf Anregung von selbstinitiiertem Lernen und Experimentierfreudigkeit, auf Verbesserung von Sozialkompetenzen und auf Steigerung des Interesses, der Neugierde und der Freude an der Mathematik positiv zu bewerten. Einzelheiten der Evaluation können dem Abschlussbericht – erhältlich auf den Internetseiten des Staatsinstituts für Schulqualität und Bildungsforschung unter www.isb.bayern.de – entnommen werden. Der Schulversuch wird derzeit an zwölf Schulen fortgeführt bzw. neu eingerichtet.

Der Schulversuch wird sowohl mit Taschencomputern (Handhelds) als auch mit spezieller Rechensoftware für herkömmliche Computer durchgeführt. Dabei wurden die Systeme in Unterrichts- und Prüfungssituationen erprobt. Seit dem Schuljahr 2014/2015 wird den Schülerinnen und Schülern die Möglichkeit angeboten, ihre Fachabiturprüfung im Fach Mathematik mit einem CAS als Hilfsmittel abzulegen. Seit 2016 ist dies auch für die Prüfung zum Erwerb der fachgebundenen Hochschulreife der Fall. Die konkreten Bestimmungen zur Organisation des Schulversuchs an den teilnehmenden Schulen sind im betreffenden KMBek aufgeführt.

1.2 Bedeutung für das Lehren und Lernen

Die Verwendung von CAS unterstützt insbesondere im Zusammenhang mit der Bearbeitung von Aufgaben in vielfältiger Hinsicht eine Verschiebung der Schwerpunkte mathematischen Arbeitens im Unterricht. Mithilfe eines CAS lassen sich mathematische Inhalte auf unterschiedliche Weise veranschaulichen und Zusammenhänge zwischen verschiedenen Darstellungsformen verdeutlichen. Elementare algebraische und geometrische Arbeitsschritte können mit verhältnismäßig geringem Zeitaufwand ausgeführt werden. So unterstützt der Einsatz von CAS beispielsweise die Bearbeitung realitätsnaher Anwendungsaufgaben, die häufig mit einem hohen rechnerischen Aufwand verbunden sind; eine Beschränkung auf einfache, häufig unrealistische Daten ist unnötig. Ist die Aufmerksamkeit der Schülerinnen und Schüler im Rahmen der Beschäftigung mit einer Aufgabe weniger durch Rechenarbeiten gebunden, können sie sich stärker auf mathematische Inhalte und Zusammenhänge, die bewusste Auswahl mathematischer Verfahren, die Modellierung von Sachsituationen sowie die Interpretation von Ergebnissen konzentrieren – das Verständnis wird gefördert. Auch offene Aufgabenstellungen lassen sich mithilfe eines CAS effektiv bearbeiten. Dessen Einsatz trägt zur Entwicklung unterschiedlicher Lösungswege bei, deren Vergleich Schülerinnen und Schülern Anlass für Kommunikation über mathematische Inhalte und Verfahren geben kann. Der Einsatz von CAS unterstützt damit experimentelles und forschendes Arbeiten. Die Erleichterung der Darstellung, Strukturierung und Analyse komplexer mathematischer Objekte (z. B. Funktionenscharen) erweitert die Möglichkeiten zur Bearbeitung von Problemstellungen. Insbesondere im Rahmen schülerzentrierter Unterrichtsformen oder von Hausaufgaben können die Schülerinnen und Schüler mithilfe eines CAS Ergebnisse individuell kontrollieren und ihr Vorgehen sowie mögliche Fehlerquellen analysieren – selbständiges und eigenverantwortliches Lernen wird gefördert.

Die Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife fassen dies treffend zusammen: „Die Entwicklung mathematischer Kompetenzen wird durch den sinnvollen Einsatz digitaler Mathematikwerkzeuge unterstützt. Das Potenzial dieser Werkzeuge entfaltet sich im Mathematikunterricht

- beim **Entdecken** mathematischer Zusammenhänge, insbesondere durch interaktive Erkundungen beim Modellieren und Problemlösen,
- durch **Verständnisförderung** für mathematische Zusammenhänge, nicht zuletzt mittels vielfältiger Darstellungsmöglichkeiten,
- mit der **Reduktion** schematischer Abläufe und der **Verarbeitung größerer Datenmengen**,
- durch die Unterstützung individueller Präferenzen und Zugänge beim Bearbeiten von Aufgaben einschließlich der reflektierten Nutzung von **Kontrollmöglichkeiten**." (BS M Allg. HSR, S. 13)

Trotz Verfügbarkeit eines CAS sind manuelle Grundfertigkeiten sowie Kopfrechnen unverzichtbar. Deshalb muss darauf geachtet werden, dass Schülerinnen und Schüler nachhaltig Sicherheit im Umgang mit Zahlen, Termen und Gleichungen gewinnen. Entsprechende Übungsphasen dürfen nicht vernachlässigt werden; auf eine Verwendung des CAS sollte – auch bei Leistungsnachweisen – immer wieder gezielt verzichtet werden.

Gründe für den Einsatz eines CAS im Unterricht

Leistungsfähigkeit der Systeme

Mit den CAS lassen sich algebraische Ausdrücke bearbeiten. Das CAS löst mathematische Aufgaben nicht nur mit Zahlen. Es verarbeitet auch symbolische Ausdrücke. Dies ist insbesondere bei folgenden Tätigkeiten hilfreich:

- Term vereinfachen
- Gleichung lösen
- integrieren und differenzieren
- Ergebnisse visualisieren
- exakt rechnen
- Funktionsgraph darstellen
- Tabellenkalkulation bearbeiten
- geometrische Zusammenhänge dynamisch darstellen
- Zufallsexperiment simulieren und auswerten
- Datentabelle erzeugen (Tafelwerk)

Das CAS übernimmt langwierige, häufig wiederkehrende Berechnungen. Dadurch gewinnen die Schülerinnen und Schüler mehr Raum für Übungen und Verständnisfragen.

Größerer Lerneffekt durch effektive Ergebniskontrolle

Unterricht, welcher ein CAS einbezieht, zielt natürlich nicht nur auf das korrekte Endergebnis von Aufgaben ab. Auch weiterhin sollten Fragestellungen zu bearbeiten sein, die den Nachweis einzelner Rechenschritte verlangen. Die Schülerinnen und Schüler können ihre Zwischenergebnisse nach der Bearbeitung ohne CAS am Rechner kontrollieren. Dies motiviert das selbständige Aufspüren von Fehlern und erhöht den Lerneffekt.

Ein solcher Unterricht fördert experimentelles, entdeckendes Lernen: Im Idealfall ergründen die Schülerinnen und Schüler im Unterricht viele mathematische Zusammenhänge selbständig. Das aktive Erarbeiten der Inhalte fördert ein besseres Verständnis.

Mehr praktischer Anwendungsbezug

CAS ermöglicht es, mit realitätsnahen Daten zu arbeiten. Zahlen müssen nicht „geschönt" werden, um in Aufgaben handhabbar zu sein. Dadurch bietet sich den Schülerinnen und Schülern die Gelegenheit, interessante, anwendungsbezogene Aufgaben zu bearbeiten.

Veranschaulichung mathematischer Inhalte und Zusammenhänge

Mit einem CAS lassen sich mathematische Inhalte auf unterschiedliche Weise veranschaulichen und Zusammenhänge zwischen verschiedenen Darstellungsformen verdeutlichen.

Förderung der Medienbildung und Digitalen Bildung

Unterricht, welcher ein CAS einbezieht, fördert die Kompetenz der Schülerinnen und Schüler im Umgang mit digitalen Medien. Genau das fordert die Kultusministerkonferenz. Für sie stellt die Medienkompetenz einen bedeutenden Beitrag zur Stärkung der mathematisch-naturwissenschaftlich-technischen Bildung dar.

1.3 Zu erwerbende Grundfertigkeiten

Genauso, wie z. B. ein herkömmlicher elektronischer Taschenrechner, ist ein CAS im Unterricht als Hilfsmittel einzuordnen. Aus diesem Grund finden sich in den Kompetenzerwartungen der Lehrpläne für das Fach Mathematik keine explizite Ausweisungen von „CAS-Kompetenzen".

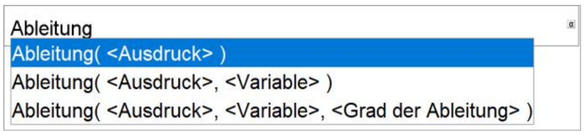
Die folgende Tabelle soll dabei helfen, im Zuge der Förderung der Fertigkeiten, welche die Schülerinnen und Schüler im Umgang mit einem CAS erwerben sollen, den Überblick zu bewahren.

Kategorie	CAS-Grundfertigkeit
Einstellungen	Winkelmaß einstellen/interpretieren
Term/Funktion	Funktion definieren (z. B. Festlegen des Terms einer Funktion) Funktionswert berechnen Term vereinfachen Term faktorisieren Term ausmultiplizieren Terme vergleichen

	Wertetabelle erstellen Grenzverhalten bestimmen Term einer Ableitungsfunktion bestimmen Term einer Stammfunktion bestimmen bestimmtes Integral berechnen
Gleichung	Gleichung lösen Gleichungssystem lösen
Graph	Graph zeichnen, geeigneten Anzeigebereich wählen Graphen von Scharfunktionen zeichnen, Schieberegler verwenden
Daten	Histogramm zeichnen Tabellenkalkulation durchführen Binomialverteilung anwenden
Vektoren	Berechnung mit Vektoren durchführen Skalar-, Vektor- und Spatprodukt berechnen Geraden- und Ebenengleichungen aufstellen Geraden und Ebenen darstellen

Übersichten spezifischer CAS-Befehle

Durch ständige Erweiterung wächst der Befehlsvorrat in Geogebra kontinuierlich. Geogebra hat eine Auto-Vervollständigungsfunktion der Befehle, die ein exaktes Schreiben der Syntax nicht mehr erfordert. Bei der Eingabe der ersten Buchstaben öffnet sich ein Pop-up-Fenster mit der Syntax und den Eingabemöglichkeiten.



Listen mit aktuellen Beschreibungen und Beispielen findet man unter https://wiki.geogebra.org/de/Handbuch.

2 Einsatz von CAS im Themengebiet Analysis

2.1 Schnelleinstieg in das Themengebiet – Wichtige grundlegende Befehle

Schülerinnen und Schüler können problemlos und ohne Vorkenntnisse bzw. Vorerfahrungen die Arbeit mit einem CAS starten. Die Bedienung eines CAS lässt sich mit kurzen einfachen Beispielaufgaben schnell erlernen. Nachfolgend werden folgende Grundlagen vorgestellt:

- Eingabe eines Bruchs und Berechnung eines exakten/gerundeten Werts
- Verwendung des CAS als gewöhnlicher „Taschenrechner“
- Zugriff auf Inhalte von Eingabezeilen oder auf Werte von definierten Variablen
- Einstellmöglichkeiten im CAS-Fenster
- Einstellmöglichkeiten im Grafik-Fenster
- Lösen einer Gleichung nach einer Variablen
- Schnittpunktbestimmung innerhalb des Grafik-Fensters
- Koordinateneingabe eines definierten Punkts im CAS-Fenster

Funktionsgraphen zeichnen, Punkte kennzeichnen

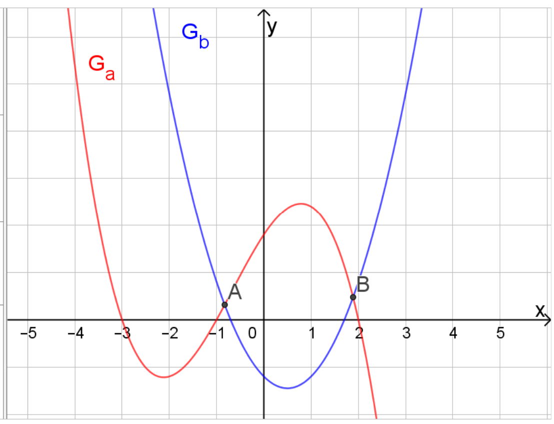
Zeilen 1 - 2: Die Funktionen können mit beliebigen Bezeichnern definiert werden. Hierzu kann „:=“ oder „define“ verwendet werden. Der blaue Punkt zeigt, dass der Graph der Funktion angezeigt wird. Klickt man auf den Graphen, können Eigenschaften wie Farbe, Bezeichnung des Graphen etc. verändert werden.

Eigenschaften des Grafik-Fensters können rechts oben durch Anklicken des Symbols verändert werden, z. B.: Strichdicke, Farbe, Anzeigeausschnitt, Achsenskalierung, Koordinatengitter.
Die Koordinaten eines Punktes können über den Bezeichner im CAS-Fenster angezeigt werden.

Der (Schnitt-)Punkt wird im Grafik-Fenster mithilfe des Symbols „Punkt“ →

Detail-Auswahl „Schneide“ definiert. Anschließend müssen beide Graphen angeklickt werden.
Ein Doppelklick auf den erzeugten Schnittpunkt ermöglicht es, sich weitere Eigenschaften, wie z. B. dessen Beschriftung, anzeigen zu lassen. Die Eigenschaften können so auch geändert werden.
Bei Angabe des Bezeichners (Name) des Punktes im CAS-Fenster erhält man dort die Koordinaten des Punktes.
Zeilen 3 - 4: Die Koordinaten der Punkte können sowohl näherungsweise = ≈ ✓ als auch exakt = ≈ ✓ angezeigt werden.

1	a(x) := 3 / 10 (x + 1) (x + 3) (-x + 2) → $a(x) := \frac{3}{10}\,(x+1)\,(x+3)\,(-x+2)$
2	b(x) := x² - x - 6 / 5 → $b(x) := x^2 - x - \frac{6}{5}$
3	A ≈ $(-0.83, 0.32)$
4	B → $\left(\frac{5114447}{2709397}, \frac{1048648}{2204767}\right)$



Funktionswerte berechnen

Zeile 6: Neben exakten Werten werden häufig auch Näherungswerte benötigt.
Hinweis: Die Notation „\$5“ referenziert (dynamisch) auf die Zeile Nr. 5. Dies bedeutet, dass der Funktionswert automatisch neu berechnet wird, sollte sich der Wert in Zeile 5 ändern (z. B., indem der Funktionsterm von g in Zeile 4 nachträglich verändert wird).

3	f(-2) → 4
4	g(x):=sqrt(x) → $g(x) := \sqrt{x}$
5	g(3) → $\sqrt{3}$
6	Numerisch[$5] → 1.73

Parameter im Funktionsterm

Enthält ein Funktionsterm einen Parameter, so empfiehlt es sich bei Verwendung eines CAS, den Parameter als zweite Variable festzulegen. Damit ist im weiteren Verlauf ein flexibler Zugriff auf Funktionsterme und -werte möglich.

Zeile 1: Definition

Zeile 2: Berechnung des Funktionsterms für $k = 1$

Zeile 3: Berechnung des Funktionswerts für $k = 1$ und $x = 3$

Zeile 4: Ausgabe mehrerer Funktionsterme für verschiedene Werte des Parameters k

1	f(x,k):=x+k → $f(x, k) := k + x$
2	f(x, 1) → $x + 1$
3	f(3,1) → 4
4	f(x,{1,2,3,4}) → $\{x + 1, x + 2, x + 3, x + 4\}$

Schieberegler

Mithilfe eines Schiebereglers (Erstellung in den Bereichen Algebra und Grafik durch einen Klick auf den Menü-Button) lässt sich der Wert einer Variablen innerhalb eines definierten Bereichs mit definierter Schrittweite verändern. Die Variable ist sodann mit diesem Wert belegt.

Zur Verwendung eines Schiebereglers empfiehlt es sich häufig, eine neue Variable festzulegen. Nebenstehend ist „a“ per Schieberegler aktuell mit dem Wert „1“ belegt, „k“ dagegen nicht.

5	f(x,a) → $x + 1$
6	f(x,k) → $k + x$

Nullstellen

Nullstellen ergeben sich als Lösung einer Gleichung nach der Variablen x.

4	Löse[f(x)=0, x] → $\left\{x = \frac{-\sqrt{5}+3}{2}, x = \frac{1}{2}, x = \frac{\sqrt{5}+3}{2}\right\}$

Ableitung, Extremstellen, Monotonieintervalle

Zeile 1: Funktion f definieren

Zeile 2: Term der ersten Ableitungsfunktion von f mit dem Befehl „Ableitung" berechnen

Zeile 3: Term der ersten Ableitungsfunktion von f über Eingabe von „ f′(x) " berechnen

Zeile 4: Term der zweiten Ableitungsfunktion berechnen

Zeile 5: mögliche Extremstellen berechnen

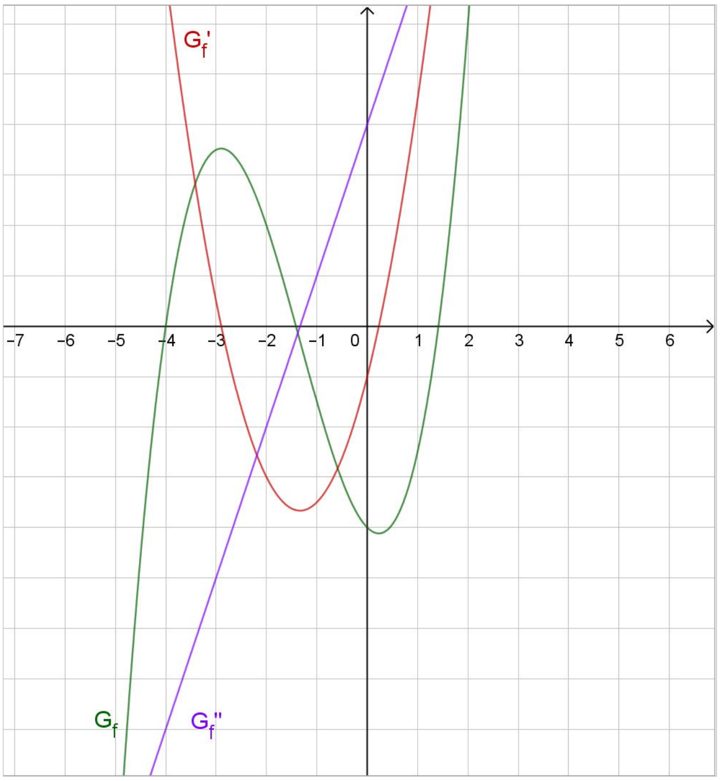
Zeile 6: Der Befehl „Element" wählt einen Eintrag aus einer Liste aus. Hier wird aus der Liste von Zeile 5 der erste Eintrag verwendet. „Ersetze (f(x),…)" belegt die Variable mit dem gewählten Listenwert und berechnet somit den Funktionswert.

Zeile 7: alternative Eingabe

Zeile 8: Zur Berechnung der maximalen Monotonieintervalle können auch Ungleichungen gelöst werden.

1	f(x) := 1 / 2 x³ + 2x² - x - 4
	→ $f(x) := \frac{1}{2} x^3 + 2x^2 - x - 4$
2	Ableitung(f(x))
	→ $\frac{3}{2} x^2 + 4x - 1$
3	f'(x)
	→ $\frac{1}{2} (3x^2 + 8x - 2)$
4	f''(x)
	→ $3x + 4$
5	L1:=Löse(f'(x)=0,x)
	≈ $L1 := \{x = -2.9, x = 0.23\}$
6	E1:=Ersetze((1 / 2 x³ + 2x² - x - 4), Element(L1,1))
	≈ $E1 := 3.53$
7	f(Element(L1,2))
	≈ $0.5x^3 + 2x^2 - x - 4 = -4.12$
8	Löse(f'(x)>0)
	≈ $\{x < -2.9, x > 0.23\}$

Bei der Beschriftung wird standardmäßig z. B. f statt G_f verwendet. Zur Umbenennung muss der Graph markiert und die Eigenschaft *Beschriftung* aktiviert und „G_f" im Feld Beschriftung eingegeben werden.



2.2 Ganzrationale Funktionen

Zur Untersuchung ganzrationaler Funktionen und deren Graphen bietet sich ein CAS zur Veranschaulichung an. Der Einfluss eines Parameters im Funktionsterm auf den Verlauf des zugehörigen Graphen kann dynamisch dargestellt werden. Die Schülerinnen und Schüler können – auch anspruchsvollere – Sachverhalte entdeckend erforschen, ohne viel Zeit mit ggf. aufwendigen algebraischen Umformungen verbringen zu müssen.

Im Zusammenhang mit den beschriebenen Vorschlägen zur Unterrichtsgestaltung kommen insbesondere folgende Grundfertigkeiten zur Anwendung:

- Term definieren
- Term ausmultiplizieren
- Nullstelle berechnen
- Wertetabelle erstellen
- Graph zeichnen, geeigneten Anzeigebereich wählen
- Gleichungen lösen
- Polynomdivision durchführen

Vorschläge zur Unterrichtsgestaltung

Aufgabe 1: Ganzrationale Funktionen vom Grad n „entdecken"

Wir machen uns gemeinsam auf Entdeckungsreise: **Terme kombinieren – neue Funktionen entdecken**!

Sie dürfen gerne auch mit dem CAS mehr als gefordert „forschen", beantworten Sie dennoch mindestens die unten angegebenen Teilaufgaben schriftlich. Bitte notieren Sie gerne weiterführende Erkenntnisse oder Fragen für später!

Gegeben sind folgende Terme:

$-3x+2$ $\quad x \quad x-2 \quad 2-x \quad 0{,}25x-1 \quad -0{,}5x$

$-(3-x) \quad x+3 \quad 2x-0{,}75 \quad 1+x \quad 2x+1$

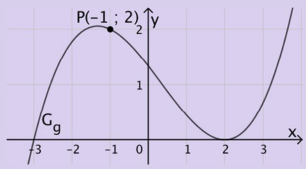
a) Suchen Sie sich drei beliebige Terme aus und betrachten Sie diese jeweils als Term einer Funktion. Beschreiben Sie unter Verwendung einer Skizze der Graphen dieser Funktionen möglichst viele Eigenschaften dieser Funktionen.

b) Multiplizieren Sie zwei beliebige Terme miteinander. Betrachten Sie das Produkt als Term einer Funktion. Beschreiben Sie unter Verwendung einer Skizze des Graphen dieser Funktion möglichst viele Eigenschaften der Funktion.

c) Multiplizieren Sie drei beliebige Terme miteinander. Betrachten Sie das Produkt als Term einer Funktion. Beschreiben Sie unter Verwendung einer Skizze des Graphen dieser Funktion möglichst viele Eigenschaften der Funktion. Wählen Sie nun die drei Terme aus Aufgabe a). Was fällt Ihnen auf?

d) Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto -1{,}5x^3 + 4x^2 - 2x$, mit $x \in \mathbb{R}$. Welche Terme von oben ergeben durch Multiplikation miteinander den Funktionsterm von f? Erläutern Sie Ihre Vorgehensweise zur Beantwortung der Frage mit und ohne CAS.

e) Stellen Sie die Funktionen f_1 bis f_6 grafisch mit Ihrem CAS dar und beschreiben Sie die Art der jeweils vorhandenen Nullstellen.
$f_1(x) = (x+3)$, $f_2(x) = (x+3)^3$, $f_3(x) = (x+3)^5$
$f_4(x) = (x-2)^2$, $f_5(x) = (x-2)^4$, $f_6(x) = (x-2)^6$



f) Bestimmen Sie passend zu dem rechts abgebildeten Graphen einen Funktionsterm einer ganzrationalen Funktion g.

g) Gegeben ist die Funktion $f_a : x \mapsto a(x-2)x(x+1)$ mit dem Leitkoeffizienten $a \in \{-1; 0{,}5; 3\}$. Beschreiben Sie den Einfluss des Leitkoeffizienten auf den Graphen von f_a im Vergleich zum Graphen der Funktion mit dem Leitkoeffizienten $a = 1$.

Zielsetzung Ganzrationale Funktionen erforschen, Vielfachheit der Nullstellen entdecken, Auswirkungen des Leitkoeffizienten beschreiben

Voraussetzung Geraden und Parabeln, Nullstellen

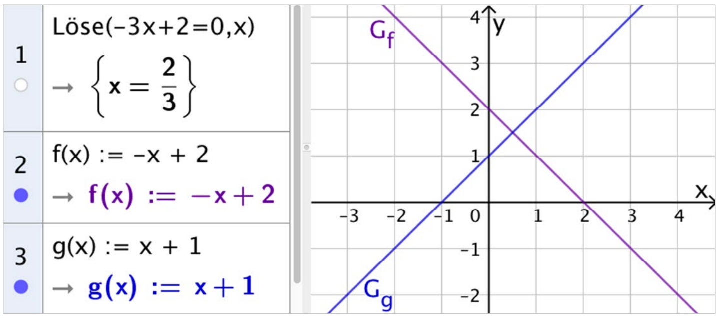
Anregung Mithilfe des CAS können lineare Terme einfach kombiniert sowie die Nullstellen und deren Vielfachheiten auch von ganzrationalen Funktionen höheren Grades bestimmt werden. Hier bietet es sich besonders an, dass die Schülerinnen und Schüler selbständig neue Funktionsterme kombinieren und neue Funktionen anhand der zugehörigen Graphen entdecken. Diese Aufgabe kann angelehnt an das Schema des Dialogischen Lernens durchgeführt werden. Die Schülerinnen und Schüler werden mit einfachen Teilaufgaben und Überlegungen angeleitet. Sie bearbeiten zunächst jeder für sich alleine, leise und mit schriftlicher Dokumentation in ganzen Sätzen die Aufgabenstellung(en). Im Anschluss erfolgt der Austausch in Klein-Gruppen über das bisher Gelernte/Bearbeitete. Anschließend können gemeinsam an der Tafel ein Merkblatt erstellt und/oder die offenen Fragen beantwortet werden.

Hinweise zur Bearbeitung

Zu a)

Zeile 1: Nullstellenberechnung

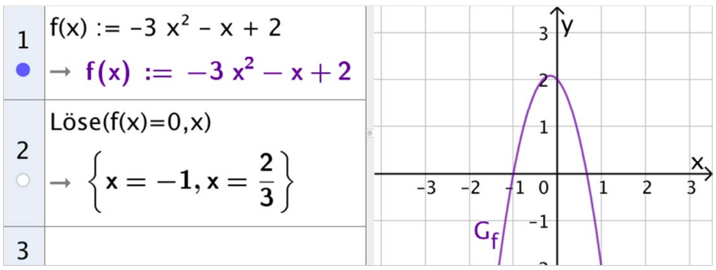
Zeilen 2 - 3: Funktionsgraphen zeichnen; mithilfe des Graphen können die Eigenschaften beschrieben werden.



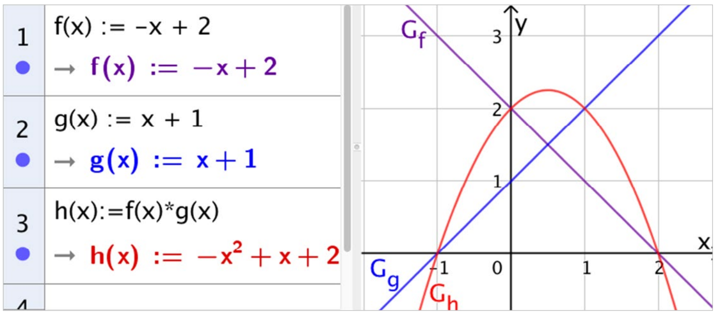
Zu b)

Zeile 1: Die neue zusammengesetzte Funktion wird definiert und der Graph der Funktion gezeichnet.

Zeile 2: Nullstellenberechnung; mithilfe des Graphen können die Eigenschaften beschrieben werden.



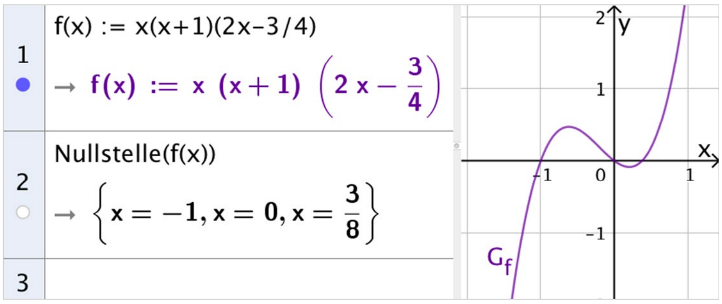
Zeile 3: Die neue zusammengesetzte Funktion kann auch mithilfe der Bezeichner definiert werden.



Zu c)

Zeile1: Terme werden kombiniert

Zeile 2: Nullstellen werden berechnet

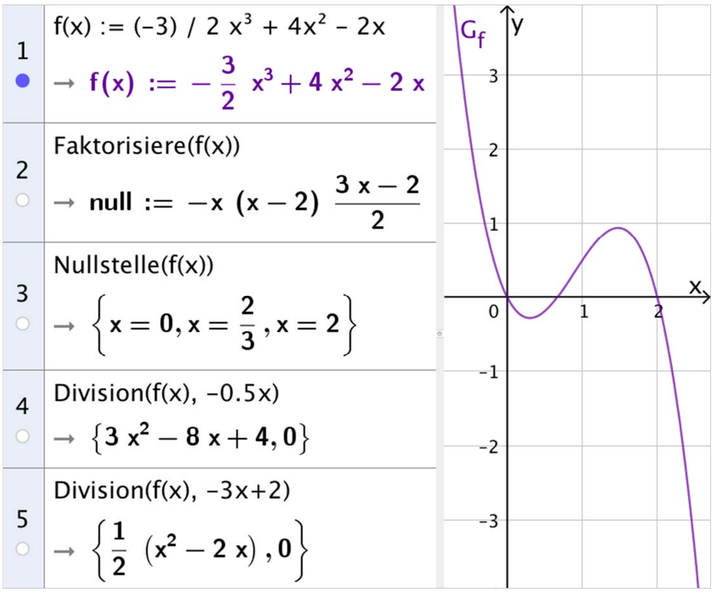


Zu d)

Zeilen 4 - 5: Die Aufgabe kann mit einer Polynomdivision gelöst werden.

Der Befehl lautet hier dafür: *„Division(<Dividend Polynom>, <Divisor Polynom>)“*

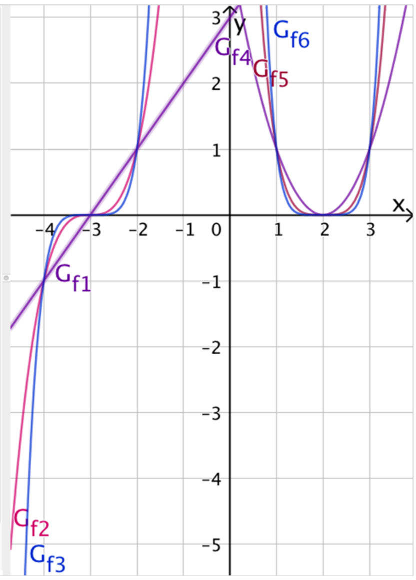
Geogebra listet auch das Restpolynom, hier Rest(x) = 0 , auf.



Zu e)

Die Schülerinnen und Schüler vergleichen Nullstellen verschiedener Vielfachheiten miteinander und erkennen die Auswirkungen der Vielfachheiten auf das Verhalten der Funktionswerte in der Umgebung der Nullstellen bzw. das Verhalten der Verläufe der Graphen in der Umgebung der Schnittpunkte mit der x-Achse.

1	f_1(x) := x + 3 → $f_1(x) := x+3$
2	f_2(x) := (x + 3)³ → $f_2(x) := (x+3)^3$
3	f_3(x) := (x + 3)⁵ → $f_3(x) := (x+3)^5$
4	f_4(x) := (x – 2)² → $f_4(x) := (x-2)^2$
5	f_5(x) := (x – 2)⁴ → $f_5(x) := (x-2)^4$
6	f_6(x) := (x – 2)⁶ → $f_6(x) := (x-2)^6$



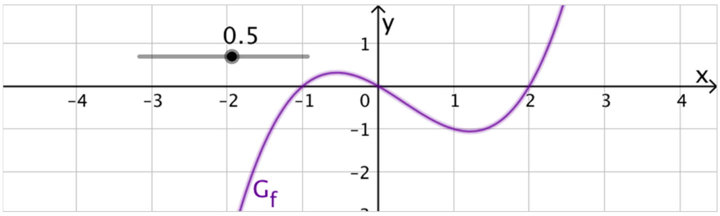
Zu f)

Durch multiplikatives Verknüpfen der Funktionsterme $f_1(x)$ und $f_4(x)$ der vorhergehenden Aufgabe erzeugen die Schülerinnen und Schüler eine Funktion. Mit der Gleichung in Zeile 2 wird der Wert für a so berechnet, dass P auf dem Graphen von g liegt.

1	g(x):=a*(x−2)^2*(x+3) → $g(x) := a\,(x-2)^2\,(x+3)$
2	Löse(g(−1)=2, a) → $\left\{a = \frac{1}{9}\right\}$

Zu g)

Der Einfluss des Leitkoeffizienten lässt sich mittels eines Schiebereglers untersuchen.



2.3 Differenzialrechnung mit ganzrationalen Funktionen

Im Zusammenhang mit den beschriebenen Vorschlägen zur Unterrichtsgestaltung kommen insbesondere folgende Grundfertigkeiten zur Anwendung:

- Funktionsterm definieren
- Funktionsterm ausmultiplizieren
- Nullstelle berechnen
- Wertetabelle erstellen
- Graph zeichnen, geeigneten Anzeigebereich wählen
- Gleichung lösen
- Polynomdivision durchführen
- mittlere Änderungsrate berechnen
- Eingabe über die Eingabezeile (Algebra-Fenster) zur Beschriftung der Punkte im Graphen
- Element aus einer Ergebnisliste auswählen
- Wert für eine Variable in einem Funktionsterm setzen
- Koordinaten von Punkten bestimmen
- Term der Ableitungsfunktion bestimmen
- Extremum bestimmen
- Koordinaten des Wendepunkts bestimmen
- Steigung eines Graphen in einem Punkt berechnen
- Geradengleichung aufstellen
- Tangentengleichung aufstellen
- Grenzwert berechnen

Grundlegende CAS-Befehle

Grenzwerte

Zeilen 2 - 3: Verhalten im Unendlichen bestimmen

Zeilen 5 - 6: Verhalten an der Definitionslücke bestimmen

1	f(x) := -x^5 + 2x^2-3 → $f(x) := -x^5 + 2x^2 - 3$
2	Grenzwert(f(x), ∞) → $-\infty$
3	Grenzwert(f(x), -∞) → ∞
4	g(x):=1/x → $g(x) := \frac{1}{x}$
5	RechtsseitigerGrenzwert(g(x), 0) → ∞
6	LinksseitigerGrenzwert(g(x), 0) → $-\infty$

Erste Ableitung

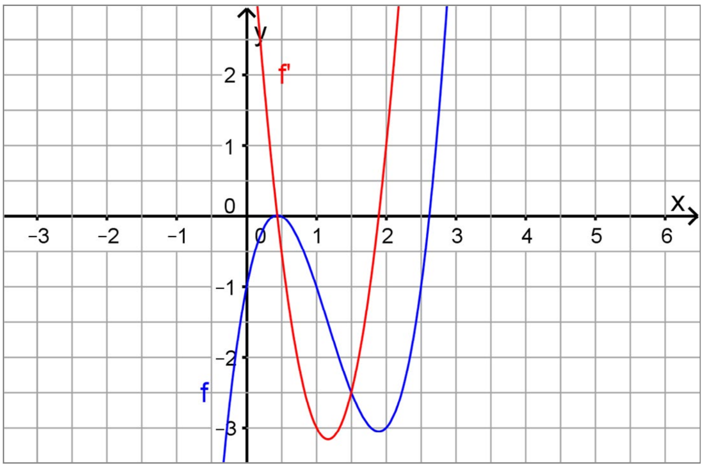
Es empfiehlt sich, zunächst den Term der Ableitungsfunktion zu berechnen und erst dann eine neue Funktion (hier: „ f' “) zu definieren.

Hinweis: Nicht alle CAS erlauben die Verwendung von Hochkommata für die Bezeichnung von Objekten; in solchen Fällen ist die Verwendung „sprechender“ Alternativen, wie z. B f1

1	f(x) := 2x³ - 7x² + 5x - 1 → $f(x) := 2x^3 - 7x^2 + 5x - 1$
2	Ableitung[f(x), x, 1] → $6x^2 - 14x + 5$
3	f'(x):=$2 → $f'(x) := 6x^2 - 14x + 5$

oder fs (und für höhere Ableitungen entsprechend f2, f3 … bzw. fss, fsss, …), zu empfehlen.

Interessant für den Lehr-Lern-Prozess ist es, die Graphen von Funktion (blau) und Ableitungsfunktion (rot) in einem gemeinsamen Koordinatensystem darzustellen.



Mögliche Extremstellen

Zeilen 5 - 6: Nullstellen der ersten Ableitung als Kandidaten für Extremstellen berechnen

Manche CAS stellen für die Bestimmung von Nullstellen einen eigenen Befehl bereit.

5	Löse[f'(x)=0,x] → $\left\{x = \frac{-\sqrt{19}+7}{6}, x = \frac{\sqrt{19}+7}{6}\right\}$
6	Nullstelle[f'(x)] → $\left\{x = \frac{-\sqrt{19}+7}{6}, x = \frac{\sqrt{19}+7}{6}\right\}$

Art der Extrema / zweite Ableitung

Zeilen 9 - 10: identifizieren der Art der Extrema über die zweite Ableitungsfunktion

Zeilen 11 - 12: identifizieren der Art der Extrema über das Vorzeichenverhalten der Funktionswerte der ersten Ableitungsfunktion

7	Ableitung[f(x), x, 2] → $12x - 14$
8	f''(x):=$7 → $f''(x) := 12x - 14$
9	f''((-sqrt(19) + 7) / 6) → $-2\sqrt{19}$
10	f''((sqrt(19) + 7) / 6) → $2\sqrt{19}$
11	Löse[f'(x)>0] → $\left\{\frac{-\sqrt{19}+7}{6} > x, x > \frac{\sqrt{19}+7}{6}\right\}$
12	Löse[f'(x)<0] → $\left\{\left(x > \frac{-\sqrt{19}+7}{6}\right) \wedge \left(\frac{\sqrt{19}+7}{6} > x\right)\right\}$

Tangente

Bei den meisten CAS besteht die Möglichkeit, die Gleichungen von Tangenten mithilfe eines speziell dafür zur Verfügung stehenden Befehls zu ermitteln.

1	f(x):=2x^2+3x-5 → $f(x) := 2x^2 + 3x - 5$
2	Tangente[1, f] → $y = 7x - 7$

Vorschläge zur Unterrichtsgestaltung

Aufgabe 1: Von der Sekanten- zur Tangentensteigung

Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto (x-1)^2$ mit $x \in \mathbb{R}$.

a) Definieren Sie im CAS die Funktion f und lassen Sie den Graphen im Grafik-Fenster darstellen.

b) Zeichnen Sie den Punkt $P(1{,}5 \mid f(1{,}5))$ ein. Erzeugen Sie einen Schieberegler mit dem Parameter a (Bereich 1 bis 3 veränderbar mit Schrittweite von 0,1). Zeichnen Sie den Punkt $A(a \mid f(a))$ und den Hilfspunkt $L(a \mid f(1{,}5))$ ein. Konstruieren Sie mit der Vieleckfunktion des CAS ein Dreieck. Die Punkte A und P legen eine Sekante fest.

c) Berechnen Sie mithilfe des Differenzenquotienten die Steigung der Sekante durch A und P in Abhängigkeit vom Parameter a.

d) Nähern Sie den Punkt A dem Punkt P von beiden Seiten beliebig nahe an. Verwenden Sie dazu den Schieberegler. Warum kann die unter c) berechnete Steigung im Punkt P nicht angezeigt werden? Schätzen Sie die Steigung des Graphen im Punkt P.

e) Bestimmen Sie die Steigung des Graphen von f im Punkt P, indem Sie den Grenzwert des Differenzenqotienten für $x \to 1{,}5$ berechnen.

f) Der Grenzwert des Differenzenquotienten für $x \to x_0$ ist der Differenzialquotient an der Stelle x_0. Die Ableitungsfunktion $f': x \mapsto f'(x)$ ordnet jedem $x_0 \in D_f$ die Steigung des Graphen von f an der Stelle x_0 zu.

Bestimmen Sie die Ableitungsfunktionen von: $f_1: x \mapsto x^2$ sowie $f_2: x \mapsto x^5$

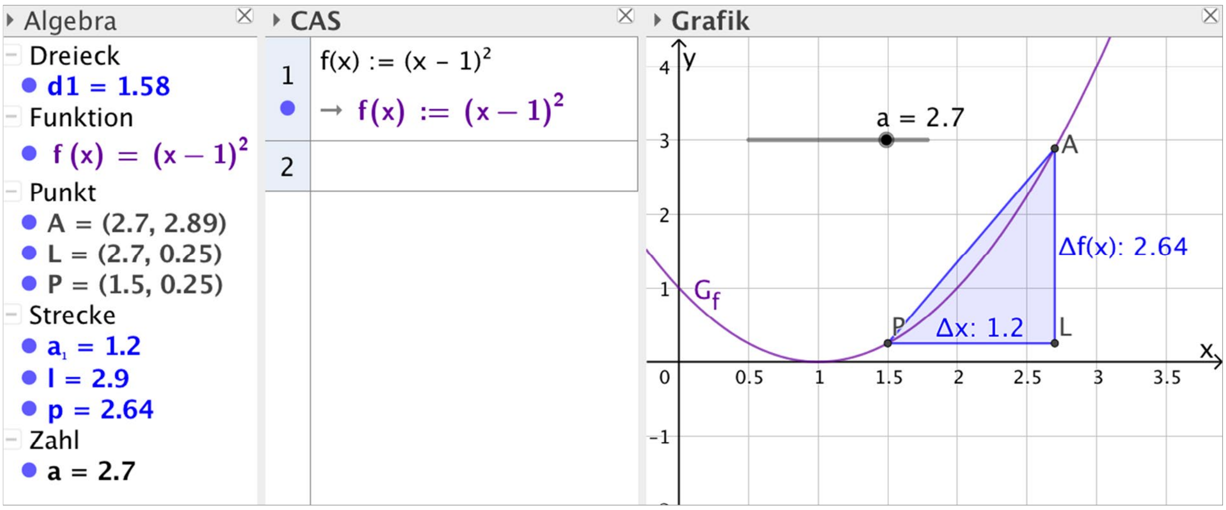
Zielsetzung Differenzenquotient mithilfe der Sekantensteigung kennenlernen, Übergang zum Differenzialquotienten, Begriff der 1. Ableitung und einfache Ableitungsregeln einführen

Voraussetzung Sekantensteigung, Grenzwertbegriff

Hinweise zur Bearbeitung

Zu a) und b)

Das Dreieck ΔAPL kann mit dem Befehl *Vieleck(<Liste von Punkten>)* erzeugt werden. Mithilfe der Verwendung des Schiebereglers erkennen die Schülerinnen und Schüler den Übergang der Sekante zur Tangente an den Graphen von f im Punkt P.



Zu c) und d)

Die Sekantensteigung kann mittels des Schiebereglers für mehrere Stellen berechnet werden.

1	f(x) := (x - 1)² → $f(x) := (x-1)^2$
2	msek:=(f(a)-f(1.5))/(a-1.5) → $\text{msek} := \frac{11}{5}$

Durch Annäherung der Werte von a mittels des Schiebereglers an den Wert $a = 1{,}5$ werden die Schülerinnen und Schüler eine Graphensteigung von 1 im Punkt P vermuten.

3	b:=(f(a)-f(1.5))/(a-1.5) → $b := \frac{11}{10}$

Zu e)

Mit dem CAS lässt sich der Grenzwert von msek für $x \to 1{,}5$ einfach berechnen und die Vermutung bestätigen.

4	a → $\frac{3}{2}$
5	Grenzwert((f(x)-f(a))/(x-a),x,a) → 1

Zeile 7: Berechnung des Differenzenquotienten in Abhängigkeit von x

Zeile 8: Berechnung des Differenzialquotienten als Grenzwert des Differenzenquotienten

7	((x-1)^2-(1.5-1)^2)/(x-1.5) → $x - \frac{1}{2}$
8	Grenzwert($7,1.5) → 1

Zu f)

Die Ableitungsregeln können mit dem CAS eigenständig entdeckt werden. Die Überprüfung durch die Berechnung des Differenzialquotienten mit dem CAS erfolgt hier exemplarisch.

$f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x$

$f(x) = mx + t \Rightarrow f'(x) = m$

$f(x) = k \cdot g(x) \Rightarrow f'(x) = k \cdot g'(x)$

$f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = n \cdot x^{n-1}$

1	f(x):=x^2 → $f(x) := x^2$
2	(f(x)-f(x_0))/(x-x_0) → $x_0 + x$
3	Grenzwert($2,x,x_0) → $2\,x_0$
4	g(x):=x^5 → $g(x) := x^5$
5	Grenzwert((g(x)-g(x_0))/(x-x_0),x,x_0) → $5\,x_0^4$

Aufgabe 2: Kurvendiskussion

Die Schnittdarstellung eines Gebirgszugs lässt sich mithilfe des Graphen nachfolgender Funktion b beschreiben. Sinnvoll ist nur der Bereich des Graphen oberhalb der x-Achse.

$$b : x \mapsto -\frac{5}{4}x^4 + 40x^3 - 450x^2 + 2000x - 2160 \qquad x \in \mathbb{R}, b(x) > 0$$

Die Werte von x sind Längenangaben als Vielfaches von 200 Meter. Die Werte von y sind Längenangaben in der Einheit Meter.

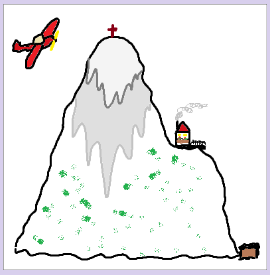


Bild: Gabriela Putton

a) Auf dem Gipfel befindet sich das Gipfelkreuz. Bestimmen Sie die Koordinaten des Gipfels G. Geben Sie die Gipfelhöhe h_G an. Zeichnen Sie mit dem CAS den Graphen von b und den Punkt G in einem kartesischen Koordinatensystem.

b) Bestimmen Sie die Koordinaten der Talstation T, welche auf 0 Höhenmetern am rechten Gebirgszugsende liegt. Zeichnen Sie die Talstation mit T in obiges Koordinatensystem. Auf einem Hochplateau mit „fast vollständig waagerechter Lage" steht eine Hütte H. Bestimmen Sie die Koordinaten der Hütte H. Zeichnen Sie den Punkt H in das Koordinatensystem ein.

c) Die Talstation soll mit der Hütte über eine unterirdisch verlaufende Zahnradbahn mit geradliniger Fahrbahn verbunden werden. Berechnen Sie die Länge der Fahrbahn. Die Fahrbahn legt eine Gerade fest. Bestimmen Sie eine Gleichung dieser Geraden. Zeichnen Sie die Gerade in das Koordinatensystem ein.

d) Bergwanderer wollen die Strecke von der Hütte H bis zum Gipfel auf dem kürzesten Weg erklimmen. Berechnen Sie die Koordinaten des steilsten Punkts auf der Wanderung und geben Sie die Steigung des Bergs in diesem Punkt an. Zeichnen Sie den Punkt in das Koordinatensystem ein.

e) Vom naheliegenden Flugplatz starten Propellermaschinen zu Rundflügen über den Gipfel. Die Flugkurve eines Fluges kann mit der Funktion $f : x \mapsto -6x^2 + 72x + 734$ beschrieben werden. Berechnen Sie die Koordinaten des höchsten Punktes der Flugroute und zeichnen Sie diesen in das Koordinatensystem ein. Überprüfen Sie nachfolgende Aussage: „Der Sicherheitsabstand des Flugzeugs vom Berg von mindestens 50 Meter wird entlang dieser Flugroute stets eingehalten."

Zielsetzung Kurvendiskussion im Sachzusammenhang

Hinweise zur Bearbeitung

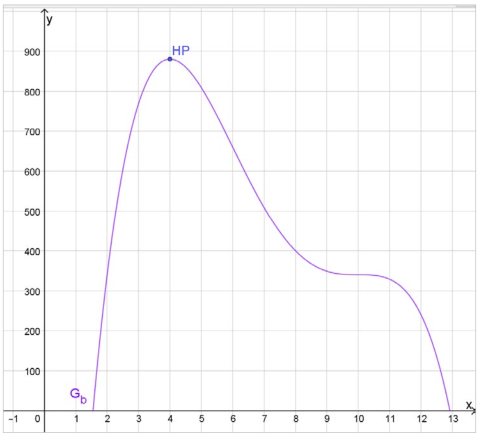
Zu a) bis c)

Zeile 1: Definition der Funktionsgleichung

Hinweis:
Eingabe *f(x):=Wenn(b(x) ≥ 0,b(x))* ermöglicht die Darstellung des Graphen in seinem Definitionsbereich

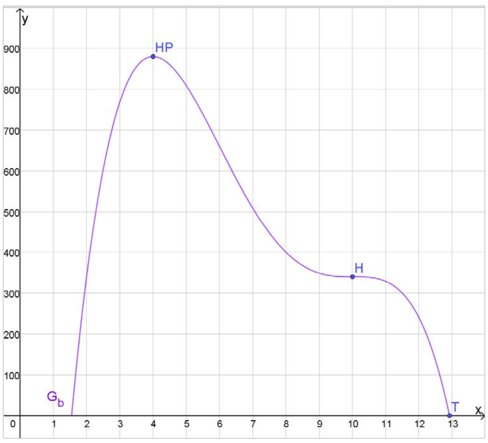
Zeilen 2 - 5: schrittweise Lösung

Zeile 7: Lösung in einem Schritt



1	b(x):=-1.25 x⁴ + 40 *x³ - 450 *x² + 2000* x - 2160 → $b(x) := -\frac{5}{4}x^4 + 40x^3 - 450x^2 + 2000x - 2160$
2	b'(x) → $-5x^3 + 120x^2 - 900x + 2000$
3	xTP:=Löse({b'(x)=0,b''(x)>0}) → $xTP := \{\}$
4	xHP:=Löse({b'(x)=0,b''(x)<0}) → $xHP := \{x = 4\}$
5	yHP:=Ersetze(b(x),$4) → $yHP := 880$
6	>EINGABE von HP=(4,880) in die Eingabezeile;
7	Extremum(b(x)) → $\{(4, 880)\}$

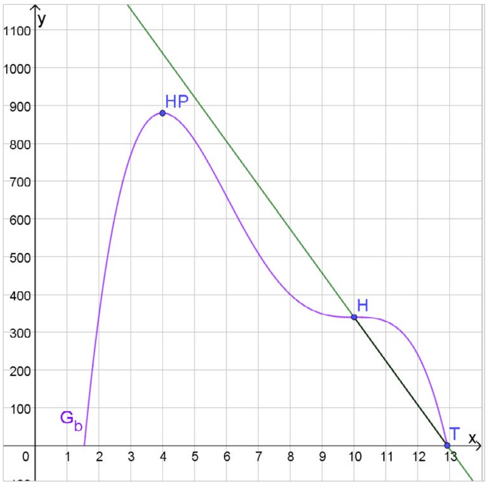
Zwischendefinitionen (xH, mH, yh) erleichtern die Übersicht und die Eingabe



1	b(x):=-1.25 x⁴ + 40 *x³ - 450 *x² + 2000* x - 2160 → $b(x) := -\frac{5}{4}x^4 + 40x^3 - 450x^2 + 2000x - 2160$
2	EINGABE von HP=(4,880) in die Eingabezeile;
3	Nullstelle(b(x)) → $\{x = 1.55, x = 12.92\}$
4	Löse(b''(x)=0) → $\{x = 6, x = 10\}$
5	xH:=Element($4,2) → $xH : x = 10$
6	mH:=Ersetze(b'(x),xH) → $mH := 0$
7	yH:=Ersetze(b(x),xH) → $yH := 340$
8	Eingabe von H=(10,340) in die Eingabezeile;

Zeile 5: Maßstab beachten

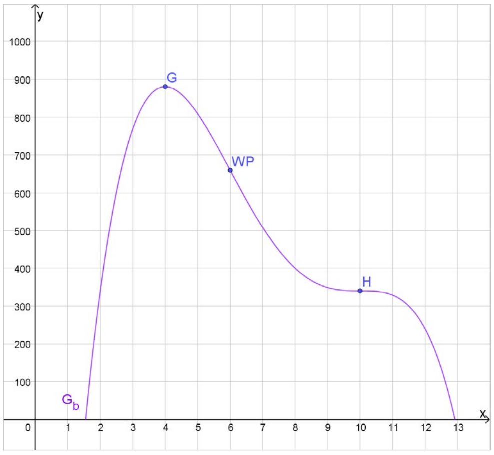
Länge = 18,4 km



1	b(x):=-1.25 x⁴ + 40 *x³ - 450 *x² + 2000* x - 2160 $\rightarrow\ b(x) := -\frac{5}{4}x^4 + 40x^3 - 450x^2 + 2000x - 2160$
2	EINGABE von T=(12.92,0) in die Eingabezeile;
3	Eingabe von H=(10,340) in die Eingabezeile;
4	H-T $\approx\ (-2.92, 340)$
5	sqrt((2,92*200)² + 340^2) $\approx\ 18403.14$
6	mg:=(340/(-73/25)) $\rightarrow\ mg := -\frac{8500}{73}$
7	g(x):=mg*x+(340-mg*10) $\approx\ g(x) := -116.44x + 1504.38$

Zu d)

Zeile 4: Die tatsächliche Steigung am realen Berg muss von den Schülerinnen und Schülern noch unter Berücksichtigung des Maßstabs berechnet werden.



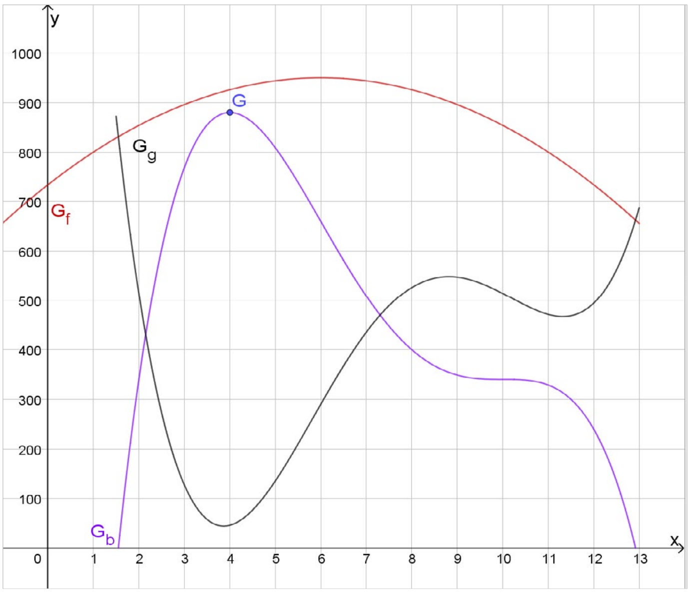
1	b(x) := (-5) / 4 x⁴ + 40x³ - 450x² + 2000x - 2160 $\rightarrow\ b(x) := -\frac{5}{4}x^4 + 40x^3 - 450x^2 + 2000x - 2160$
2	Extremum(b(x)) $\rightarrow\ \{(4, 880)\}$
3	Wendepunkt(b(x)) $\rightarrow\ \{(6, 660), (10, 340)\}$
4	b'(6) $\rightarrow\ -160$
5	EINGABE von WP=(6,660) in die Eingabezeile;

Zu e)

Die Differenzfunktion $f-b$ beschreibt den Abstand des Flugzeugs vom Berg.

Der Sicherheitsabstand wird unterschritten. Direkt über dem Gipfel beträgt der Abstand 46 Meter.

1	b(x):=-1.25 x⁴ + 40 *x³ - 450 *x² + 2000* x - 2160 $\rightarrow\ b(x) := -\frac{5}{4}x^4 + 40x^3 - 450x^2 + 2000x - 2160$
2	f(x) := -6x² + 72x + 734 $\rightarrow\ f(x) := -6x^2 + 72x + 734$
3	Extremum(f(x)-b(x)) $\rightarrow\ \{(3.86, 44.34), (8.82, 548.28), (11.32, 466.98)\}$
4	f(4)-b(4) $\rightarrow\ 46$



Aufgabe 3: Parabelkirche

Die Abbildung zeigt eine Darstellung des Innenraums der Parabelkirche in Gelsenkirchen. Sie wurde in den Jahren 1927 bis 1929 erbaut.

Das Gewölbe des Kirchenmittelschiffs ist parabelförmig. Die Parabel endet am Boden.
Im Boden eingelassenen Stützpfeiler haben die Form einer Geraden, die die Parabel knickfrei an beiden Seiten verlängern. Die Stützpfeiler befinden sich nicht sichtbar jeweils links und rechts unterhalb des Bodens.
Das Kirchenmittelschiff ist 10 Meter breit und 15 Meter hoch.

Bild: Gabriela Putton

a) Bestimmen Sie eine quadratische Funktion, deren Graph den Verlauf der Berandung des Kirchenmittelschiffs wiedergibt.

b) Berechnen Sie die Steigung eines in den Kirchenboden eingelassenen geraden Stützpfeilers.

c) Welchen Winkel schließen Stützpfeiler und Kirchenboden miteinander ein?

Zielsetzung Übung zur Kurvendiskussion

Hinweise zur Bearbeitung

Zu a)

Drei Bestimmungsgleichungen legen den Term fest. Das Gleichungssystem wird mit dem CAS gelöst.

1	f(x) :=a*x^2+b*x+c $\rightarrow\ \mathbf{f(x)\ :=\ a\,x^2 + b\,x + c}$
2	Löse({f(0)=15,f(5)=0,f'(0)=0}, {a,b,c }) $\rightarrow\ \left\{\left\{\mathbf{a = -\frac{3}{5}, b = 0, c = 15}\right\}\right\}$

Zu b)

Die Steigung des linken Stützpfeilers lässt sich über die erste Ableitung berechnen. Hier bietet sich ein Exkurs über die Differenzierbarkeit einer Funktion an.

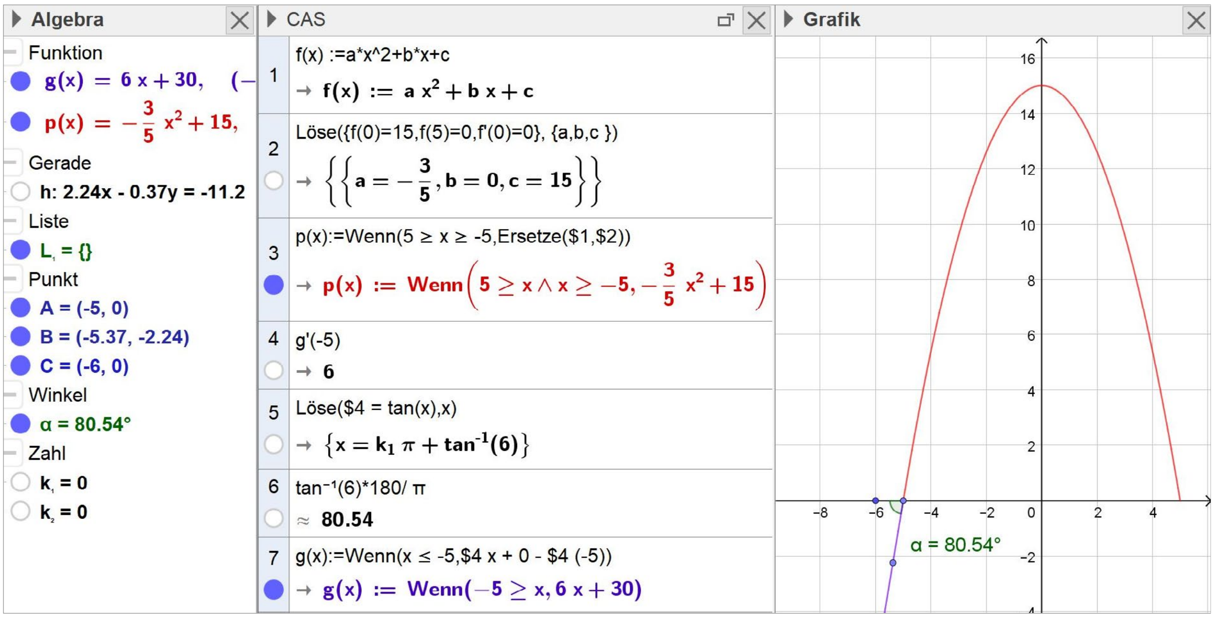
4	g'(-5)
	→ **6**

Zu c)

Umrechnung vom Bogenmaß ins Gradmaß

5	Löse($4 = tan(x),x)
	→ $\{x = k_1\,\pi + \tan^{-1}(6)\}$
6	tan⁻¹(6)*180/ π
	≈ **80.54**

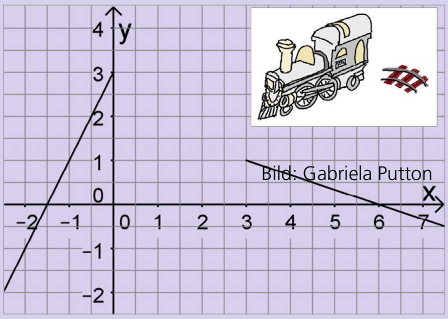
Bei der Visualisierung dieses Sachverhalts ist das CAS sehr gewinnbringend einsetzbar. Im Algebra-Fenster kann der Winkel direkt gemessen und eingezeichnet werden. Hierzu müssen vorher drei Punkte definiert werden.



Aufgabe 4: Bahnstrecken verbinden

Die Abbildung veranschaulicht modellhaft den Verlauf zweier Bahnstrecken (Halbgeraden), die sich durch folgende Funktionen beschreiben lassen:

- $g: x \mapsto 2x + 3,\ \ x \in \left]-\infty; 0\right]$
- $h: x \mapsto -\frac{1}{3}x + 2,\ \ x \in \left[3; +\infty\right[$



Die Bahnstrecken sollen so verbunden werden, dass die Übergänge zwischen den bestehenden Strecken und dem neu gebauten Streckenabschnitt jeweils möglichst glatt sind.

a) Stellen Sie die Graphen von g und h mit dem CAS dar.

Der neue Streckenabschnitt soll im Modell durch den Graphen einer ganzrationalen Funktion s dargestellt werden.

b) Skizzieren Sie, wie der neue Streckenabschnitt Ihrer Ansicht nach in etwa verlaufen könnte.

c) Geben Sie die Bedingungen an, die an die Funktion s gestellt werden müssen, und begründen Sie deren jeweilige Notwendigkeit. Welcher Grad bietet sich folglich für s an?

d) Ermitteln Sie einen Term der Funktion s und zeichnen Sie den Graphen von s in die Darstellung aus Aufgabe a) ein. Vergleichen Sie mit Ihrem Vorschlag aus Aufgabe b).

e) Auf dem neuen Streckenabschnitt gibt es einen Punkt P, in dem von einer Rechtskurve in eine Linkskurve gewechselt wird. Bestimmen Sie die Koordinaten von P.

(vgl. [HR CAS Gym 11-12])

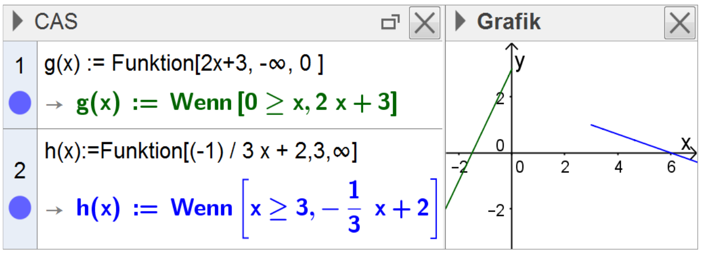
Zielsetzung Anwendung

Voraussetzung Grundlagen der Differenzialrechnung

Hinweise zur Bearbeitung

Zu a)

Graphen bei eingeschränkten Definitionsmengen



Zu c) und d)

An die Funktion s sind folgende Bedingungen zu stellen:

$s(0) = g(0) \quad s'(0) = g'(0) \quad s''(0) = g''(0)$

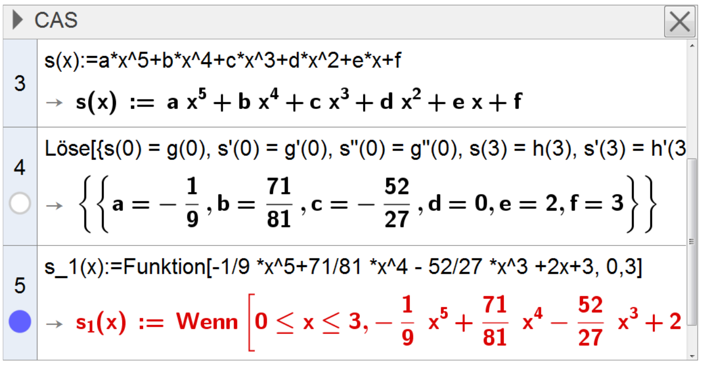
$s(3) = h(3) \quad s'(3) = h'(3) \quad s''(3) = h''(3)$

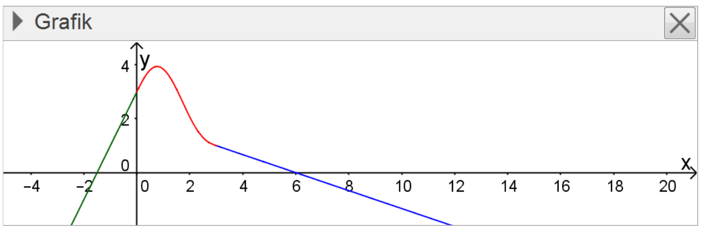
Für s bietet sich folglich eine Funktion fünften Grades an.

Das Gleichungssystem wird nach der Definition von s gelöst.

Zeile 4 (Forts.): …, s''(3) = h''(3)},{a, b, c, d, e, f}]

Anregung: Z. B. im Rahmen der Besprechung der Aufgabe bietet es sich an, ergänzend einen Term von s zu ermitteln, ohne die Bedingungen für die zweite Ableitung zu beachten, und das Ergebnis mit dem Ergebnis aus Aufgabe c zu vergleichen.





Zu e)

Für die x-Koordinate des Wendepunkts ergeben sich rechnerisch drei Möglichkeiten, von denen aber nur $x = \frac{26}{15}$ im Definitionsbereich von s liegt.

Anmerkung: Bei dieser Aufgabe zeigt sich, dass die Interpretation von Lösungen im Kontext der Aufgabenstellung stets notwendig ist. Die Schülerinnen und Schüler sollen dafür sensibilisiert werden.

6	s_2(x):=-1/9 *x^5+71/81 *x^4 - 52/27 *x^3 +2x+3 $\rightarrow s_2(x) := -\frac{1}{9}x^5 + \frac{71}{81}x^4 - \frac{52}{27}x^3 + 2x + 3$
7	Löse[s_2''(x)=0, x] $\rightarrow \left\{x = 0, x = \frac{26}{15}, x = 3\right\}$
8	s_2'''(26/15) $\approx$ **4.88**
9	s_2(26/15) $\rightarrow \frac{53530027}{20503125}$

Aufgabe 5: Steckbrief Nr. 1

Von einer ganzrationalen Funktion f dritten Grades, mit $x \in D_f$, sind folgende Eigenschaften bekannt:

f hat an der Stelle $x_1 = \frac{1}{2}$ eine Nullstelle, der Graph von f besitzt den relativen Hochpunkt $HP(-1|2)$ sowie an der Stelle $x_2 = 2$ einen Randhochpunkt. Außerdem ist das relative Minimum der Funktion zugleich das absolute Minimum.

Bestimmen Sie die maximal mögliche Definitionsmenge D_f.

Zielsetzung Aufstellen von Funktionstermen, Randextrema, relative und absolute Extrema

Voraussetzung Grundlagen der Differenzialrechnung

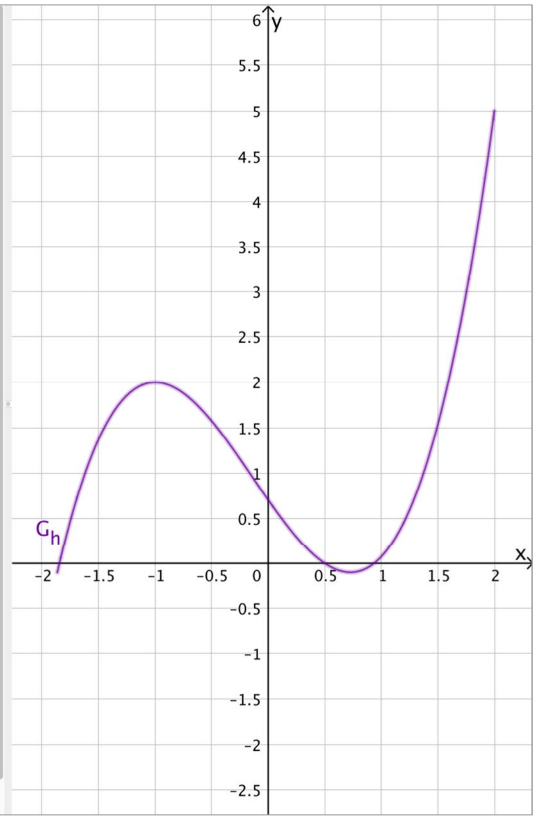
Hinweise zur Bearbeitung

Zeilen 1 - 3: Die Schülerinnen und Schüler lösen das Gleichungssystem zum Aufstellen der Funktionsgleichung mit dem CAS. Am Graphen der Funktion erkennen sie: $D_f = \left]-\frac{21}{42};2\right]$

Das hier verwendete CAS erkennt $f'(x)$ als den Term der Ableitungsfunktion von f. Die Ableitungsfunktion müsste also nicht extra definiert werden – im Gegensatz zu einigen anderen CAS.

Zeile 8: Mit dem Befehl *Funktion(<Funktion>, <Startwert>, <Endwert>)* wird die Funktion mit eingeschränktem Definitionsbereich definiert.

1	f(x):=a*x^3+b*x^2+c*x+d $\rightarrow\ f(x) := a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + d$
2	f'(x):=Ableitung(f(x)) $\rightarrow\ f'(x) := 3\,a\,x^2 + 2\,b\,x + c$
3	Löse({f(−1)=2, f'(−1)=0,f(0.5)=0,f(2)=5},{a,b,c,d}) $\rightarrow\ \left\{\left\{a = \frac{22}{27}, b = \frac{1}{3}, c = -\frac{16}{9}, d = \frac{19}{27}\right\}\right\}$
4	g(x):=22/27x^3+1/3*x^2−16/9x+19/27 $\rightarrow\ g(x) := \frac{22}{27}\,x^3 + \frac{1}{3}\,x^2 - \frac{16}{9}\,x + \frac{19}{27}$
5	Löse(Ableitung(g(x)=0)) $\rightarrow\ \left\{x = -1, x = \frac{8}{11}\right\}$
6	g(8/11) $\rightarrow\ -\frac{325}{3267}$
7	Löse(g(x)=−325 / 3267) $\rightarrow\ \left\{x = -\frac{41}{22}, x = \frac{8}{11}\right\}$
8	h(x):=Funktion(g(x),(−41) / 22,2) $\rightarrow\ h(x) := \text{Wenn}\left(-\frac{41}{22} \le x \le 2, \frac{22}{27}\,x^3 + \frac{1}{3}\,x^2 - \frac{16}{9}\,x + \frac{19}{27}\right)$



Aufgabe 6: Streckbrief Nr. 2, Regressionskurve

a) Eine ganzrationale Funktion 3. Grades hat an den Stellen $x_1 = -3$ und $x_2 = 2$ jeweils einfache Nullstellen, ihr Graph hat im Punkt $P(0\,|\,t),\ t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ einen relativen Hochpunkt. Bestimmen Sie den Funktionsterm der Funktion in Abhängigkeit von t.

b) Die Funktion $f: x \mapsto f(x)$ besitzt folgende Wertetabelle:

x	0	0,5	1	1,5	2	2.5	3
f(x)	0	0,75	0	-0.75	0	3,75	12

Bestimmen Sie einen passenden Funktionsterm von f.

Zielsetzung Vertiefung in Hinblick auf Funktionsterme mit und ohne Parameter bei vorgegebenen Informationen, sowohl rechnerisch als auch mithilfe von Streudiagrammen

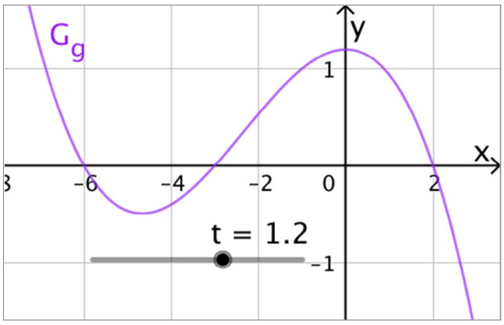
Voraussetzung Sicherer Umgang mit den Grundlagen der Kurvendiskussion

Anregung Die Thematik könnte auch Gegenstand eines Referats sein.

Hinweise zur Bearbeitung

Zu a)

Zeilen 3 - 5: Die Zielfunktion wird definiert. Der Funktionsterm kann mit einem Schieberegler dynamisch verändert werden. Die Schülerinnen und Schüler erkennen am Graphen die Notwendigkeit der Einschränkung des Wertebereichs für den Parameter t. Mit der Ungleichung in Zeile 5 bestimmen sie diesen Bereich.



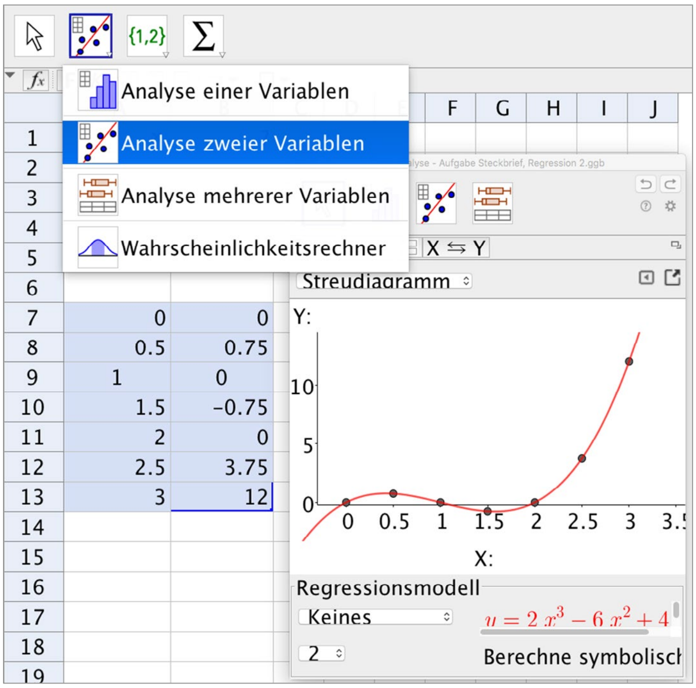
1	f(x):=a*x^3+b*x^2+c*x+d $\rightarrow\ f(x) := a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + d$
2	Löse({f(−3)=0, f(2)=0,f(0)=t,f'(0)=0},{a,b,c,d}) $\rightarrow\ \left\{\left\{a = -\frac{1}{36}\,t, b = -\frac{7}{36}\,t, c = 0, d = t\right\}\right\}$
3	g(x):=−1/36*t*x^3−7/36*t*x^2+t $\rightarrow\ g(x) := -\frac{1}{36}\,t\,x^3 - \frac{7}{36}\,t\,x^2 + t$
4	Faktorisiere(g(x), x) $\rightarrow\ -t\,(x-2)\,(x+3)\,\frac{x+6}{36}$
5	Löse(g''(0)<0,t) $\rightarrow\ \{t > 0\}$

Bemerkenswert ist, dass die dritte Nullstelle unabhängig vom Wert des Parameters an der Stelle $x = -6$ liegt. Diese Erkenntnis lässt Raum für weitere vertiefende Diskussionen.

Zu b)

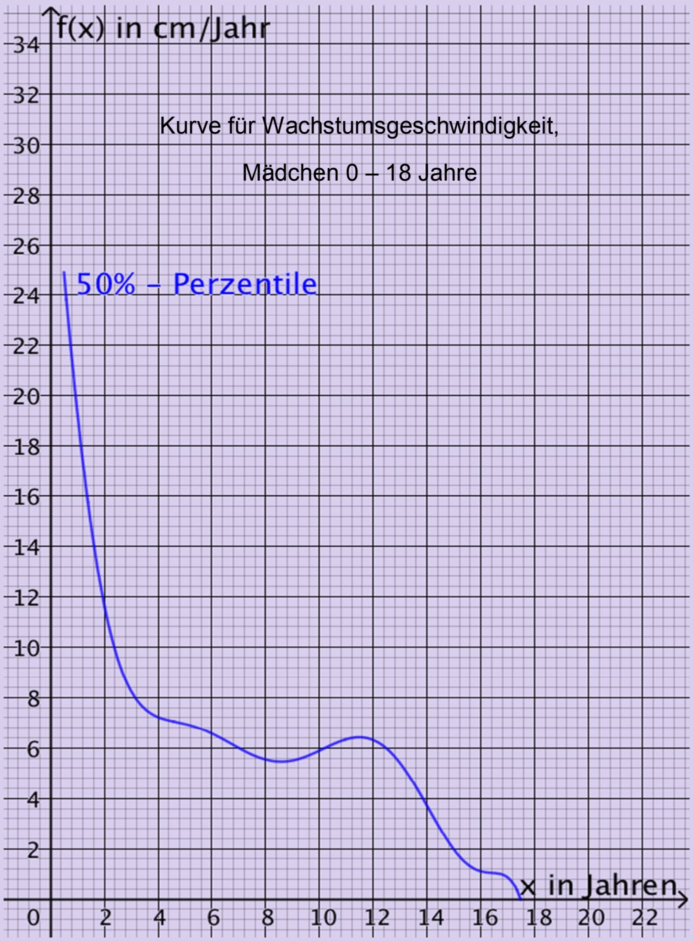
Hier ist zunächst unklar, welcher Funktionstyp zu verwenden ist. CAS bieten die Möglichkeit, Regressionskurven zu generieren.

Dazu werden die Wertepaare zunächst in ein Tabellenkalkulationsblatt eingetragen. Über den Menüpunkt „Analyse zweier Variablen" erhält man ein Streudiagramm. Je nach gewähltem Regressionsmodell werden mehr oder weniger brauchbare Kurven mit zugehörigen Funktionsgleichungen angezeigt. Der Grad von Polynomen ist hier auf maximal 6 beschränkt.



Aufgabe 7: Wachstumsperzentile

In der Abbildung sehen Sie eine sog. Perzentilenkurve, bezüglich der Wachstumsgeschwindigkeit von Mädchen. Eine Perzentile ist eine Kenngröße, die hier z. B. angibt, wo ein Mädchen aus der Stichprobe bzgl. ihrer Wachstumsgeschwindigkeit im Vergleich zu den anderen Mädchen steht. Befindet sich beispielsweise die Wachstumsgeschwindigkeit eines Mädchens zu einem bestimmten Zeitpunkt auf oder in der Nähe der „90 %-Perzentile", so bedeutet dies, dass nur 10 % der Mädchen seines Alters und Geschlechts schneller wachsen.



Im Folgenden wird die 50 %-Perzentile betrachtet. Ihr Verlauf kann im Intervall $[0;18 \text{ Jahre}]$ durch eine ganzrationale Funktion näherungsweise beschrieben werden.

a) Bestimmen Sie aus dem abgebildeten Graphen ausreichend viele Wertepaare und erzeugen Sie mit dem CAS eine ganzrationale Funktion, deren Graph die Kurve möglichst genau wiedergibt.

b) Bestimmen Sie das Alter, in dem die Mädchen aufhören zu wachsen.

c) Interpretieren Sie den Verlauf der Kurve im Sachzusammenhang. Gehen Sie dabei auch auf die Bedeutung des lokalen Maximums ein.

d) Berechnen Sie die maximale Wachstumsrate für Mädchen, deren Wachstumskurve identisch zum Verlauf der 50 %-Perzentile ist.

e) Die Funktionswerte beschreiben die Wachstumsgeschwindigkeit, d. h. die Änderungsrate der Körpergröße. Überlegen Sie, wie die tatsächliche Körpergröße eines Mädchens beschrieben werden kann.

f) Angenommen, eine Frau folgt in ihrer Kinder- und Jugendzeit einer Wachstumskurve, die identisch zu obiger 50%-Perzentile verläuft. Wie groß wäre sie am Ende ihrer Wachstumsphase? Vergleichen Sie ihren Wert mit der offiziellen Durchschnittsgröße von Frauen. Diskutieren Sie Ihre Ergebnisse.

Zielsetzung Regressionskurven, Kurvendiskussion, Änderungsrate, Stammfunktion

Voraussetzung Differenzialrechnung mit ganzrationalen Funktionen

Anregung Ein Funktionsterm kann auch vorgegeben werden bzw. es können Wertepaare in der Aufgabenstellung vorgegeben werden, um einheitliche Ergebnisse zu erzielen bzw. um Zeit zu sparen. Andererseits bieten abweichende Ergebnisse Raum für Diskussionen hinsichtlich der Vor- und Nachteile der verschiedenen Modelle.

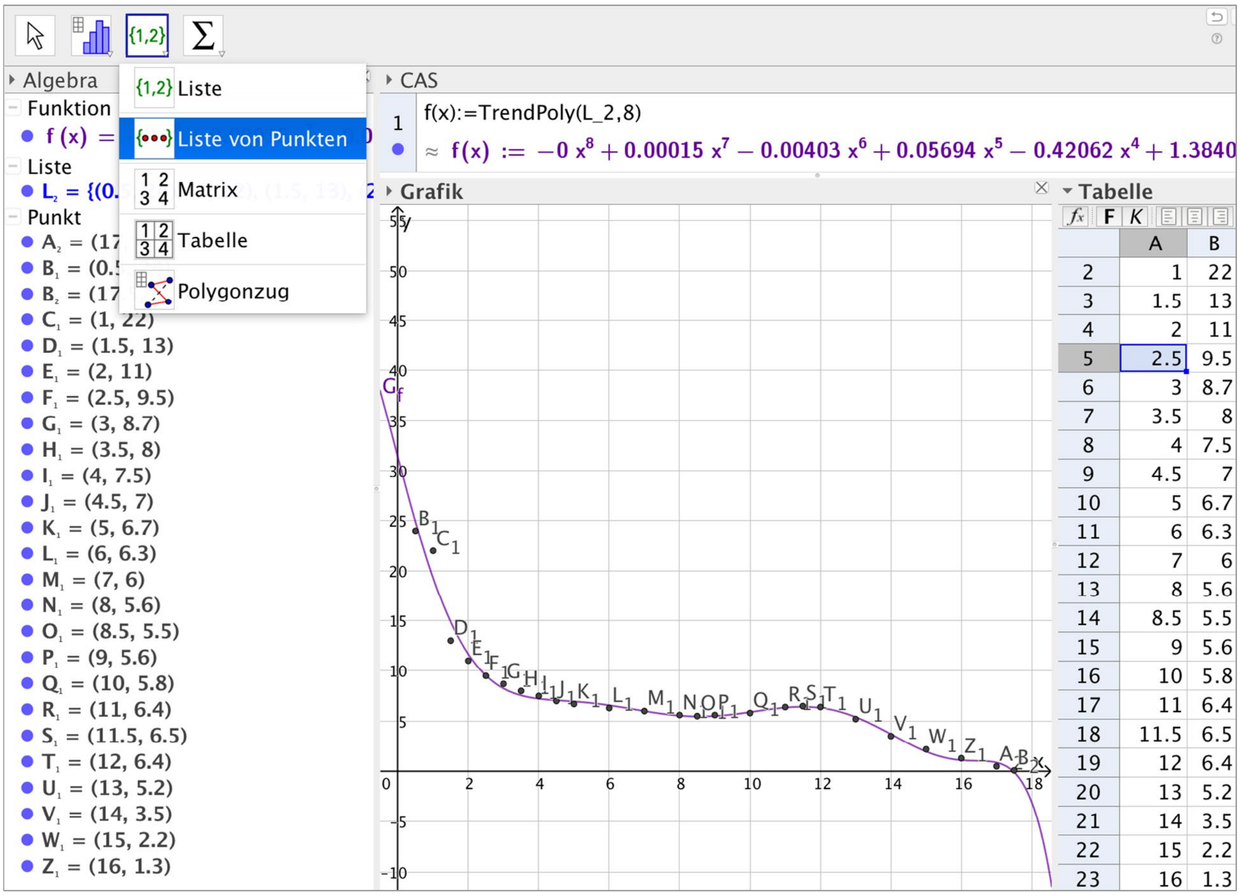
Hinweise zur Bearbeitung

Zu a)

Das Verfahren zum Erzeugen einer Regressionskurve wie in Aufgabe 6 versagt an dieser Stelle, weil Polynome bis Grad 6 die Sachlage zu ungenau darstellen.

Mit dem Befehl *TrendPoly(<Liste von Punkten>,<Grad des Polynoms>)* bestimmt Geogebra Regressionspolynome auch für höhere Grade als 6. Hier im Beispiel beschreibt eine ganzrationale Funktion 8. Grades die gegebene Kurve recht gut. Die

Liste der Punkte kann mit dem Befehl *Liste von Punkten* im Tabellen-Fenster erzeugt werden. Die Schülerinnen und Schüler definieren sich ihre Funktion im CAS. Die „0" als Koeffizient a_8 erscheint hier als gerundeter Wert, da 5 Rundungsdezimalen eingestellt sind (Geogebra → *Einstellungen*).



Zu b)

Die Nullstellen sind für Schülerinnen und Schüler ohne CAS nicht berechenbar.

2	Nullstelle(f(x))
	$\approx$ $\{x = -2.83432, x = 17.47505\}$

Zu c) und d)

Zeilen 3 - 4: Die Koordinaten der relativen Extrempunkte des Graphen können mit dem CAS berechnet werden. Die Plausibilität der Ergebnisse kann an der Kurve überprüft werden.

3	Löse(f'(x)=0)
	$\approx$ $\{x = -1.40523, x = 8.57296, x = 11.48192\}$
4	f({-1.405231910068,8.572959084142,11.48191623589})
	$\approx$ $\{44.82695, 5.46031, 6.42398\}$

Zu e) und f)

Der Schluss von der Änderungsrate auf die Gesamtänderung einer Größe kann hier besprochen, bearbeitet bzw. geübt werden. Die Bestimmung

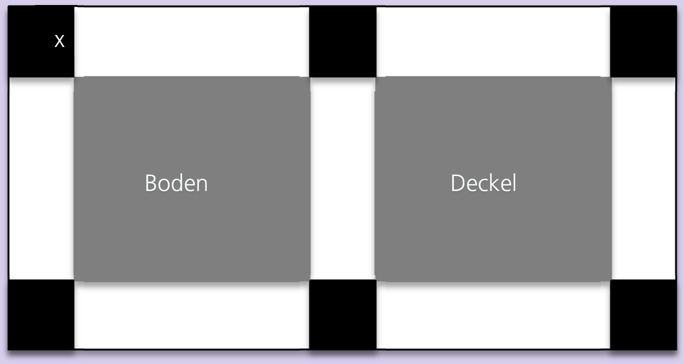
5	Integral(f(x),0,17.48)
	$\approx$ 123.01928

der Stammfunktion und die Berechnung des bestimmte Integrals zur Bestimmung der Körpergröße übernimmt das CAS.

Geht man von einer Geburtsgröße von 50 cm aus, erhält man eine Körperlänge von 173 cm. Die Durchschnittsgröße von deutschen Frauen wird mit 168 cm angegeben.

Aufgabe 8: Optimierungsproblem – Die optimale Schachtel

Aus einem 40 cm langen und 20 cm breiten Karton soll durch Herausschneiden von 6 Quadraten eine Schachtel hergestellt werden, deren Deckel auf drei Seiten überlappt.



Graphik: Andreas Schober

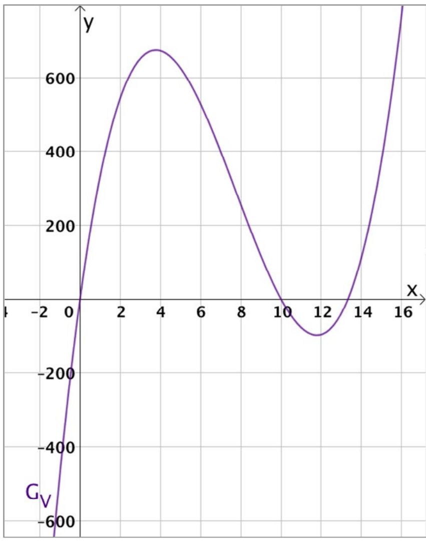
Untersuchen Sie, wie groß die Quadrate gewählt werden müssen, damit in der Schachtel möglichst viel Platz ist, also das Volumen möglichst groß ist.
Stellen Sie dazu das Volumen der Schachtel in Abhängigkeit der Quadratseitenlänge x dar und zeichnen Sie den Graphen dieser Funktion mit dem CAS. Lesen Sie aus der Zeichnung bzw. einer Wertetabelle einen Wert für x ab, für den das Volumen der Schachtel seinen maximalen Wert anzunehmen scheint.
Welche Außenmaße hat so eine „optimale" Schachtel?

Zielsetzung	Bestimmung einer Zielfunktion, Optimierung
Voraussetzung	Bestimmung von Extrempunkten, Kurvendiskussion
Anregung:	Die Aufgabe eignet auch als Einführungsbeispiel in die Differenzialrechnung in der Jahrgangsstufe 11, wenn auf die exakte Bestimmung der Werte zunächst verzichtet wird.

Hinweise zur Bearbeitung

1	l(x):=20-1.5x $\rightarrow$ $l(x) := -\frac{3}{2}x + 20$
2	b(x):=-2x+20 $\rightarrow$ $b(x) := -2x + 20$
3	h(x):=x $\rightarrow$ $h(x) := x$
4	V(x):=l*b*h $\rightarrow$ $V(x) := 3x^3 - 70x^2 + 400x$

Das Maximum befindet sich zwischen den Stellen $x = 3$ und $x = 4$. Die Tabelle kann zwischen den beiden Werten verfeinert werden, um sich genauer an die Extremstelle heranzutasten. Die grafische Bestimmung des maximalen Volumens eignet sich dann besonders, wenn die Aufgabe der Differenzialrechnung vorangestellt wird.



	A	B	C
1	-1	-473	
2	0	0	
3	1	333	
4	2	544	
5	3	651	
6	3.1	656.67	
7	3.2	661.5	
8	3.3	665.51	
9	3.4	668.71	
10	3.5	671.13	
11	3.6	672.77	
12	3.7	673.66	
13	3.8	673.82	
14	3.9	673.26	
15	4	672	
16	5	625	
17	6	528	

Zeilen 5 - 10: Eine kritische Betrachtung der Problemstellung schließt einen Teil der berechneten Lösungen aus.

4	V(x):=l*b*h $\rightarrow$ $V(x) := 3x^3 - 70x^2 + 400x$
5	Löse(V'(x)=0) $\rightarrow$ $\left\{x = \frac{-10\sqrt{13}+70}{9}, x = \frac{10\sqrt{13}+70}{9}\right\}$
6	\$5 $\approx$ $\{x = 3.77, x = 11.78\}$
7	l(\$5) $\approx$ $\{-1.5x + 20 = 14.34, -1.5x + 20 = 2.32\}$
8	b(\$5) $\approx$ $\{-2x + 20 = 12.46, -2x + 20 = -3.57\}$
9	h(\$5) $\approx$ $\{x = 3.77, x = 11.78\}$
10	V(\$5) $\approx$ $\{3x^3 - 70x^2 + 400x = 673.84, 3x^3 - 70x^2 + 400x = -97.71\}$

Aufgabe 8: Biegung einer Holzlatte

Eine Holzlatte biegt sich durch, wenn man sie an ihren Enden auf zwei Lager P und Q mit dem Abstand $|\overline{PQ}| = d$ (in m) legt. Die Durchbiegung in Meter lässt sich an der Stelle x (in Meter) mit $b_d(x) = -0{,}001 \cdot (x^4 - 2dx^3 + d^3x)$, mit $0 \le x \le d$ beschreiben.

Bestimmen Sie, wie groß der Abstand d höchstens sein darf, damit die maximale Durchbiegung höchstens $0{,}2\,\text{m}$ beträgt.

Zielsetzung Extremwertaufgabe, eher offen gestaltet, Lösungsstrategie überlegen

Voraussetzung Differenzialrechnung, Umgang mit Parameter

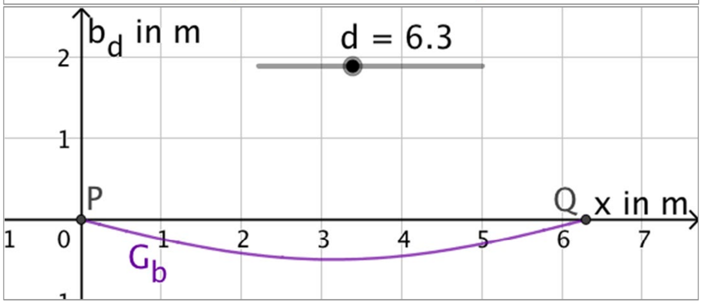
Hinweise zur Bearbeitung

Zunächst können sich die Schülerinnen und Schüler mit dem CAS den Sachverhalt anhand des Graphen der Funktion klarmachen. Dabei erkunden sie den Einfluss des Parameterwertes auf die vorhandene Durchbiegung. Die Funktion sollte anfangs im „Algebra-Fenster" definiert werden.

Algebra

Funktion

$f(x) = -0.001\ (x^4 - 2 \cdot 6.3\, x^3 + 6.3^3\, x), \quad (0 \le x \le 6.3)$



Zeile 1: Um einen Konflikt mit dem bereits im Schieberegler definierten Parameter d zu vermeiden, muss der Variablenwert d gelöscht oder ein neuer Parameter eingeführt werden.

Zeilen 2 - 3: Die maximale Durchbiegung kann in Abhängigkeit von d (bzw. a) als relatives Minimum der Funktion im Definitionsbereich bestimmt werden.

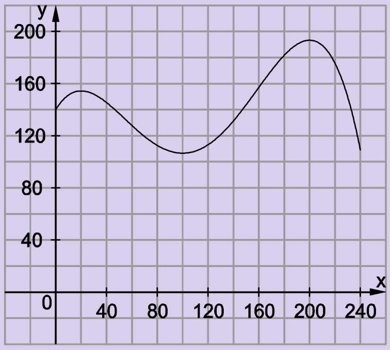
Zeilen 4 - 5: Lösung einer Ungleichung

1	g(x):=-0.001 (x⁴ - 2a x³ + a³ x) $\rightarrow\ g(x) := -\frac{1}{1000}\left(-2\,a\,x^3 + a^3\,x + x^4\right)$
2	Löse(g'(x)=0) $\rightarrow\ \left\{x = \frac{1}{2}\,a - \frac{\sqrt{3}}{2}\,\lvert a\rvert,\ x = \frac{1}{2}\,a,\ x = \frac{1}{2}\,a + \frac{\sqrt{3}}{2}\,\lvert a\rvert\right\}$
3	g(a/2) $\rightarrow\ -\frac{1}{3200}\,a^4$
4	Löse(-1/3200*a^4>-0.2,a) $\rightarrow\ \left\{-2\,\sqrt[4]{40} < a < 2\,\sqrt[4]{40}\right\}$
5	$4 $\approx\ \{-5.0297 < a < 5.0297\}$

Aufgabe 9: Abiturprüfung 2018, Gymnasium Bayern mit CAS, B A2, Aufgabe 2

Diabetespatientinnen und -patienten haben die Möglichkeit, mithilfe sog. CGM-Geräte ihren Glukosewert, d. h. den Anteil der Glukose im Blut, ständig zu messen. Die gegebene Funktion f beschreibt für $0 \le x \le 240$ modellhaft die Entwicklung des Glukosewerts eines Patienten. Dabei ist x die seit Beobachtungsbeginn $(x = 0)$ vergangene Zeit in Minuten und der Funktionswert von f der Glukosewert in Milligramm pro Deziliter $\left(\frac{\text{mg}}{\text{dl}}\right)$.

$$f: x \mapsto -\frac{1}{10^6}x^4 + \frac{4}{9375}x^3 - \frac{13}{250}x^2 + \frac{8}{5}x + 140$$



Die Abbildung zeigt den Graphen von f im betrachteten Bereich.

a) Hohe Glukosewerte über längere Zeit gelten als Risikofaktor. Ermitteln Sie für den betrachteten Zeitraum, wie lange Glukosewerte über $170\,\frac{\text{mg}}{\text{dl}}$ gemessen wurden.

b) Geben Sie die Bedeutung des Werts $\frac{f(100) - f(20)}{100 - 20}$ im Sachzusammenhang an.

c) Ermitteln Sie für den betrachteten Zeitraum, wie lange die momentane Änderungsrate des Glukosewerts insgesamt zwischen $-0{,}3\,\frac{\text{mg}}{\text{dl} \cdot \text{min}}$ und $0{,}3\,\frac{\text{mg}}{\text{dl} \cdot \text{min}}$ pro Minute lag.

d) Der Mittelwert der Funktionswerte von f für $x \in [a;b]$ kann mit dem folgenden Term berechnet werden: $\frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x)\,dx$

Berechnen Sie für den Zeitraum von 20 Minuten bis 100 Minuten nach Beobachtungsbeginn den Mittelwert des Glukosewerts. Bestimmen Sie dessen prozentuale Abweichung vom Durchschnittswert derjenigen Glukosewerte, die in diesem Zeitraum im Abstand von jeweils zehn Minuten, beginnend mit dem Zeitpunkt 20 Minuten nach Beobachtungsbeginn, gemessen wurden.

Hinweise zur Bearbeitung

Zu a)

Die Lösung der Ungleichung f(x) > 170 wird mit dem CAS berechnet.

1	f(x):=-1/10^6*x^4+4/9375x^3-13/250x^2+8/5x+140 → $f(x) := -\frac{1}{1000000}x^4 + \frac{4}{9375}x^3 - \frac{13}{250}x^2 + \frac{8}{5}x + 140$
2	Löse(f(x)>170) → $\{169.83878 < x < 222.7665\}$
3	222.77-169.84 ≈ 52.93

Zu c)

Die Änderungsrate liegt mit (25,8 – 15,21) + (109,26 – 90,27) + (203,92 – 195,53) = 37,97 (min) im angegebenen Bereich.

4	Löse(−0.3<f'(x)<0.3)
	→ {195.52709 < x < 203.92381, 90.27346 < x < 109.25989,
5	a:=25.8 - 15.21 + 109.26 - 90.27 + 203.92 - 195.53
	≈ a := 37.97

Zu d)

Das CAS gibt das bestimmte Integral sowie die Summe der Funktionswerte aus.

Mögliche Minimaldokumentation der Prüflinge:

$$\frac{\left|\frac{1}{80}\cdot\int_{20}^{100} f(x)\,dx-\frac{1}{9}\cdot\sum_{i=2}^{10} f(i\cdot 10)\right|}{\frac{1}{9}\cdot\sum_{i=2}^{10} f(i\cdot 10)}\approx 0{,}0018=0{,}18\ \%$$

6	1/(100−20)*Integral(f(x), 20, 100)
	≈ 129.19467
7	1/9*Summe(f(10*i), i, 2, 10)
	≈ 129.34667
8	(129.3466666667−129.1946666667)/129.1946666667
	≈ 0.00118

2.4 Exponentialfunktionen

Die Schülerinnen und Schüler können selbständig die Eigenschaften von Exponentialfunktionen erforschen. Grafische Darstellungen und Streudiagramme erleichtern das Auffinden sachorientierter Zielfunktionen. Das Aufstellen von Funktionstermen aus Bestimmungsgleichungen lässt sich ohne großen Rechenaufwand bewältigen. Nicht befriedigende Lösungen können schnell verworfen werden, ohne größeren Verlust von Unterrichtszeit, die eine händische algebraische Untersuchung des Sachverhalts oftmals mit sich bringt.

Im Zusammenhang mit den beschriebenen Vorschlägen zur Unterrichtsgestaltung kommen insbesondere folgende CAS-Grundfertigkeiten zur Anwendung:

- Term definieren
- Termwert berechnen
- Term vereinfachen
- Wertetabelle erstellen
- Streudiagramm erstellen
- Regressionskurve ermitteln
- Gleichung lösen
- Graph zeichnen, geeigneten Anzeigebereich wählen
- Graph einer Scharfunktion darstellen
- Punktdiagramm zeichnen
- Tabellenkalkulation durchführen

Vorschläge zur Unterrichtsgestaltung

Aufgabe 1: Luftdruck

Der Luftdruck P, gemessen in Hektopascal (hPa), liegt bei Normalbedingungen auf Meereshöhe bei 1013 hPa. Er nimmt mit zunehmender Höhe ab, nämlich um 13 % pro km Höhenzunahme. Der Zusammenhang zwischen Höhe und Luftdruck kann durch eine Exponentialfunktion beschrieben werden.

a) Bestimmen Sie eine Funktionsgleichung, die diese exponentielle Druckabnahme beschreibt und stellen Sie den Graphen der Funktion in einem x-P-Diagramm (x in m, P in hPa) dar.

b) Berechnen Sie die relative prozentuale Abnahme des Luftdrucks bezüglich der Meereshöhe auf dem Dach des „One World Trade Centers in New York“ (417 m über NN) sowie auf dem Gipfel der Zugspitze (2962 m über NN).

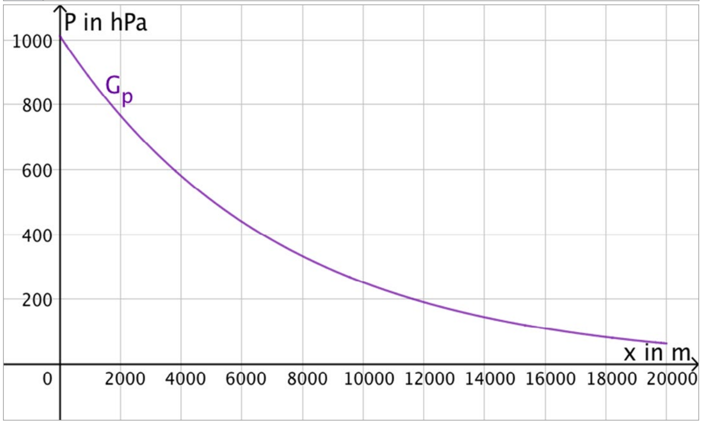
c) Unterhalb eines Luftdrucks von etwa 400 hPa kann der menschliche Körper aufgrund des geringen Sauerstoffpartialdrucks in den Lungenbläschen nur noch bedingt Sauerstoff aus der Luft aufnehmen, für untrainierte Menschen besteht dann akute Lebensgefahr. Berechnen Sie, ab welcher Höhe die sog. „Todeshöhe“ beginnt.

Zielsetzung Term einer Exponentialfunktion bestimmen

Voraussetzung Kenntnisse über Wachstumsfunktionen

Hinweise zur Bearbeitung

1	p(x) := 1013(87 / 100)^(1 / 1000 x),0<x<20000
	$\rightarrow$ $p(x) := \text{Wenn}\left(0 < x < 20000, 1013\left(\frac{87}{100}\right)^{\frac{1}{1000}x}\right)$



Zu b) und c)

Zeilen 2 - 3: Die relativen prozentualen Abweichungen lassen sich mit einem Befehl berechnen.

Zeilen 4 - 5: Das hier verwendete CAS liefert zunächst keine verwertbare Lösung der Gleichung. Erst durch „Wegdividieren“ des Startwerts erscheint das korrekte Ergebnis. Bei anderen CAS ist diese Problematik eher nicht zu beobachten.

2	(1013–p(417))/1013
	$\approx$ **0.06**
3	(1013–p(2962))/1013
	$\approx$ **0.34**
4	Löse(1013*(87/100)^(1/1000*x)=400)
	$\approx \{x = \infty + 24222385109.74\, \mathrm{i}\}$
5	Löse((87 / 100)^(1 / 1000 x) = 400/1013)
	$\approx \{x = 6672.36\}$

Aufgabe 2: Die Zahl e

Die Bank A macht einigen ausgewählten Kunden ein Jubiläumsangebot und verzinst einen (überschaubaren) Geldbetrag – dieser sei hier 1 Geldeinheit (GE) genannt – zu einem Zinssatz von jährlich 100 %.

Die Bank B möchte das Angebot überbieten und verzinst diese Geldeinheit 2 mal jährlich mit jeweils 50 %, die Bank C gar monatlich mit jeweils $\frac{100}{12}$ %.

a) Bestimmen Sie, wie viele Geldeinheiten die Kunden nach jeweils einem Jahr bekommen.

b) Entwickeln Sie eine Formel für die n-fache jährliche Verzinsung bei gleichen Zeitabschnitten nach obigem Prinzip und stellen Sie den Wert der GE nach einem Jahr in Abhängigkeit von n grafisch dar.

c) Entscheiden Sie, ob die Bank Gefahr läuft, sich in den Ruin zu treiben, falls Sie das Kapital allzu häufig verzinst.

Zielsetzung Definition der Eulerschen Zahl e

Voraussetzung sicherer Umgang mit exponentiellen Wachstumsvorgängen $K(n) = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$

Anregung Es bietet sich hier Unterricht in Kleingruppen an.

Hinweise zur Bearbeitung

Zu a)

Klar ist bei einmaliger Verzinsung eine Geldmenge von 2GE.

Zeilen 1 - 3: 2- bzw. 12-fache jährliche Verzinsung

Mit den Schaltflächen = ≈ ✓ lassen sich die Werte exakt oder näherungsweise angeben.

1	(1+0.5)^2 $\approx$ 2.25
2	(1+1/12)^12 $\rightarrow \frac{23298085122481}{8916100448256}$
3	$2 $\approx$ 2.61

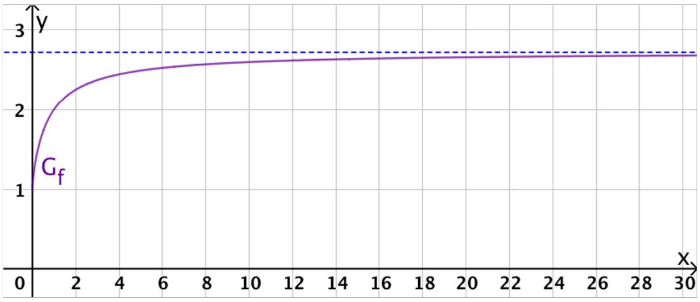
Zu b)

Zeile 4: Die Schülerinnen und Schüler erkennen bei n-facher Verzinsung den Term $T(n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ als ausschlaggebend zur Berechnung des Kapitals am Ende eines Jahres.

In der grafischen Darstellung lässt sich vermuten, dass sich das Kapital bei n-facher Verzinsung asymptotisch einer oberen Grenze annähert.

Zeile 5: An der Asymptote, die sich mit dem CAS durch den Befehl *Asymptote(<Funktion>)* bestimmen lässt, erkennen die Schülerinnen und Schüler eine Annäherung von T(n) an den Wert 2,72 für große n.

4	f(x):=(1+1/x)^x $\rightarrow f(x) := \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$
5	a(x):=Asymptote(f(x)) $\rightarrow a := \{y = 2.72\}$



Zu c)

Zeilen 6 - 7: Der Grenzwert für $n \to \infty$ bestätigt rechnerisch obiges Ergebnis. Eine kontinuierliche Verzinsung ist möglich, die Bank müsste lediglich das „e-fache" des zu verzinsenden Kapitals ausbezahlen,

Die Eulersche Zahl lässt sich an dieser Stelle definieren.

6	Grenzwert((1+1/x)^x, ∞) $\approx$ 2.72
7	Grenzwert((1+1/x)^x, ∞) $\rightarrow$ e

Aufgabe 3: Ableitung der Exponentialfunktion

Betrachten Sie die Exponentialfunktion $f: x \mapsto b^x$, mit $x \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$.

a) Geben Sie einen Differenzenquotienten von f bezüglich der Stelle $x = x_0$ an.

b) Zeigen Sie, dass sich der Differenzenquotient auch in der Form $b^{x_0} \cdot \frac{b^h - 1}{h}$ darstellen lässt, wenn man die Substitution $h := x - x_0$ durchführt.

c) Bekanntermaßen gilt für die Ableitung f' an der Stelle x_0:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \to f'(x_0) \text{ für } x \to x_0 \text{ bzw. } \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \to f'(x_0) \text{ für } h \to 0$$

Eine herausragende Eigenschaft einer Funktion wäre es, wenn die Ableitungsfunktion f' den gleichen Term wie die Funktion f hätte. Untersuchen Sie grafisch und rechnerisch, ob es einen Wert für $b \in \mathbb{R}$ gibt, sodass gilt:
$f(x) = f'(x)$

d) Berechnen Sie ohne CAS die Ableitungsfunktionen von f. Überprüfen Sie Ihre Ergebnisse mit dem CAS und besprechen Sie alle Unklarheiten mit Ihrem Nachbarn oder Ihrer Nachbarin.

$f(x) = e^{2x}$ $\quad f(x) = 4e^{-x^2+3}$ $\quad f(x) = 3x^2 e^{\left(\frac{1}{2}x+1\right)}$ $\quad f(t) = (2t^2 - t + 1)\cdot e^{t^2} + 4$

Zielsetzung Diskussion der natürlichen Exponentialfunktion mit ihren Ableitungsfunktionen

Voraussetzung Differenzenquotient, Differenzialquotient, Ableitung, Grenzverhalten

Hinweise zur Bearbeitung

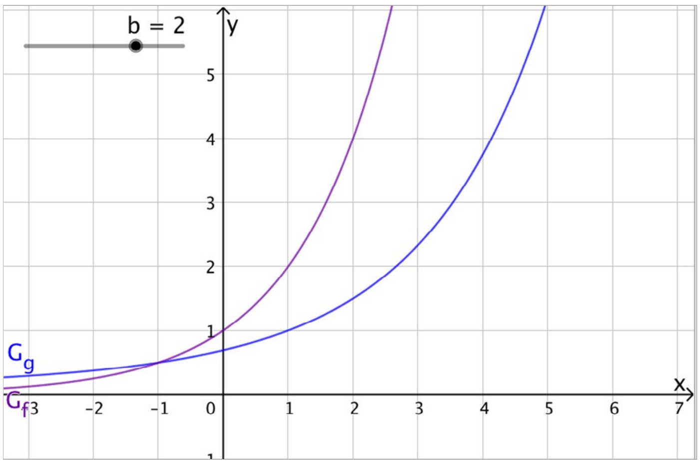
1	f(x):=b^x $\rightarrow$ $f(x) := b^x$
2	df(x_0,h):=(f(x_0+h)-f(x_0))/h $\rightarrow$ $df(x_0,h) := \frac{b^{h+x_0} - b^{x_0}}{h}$

Zu c)

Bei entsprechend feiner Einstellung des Schiebereglers erkennen die Schülerinnen und Schüler am Graphen von g, dass $\frac{b^h - 1}{h} \to 1$ für $h \to 0$, falls $b \approx 2{,}72$.

3	g(x):=(b^x-1)/x $\rightarrow$ $g(x) := \frac{b^x - 1}{x}$
4	Grenzwert(g(x), x, 0) $\rightarrow$ $\ln(b)$
5	Löse(Grenzwert(g(x), x, 0)=1, b) $\rightarrow$ $\{b = e\}$

Anmerkung: Dass b gleich dem Ausdruck $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ für $n \to \infty$ und damit gleich der Eulerschen Zahl e ist, lässt sich durch leicht nachvollziehbare Umformungen von $\frac{b^h - 1}{h} \to 1$ für $h \to 0$ demonstrieren:



$$\frac{b^h-1}{h} \to 1 \text{ für } h \to 0$$

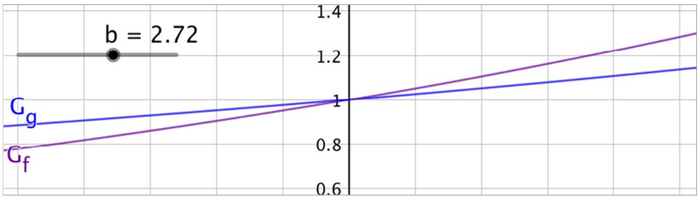
$$h := \frac{1}{n}:$$

$$\frac{b^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}} \to 1 \text{ für } n \to \infty$$

$$b^{\frac{1}{n}} - 1 \to \frac{1}{n} \text{ für } n \to \infty$$

$$b^{\frac{1}{n}} \to 1 + \frac{1}{n} \text{ für } n \to \infty$$

$$b \to \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \text{ für } n \to \infty$$



Zu d)

Zeile 6: Hier wird das CAS als Ergebniskontrolle eingesetzt.

Zeilen 7 - 8: Nicht nur die konkreten Ableitungen, sondern auch die allgemeinen Regeln wie Produkt- oder Kettenregel können mit dem CAS angezeigt werden.

6	Ableitung(3*x^2* e ^(1/2x+1)) $\rightarrow\ 6\,x\,e^{\frac{1}{2}x+1} + \frac{3}{2}\,x^2\,e^{\frac{1}{2}x+1}$
7	Ableitung(u(x)*v(x)) $\rightarrow\ u'(x)\ v(x) + v'(x)\ u(x)$
8	Ableitung(u(v(x))) $\rightarrow\ v'(x)\ u'(v(x))$

Aufgabe 4: Einfluss von Parametern auf die Exponentialfunktion

a) Zeichnen Sie den Graphen der Funktion $f: x \mapsto e^x$, $x \in \mathbb{R}$ in ein kartesisches Koordinatensystem. Notieren Sie die Eigenschaften von f, die Ihnen wichtig erscheinen.

b) Untersuchen Sie nun den Einfluss der Parameter $a, b, c, y_0 \in \mathbb{R}$ auf den Graphen der Funktion $f_{a,b,c,y_0}: x \mapsto a \cdot e^{b(x-c)} + y_0$.
Beschreiben Sie dazu im Einzelnen die wesentlichen Eigenschaften der Funktionen.

$f_a: x \mapsto a \cdot e^x$ $\quad$ $f_b: x \mapsto e^{bx}$ $\quad$ $f_{b,c}: x \mapsto e^{b(x-c)}$ $\quad$ $f_{y_0}: x \mapsto e^x + y_0$

c) Unter welcher Bedingung gilt: $f_a = f_{b,c}$?

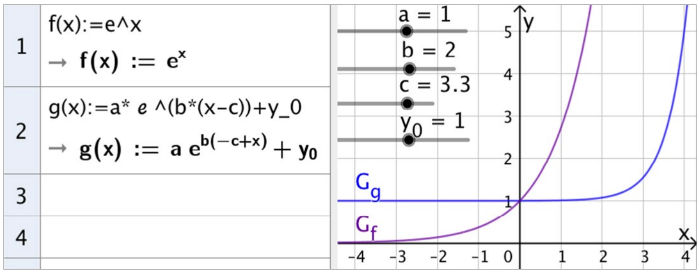
Zielsetzung Erarbeitung der charakteristischen Eigenschaften der Exponentialfunktion, Einfluss verschiedener Parameter auf die Graphen von $f_{a,b,c,y_0}: x \mapsto a \cdot e^{b(x-c)} + y_0$, $x \in \mathbb{R}$, $a,b,c,y_0 \in \mathbb{R}$

Voraussetzung Kenntnis der Eulerschen Zahl, Exponentialfunktion

Hinweise zur Bearbeitung

Zu a) und b)

Mithilfe mehrerer Schieberegler kann im CAS der Graph der zu untersuchenden Funktion analysiert werden: Die Einflüsse der Parameterwerte auf den Graphen der Exponentialfunktion werden dynamisch veranschaulicht.



Aufgabe 5: Laktattest

Ein Ausdauersportler trainiert unter aeroben Bedingungen, falls zum Abbau von energiereichen Kohlehydraten genügend Sauerstoff in der Muskulatur vorhanden ist.

Wird das Lauftempo erhöht, müssen die Kohlehydrate zunehmend ohne Sauerstoff abgebaut werden, man spricht von der sog. anaeroben Energiegewinnung. Dabei entsteht in der Muskulatur Laktat (Milchsäure). Wird mehr Laktat gebildet als vom Körper abgebaut werden kann, „übersäuert“ und ermüdet die Muskulatur und die Belastungsintensität muss reduziert werden.

Die Grenze zwischen der aeroben und anaeroben Energiebereitstellung nennt man *anaerobe Schwelle*. Hierbei hält sich der Aufbau und der Abbau von Laktat in der Muskulatur in etwa die Waage.

Mit einem Laktattest kann die Ausdauerleistungsfähigkeit eines Sportlers bestimmt werden. Hierbei wird während einer steigenden Belastung (z. B. Geschwindigkeit auf dem Laufband) fortwährend die Laktatkonzentration (in Millimol pro Liter) im Blut gemessen. Je höher die Laufgeschwindigkeit ist, bei der die anaerobe Schwelle erreicht wird, desto besser ist der Trainingszustand des Sportlers. Nach einem gängigen Modell nach A. Mader liegt die anaerobe Schwelle bei einer Laktatkonzentration von $4{,}0\,\frac{\text{mmol}}{\text{l}}$ Blut.

Bei einem Sportler wird nun der Laktattest am Anfang und am Ende einer Trainingsperiode von 3 Monaten durchgeführt. Aus den Messwerten zu Anfang der Periode ergibt sich eine Laktatkurve, die näherungsweise durch den Graphen der Funktion $f: x \mapsto 0{,}27 \cdot e^{1{,}1x-1} + 1{,}35$, mit $1{,}5 \le x \le 4{,}5$ dargestellt werden kann, wobei die Werte von x Geschwindigkeiten in der Einheit $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ darstellen.

Am Ende der Trainingsperiode werden folgende Messwerte ermittelt:

Laufbandgeschwindigkeit in $\frac{\text{m}}{\text{s}}$	2	3	4	5	6	7
Laktatkonzentration in $\frac{\text{mmol}}{\text{l}}$	1,45	1,65	2,25	4,04	9,44	25,65

a) Berechnen Sie, bei welcher Laufbandgeschwindigkeit die anaerobe Schwelle zu Anfang der Trainingsperiode erreicht wird.

b) Häufig verschiebt sich die Leistungskurve durch beständiges Training entlang der Geschwindigkeitsachse nach rechts, wie auch bei unserem Sportler. Bestätigen Sie dies exemplarisch anhand obiger Messwerte, geben Sie eine Gleichung einer Funktion an, welche näherungsweise die Laktatkurve am Ende der Trainingsperiode als Graphen hat, und machen Sie eine Aussage hinsichtlich des erreichten Trainingszustandes.

c) Vergleichen Sie die Änderungsraten der Laktatkonzentration vor und nach der Trainingsperiode bei einer Laufbandgeschwindigkeit von $4{,}0\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ und interpretieren Sie die Ergebnisse im Sachzusammenhang.

d) Nach einem Modell des Sportwissenschaftlers G. Simon lässt sich die anaerobe Schwelle als Laktatkonzentration bei derjenigen Geschwindigkeit, bei der die Laktatkurve eine Änderungsrate von $1{,}0\,\frac{\text{mmol}\cdot\text{h}}{\text{l}\cdot\text{km}}$ aufweist, ermitteln. Voraussetzung hierfür ist allerdings, dass die Einheit der Geschwindigkeit zu $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ gewählt wird. Bestimmen Sie damit die individuelle anaerobe Schwelle des Sportlers nach der Trainingsperiode.

Zielsetzung Modellierung, Verschiebung von Funktionsgraphen, Begriff *Änderungsrate* im Sachzusammenhang

Voraussetzung natürliche Exponentialfunktion, Grundlagen der Differenzialrechnung

Hinweise zur Bearbeitung

Zu a)

Mit dem CAS lässt sich sowohl die Funktion definieren als auch der Definitionsbereich leicht einschränken.

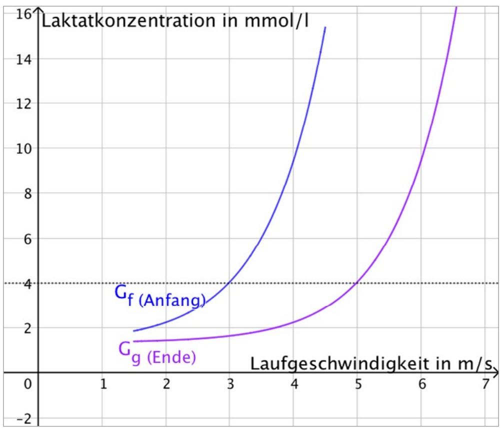
1	f(x):=0.27* *e* ^(1.1x−1)+1.35,1.5≤x≤4.5 $\approx\ \mathbf{f(x)\ :=\ Wenn}\left(\frac{3}{2}\leq x\leq\frac{9}{2},\ \frac{27}{100}\ e^{\frac{11}{10}x-1}+\frac{27}{20}\right)$
2	Löse(0.27* *e* ^(1.1x−1)+1.35=4,x) $\approx\ \{x=2.99\}$

Zu b)

Zeilen 3 - 6: Durch den Vergleich verschiedener Wertepaare kann eine Verschiebung des Funktionsgraphen um zwei Einheiten nach rechts vermutet werden.

Zeile 7: Ein passender Funktionsterm wird mit dem CAS ermittelt.

Zeile 8: Die Lösung der Gleichung g(x) = 4 lässt auf eine Verbesserung des Trainingszustandes schließen.



3	f(2) $\approx\ 2.25$
4	f(3) $\approx\ 4.04$
5	f(4) $\approx\ 9.44$
6	f(5) $\approx$ **?**
7	g(x):=0.27* *e* ^(1.1(x−2)−1)+1.35,1.5≤x≤7 $\rightarrow\ \mathbf{g(x)\ :=\ Wenn}\left(\frac{3}{2}\leq x\leq 7,\ \frac{27}{100}\ e^{\frac{11}{10}(x-2)-1}+\frac{27}{20}\right)$
8	Löse(0.27* *e* ^(1.1(x−2)−1)+1.35=4) $\approx\ \{x=4.99\}$

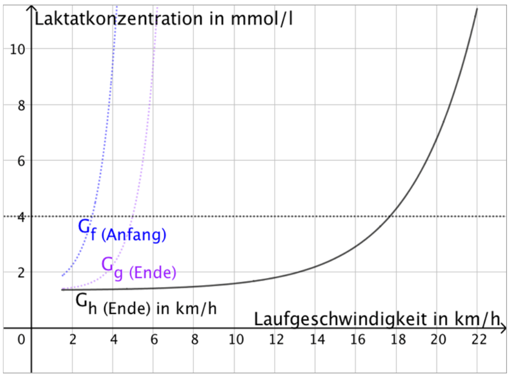
Zu c)

Die Änderungsraten werden mit dem CAS berechnet. Möchte man den Term der Ableitungsfunktion nicht angezeigt haben, reicht für die Änderungsrate auch der Befehl $f'(4)$ bzw. $g'(4)$.

9	f'(x):=Ableitung(f(x)) $\approx\ f'(x) := \text{Wenn}\left(\frac{3}{2} \le x \le \frac{9}{2}, \frac{297}{1000}\ e^{\frac{11}{10}x-1}\right)$
10	f'(4) $\approx\ 8.9$
11	g'(x):=Ableitung(g(x)) $\approx\ g'(x) := \text{Wenn}\left(\frac{3}{2} \le x \le 7, \frac{297}{1000}\ e^{\frac{11}{10}(x-2)-1}\right)$
12	g'(4) $\approx\ 0.99$

Zu d)

Die Änderung der Abszisseneinheit in $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ verändert die Steigung des Graphen. Hier erkennen die Schülerinnen und Schüler auch den Einfluss des Parameters b im Exponenten einer Funktion der Form $x \mapsto a \cdot e^{bx} + c$.



13	h(x):=0.27* *e* ^(1.1(x/3.6−2)−1)+1.35 $\approx\ h(x) := 0.27\ e^{0.31x-3.2} + 1.35$
14	h'(x):=Ableitung(h(x)) $\approx\ h'(x) := 0.08\ e^{0.31x-3.2}$
15	Löse(0.08*e*^(0.31x − 3.2)=1) $\approx\ \{x = 18.47\}$
16	h(18,47) $\approx\ 4.04$

Aufgabe 6: Zerfall von Radon, Funktionstyp $f: x \mapsto a \cdot e^{bx}$

Die Masse einer Probe des radioaktiven Stoffes Radon 220 wird in einem Versuch alle 60 Sekunden ermittelt. Man erhält dabei folgende Messwerte:

Zeit t in s	0	60	120	180	240	300
Masse m in mg	500	234	110,1	51,7	24,2	11,4

a) Prüfen Sie, ob es sich um einen exponentiellen Zerfall handelt. Ermitteln Sie den Term der Zerfallsfunktion.

b) Die Halbwertszeit gibt an, in welchem Zeitraum sich die Masse der Probe halbiert. Berechnen Sie diese Zeitdauer.

c) Bestimmen Sie die Zeitdauer ab Beobachtungsbeginn ($t_0 = 0$) bis nur noch 1,0 % der ursprünglichen Masse der Radonprobe vorhanden ist.

d) Ermitteln Sie mit dem CAS eine Regressionskurve mittels der Tabellenwerte. Stimmt der Graph Ihrer in a) ermittelten Zerfallsfunktion mit der Regressionskurve des CAS überein?

Zielsetzung Bestimmung einer Exponentialfunktion aus gegebenen Daten

Voraussetzung Grundlagen der Exponentialfunktion

Hinweise zur Bearbeitung

Zu a), b) und c)

Zeile 1: Die Quotienten zweier aufeinanderfolgender Messdaten stimmen im Wesentlichen überein. Das lässt den Schluss auf einen exponentiellen Abklingvorgang zu.

Zeilen 2 - 4: Die Gleichung einer Exponentialfunktion wird aus zwei Bestimmungsgleichungen mit dem CAS erzeugt.

Praktischer Tipp: Mit dem Befehl *Ersetze(<Ausdruck>, <Substitutionsliste>)* lassen sich die Ergebnisse des Gleichungssystems in den Funktionsterm übertragen.

1 {234/500,110.1/234,51.7/110.1,24.2/51.7,11.4/24.4}
$\approx \{0.468, 0.47051, 0.46957, 0.46809, 0.46721\}$

2 f(t):=a* e ^(b*t)
$\to f(t) := a\,e^{bt}$

3 Löse({f(0)=500, f(120)=110.1},{a,b})
$\to \left\{\left\{a = 500, b = \frac{1}{120} \ln\left(\frac{1101}{5000}\right)\right\}\right\}$

4 g(t):=Ersetze(f(t),{a = 500, b = 1 / 120 ln(1101 / 5000)})
$\to g(t) := 500\, e^{\frac{1}{120} t \ln\left(\frac{1101}{5000}\right)}$

5 Löse(g(t)=250)
$\approx \{t = 54.96736\}$

6 Löse(g(t)=5)
$\approx \{t = 365.19526\}$

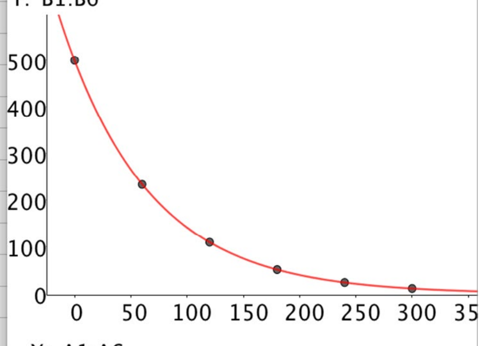
Zu d)

Die Schülerinnen und Schüler können ihre Ergebnisse mit der vom CAS erzeugten Regressionskurve vergleichen. Geringere Abweichungen von den gefundenen Lösungen lassen Raum für Diskussionen.

	A	B
1	0	500
2	60	234
3	120	110.1
4	180	51.7
5	240	24.2
6	300	11.4
7		
8		
9		
10		
11		
12		
13		
14		
15		
16		

Streudiagramm

Y: B1:B6



X: A1:A6

Regressionsmodell

Keines $y = 499.3705\, e^{-0.0126x}$

Berechne symbolisch: x =

Zeilen 7 - 8: Alternativ liefert der Befehl *trendexp(<Liste von Punkten>)* eine Regressionskurve der Form $x \mapsto a \cdot e^{bx}$, bzw. *trendexp2(<Liste von Punkten>)* der Form $x \mapsto a \cdot c^{bx}$, $c \in \mathbb{R}^+$.

7 TrendExp(L_1)
$\approx 499.37046\, e^{-0.0126x}$

8 TrendExp2(L_1)
$\approx 499.37046 \cdot 0.98748^x$

Aufgabe 7: Abkühlvorgang, Funktionstyp $f: x \mapsto a + b \cdot e^{cx}$

In eine Tasse wird 80 °C heißer Tee eingefüllt. Der Tee kühlt in der Tasse bei einer Raumtemperatur von 20 °C ab. Die nachfolgende Tabelle enthält Messwerte hierzu:

Zeit t in min	0	3	6	9	12	15	18
Temperatur T in °C	80	58	44	36	30	26	24

a) Stellen Sie den Zusammenhang zwischen Zeit und Temperatur mit dem CAS tabellarisch und grafisch dar.

b) Begründen Sie, warum die Funktion $g: t \mapsto b \cdot e^{ct}$ den Abkühlvorgang nicht treffend beschreiben kann.

c) Entwickeln Sie den Term einer Funktion f mit der Gleichung $f(t) = a + b \cdot e^{ct}$, mit der der Abkühlvorgang näherungsweise dargestellt werden kann.

d) Zu welchem Zeitpunkt hat der Tee eine Temperatur von 37 °C?

Zielsetzung Auswertung von Messreihen, experimentelles Arbeiten

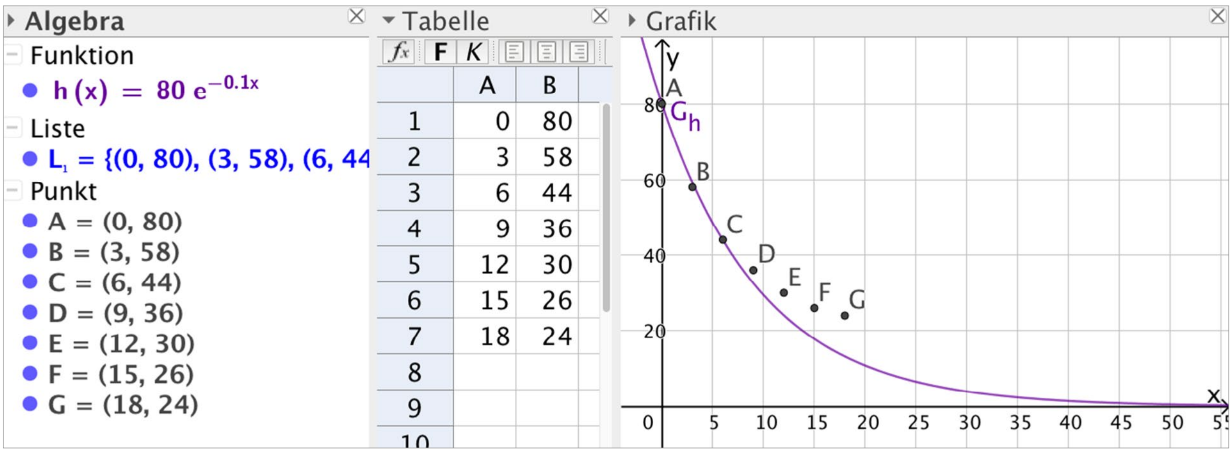
Voraussetzung Umgang mit dem Funktionstyp $x \mapsto b \cdot e^{cx}$

Anregung Die Schülerinnen und Schüler können die Temperatur auch eigenständig messen, falls entsprechende Thermometer zur Verfügung stehen.

Hinweise zur Bearbeitung

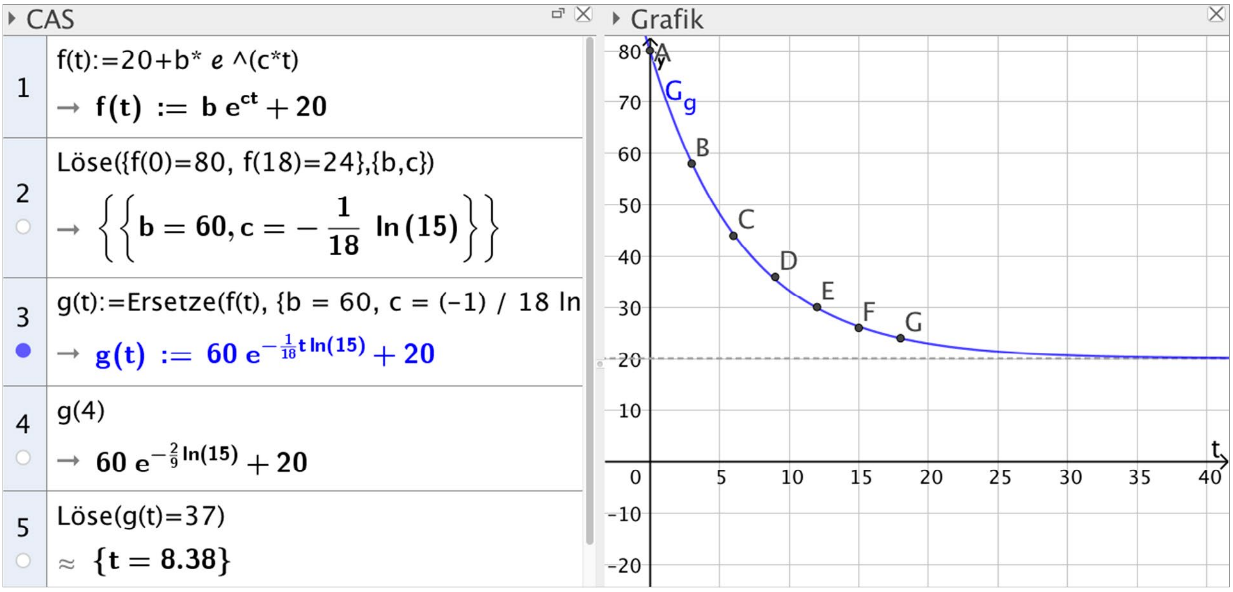
Zu a) und b)

Nachdem die Punkte in der Grafik dargestellt sind, erkennen die Schülerinnen und Schüler, dass sich die Funktion g nicht asymptotisch an die Umgebungstemperatur 20 °C anpasst. Das Verhalten der Funktionswerte von g für $t \to \infty$ und $c < 0$ bestätigen dies.



Zu c) und d)

Ist die Asymptote a: $y = 20$ erkannt, reicht es, ein (2,2)-Gleichungssystem vom CAS lösen zu lassen. Am Graph erkennt man in Verbindung mit den Listenpunkten die Qualität der berechneten Funktion.



Aufgabe 8: Fallschirmsprung

Eine Fallschirmspringerin springt aus einem Hubschrauber und öffnet zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ bei der Geschwindigkeit v_0 ihren Fallschirm. Bei relativ kleinen Geschwindigkeiten darf man annehmen, dass die Luftwiderstandskraft R zur Fallgeschwindigkeit v proportional ist, also $R \sim v$, das heißt $R = kv$, $k > 0$ ist der Reibungsfaktor.

a) Die Gleichung $m \cdot \dot{v}(t) = m \cdot g - k \cdot v(t)$ ist eine Bewegungsgleichung dieses Problems, wobei m die Masse der Springerin samt Ausrüstung und $g = 9{,}8\,\frac{m}{s^2}$ die Erdbeschleunigung ist. Eine Gleichung dieser Form heißt lineare Differenzialgleichung. Die Funktion v ist Lösung dieser Differenzialgleichung. Erläutern Sie die Plausibilität dieser Gleichung.

b) Zeigen Sie, dass die Funktion v mit der Gleichung $v(t) = \frac{mg}{k} \cdot \left(1 - e^{-\frac{k}{m} \cdot t}\right) + v_0 e^{-\frac{k}{m} \cdot t}$ Lösung der Differenzialgleichung ist.

c) Erklären Sie, von welchen Größen es abhängt, damit die Springerin möglichst verletzungsfrei landen kann.

d) Die Springerin erreicht bei einem Gesamtgewicht von 68 kg eine „Landegeschwindigkeit“ $v_\infty = 5{,}0\,\frac{m}{s}$. Berechnen Sie den Wert des Reibungsfaktors k. Welche Beschleunigung erfährt die Springerin 1,0 s nach Öffnen des Schirms, falls sie ihn mit $v_0 = 20\,\frac{m}{s}$ bzw. $v_0 = 2{,}0\,\frac{m}{s}$ öffnet? Interpretieren Sie die unterschiedlichen Ergebnisse.

e) Die Springerin öffnet den Fallschirm bei einer Fallgeschwindigkeit von $v_0 = 20\,\frac{m}{s}$ und landet 1 Minute später am Boden. Berechnen Sie, in welcher Höhe sie die Reißleine gezogen hat.

Zielsetzung Modellierungsschritte durchführen, Kontakt mit einer Differenzialgleichung (DGL)

Voraussetzung Zusammenhang: $\ddot{s}(t) = \dot{v}(t) = a(t)$, Integralrechnung

Anregung Die Teilaufgabe e) kann auch als Einführung in die Integralrechnung dienen, betrachtet man v(t) als die Änderungsrate von s(t). Die Durchführung der Aufgabe eignet sich als Gruppenarbeit. Sollte die DGL schrittweise gelöst werden, ist sicherlich eine enge Führung durch die Lehrkraft sinnvoll bzw. interessierte Schülerinnen oder Schüler stellen die Lösung im Rahmen eines Referates vor.

Hinweise zur Bearbeitung

Zu b)

Zeilen 1 - 3: Dass die gegebene Funktion Lösung der DGL ist, können die Schülerinnen und Schüler leicht überprüfen, indem sie den Term der Ableitungsfunktion von v mit m multiplizieren und mit mg – kv(t) vergleichen. Manche CAS bestätigen auch die Gleichheit einer Gleichung mit „true“ bzw. „wahr“.

1	v(t):=(9.8*m)/k*(1− ℯ ^(−k/m*t))+v_0* ℯ ^(−k/m*t)
	$\rightarrow\ v(t) := v_0\, e^{-k\frac{t}{m}} + \frac{49}{5}\, m\, \frac{-e^{-k\frac{t}{m}}+1}{k}$
2	m*v'(t)
	$\rightarrow\ \frac{49}{5}\, m\, e^{-k\frac{t}{m}} - k\, v_0\, e^{-k\frac{t}{m}}$
3	m*9.8−k*v(t,k,m,v_0)
	$\rightarrow\ \frac{49}{5}\, m\, e^{-k\frac{t}{m}} - k\, v_0\, e^{-k\frac{t}{m}}$

Zu c)

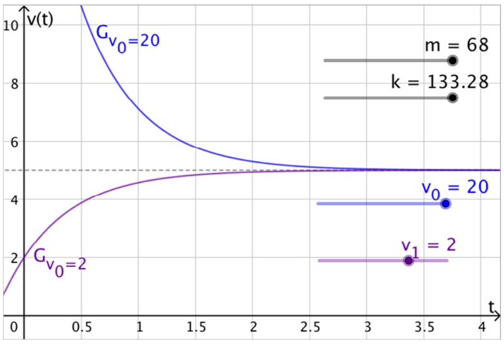
Zeile 4: Das hier verwendete CAS lässt es nicht zu, die Parameterwerte ausschließlich positiv zu wählen. Somit muss der Grenzwert für $x \to \infty$ „händisch“ errechnet werden. Alternativ könnten die Parameterwerte mithilfe von Absolutbeträgen auf den positiven Bereich beschränkt werden. Mit anderen CAS kann der gewünschte Grenzwert mit den Einschränkungen $m > 0, v(t) \geq 0$ und $k > 0$ berechnet werden.

4	Grenzwert(v(t), t, ∞)
	→ ?

Zu d)

Die Ableitungsfunktion lässt sich mit den gewählten Parameterwerten berechnen und definieren. Die unterschiedlichen Vorzeichen der Beschleunigung können anhand der Graphen der Geschwindigkeitsfunktion erläutert werden.

Anmerkung: Damit mit den Parametern k, m, v weiter symbolisch gerechnet werden kann, ist es ratsam, die Graphen in einem neuen Fenster zeichnen zu lassen.



5	v_∞(m, k) := 49 / 5 m / k
	$\rightarrow\ v_\infty(m,k) := \frac{49}{5} \cdot \frac{m}{k}$
6	Löse(v_∞(68,k)=5,k)
	$\rightarrow\ \left\{k = \frac{3332}{25}\right\}$
7	w(t,v_0):=Ersetze(v(t), k=3332/25,m=68)
	$\rightarrow\ w(t, v_0) := -5\, e^{-\frac{49}{25}t} + v_0\, e^{-\frac{49}{25}t} + 5$
8	w'(t,v_0):=Ableitung(w(t, v_0),t)
	$\rightarrow\ w'(t, v_0) := \frac{49}{5}\, e^{-\frac{49}{25}t} - \frac{49}{25}\, v_0\, e^{-\frac{49}{25}t}$
9	w'(1,20)
	≈ −4.14
10	w'(1,2)
	≈ 0.83

Zu e)

An dieser Stelle könnte der Übergang zur Integralrechnung gelingen, betrachtet man die Geschwindigkeit als Änderungsrate des Ortes.

11	Integral(w(t, 20), 0,60)
	≈ 307.65

2.5 Integralrechnung

Auch in der Integralrechnung kann ein CAS Sachzusammenhänge anschaulich dynamisch darstellen. Umfangreiche algebraische Berechnungen werden vom CAS übernommen, für die wichtigen mathematischen Zusammenhänge bleibt mehr Raum. Zudem können bei der Berechnung bestimmter Integrale oder bei der Bestimmung von Termen von Stammfunktionen händisch erzielte Ergebnisse mithilfe des CAS kontrolliert werden, wodurch sich vielfältige Möglichkeiten zu selbständig entdeckendem Lernen ergeben.

Als möglichen Einstieg in die Integralrechnung bietet sich der klassische Weg über Unter- und Obersummen an (siehe Aufgabe 1). Hier liegt der besondere Nutzen des Einsatzes eines CAS weniger in der Herleitung des Verfahrens, als vielmehr in der Verarbeitung komplexer Terme, welche gerade bei leistungsschwächeren Schülerinnen und Schülern das Verständnis für das eigentliche Verfahren erschweren.

Grundlegende CAS-Befehle

Unbestimmtes Integral

Zeilen 1 - 3: Die Terme von Stammfunktionen bzw. unbestimmte Integrale können mithilfe eines CAS direkt erzeugt werden.

1	Integral(x^3) $\rightarrow \frac{1}{4} x^4 + c_1$
2	Integral(a* ℯ ^(2x), x) $\rightarrow \frac{1}{2} a\, e^{2x} + c_2$
3	Integral(a* ℯ ^(2x), a) $\rightarrow \frac{1}{2} a^2 e^{2x} + c_3$

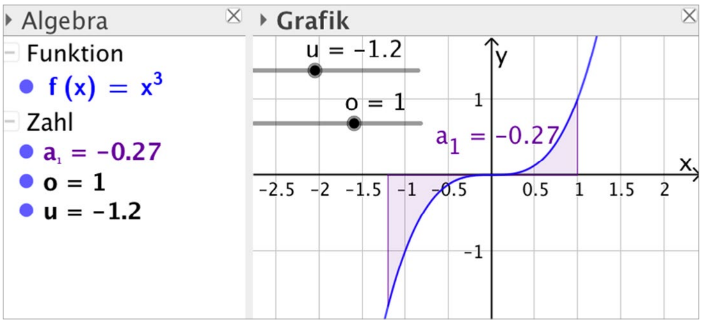
Bestimmtes Integral

Zeilen 4 - 5: feste oder variable Integrationsgrenzen sind möglich

Zeilen 6 - 8: Manchmal kann es notwendig sein, ein bestimmtes Integral gezielt mithilfe eines Näherungsverfahrens zu bestimmen (beim hier verwendeten CAS per Befehl *NIntegral(…)* oder mit der ≈-Schaltfläche), insbesondere dann, wenn das CAS kein exaktes Ergebnis ermitteln kann.

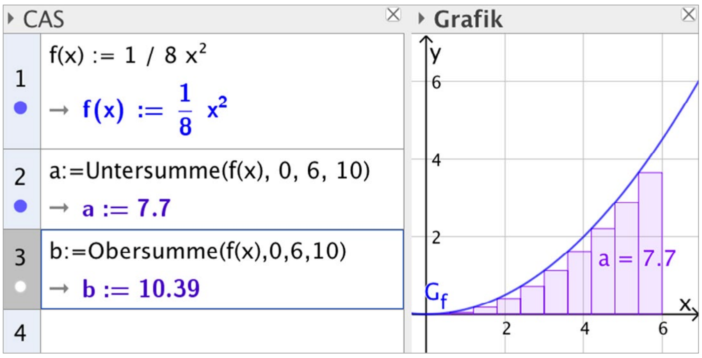
4	Integral(4x^3-4x, 2, 5) $\rightarrow 567$
5	Integral(2x^2+x, x, 6, b) $\rightarrow \frac{1}{6}\left(4\, b^3 + 3\, b^2\right) - 162$
6	h(x):=x^2-x-1 $\rightarrow h(x) := x^2 - x - 1$
7	Integral(sqrt(1+(h(x))^2), x, 0, 1) $\rightarrow$?
8	NIntegral(sqrt(1+(h(x))^2), x, 0, 1) $\rightarrow 1.54$
9	Integral(sqrt(1+(h(x))^2), x, 0, 1) ≈ 1.54

Hinweis: Nutzt man beim hier verwendeten CAS alternativ das Algebra-Fenster in Verbindung mit dem Grafikfenster, so lässt sich das bestimmte Integral auch als Flächenbilanz visualisieren und bei Bedarf, wie nebenstehend dargestellt, mithilfe zweier Schieberegler (oder alternativ z. B. mithilfe zweier auf dem Graphen befindlicher Punkte, deren x-Koordinaten als obere bzw. untere Schranke verwendet werden) dynamisch untersuchen.



Unter- bzw. Obersumme

CAS eignen sich im Bereich der Einführung in die Integralrechnung gut, um Konzepte, wie z. B. das der Unter- bzw. Obersummen, dynamisch (bei Bedarf unterstützt durch einen Schieberegler) zu visualisieren. Dabei lässt sich das CAS auch zur Berechnung einzelner Näherungswerte und zur Veranschaulichung der Grenzwertbildung einsetzen. Nebenstehendes Bild verdeutlicht dies exemplarisch, wobei die grafische Darstellung von „b“ ausgeblendet ist (per Klick auf den Button unterhalb der Zeilennummer 3 kann diese angezeigt werden).



Vorschläge zur Unterrichtsgestaltung

Aufgabe 1: Einführung bestimmtes Integral, Streifenmethode

Gegeben sei die Funktion $f: x \mapsto x^2,\ x \geq 0$. Bestimmt werden soll der Flächeninhalt des Flächenstücks, welches vom Funktionsgraphen, der x-Achse und der senkrechten Geraden mit der Gleichung x = b eingeschlossen wird.

a) Stellen Sie die Ober- und Untersumme (S_5 und s_5) über $[0;5]$ grafisch dar.

b) Bestätigen Sie die Werte der Obersummen $S_5 = 55$ und $S_{10} = 48{,}125$ sowie der Untersummen $s_5 = 30$ und $s_{10} = 35{,}625$ über $[0;5]$, indem Sie die Maßzahlen der Flächeninhalte der einzelnen Rechtecke aufsummieren.

c) Leiten Sie nun eine allgemeine Formel für S_n und s_n jeweils über $[0;5]$ und über $[0;b]$ für n Rechtecke her.

d) Berechnen Sie schließlich mithilfe von S_n und s_n die exakte Maßzahl des Flächeninhalts des Flächenstücks, welches vom Funktionsgraphen, der x-Achse und den Geraden mit den Gleichungen x = 0 und x = 5 bzw. x = b eingeschlossen wird.

Zielsetzung Bestimmung der Maßzahl des Flächeninhalts eines Flächenstücks, welches vom Graphen einer Funktion, der x-Achse und einer senkrechten Geraden eingeschlossen wird. Die klassische Methode der Annäherung durch Rechteckflächen kann mit dem Computeralgebrasystem durchgeführt werden. Dabei hilft eine Visualisierung der Ober- und Untersumme den Schülerinnen und Schülern bei der eigenständigen Erarbeitung des Sachverhalts weiter.

Voraussetzung: Die Schüler kennen bereits die Begriffe *Obersumme* und *Untersumme*. Die Definition des bestimmten Integrals wurde bereits im Unterricht erarbeitet:

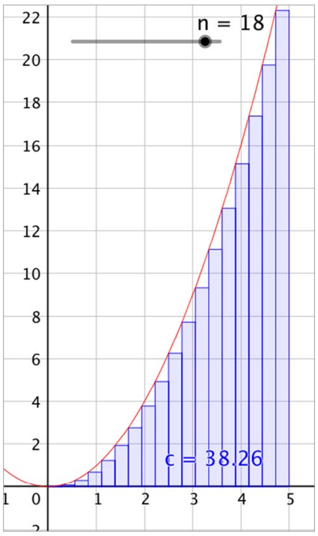
$$\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\cdot\Delta x \to \int_a^b f(x)dx \quad \text{bzw.} \quad \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\cdot\Delta x \to \int_a^b f(x)dx\text{, jeweils für } n\to\infty$$

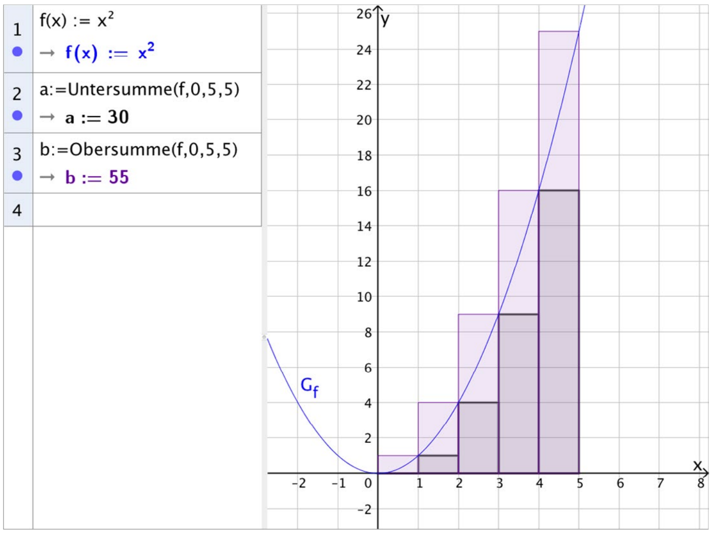
Anregung Die Bearbeitung der Aufgabe kann in Gruppenarbeit erledigt werden. Interessierte Schülerinnen und Schüler könnten den Sachverhalt ihren Mitschülerinnen und Mitschülern auch im Rahmen eines Referats vorstellen.

Hinweise zur Bearbeitung

Zu a)

Die Ober- und Untersumme lässt sich mit dem CAS darstellen. Die Anzahl der Rechtecke kann variabel mithilfe eines Schiebereglers eingestellt werden. So lässt sich die Näherung an die zu untersuchende Fläche überzeugend visualisieren:





Zu b)

Zeile 1: Definition der Funktion

Zeilen 2 - 7: Durch das Aufsummieren der Rechteckflächen wird der Wert der Ober- bzw. Untersumme bestätigt. Hier lässt sich auch die abkürzende Summenschreibweise erläutern und die Eingabe für das CAS nachvollziehen.

Der Ausdruck $\sum_{i=0}^{4} f(i)$ lässt sich mit dem hier verwendeten CAS mit dem Befehl *Summe(<Ausdruck>,<Variable>,<Startwert>,<Endwert>)* berechnen.

Andere Computeralgebrasysteme bieten zur Berechnung von Summenwerten den Befehl $\sum_{\square=\square}^{\square}(\square)$ an.

1	f(x):=x^2 → $f(x) := x^2$
2	us5:=f(0)+f(1)+f(2)+f(3)+f(4) → us5 := 30
3	Summe(f(i), i, 0, 4) → 30
4	us10:=Summe(1/2*f(i/2), i, 0, 9) → us10 := $\frac{285}{8}$
5	OS5:=f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+f(5) → OS5 := 55
6	Summe(f(i), i, 1, 5) → 55
7	OS10:=Summe(1/2*f(i/2), i, 1, 10) ≈ OS10 := 48.13

Zu c)

Zeilen 8 - 11: Mit dem CAS kann $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}$ einfach berechnet werden. An dieser Stelle zeigt sich der Vorteil des CAS in der Verarbeitung schwieriger Terme.

8	sn:=Summe(5/n*f(5*i/n), i, 0, n−1) $\rightarrow \ \mathbf{sn} := -\frac{\frac{125}{2}}{n} + \frac{\frac{125}{6}}{n^2} + \frac{125}{3}$
9	Sn:=Summe(5/n*f(5*i/n), i, 1, n) $\rightarrow \ \mathbf{Sn} := \frac{\frac{125}{2}}{n} + \frac{\frac{125}{6}}{n^2} + \frac{125}{3}$
10	sn_b:=b^3/n^3*Summe(f(i), i, 0, n−1) $\rightarrow \ \mathbf{sn_b} := b^3 \cdot \frac{\frac{1}{3} n^3 - \frac{1}{2} n^2 + \frac{1}{6} n}{n^3}$
11	Sn_b:=b^3/n^3*Summe(f(i), i, 1, n) $\rightarrow \ \mathbf{Sn_b} := b^3 \cdot \frac{\frac{1}{3} n^3 + \frac{1}{2} n^2 + \frac{1}{6} n}{n^3}$

Zu d)

Mit dem CAS lässt sich überprüfen, ob die Grenzwerte der Untersumme und Obersumme für $n \to \infty$ übereinstimmen.

12	Grenzwert(sn, n, ∞) $\rightarrow \ \frac{125}{3}$
13	Grenzwert(Sn, n, ∞) $\rightarrow \ \frac{125}{3}$
14	Integral(f(x), 0, 5) $\rightarrow \ \frac{125}{3}$
15	Grenzwert(sn_b, n, ∞) $\rightarrow \ \frac{1}{3} b^3$
16	Grenzwert(Sn_b, n, ∞) $\rightarrow \ \frac{1}{3} b^3$
17	Integral(f(x), 0, b) $\rightarrow \ \frac{1}{3} b^3$

Aufgabe 2: Von der Änderungsrate zum Bestand

Ein Auto beschleunigt zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ aus dem Stillstand heraus konstant auf die maximale Geschwindigkeit $v = 80\,\frac{km}{h}$. Diese wird zum Zeitpunkt $t_1 = 12\,s$ erreicht. Anschließend bremst das Auto konstant, bis es 20 Sekunden nach dem Start wieder zum Stillstand kommt. Die Geschwindigkeit des Autos in Abhängigkeit von der Zeit lässt sich durch den Graphen einer ganzrationalen Funktion 5. Grades darstellen.

a) Bestimmen Sie aus den gegebenen Daten die Funktion v, mit der die Geschwindigkeit des Autos in Abhängigkeit von der Zeit in der Einheit $\frac{m}{s}$ beschrieben wird. Stellen Sie den zeitlichen Verlauf der Geschwindigkeit grafisch dar.

b) Zu welchem Zeitpunkt erfährt das Auto die maximale Beschleunigung bzw. bremst es am stärksten ab?

c) Berechnen Sie, welche Wegstrecke es während der 20 Sekunden zurücklegt.

d) Berechnen Sie die Wegstrecke, welche das Auto bis zur Einleitung des Bremsvorgangs und welche Wegstrecke es während des Bremsvorgangs zurücklegt.

Zielsetzung Aus der Änderungsrate wird die Gesamtänderung bestimmt.

Voraussetzung Aufstellen von Funktionstermen, Änderungsrate, physikalische Grundkenntnisse der Kinematik

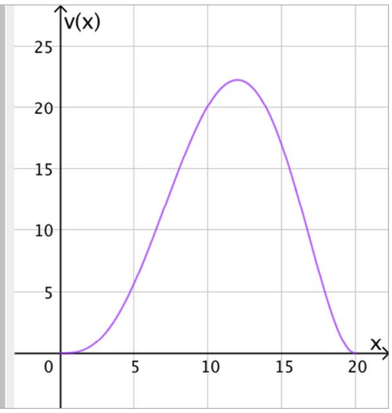
Anregung Die Aufgabe kann als Einstieg in die Integralrechnung dienen. Die Schülerinnen und Schüler werden schnell erkennen, dass man eine „Aufleitung“ der Geschwindigkeitsfunktion braucht, um den zurückgelegten Weg zu berechnen.

Hinweise zur Bearbeitung

Zu a)

Die Aufgabe dient zur Anwendung bereits erworbener Fertigkeiten: Aufstellen von Funktionstermen und grafische Darstellung von Funktionen mit eingeschränktem Definitionsbereich.

1	v(x):=a*x^5+b*x^4+c*x^3+d*x^2+e*x+g $\rightarrow\ v(x) := a\,x^5 + b\,x^4 + c\,x^3 + d\,x^2 + e\,x + g$
2	v'(x):=Ableitung(v, x) $\rightarrow\ v'(x) := 5\,a\,x^4 + 4\,b\,x^3 + 3\,c\,x^2 + 2\,d\,x + e$
3	Löse({v(0)=0, v'(0)=0,v(12)=80/3.6,v'(12)=0,v(20)=0,v'(20)=0},{a,b,c,d,e,g}) $\rightarrow\ \left\{\left\{a = \frac{25}{124416}, b = -\frac{125}{15552}, c = \frac{625}{7776}, d = 0, e = 0, g = 0\right\}\right\}$
4	h(x):=Wenn(0 < x < 20,25 / 124416 x^5 – 125 / 15552 x^4 + 625 / 7776 x^3) $\rightarrow\ h(x) := \text{Wenn}\left(0 < x < 20, \frac{25}{124416}\,x^5 - \frac{125}{15552}\,x^4 + \frac{625}{7776}\,x^3\right)$



Zu b)

Der Umgang mit dem Begriff der Änderungsrate kann hier geübt werden. Der rechnerische und damit auch der zeitliche Aufwand hält sich durch das CAS in Grenzen.

Zeile 5: Definition der Funktion ohne Einschränkung der Definitionsmengen

Zeile 6 - 8: Nachweis der Existenz des Maximums

5	f(x) := 25 / 124416 x^5 – 125 / 15552 x^4 + 625 / 7776 x^3 $\rightarrow\ f(x) := \frac{25}{124416}\,x^5 - \frac{125}{15552}\,x^4 + \frac{625}{7776}\,x^3$
6	Löse(f''(x)=0) $\approx\ \{x = 0, x = 7.1, x = 16.9\}$
7	f'''(7.1) $\approx\ -0.28$
8	f'''(16.9) $\approx\ 0.67$

Zu c)

Die Schülerinnen und Schüler kennen den Zusammenhang zwischen Ort und Geschwindigkeit: Geschwindigkeit als Änderungsrate des Ortes.

Zeile 9: Mit dem Integralbefehl des CAS findet man eine Stammfunktion von v. Es liefert auch die additive Konstante c.

Zeile 10: Da $s(0) = 0$, ergibt sich hier $c = 0$.

Zeile 11: In F_1 wird c_1 mit dem Wert 0 ersetzt.

9	F_1(x):=Integral(f, x) $\rightarrow F_1(x) := \frac{25}{746496} x^6 - \frac{25}{15552} x^5 + \frac{625}{31104} x^4 + c_1$
10	Löse(F_1(0) = 0,c_1) $\rightarrow \{c_1 = 0\}$
11	F(x):=Ersetze(F_1(x), c_1, 0) $\rightarrow F(x) := \frac{25}{746496} x^6 - \frac{25}{15552} x^5 + \frac{625}{31104} x^4$
12	F(20) $\approx$ **214.33**

Zu d)

Die Schülerinnen und Schüler erkennen, dass für den innerhalb eines Zeitintervalls [a;b] zurückgelegten Weg gilt: $F(b) - F(a)$. Die additive Konstante spielt dabei keine Rolle.

13	F(12) $\approx$ **116.67**
14	F(20)–F(12) $\approx$ **97.67**
15	F_1(20)–F_1(12) $\approx$ **97.67**
16	Integral(f, x, 12, 20) $\approx$ **97.67**

Aufgabe 3: Stammfunktion I

Geben Sie den Term einer Stammfunktion der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion $f: x \mapsto \frac{1}{2}e^{3x+1} + 7e^{-x} + 5$ an.

Zielsetzung Stammfunktion bestimmen

Voraussetzung Begriff der Stammfunktion, unbestimmtes Integral

Anmerkung An dieser Stelle dient das CAS hauptsächlich zur Überprüfung der händisch durchgeführten Rechnung.

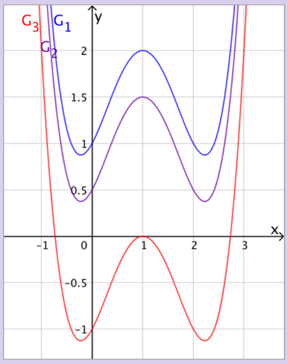
Hinweise zur Bearbeitung

Für eine Ergebniskontrolle wird das CAS ein wichtiger und hilfreicher Begleiter für die Schülerinnen und Schüler.

1	Integral(1/2e^(3x+1)+7e^(-x)+5) $\checkmark \int \frac{1}{2} e^{3x+1} + 7 e^{-x} + 5 \, dx$
2	$1 $\rightarrow -7 \cdot \frac{e^{-x}}{\ln(e)} + \frac{1}{6} \cdot \frac{e^{3x+1}}{\ln(e)} + 5x + c_1$

Aufgabe 4: Stammfunktion II

In der Abbildung sind Ausschnitte der Graphen von Stammfunktionen der Funktion $f: x \mapsto 2(x-1)^3 - 3x + 3$ mit $x \in \mathbb{R}$, dargestellt. Bestimmen Sie die Funktionsterme der Stammfunktionen.



Zielsetzung Übung

Voraussetzung Begriff der Stammfunktion, bestimmtes Integral

Hinweise zur Bearbeitung

Die bestimmten Funktionen lassen sich grafisch darstellen und mit der Angabe vergleichen.

Zeilen 1 - 2: Definition der Funktion sowie Bestimmung des unbestimmten Integrals

Zeilen 3 - 5: Definition der Stammfunktion und Bestimmung der Konstanten mittels eines Punktes auf dem Graphen G_1.

CAS

1	f(x):=2(x−1)^3−3x+3 $\rightarrow$ $f(x) := 2\ (x-1)^3 - 3x + 3$
2	Integral(f) $\rightarrow$ $\frac{1}{2}\ (x-1)^4 - \frac{3}{2}\ x^2 + 3x + c_1$
3	F(x,c):=1 / 2 (x − 1)⁴ − 3 / 2 x² + 3x + c $\rightarrow$ $F(x,c) := \frac{1}{2}\ (x-1)^4 - \frac{3}{2}\ x^2 + c + 3x$
4	Löse(F(1,c)=2) $\rightarrow$ $\left\{c = \frac{1}{2}\right\}$
5	F(x,1/2) $\rightarrow$ $\frac{1}{2}\ x^4 - 2x^3 + \frac{3}{2}\ x^2 + x + 1$

Aufgabe 5: Änderungsrate und Integral

Herrn Birnbaums Wasserboiler ist leider in die Jahre gekommen. Eines Tages beginnt der Boiler wegen Durchrostung am Boden auszulaufen. Die Abflussrate zu einem bestimmten Zeitpunkt kann mit einer Funktion V beschrieben werden. Sie hat die Gleichung $V(x) = 8 \cdot e^{-0{,}08x}$. Die Funktionswerte von V haben die Einheit $\frac{\text{Liter}}{\text{h}}$, x sind Zeitangaben in der Einheit Stunden. Mit sinkendem Wasserstand nimmt auch die Geschwindigkeit des Wasserabflusses ab. Herr Birnbaum bemerkt den Schaden erst nach 6 Stunden. Wie viel Wasser ist bereits ausgelaufen?

Berechnen Sie das Fassungsvermögen des Boilers. Zu Beginn des Auslaufens war der Boiler voll gefüllt.

Zielsetzung Zusammenhang zwischen Änderungsrate und Integral verstehen

Voraussetzung bestimmtes Integral

Hinweise zur Bearbeitung

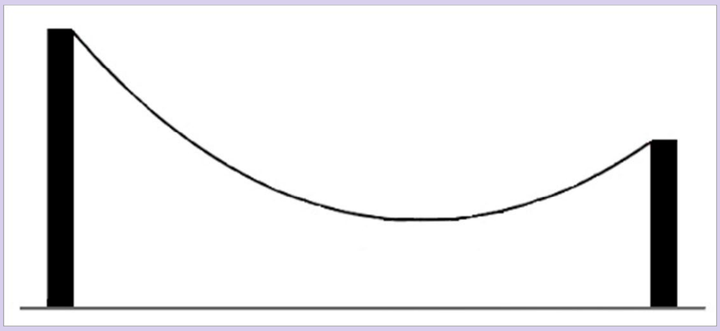
Bei Bedarf kann der Graph der Ableitungsfunktion dargestellt werden.

Das Integral ist leicht händisch zu berechnen, hier dient das CAS hauptsächlich zur Ergebniskontrolle.

1	f(x):=8* e ^(−0.08*x) ≈ $f(x) := 8\,e^{-0.08x}$
2	Integral(f, 0, 6) ≈ 38.12
3	Integral(f(x), 0, a) ≈ $-100\,e^{-0.08a} + 100$
4	Grenzwert(−100 e^(−0.08 a) + 100, a, ∞) ≈ 100

Aufgabe 6: Der Freizeitpark – nach Abitur Gymnasien, Gesamtschulen, Berufliche Gymnasien Hamburg, Haupttermin 2009

In einem Freizeitpark soll auf dem Abenteuerspielplatz eine Seilbahn gebaut werden. Der Freizeitparkbetreiber übergibt diese Aufgabe einem Architektenbüro seines Vertrauens. Das Seil soll zwischen zwei Pfeilern gespannt werden, die einen Abstand von 50 m haben. Wenn sich ein Mensch an das Seil hängt, darf er den Boden nicht berühren.



Der Architekt geht davon aus, dass für diese Seilbahn das durchhängende Seil (ohne Belastung) in einem geeignet gewählten Koordinatensystem durch die Funktion f beschrieben werden kann:

$f: x \mapsto 15 \cdot e^{\frac{1}{30}x-1} + 15 \cdot e^{-\frac{1}{30}x+1} - 25,\ x \in [0;50]$. x und y sind dabei Längenangaben in der Einheit Meter.

a) Der linke Aufhängepunkt des Seils hat die x-Koordinate $x_1 = 0$. Im Abstand von 50 m soll sich der rechte Aufhängepunkt am zweiten Pfeiler befinden. Berechnen Sie die notwendige Höhe der zwei Pfeiler. Bemerkung: Beide Pfeiler verlaufen parallel zur y-Achse des Koordinatensytems.

b) Berechnen Sie die Steigung des Seiles in den beiden Aufhängepunkten.

c) Bei Belastung hängt das Seil höchstens $1{,}0\,\text{m}$ durch. Bestätigen Sie, dass dann ein Mensch von $2{,}0\,\text{m}$ Größe an jeder Stelle des Seils hängen kann, ohne den Boden zu berühren.

d) Zeichnen Sie den Graphen von f und die beiden Pfeiler in ein Koordinatensystem.

Der Assistent des Architekten überlegt sich, dass der Verlauf des Seiles näherungsweise auch durch eine quadratische Funktion p beschrieben werden könnte. Diese Funktion p muss natürlich dieselben Aufhängepunkte wie die Funktion f gewährleisten. Zusätzlich wird gefordert, dass die Parabel durch den Punkt (30 | 5) verläuft.

e) Bestimmen Sie die Gleichung der Parabel. Benutzen Sie dazu die Aufhängepunkte (0 | 21,3) und (50 |11,9).

Der Assistent behauptet, dass sich die beiden Graphen praktisch kaum unterscheiden. Das soll überprüft werden.

f) Bestimmen Sie den durchschnittlichen Höhenunterschied des Seils bezüglich der beiden Verläufe gemäß der beiden Modellfunktionen in den Teilbereichen vom linken Aufhängepunkt bis zur Stelle $x_1 = 30\,\text{m}$ und von x_1 bis zum rechten Aufhängepunkt.
Hinweis: Sie können voraussetzen, dass die beiden Graphen außer den Aufhängepunkten und (30 | 5) keine weiteren Punkte gemeinsam haben.

Zielsetzung Bearbeitung einer Aufgabe aus einem größerem Themenkomplex, Flächeninhalte von eingeschlossenen Flächenstücken berechnen

Hinweise zur Bearbeitung

Zu a), b) und c)

Die ersten drei Teilaufgaben verlangen das grundlegende Verständnis im Umgang mit Funktionen. Hier übernimmt das CAS viel Rechenarbeit.

Klassische Elemente der Kurvendiskussion können an dieser Stelle wiederholt und vertieft werden. Den Schülerinnen und Schülern bleibt Raum und Zeit, die grundlegenden mathematischen Zusammenhänge zu verstehen.

1	f(x):=15* *e* ^(1/30*x−1)+15* *e* ^(−1/30*x+1)−25 $\rightarrow\ f(x) := 15\,e^{-\frac{1}{30}x+1} + 15\,e^{\frac{1}{30}x-1} - 25$
2	f(0) $\approx\ 21.2924$
3	f(50) $\approx\ 11.9173$
4	f'(0) $\approx\ -1.1752$

5	f'(50) $\approx\ 0.7172$
6	Löse(f'(x)=0) $\approx\ \{x = 30\}$
7	f(30) $\rightarrow\ 5$
8	5−1−2 $\approx\ 2$

Zu d) und e)

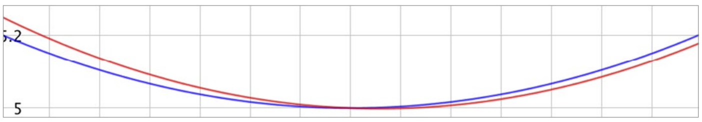
Zeilen 9 - 11: Exakte Bestimmung der Parabelgleichung durch Lösen des zugehörigen Gleichungssystems. Der Befehl

TrendPoly(<Liste von Punkte>,<Grad>)

liefert eine Regressionskurve, die für den weiteren Verlauf der Aufgabe weniger geeignet ist.

Wie die beiden Graphen im Koordinatensystem liegen, erkennt man bei entsprechender Vergrößerung der Grafik. Hier stellt der rote Graph die Funktion g dar, der blaue Graph die Funktion f.

9	p(x):=a*x^2+b*x+c $\rightarrow\ p(x) := a\,x^2 + b\,x + c$
10	Löse({p(0)=21.3, p(30)=5,p(50)=11.9},{a,b,c}) $\rightarrow\ \left\{\left\{a = \frac{533}{30000}, b = -\frac{3229}{3000}, c = \frac{213}{10}\right\}\right\}$
11	g(x):=Ersetze(p(x), {a = 533 / 30000, b = (-3229) / 3000, c $\rightarrow\ g(x) := \frac{533}{30000}\,x^2 - \frac{3229}{3000}\,x + \frac{213}{10}$



Zu f)

Zeilen14 - 16: Hier wird der durchschnittliche Wert der Differenzfunktion d(x) = |f(x) – g(x)| bestimmt:

$$\frac{1}{30}\cdot\left|\int_0^{30}(f(x)-g(x))dx\right| \text{ bzw. } \frac{1}{20}\cdot\left|\int_{30}^{50}(f(x)-g(x))dx\right|$$

14	abs(Integral(f−g,0,30))/30 ≈ **0.229**
15	abs(Integral(f−g, 30, 50))/20 ≈ **0.0066**
16	(abs(Integral(f−g,0,30))+abs(Integral(f−g, 30, 50)))/50 ≈ **0.14**

2.6 Abschnittweise definierte Funktionen

Im Zusammenhang mit den beschriebenen Vorschlägen zur Unterrichtsgestaltung kommen insbesondere folgende CAS-Grundfertigkeiten zur Anwendung:

- Term definieren
- Term faktorisieren
- Termwert berechnen
- Gleichung lösen
- Gleichungssystem lösen
- Grenzwert berechnen
- Graph zeichnen, geeigneten Anzeigebereich wählen
- Term einer Ableitungsfunktion bestimmen
- bestimmtes Integral berechnen

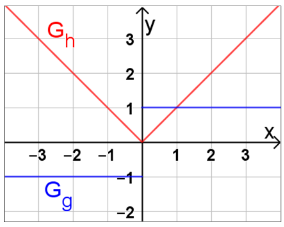
Grundlegende CAS-Befehle

Betragsfunktion und Vorzeichenfunktion

Zeilen 1 - 2: Die Betragsfunktion und die sog. SGN- bzw. Vorzeichenfunktion sind zwei spezielle abschnittsweise definierte Funktionen. An dieser Stelle werden nicht die bereits vordefinierten Befehle *ABS*, *SGN* bzw. *SIGN* verwendet, da die Fertigkeit der Beschreibung abschnittsweise definierter Funktionen im Vordergrund stehen soll.

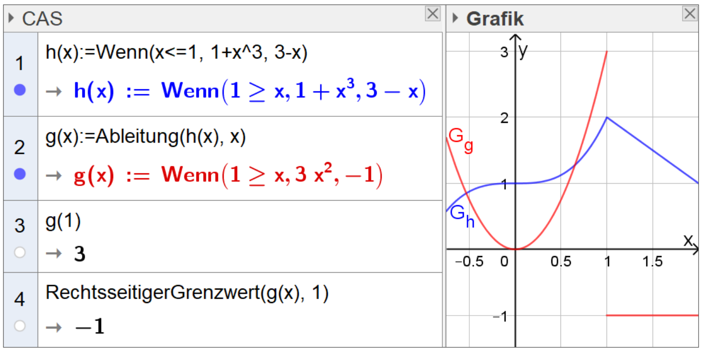
Zeilen 3 - 5: Schrittweise Untersuchung auf Stetigkeit der Vorzeichenfunktion aus Zeile 2 an der Nahtstelle $x = 0$.

1	h(x):=Wenn(x<0, -x, x) $\rightarrow$ $\mathbf{h(x) := Wenn(0 > x, -x, x)}$
2	g(x):=Wenn(x<0, -1, Wenn(x>0, 1, 0)) $\rightarrow$ $\mathbf{g(x) := Wenn(0 > x, -1, Wenn(x > 0, 1, 0))}$
3	g(0) $\rightarrow$ $\mathbf{0}$
4	LinksseitigerGrenzwert(g(x), x, 0) $\rightarrow$ $\mathbf{-1}$
5	RechtsseitigerGrenzwert(g(x), x, 0) $\rightarrow$ $\mathbf{1}$

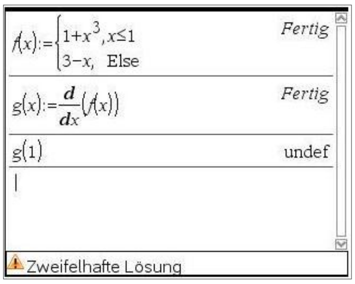


Differenzierbarkeit

Zeilen 1 - 4: Bei der Untersuchung der Differenzierbarkeit von abschnittsweise definierten Funktionen sind insbesondere die Nahtstellen von Interesse. Abhängig vom verwendeten CAS berücksichtigt der Ableitungsbefehl ggf. die Problematik der Differenzierbarkeit an der Nahtstelle nicht ausreichend (Zeile 3). Den Schülerinnen und Schülern wird an dieser Stelle deutlich, dass die Ergebnisse des CAS stets kritisch geprüft werden müssen.



Andere CAS berücksichtigen beispielsweise, dass die Ableitung an der Nahtstelle nicht definiert ist (dritte Zeile in der Abbildung rechts).



Vorschläge zur Unterrichtsgestaltung

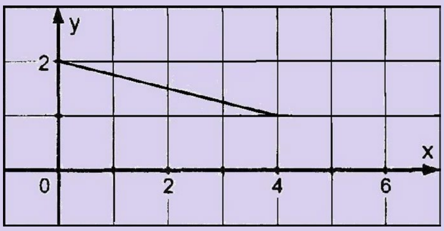
Im Folgenden werden mehrere Arbeitsaufträge bzw. Aufgaben vorgestellt, die im Wesentlichen aus Abschlussprüfungen an den Fach- und Berufsoberschulen in Bayern stammen.

Aufgabe 1: Kugel auf Bahn – nach Fachabiturprüfung 2014, Nichttechnik A I

Eine Kugel soll eine Bahn hinabrollen, die durch den Graphen G_h der Funktion

$$h : x \mapsto \begin{cases} g(x) & \text{für } 0 \le x \le 4 \\ -\frac{1}{8}(x^2 - 6x) & \text{für } 4 < x \le 6 \end{cases}$$

beschrieben wird. Dabei ist der Graph von g das in nebenstehender Skizze dargestellte Geradenstück.



Prüfen Sie durch Rechnung, ob die Bahn G_h an der Stelle $x = 4$ einen Sprung bzw. einen Knick aufweist.

Zielsetzung Übung (im Hinblick auf die rechnerische Entscheidung, ob abschnittsweise definierte Funktionen an den Nahtstellen ihrer Definitionsbereiche unstetig, stetig oder sogar differenzierbar sind)

Voraussetzung Stetigkeit und Differenzierbarkeit an der Nahtstelle; Aufstellen von Funktionstermen

Hinweise zur Bearbeitung

Zeile 1: Der Graph der linearen Funktion verläuft durch die beiden Punkte (0| 2) und (4| 1). Die Schülerinnen und Schüler können mit dem Befehl *Polynom* beim hier verwendeten CAS den Term der linearen Funktion g bestimmen.

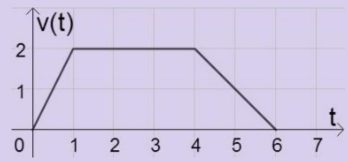
Vereinfachend ist hier die Funktion nicht nur auf dem Intervall [0; 6] definiert.

Zeilen 2 - 6: schrittweiser Nachweis von Stetigkeit und Differenzierbarkeit an der Nahtstelle

1	h(x):=Wenn(4>=x, Polynom((0,2),(4,1)), -1/8*(x^2-6*x)) $\rightarrow h(x) := \text{Wenn}\left(4 \geq x, -\frac{1}{4}x+2, -\frac{1}{8}\left(x^2-6x\right)\right)$
2	h(4) $\rightarrow 1$
3	LinksseitigerGrenzwert(h(x), 4) $\rightarrow 1$
4	RechtsseitigerGrenzwert(h(x), 4) $\rightarrow 1$
5	LinksseitigerGrenzwert(Ableitung(h(x), x), 4) $\rightarrow -\frac{1}{4}$
6	RechtsseitigerGrenzwert(Ableitung(h(x), x), 4) $\rightarrow -\frac{1}{4}$

Aufgabe 2: Momentangeschwindigkeit – nach Fachabiturprüfung 2006, Nichttechnik A II

Nebenstehendes Diagramm beschreibt den Zusammenhang zwischen der Momentangeschwindigkeit v(t) eines Fahrzeugs (in Kilometer pro Minute) und der Zeit t (in Minuten). Einheiten werden nicht mitgeführt.



a) Begründen oder widerlegen Sie anhand des Diagramms die Behauptung: Die Funktion v ist im dargestellten Bereich differenzierbar.

b) Geben Sie die Geschwindigkeiten zur Zeit $t_1 = 1$ und $t_2 = 5$ an.

c) Die 1. Ableitung der Geschwindigkeit v ist die Beschleunigung a, die das Fahrzeug erfährt. Zeichnen Sie den Graphen der Funktion a.

d) Die Geschwindigkeit v ist die 1. Ableitung der Ortsfunktion s. Bestimmen Sie mithilfe der Zeichnung den am Ende (nach 6 Minuten) zurückgelegten Weg des Fahrzeugs.

Zielsetzung Übung (im Hinblick auf die typischen Anwendungen einer abschnittsweise definierten Funktion)

Voraussetzung Stetigkeit und Differenzierbarkeit einer abschnittsweise definierten Funktion; elementare Fähigkeiten zur Beschreibung von Bewegungen

Hinweise zur Bearbeitung

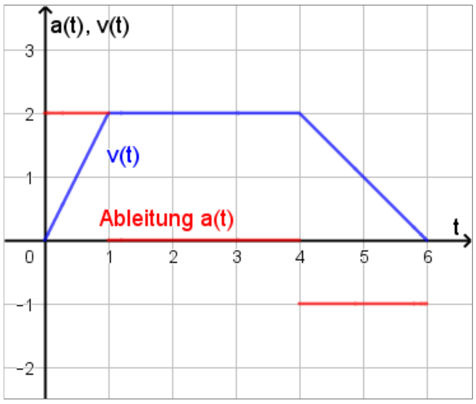
Zu b)

Zeilen 1 - 4: Zur Bearbeitung der Aufgabe ist die Eingabe (Zeile 2) der Momentangeschwindigkeit nicht zwingend notwendig, dient aber der Übung im Umgang mit dem CAS.

1	g(x):=Polynom((4,2),(6,0)) → $g(x) := -x+6$
2	v(x):=Wenn(0<x<=1, 2*x, Wenn(1<x<=4, 2, Wenn(4<x<=6, g(x)))) → $v(x) := \mathrm{Wenn}(0 < x \leq 1, 2\,x, \mathrm{Wenn}(1 < x \leq 4, 2, \mathrm{Wenn}(4 < x \leq 6, -x+6)))$
3	v(1) → 2
4	v(5) → 1
5	a(x):=Ableitung(v(x), x) → $a(x) := \mathrm{Wenn}(0 < x \leq 1, 2, \mathrm{Wenn}(1 < x \leq 4, 0, \mathrm{Wenn}(4 < x \leq 6, -1)))$
6	Integral(v(x), x, 0, 6) → 9

Zu c)

Zeile 5: Die Schülerinnen und Schüler sollen bei der schriftlichen Dokumentation der Lösung die Definitionslücken (Nahtstellen) besonders kennzeichnen.

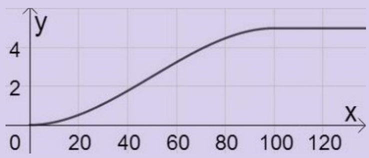


Zu d)

Zeile 6: Die Schülerinnen und Schüler können hier leicht erkennen, dass der Flächeninhalt des Flächenstücks zwischen Graph und Zeitachse der zurückgelegte Weg ist. Diese Trapezfläche kann dann auch rasch händisch berechnet werden. Das Ergebnis des CAS-Rechners dient den Schülerinnen und Schülern zur Ergebniskontrolle.

Aufgabe 3: Straßenauffahrt – nach Fachabiturprüfung 2001, Technik A I

Zu einer 5,0 m hohen Brücke soll auf einer Länge von 100 m eine Straßenauffahrt gebaut werden. Im Folgenden werden nur die Maßzahlen der Längen betrachtet.



Das Profil der Straße kann bei geeigneter Wahl der Werte der reellen Parameter a, b und c modellhaft durch folgende reelle Funktion s beschrieben werden:

$$s: x \mapsto s(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ ax^3 + bx^2 + cx & \text{für } 0 \leq x \leq 100 \\ 5 & \text{für } x > 100 \end{cases}$$

a) Bestimmen Sie die Werte für a, b und c so, dass der Straßenverlauf an den Übergangsstellen dem Bild entspricht, d. h. weder Lücken noch Kanten auftreten.

b) Ermitteln Sie, an welcher Stelle die Auffahrt die größte Steigung besitzt.

Zielsetzung Übung/Anwendung (im Hinblick auf Zusammenhänge zwischen Graph und Funktionsterm)

Voraussetzung rationale Funktionen; Grundlagen der Differenzialrechnung; Aufstellen von Funktionstermen

Anmerkung Eine Variante mit einer trigonometrischen Funktion wird im Kapitel *Trigonometrische Funktionen* vorgestellt.

Hinweise zur Bearbeitung

Zu a)

Zeilen 1 - 3: Nach der Eingabe der drei Bedingungen, kann das Gleichungssystem gelöst werden. Beim hier verwendeten CAS wäre die Definition der Ableitungsfunktion in Zeile 2 nicht notwendig, da die Ableitungsfunktionen vordefiniert sind.

Zu b)

Zeilen 4 - 5: Die mit dem CAS bestimmte mögliche Wendestelle ist lediglich der Ausgangspunkt für die vollständige Bearbeitung der Teilaufgabe durch die Schülerinnen und Schüler. Für die weiteren Argumentationsschritte ist das CAS nicht notwendig.

1	s(x):=a*x^3 +b*x^2+c*x $\rightarrow\ s(x) := a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x$
2	s'(x):=Ableitung(s(x), x) $\rightarrow\ s'(x) := 3\,a\,x^2 + 2\,b\,x + c$
3	Löse({s(100)=5, s'(0)=0,s'(100)=0}, {a,b,c}) $\rightarrow\ \left\{\left\{a = -\frac{1}{100000}, b = \frac{3}{2000}, c = 0\right\}\right\}$
4	Löse(Ableitung(s(x), x, 2)=0,x) $\rightarrow\ \left\{x = -\frac{b}{3\,a}\right\}$
5	Ersetze($4,$3) $\rightarrow\ \{x = 50\}$

Aufgabe 4: Vertiefung – nach Fachabiturprüfung 2011, Technik A II

Untersuchen Sie, ob die Funktion $h: x \mapsto h(x)$ mit

$$h(x) = \begin{cases} a(x) & \text{für } x < 0 \\ 2 + x & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$$

und $a(x) = \frac{3+e^{2x}}{1+e^{2x}}$ an der Nahtstelle $x = 0$ stetig ist. Begründen Sie, dass die Funktionswerte von h an der Nahtstelle ein Minimum aufweisen, und geben Sie den Winkel an, unter dem die Graphen der beiden Teilfunktionen an der Nahtstelle aufeinandertreffen.

Zielsetzung Übung/Vertiefung

Voraussetzung Stetigkeit und Differenzierbarkeit an der Nahtstelle; Eigenschaften der Exponentialfunktion; Ableitungsregeln (z. B. Quotientenregel)

Anmerkung Alternative mit $a(x) = 1 + e^{-x}$ (die grundlegende Lösungsidee der Aufgabe bleibt dabei unverändert)

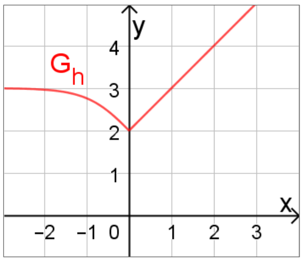
Hinweise zur Bearbeitung

Zeilen 1 - 2: Die Schülerinnen und Schüler verwenden das CAS zur Veranschaulichung der Fragestellung. Bei der weiteren Bearbeitung mit dem CAS wird die zusammengesetzte Funktion in Zeile 2 nicht verwendet.

Zeilen 3 - 5: schrittweiser Nachweis der Stetigkeit der Funktion h an der Nahtstelle $x = 0$

Zeile 6: Die Schülerinnen und Schüler können das Ergebnis der manuellen Ableitung mit dem CAS verifizieren. Als Ausgangspunkt für die Untersuchung der Monotonieeigenschaften von h kann den Schülerinnen und Schülern die zusammengefasste Form der Ableitung dienen. Für die weiteren Argumentationsschritte ist das CAS nicht notwendig.

Zeile 7: Der Winkel, unter dem die Graphen aufeinandertreffen, beträgt 90°, da für die Ableitungsfunktion von h gilt: $h'(x) \to \pm 1$ für $x \to 0 \pm 0$.



1	a(x):=(exp(2*x)+3)/(exp(2*x)+1) $\to\ a(x) := \frac{e^{2x}+3}{e^{2x}+1}$
2	h(x):=Wenn(x<0, a(x), 2+x) $\to\ h(x) := \text{Wenn}\left(0 > x, \frac{e^{2x}+3}{e^{2x}+1}, 2+x\right)$
3	2+0 $\to\ 2$
4	RechtsseitigerGrenzwert(2+x, x, 0) $\to\ 2$
5	LinksseitigerGrenzwert(a(x), x, 0) $\to\ 2$
6	Faktorisiere(Ableitung(a(x), x), x) $\to\ -4 \cdot \frac{e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}$
7	LinksseitigerGrenzwert(Ableitung(a(x), x), x, 0) $\to\ -1$

Aufgabe 5: Keramikbrennofen – nach fachgebundene Abiturprüfung Bayern BO 2006, Nichttechnik A I

Bei der Herstellung von Keramiken werden Kammerbrennöfen verwendet. Der Verlauf der Brenntemperatur B(t) in °C eines Kammerbrennofens in Abhängigkeit von der Zeit t ($0 \le t \le 13$) in Stunden nach dem Beginn des Aufheizens kann durch folgende abschnittsweise definierte Funktion beschrieben werden:

$$B: t \mapsto B(t) = \begin{cases} 180t & \text{für } 0 \le t < 3 \\ -630 \cdot e^{-\frac{2}{7}t+\frac{6}{7}} + 1170 & \text{für } 3 < t \le 13 \end{cases}.$$

Auf die Mitführung von Einheiten wird verzichtet.

a) Zeigen Sie, dass die Funktion B an der Stelle $t_0 = 3$ differenzierbar ist.

b) Der Kammerbrennofen erreicht 13 Stunden nach dem Beginn des Aufheizens seine maximale Brenntemperatur B_{max}. Zum Zeitpunkt t_1 liegt die Temperatur im Ofen 10 % unter B_{max}. Berechnen Sie B_{max} und den Zeitpunkt t_1.

c) Berechnen Sie den Wert $m = \frac{B(13) - B(8)}{13 - 8}$, geben Sie eine sinnvolle Einheit für m an. Interpretieren Sie m im gegebenen Sachzusammenhang.

d) Zeichnen Sie unter Verwendung bisheriger Ergebnisse den Graphen der Funktion B.

Maßstab: Abszissenachse: 1 cm ≙ 1 h; Ordinatenachse: 1 cm ≙ 100 °C

e) Die Maßzahl W des Flächeninhalts der Fläche zwischen dem Graphen von B und der t-Achse lässt einen Rückschluss auf die aufgenommene Wärmemenge (Energie) für das Aufheizen des Brennofens bis zur Maximaltemperatur zu. Berechnen Sie die Maßzahl W.

Zielsetzung Übung (Einordnung des eigenen Lernstands)

Voraussetzung Grundlagen der Integral- und Differenzialrechnung; Eigenschaften der natürlichen Exponentialfunktion

Hinweise zur Bearbeitung

Zu a)

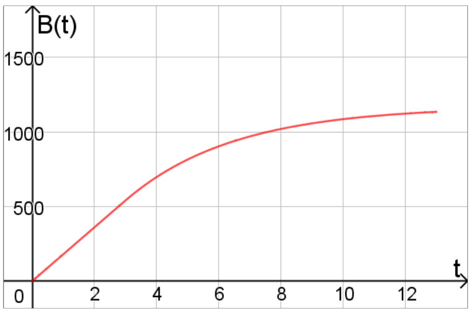
Zeilen 1 - 6: Der schrittweise Nachweis der Differenzierbarkeit verläuft analog zu den weiter oben beschriebenen Arbeitsaufträgen.

Zeile 7: Der rechte Teil des Terms ist in der Darstellung abgeschnitten.

1	a(t):=1170-630*exp(-2*t/7+6/7) $\rightarrow\ a(t) := -630\, e^{-\frac{2}{7}t+\frac{6}{7}} + 1170$
2	a'(t):=Ableitung(a(t), t) $\rightarrow\ a'(t) := 180\, e^{-\frac{2}{7}t+\frac{6}{7}}$
3	LinksseitigerGrenzwert(180*t, t, 3) $\rightarrow\ 540$
4	RechtsseitigerGrenzwert(a(t), t, 3) $\rightarrow\ 540$
5	a(3) $\rightarrow\ 540$
6	RechtsseitigerGrenzwert(a'(t), t, 3) $\rightarrow\ 180$
7	B(t):=Wenn(0<=t<3, 180*t, Wenn(3<=t<=13, a(t))) $\rightarrow\ B(t) := \text{Wenn}\big(0 \le t < 3, 180\,t, \text{Wenn}\big(3 \le t \le 13, -630$

Zu b), c), d) und e)

Die Schülerinnen und Schüler sollen in der Lage sein, alle weiteren Teilaufgaben ohne Einsatz des CAS manuell zu lösen. Entsprechend dient hier das CAS als Kontrollinstrument und unterstützt dabei eigenverantwortliches Arbeiten.



8	B_M:=B(13) $\rightarrow\ B_M := -630 \cdot \frac{1}{\sqrt[7]{e^{20}}} + 1170$
9	Numerisch(B_M) $\rightarrow\ 1133.82$
10	Löse(a(t)=0.9*B_M,t) $\rightarrow\ \left\{ t = -\frac{7}{2} \ln\left(\frac{13\sqrt[7]{e^{20}} + 63}{70\sqrt[7]{e^{20}}}\right) + 3 \right\}$
11	Numerisch(RechteSeite($10)) $\rightarrow\ \{8.03\}$
12	Numerisch((B(13)-B(8))/(13-8)) $\rightarrow\ 22.96$
13	Integral(B(t),t,0,13) $\rightarrow\ 10431.64$

2.7 Trigonometrische Funktionen

Ein CAS kann in Zusammenhang mit trigonometrischen Funktionen an mehreren Stellen sehr gewinnbringend eingesetzt werden. Z. B. beim entdeckenden Erkunden der Eigenschaften von trigonometrischen Funktionen am Einheitskreis, bei der Einführung der Ableitungsfunktionen oder beim Lösen von goniometrischen Gleichungen. In allen Fällen ist es die relativ unkomplizierte grafische Darstellung des Sachverhaltes, welche den Schülerinnen und Schülern das Verständnis erleichtert. Im Folgenden werden Beispiele hierzu vorgestellt. Eine sehr umfangreiche Darstellung der Thematik findet sich in den beiden Handreichungen für das Gymnasium (vgl. [HR CAS Gym 10] und [HR CAS Gym 11-12]).

Im Zusammenhang mit den beschriebenen Vorschlägen zur Unterrichtsgestaltung kommen insbesondere folgende CAS-Grundfertigkeiten zur Anwendung:

- Term definieren
- Termwert berechnen
- Gleichung lösen
- Gleichungssystem lösen
- Graph zeichnen, geeigneten Anzeigebereich wählen
- Term einer Ableitungsfunktion bestimmen
- Funktionswert einer Stammfunktion bestimmen
- bestimmtes Integral berechnen

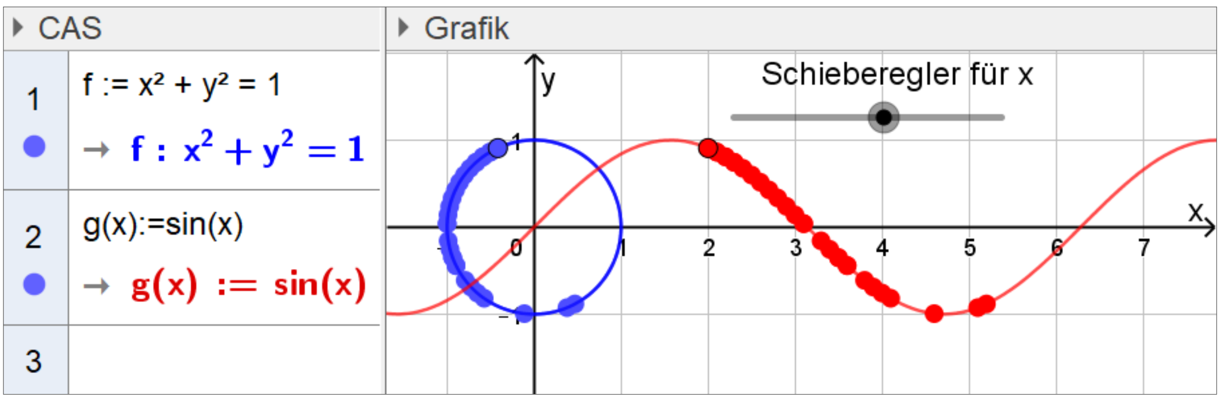
Grundlegende CAS-Befehle

Trigonometrische Funktionen finden u. a. in der Physik und auch in der Technologie (Lernbereich: Nachrichtentechnik) Verwendung. Die Schülerinnen und Schüler beschreiben mithilfe von trigonometrischen Funktionen z. B. die Bewegung harmonisch schwingender Körper oder physikalische Vorgänge im elektromagnetischen Schwingkreis.

Für die nachfolgenden Betrachtungen wird der sichere Umgang mit dem Bogenmaß vorausgesetzt. Zahlreiche Beispiele und Anregungen zum Grad- und zum Bogenmaß findet man auch in der Handreichung für das Gymnasium (vgl. [HR CAS Gym 10]).

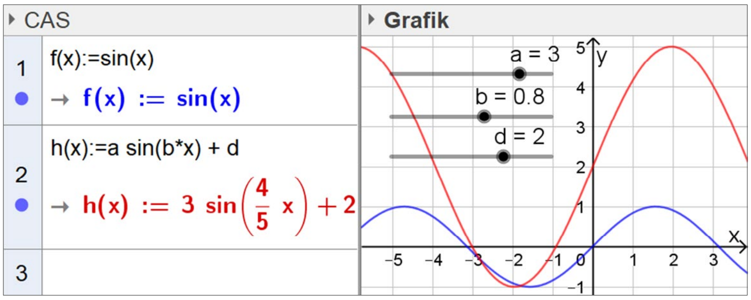
Einheitskreis

Der Verlauf der Sinusfunktion kann unter Verwendung der dynamischen Geometriefunktion des CAS am Einheitskreis untersucht werden. Applikationen hierzu können von den Schülerinnen und Schülern selbst erstellt werden (vgl. [HR CAS Gym 10]). Es ist sinnvoll, einen Schieberegler einzusetzen.

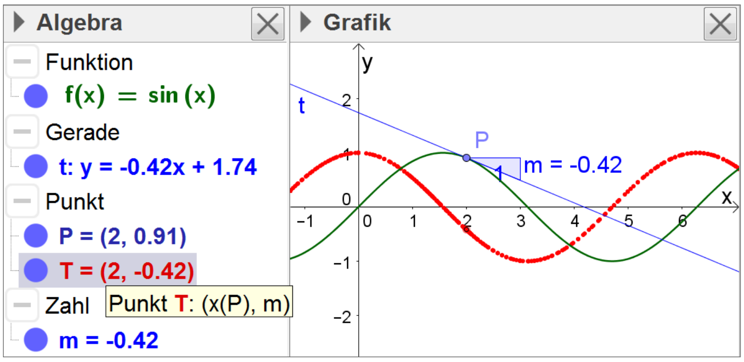


Eigenschaften

Eigenschaften (wie z. B. Wertemenge, Nullstellen, Symmetrie, Periodizität) der trigonometrischen Funktionen und der entsprechenden Graphen können wie oben beschrieben am Einheitskreis veranschaulicht werden. Darüber hinaus können die Schülerinnen und Schüler weitere Eigenschaften trigonometrischer Funktionen relativ einfach unter Verwendung von Schiebereglern mit dem CAS untersuchen. Das folgende Beispiel verwendet drei Schieberegler und verdeutlicht die Amplitude, die Periodenlänge der Funktionen sowie Verschiebungen der Graphen im Koordinatensystem.



Auch bei den trigonometrischen Funktionen spielen deren Ableitungsfunktionen eine wichtige Bedeutung. Die folgende Abbildung zeigt, wie ein CAS verwendet werden kann, um grafisch den Zusammenhang zwischen Funktion und Ableitungsfunktion am Beispiel der Sinusfunktion zu erarbeiten. Das Vorgehen hierzu unter Nutzung des Grafikbereichs und des Algebra-Fensters wird in [HR CAS Gym 11-12] ausführlich beschrieben.



Vorschläge zur Unterrichtsgestaltung

Aufgabe 1: Mathematik-Forum (vgl. [HR CAS Gym 10])

Aus einem Mathematik-Forum im Internet:

„Hallo Mathe-Könner,

ich möchte die Gleichung $\sin(x) = 1$ mithilfe meines CAS-Rechners lösen und werde aus der Ausgabe

$$x = 2 \cdot k_3 \cdot \pi + \frac{\pi}{2}$$

nicht schlau. Kann mir jemand schreiben, was die Ausgabe bedeutet? Hätte ich die Aufgabe auch ohne CAS lösen können? Danke schon mal. Alex"

Verfassen Sie eine Antwort.

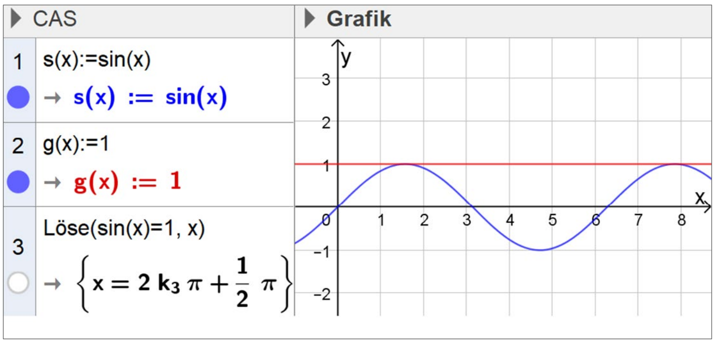
Zielsetzung Übung im Verfassen von adressatengerechten Texten

Voraussetzung Periodizität der trigonometrischen Funktionen

Hinweise zur Bearbeitung

Die Schülerinnen und Schüler können die Ausgangssituation der Aufgabe mit dem CAS leicht nachvollziehen.

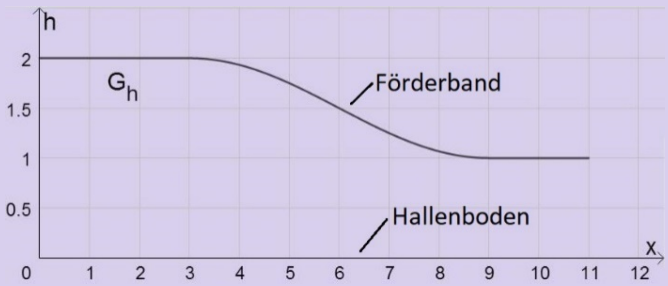
Anmerkung: Ändert man die zu lösende Gleichung entsprechend, kann diese Aufgabe auch als Ausgangspunkt für entdeckendes Lernen der verschiedenen Aspekte beim Lösen goniometrischer Gleichungen genutzt werden.



Aufgabe 2: Förderband – nach Fachabiturprüfung Bayern 2009, Technik A I

In einem Flughafenterminal wird die Gepäckabfertigung neu geplant. Unter anderem ist ein neues Förderband für den Transport von Gepäckstücken vorgesehen. Die Gepäckstücke sollen zunächst horizontal transportiert werden. Innerhalb von sechs Metern muss jedoch ein Höhenunterschied von einem Meter überwunden werden. Danach sollen die Gepäckstücke wieder waagrecht bewegt werden. Beim Übergang von der höher gelegenen auf die tiefere Ebene soll das Förderband einen kosinusförmigen Verlauf haben. Der (nicht maßstabsgetreue) Verlauf des Förderbands ist unten schematisch als Graph G_h einer Funktion h dargestellt. Die Werte von x und die Funktionswerte von h (Höhe des Förderbands über dem Hallenboden) sind Längenangaben in der Einheit Meter.

Auf die Mitführung von Einheiten wird verzichtet.



a) Der abgebildete Graph G_h verläuft auf der Definitionsmenge $D_h = [0;11]$ ohne Knick.
Der Funktionsgleichung von h für $3 \le x \le 9$ lautet: $h(x) = a \cdot \cos(b \cdot x + c) + d$.

Entnehmen Sie der Zeichnung geeignete Funktionswerte und bestimmen Sie daraus die Werte der Konstanten a, b, c und d.

b) Die Funktion h kann für $3 \le x \le 9$ auch durch die Gleichung

$$h(x) = 0{,}5 \cdot \left[\sin\left(\frac{\pi}{6} \cdot x\right) + 3\right]$$

dargestellt werden.

Zeigen Sie mithilfe der Ableitungsfunktionen, dass der Graph G_h an der Stelle $x = 6$ einen Wendepunkt besitzt, und ermitteln Sie das prozentuale maximale Gefälle des Förderbands auf eine Nachkommastelle gerundet.

Zielsetzung Übung

Voraussetzung Aufstellen von Funktionstermen; abschnittsweise definierte Funktionen; Grundlagen der Differenzialrechnung

Anmerkung Als Variante mit einer ganzrationalen Funktion wird ein ähnliches Beispiel im Kapitel *Abschnittsweise definierte Funktionen* präsentiert.

Hinweise zur Bearbeitung

Zu a)

Zeilen 1 - 3: Die Schülerinnen und Schüler erkennen, dass die vier Bedingungen nicht ausreichen, um das Gleichungssystem mit vier Unbekannten zu lösen.

Zeilen 4 - 6: Das Gleichungssystem wird beispielsweise lösbar, wenn man die Periodenlänge im Ansatz für die Funktion in Zeile 4 verwendet.

Die Schülerinnen und Schüler sollen aber auch einen alternativen Lösungsweg ohne den Einsatz des CAS (z. B. schrittweise Bestimmung von Amplitude, halber Periodenlänge, Verschiebung um 3 LE in x-Richtung nach rechts und um 1,5 LE in y-Richtung nach oben) erläutern und begründen können.

In den beiden Lösungen in Zeile 6 ist nur das Vorzeichen der Parameter a und c jeweils vertauscht. Der Parameter d ist stets +1,5.

1	h(x):=a*cos(b*x+c)+d $\rightarrow\ \mathbf{h(x) := a\ \cos(b\ x + c) + d}$
2	h'(x):=Ableitung(h(x), x) $\rightarrow\ \mathbf{h'(x) := -a\ b\ \sin(b\ x + c)}$
3	Löse({h(3)=2,h(9)=1,h'(x)=0,h'(9)=0}, {a,b,c,d}) $\rightarrow$ **?**
4	h_n(x):=a*cos((2*pi)*x/12+c)+d $\rightarrow\ \mathbf{h_n(x) := a\ \cos\left(\frac{1}{6}\ \pi\ x + c\right) + d}$
5	h_n'(x):=Ableitung(h_n(x), x) $\rightarrow\ \mathbf{h_n'(x) := -\frac{1}{6}\ a\ \pi\ \sin\left(\frac{1}{6}\ \pi\ x + c\right)}$
6	Löse({h_n(3)=2,h_n(9)=1, h_n'(3)=0}, {a,c,d}) $\rightarrow\ \mathbf{\left\{\left\{a = -\frac{1}{2}, c = \frac{1}{2}\ \pi, d = \frac{3}{2}\right\}, \left\{a = \frac{1}{2}, c = -\frac{1}{2}\ \pi, d = \frac{3}{2}\right.\right.}$

Zu b)

Zeilen 1 - 4: Schrittweise Bestimmung der Wendestelle. Nach der Bearbeitung der Aufgabe 1 (zur Periodizität der trigonometrischen Funktionen) sollte den Schülerinnen und Schülern der Umgang mit der Lösung hier beispielsweise in Zeile 2 keine Probleme bereiten.

1	h(x):=0.5*(sin(pi*x/6)+3) $\rightarrow$ $h(x) := \frac{1}{2}\sin\left(\frac{1}{6}\pi x\right) + \frac{3}{2}$
2	Löse(h''(x)=0, x) $\rightarrow$ $\{x = 6\, k_1\}$
3	h'''(6) $\rightarrow$ $\frac{1}{432}\pi^3$
4	h'(6) $\rightarrow$ $-\frac{1}{12}\pi$

Aufgabe 4: Tageslänge – nach Fachabiturprüfung Bayern 2017, Technik A II

Unter der Tageslänge an einem bestimmten Ort auf der Erde versteht man die gemessene Zeitdauer von Sonnenaufgang bis Sonnenuntergang an diesem Ort. Sie ist von der geographischen Breite des Ortes abhängig. Es wurden die Tageslängen in München im Jahr 2016 (Schaltjahr mit 366 Tagen) aufgezeichnet. Die maximale Tageslänge betrug 16,12 h, die minimale Tageslänge 8,40 h. Die Tageslänge am 1.1.2016 ($t_1 = 0$) betrug 8,46 h (Wert geringfügig verändert).

Die Funktion $g: t \mapsto a \cdot \sin(b \cdot t + c) + d$ mit $a, b, c, d, t \in IR \wedge t \in [0; 365]$ wird nun modellhaft zur Darstellung der Aufzeichnungen verwendet, t beschreibt dabei die Anzahl der vergangenen Tage seit dem 1.1.2016 und der Funktionswert von g die Länge des dazugehörigen Tages in Stunden. Da sich die jeweilige Tageslänge immer auf ganze Tage bezieht, sollen Werte für t auf ganze Zahlen gerundet werden.

Auf das Mitführen der Einheiten wird verzichtet.

a) Bestimmen Sie mögliche Werte der Parameter a, b, d exakt und c sinnvoll gerundet so, dass die Funktion g die obigen Bedingungen erfüllt.

b) Ermitteln Sie für 2016 die Tage, an denen die Tageslänge in München 12 h betrug.

c) Ermitteln Sie den kürzesten Tag des Jahres 2016 in München.

Zielsetzung Übung

Voraussetzung Aufstellen von Funktionstermen; Differenzialrechnung

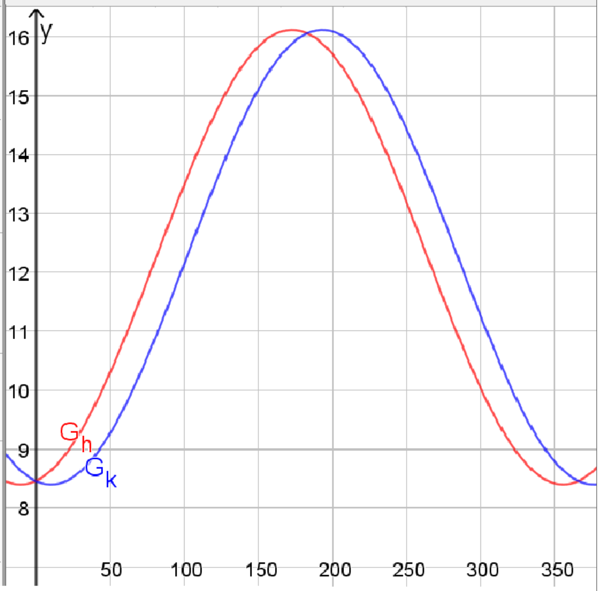
Hinweise zur Bearbeitung

Zu a)

Zeilen 1 - 6: Das CAS liefert zwei gültige Lösungen für c, welche die Bedingung $g(0) = 8{,}46$ erfüllen. Allerdings ergibt nur der Wert 4,89 für c den Tag mit minimaler Tageslänge gegen Ende und nicht zu Beginn des Kalenderjahrs.

	CAS
1	a:=(16.12-8.4)/2 $\rightarrow\ a := \frac{193}{50}$
2	b:=2*pi/366 $\rightarrow\ b := \frac{1}{183}\,\pi$
3	f(t,c):=a*sin(b*t+c)+(8.4+a) $\rightarrow\ f(t,c) := \frac{193}{50}\sin\left(\frac{1}{183}\,t\,\pi+c\right)+\frac{613}{50}$
4	Numerisch(Löse(f(0, c)=8.46)) $\rightarrow\ \{c = 6.28\,k_2 - 1.39,\ c = 6.28\,k_2 + 4.54\}$
5	h(t):=f(t, 6.28-1.39) $\rightarrow\ h(t) := \frac{193}{50}\sin\left(\frac{1}{183}\,t\,\pi+\frac{489}{100}\right)+\frac{613}{50}$
6	k(t):=f(t, 6.28+4.54) $\rightarrow\ k(t) := \frac{193}{50}\sin\left(\frac{1}{183}\,t\,\pi+\frac{541}{50}\right)+\frac{613}{50}$

Grafik



Zu b)

Zeile 2: Lösen des Problems mittels Gleichsetzen. Zur Vereinfachung ist die Funktion h in Zeile 1 nochmals dargestellt.

Zu c)

Zeile 3: Analog zu Zeile 2 verwenden die Schülerinnen und Schüler die minimale Tageslänge aus der Angabe, um den kürzesten Tag zu bestimmen. Das CAS liefert den Wert $366 - 10{,}35 = 355{,}65$ Tage, welches noch nicht auf eine ganze Zahl gerundet ist.

Zeilen 4 - 6: Alternativ sollen die Schülerinnen und Schüler auch die Werkzeuge der Kurvendiskussion anwenden können, um den kürzesten Tag zu bestimmen. Als Startpunkt liefert die notwendige Bedingung in Zeile 4 die beiden noch nicht gerundeten Ergebnisse von 172,65 Tage und von 355,65 Tage. Die Schülerinnen und Schüler identifizieren dann den absolut kürzesten Tag mittels der Lage der Randpunkte (hier nicht weiter dargestellt!) bzw. anhand des Vorzeichens der Funktionswerte der 2. Ableitungsfunktion (Zeile 5 und 6).

1	h(t):=3.86*sin(pi*t/183 +4.89)+12.26 $\rightarrow\ h(t) := \frac{193}{50}\sin\left(\frac{1}{183}\,t\,\pi+\frac{489}{100}\right)+\frac{613}{50}$
2	Numerisch(Löse(h(t)=12, t)) $\rightarrow\ \{t = 366\,k_3 - 288.77,\ t = 366\,k_3 - 97.92\}$
3	Numerisch(Löse(h(t)=8.4, t)) $\rightarrow\ \{t = 366\,k_3 - 376.35,\ t = 366\,k_3 - 10.35\}$
4	Numerisch(Löse(h'(t)=0, t)) $\rightarrow\ \{t = 183\,k_3 - 193.35\}$
5	Numerisch(h''(355.65),2) $\rightarrow\ 0.0011$
6	Numerisch(h''(172.65), 2) $\rightarrow\ -0.0011$

Aufgabe 5: Atemstromstärke – nach Abiturprüfung Bayern Gymnasium 2015, Analysis B Aufgabengruppe 2

In der Lungenfunktionsdiagnostik spielt der Begriff der Atemstromstärke eine wichtige Rolle. Im Folgenden wird die Atemstromstärke als die momentane Änderungsrate des Luftvolumens m der Lunge betrachtet und festgelegt, dass der Wert der Atemstromstärke beim Einatmen positiv ist. Für eine ruhende Testperson mit normalem Atemrhythmus wird die Atemstromstärke in Abhängigkeit von der Zeit durch die Funktion $g: t \mapsto -\frac{\pi}{8} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right)$, mit $t \geq 0$ modellhaft beschrieben. Dabei ist t die seit Beobachtungsbeginn vergangene Zeit in Sekunden und g(t) die Atemstromstärke in Litern pro Sekunde.

a) Berechnen Sie g(1,5) und nennen Sie die Bedeutung des Vorzeichens dieses Werts im Sachzusammenhang.

b) Beim Atmen ändert sich das Luftvolumen in der Lunge. Geben Sie auf der Grundlage des Modells einen Zeitpunkt an, zu dem das Luftvolumen in der Lunge der Testperson minimal ist.

c) Berechnen Sie $\int_{2,0}^{4,0} g(t)dt$ und deuten Sie das bestimmte Integral im Sachzusammenhang.

d) Zu Beginn eines Ausatemvorgangs befinden sich 3,5 Liter Luft in der Lunge der Testperson. Skizzieren Sie auf der Grundlage des Modells unter Berücksichtigung des Ergebnisses aus Aufgabe c) in einem Koordinatensystem für $0 \leq t \leq 8{,}0$ den Graphen einer Funktion, die den zeitlichen Verlauf des Luftvolumens in der Lunge der Testperson beschreibt.

e) Die Testperson benötigt für einen vollständigen Atemzyklus 4,0 Sekunden. Die Anzahl der Atemzyklen pro Minute wird als Atemfrequenz bezeichnet.

Geben Sie zunächst die Atemfrequenz der Testperson an. Die Atemstromstärke eines jüngeren Menschen, dessen Atemfrequenz um 20 % höher ist als die der bisher betrachteten Testperson, soll durch eine Sinusfunktion der Form $h: t \mapsto a \cdot \sin(b \cdot t)$ mit $t \geq 0$ und $b > 0$ beschrieben werden. Ermitteln Sie den Wert von b.

Zielsetzung Übung

Voraussetzung Eigenschaften der Sinusfunktion; Integralfunktion (Grundlagen)

Hinweise zur Bearbeitung

Zu a)

Zeilen 1 - 3: Bei Bedarf kann der gerundete Wert in Zeile 3 ausgegeben werden, um das Ergebnis in der grafischen Darstellung leichter nachzuvollziehen. Die Schülerinnen und Schüler erkennen, dass ausgeatmet wird.

1	g(t) := (-1) / 8 π sin(1 / 2 t π) → $g(t) := -\frac{1}{8}\pi \sin\left(\frac{1}{2} t \pi\right)$
2	g(1.5) → $-\frac{1}{16}\sqrt{2}\,\pi$
3	Numerisch($2,3) → -0.278

Zu b)

Beim Wechsel vom Aus- zum Einatmen, also beispielsweise bei 2,0 s bzw. 6,0 s, ist das Luftvolumen minimal.

Zu c)

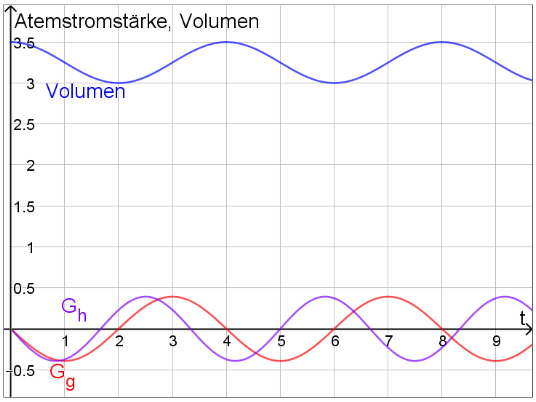
Zeilen 4 - 5: Die Stammfunktion in Zeile 4 gibt den Schülerinnen und Schülern die Möglichkeit, ihr händisches Rechenergebnis zu verifizieren.

Zu d) und e)

Zeile 6: Der Funktionsterm für den zeitlichen Verlauf des Lungenvolumens ist nicht verlangt. Nur die Skizze einer periodischen Funktion durch die Punkte (0|3,5), (2|3), (4|3,5) usw. muss von den Schülerinnen und Schülern angefertigt werden.

Zeile 7: Der Graph von h verdeutlicht die Auswirkung der Erhöhung der Atemfrequenz für $b = 0{,}6\pi$.

4	Integral(g(t), t) $\rightarrow \frac{1}{4}\cos\left(\frac{1}{2}\, t\, \pi\right) + c_1$
5	Integral(g(t), t, 2, 4) $\rightarrow \frac{1}{2}$
6	vol(t):=3.5+Integral(g(x), x, 0, t) $\rightarrow \mathrm{vol}(t) := \frac{1}{4}\cos\left(\frac{1}{2}\, t\, \pi\right) + \frac{13}{4}$
7	h(t) := (-1) / 8 π sin(3 / 5 t π) $\rightarrow h(t) := -\frac{1}{8}\,\pi\,\sin\left(\frac{3}{5}\, t\, \pi\right)$



Weitere Aufgaben zu dieser Thematik findet man in der Handreichung [HR CAS Gym 11-12].

2.8 Gebrochen-rationale Funktionen

Bei der Bearbeitung von Aufgaben mit gebrochen-rationalen Funktionen wird ebenfalls deutlich, dass CAS den Rechenaufwand zwar minimieren, das Aufstellen geeigneter Ansätze zur Berechnung sowie Argumentationen und/oder Interpretationen im Sachzusammenhang jedoch im Wesentlichen von den Schülerinnen und Schülern erbracht und auch entsprechend dokumentiert werden müssen.

Im Zusammenhang mit den beschriebenen Vorschlägen zur Unterrichtsgestaltung kommen insbesondere folgende CAS-Grundfertigkeiten zur Anwendung:

- CAS als herkömmlichen Taschenrechner verwenden
- Term definieren
- Term faktorisieren
- Termwert berechnen
- Gleichung lösen
- Grenzwert berechnen
- Graph zeichnen, geeigneten Anzeigebereich wählen
- Term einer Ableitungsfunktion bestimmen
- Gleichung einer Asymptoten bestimmen
- Tangentengleichung bestimmen

Grundlegende CAS-Befehle

Asymptoten

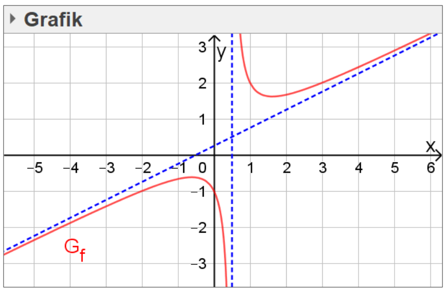
Der Befehl *Division* umfasst in der Regel auch die Möglichkeit zur Division von Polynomen.

Zeile 3: Manche CAS stellen auch einen eigenen Befehl zur Bestimmung der Gleichungen der Asymptoten eines Funktionsgraphen bereit.
Zur Visualisierung von Asymptoten ist beim hier verwendeten CAS noch die Aktivierung des Buttons auf der linken Seite (blau) notwendig.

Grenzwerte

Zeilen 4 - 5: Verhalten im Unendlichen

Zeilen 6 - 7: Verhalten an der Definitionslücke



1	f(x) := (x² + 1) / (2x - 1) $\rightarrow f(x) := \frac{x^2+1}{2x-1}$
2	Division(1+x^2, 2*x-1) $\rightarrow \left\{\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}, \frac{5}{4}\right\}$
3	l1:=Asymptote(f(x)) $\rightarrow l1 := \{y = 0.5x + 0.25, x = 0.5\}$
4	Grenzwert(f(x), +∞) $\rightarrow \infty$
5	Grenzwert(f(x), -∞) $\rightarrow -\infty$
6	RechtsseitigerGrenzwert(f(x),0.5) $\rightarrow \infty$
7	LinksseitigerGrenzwert(f(x), 0.5) $\rightarrow -\infty$

Vorschläge zur Unterrichtsgestaltung

Aufgabe 1: Optimierungsproblem – nach Fachabiturprüfung Bayern 2004, Technik A II

Die Abmessungen einer oben offenen zylinderförmigen Tonne sollen so gewählt werden, dass bei festem Volumen V der Tonne der Materialverbrauch zur Herstellung der Tonne möglichst gering ist. Die Dicke des Materials ist vorgegeben und wird bei der Rechnung nicht berücksichtigt. Der Radius der kreisförmigen Grundfläche wird mit r, die Höhe der Tonne mit h bezeichnet.

a) Ermitteln Sie die Formel zur Berechnung des Flächeninhalts der äußeren Oberfläche bei gegebenen Radius des Zylinders und geben Sie eine sinnvolle Definitionsmenge der Funktion O an, welche einem Zylinderradius den entsprechenden Flächeninhalt der äußeren Oberfläche der Tonne mit diesem Radius zuordnet.

b) Bestimmen Sie den Radius r_0 so, dass der zugehörige Flächeninhalt $O(r_0)$ der Oberfläche das absolute Minimum annimmt.

Zielsetzung Übung

Voraussetzung gebrochen-rationale Funktionen, Grundlagen der Differenzialrechnung

Anmerkung Varianten dieser Prüfungsaufgabe findet man z. B. in [HR CAS Gym 11-12].

Hinweise zur Bearbeitung

Zu a)

Zeilen 1 - 2: Ausgehend vom Volumen (Betrag |V|) des Zylinders ermitteln die Schülerinnen und Schüler den Flächeninhalt der äußeren Oberfläche des Körpers in Abhängigkeit von r und V. Für die Definitionsmenge von O gilt: $D_O =]0;\infty[$

Zu b)

Zeilen 3 - 7: Ermittlung von r_0

Zeile 4: Die erste Ableitung besitzt eine Nullstelle mit Vorzeichenwechsel von „–“ nach „+“.

Zeilen 5 – 7: Alternativ wurde das Verhalten der Funktionswerte von O an den Rändern der Definitionsmenge untersucht. Das hier verwendete CAS vereinfacht den Term in Zeile 5 nicht weiter.

1	h(r):=abs(V)/(pi*r^2) $\rightarrow\ h(r) := \frac{\lvert V\rvert}{r^2\,\pi}$
2	O(r):=pi*r^2+2*pi*r*h(r) $\rightarrow\ O(r) := \frac{r^3\,\pi + 2\,\lvert V\rvert}{r}$
3	Löse(Ableitung(O(r), r)=0, r) $\rightarrow\ \left\{ r = \frac{\sqrt[3]{\pi^2\,\lvert V\rvert}}{\pi} \right\}$
4	Faktorisiere(Ableitung(O(r), r), r) $\rightarrow\ 2 \cdot \frac{r^3\,\pi - \lvert V\rvert}{r^2}$

5	O(RechteSeite($3)) $\rightarrow\ \left\{ \frac{\sqrt[3]{\pi^2\,\lvert V\rvert}^{\,3} + 2\,\pi^2\,\lvert V\rvert}{\pi\,\sqrt[3]{\pi^2\,\lvert V\rvert}} \right\}$
6	Grenzwert(O(r), ∞) $\rightarrow\ \infty$
7	RechtsseitigerGrenzwert(O(r), r, 0) $\rightarrow\ \infty$

Aufgabe 2: Schaukasten – nach Fachabiturprüfung Bayern 2011, Technik A II

Mithilfe einer Konvexlinse (Sammellinse) wird von einem selbstleuchtenden, links von der Linse stehenden Gegenstand auf einem Schirm rechts von der Linse ein reales, scharfes Bild erzeugt. Der Abstand des Gegenstands von der Linsenmitte heißt dabei Gegenstandsweite g, der Abstand des Schirms von der Linsenmitte heißt Bildweite b. Der Zusammenhang zwischen diesen Größen ist durch die Linsenformel $\frac{1}{g}+\frac{1}{b}=\frac{1}{f}$ gegeben, wobei f die Brennweite der Linse bezeichnet. Um ein reales Bild zu erzeugen, muss die Gegenstandsweite größer als die Brennweite sein.

Dieser Versuchsaufbau soll in einem Schaukasten einer Schule gezeigt werden. Die Brennweite der verwendeten Linse beträgt $f=50\,\text{mm}$. Die Einheiten brauchen nicht mitgeführt werden.

a) Zeigen Sie, dass für den gesamten Platzbedarf $a(g)=g+b(g)$ des Versuchsaufbaus in Abhängigkeit von der Gegenstandsweite g folgender Zusammenhang besteht: $a(g)=\frac{g^2}{g-50}$.

b) Bestimmen Sie eine geeignete Definitionsmenge D_a der mit obigem Zusammenhang festgelegten Funktion a, wenn der zur Verfügung stehende Platz für den Versuchsaufbau durch die Länge des Schaukastens mit $3000\,\text{mm}$ begrenzt ist.

c) Beweisen Sie, dass es eine Gegenstandsweite gibt, für die der Platzbedarf des Versuchsaufbaus minimal wird. Berechnen Sie sodann den minimalen Platzbedarf und ermitteln Sie, welcher besondere Zusammenhang zwischen g und b besteht.

Zielsetzung Übung

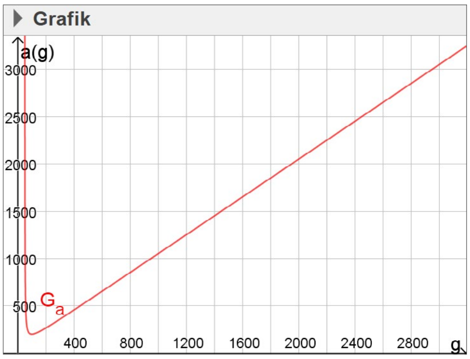
Voraussetzung gebrochen-rationale Funktionen, Grundlagen der Differenzialrechnung

Hinweise zur Bearbeitung

Zu a)

Zeilen 1 - 3: Der Platzbedarf für den Versuchsaufbau wird bestimmt.

1	Löse(1/g + 1/b = 1/50, b) $\rightarrow \left\{b = 50 \cdot \frac{g}{g-50}\right\}$
2	g + RechteSeite($1) $\rightarrow \left\{\frac{g^2}{g-50}\right\}$
3	a(g) := g² / (g - 50) $\rightarrow a(g) := \frac{g^2}{g-50}$



Zu b)

Zeilen 4 und 5: Die Schülerinnen und Schüler sollten die Grenzen bei der Angabe der Definitionsmenge ausschließen.

4	Löse(0<a(g)<3000, g) $\rightarrow \left\{-100\sqrt{210}+1500 \le g < 100\sqrt{210}+1500\right\}$
5	Numerisch($4) $\rightarrow \{50.86 \le g < 2949.14\}$

Zu c)

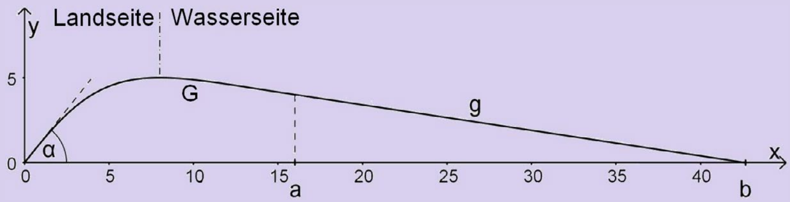
Zeile 6: Die Schülerinnen und Schüler erkennen, dass die erste Ableitungsfunktion von g eine Nullstelle mit Vorzeichenwechsel von „–" nach „+" an der Stelle x = 100 besitzt.

Zeile 7: Da der zugehörige Platzbedarf 200 beträgt, folgern die Schülerinnen und Schüler, dass die Linse in diesem Fall genau zwischen Gegenstand und Bildschirm stehen muss.

6	Faktorisiere(Ableitung(a(g), g), g) $\rightarrow g\ \dfrac{g-100}{(g-50)^2}$
7	a(100) $\rightarrow 200$

Aufgabe 3: Deich – nach Abiturprüfung Bayern Gymnasium 2018, Prüfungsteil B (CAS), Aufgabengruppe 1

Die folgende Abbildung zeigt modellhaft den Querschnitt eines geradlinig verlaufenden Deichs. Die Profillinie des Querschnitts wird für $0 \le x < a$ durch den Graphen der Funktion f und für $a \le x \le b$ durch eine Gerade g beschrieben. Die x-Achse beschreibt im Intervall [0; b] den unteren Abschluss des Querschnitts. Eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht einem Meter in der Realität.

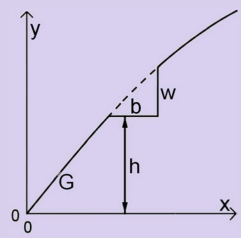


a) Auf der Landseite am Fuß des Deichs darf der Böschungswinkel α (vgl. oben) maximal 60° betragen. Untersuchen Sie, ob das bei dem vorliegenden Profil der Fall ist.

Der Graph der Funktion f geht an der Stelle x = a ohne Knick in die Gerade g über, die eine Steigung von 15 % gegenüber der Horizontalen besitzt. Dabei gilt a > 15.

b) Bestimmen Sie eine Gleichung der Geraden g.

Auf der Landseite soll ein Teil des Deichs entfernt werden, um einen horizontalen Behelfsweg auf der Höhe h mit der Breite b zu bauen. Dabei entsteht eine vertikale Wand mit der Wandhöhe w (vgl. nebenstehende Abbildung).



c) Berechnen Sie die Wandhöhe w, wenn der Behelfsweg in einer Höhe von h = 2,50 m verlaufen und 1,0 m breit sein soll.

d) Beschreiben Sie, wie man allgemein die Wegbreite b rechnerisch bestimmen kann, wenn die Höhe h und die Wandhöhe w gegeben sind.

Zielsetzung Übung (Einordnen des eigenen Lernstands)

Voraussetzung gebrochen-rationale Funktionen, abschnittsweise definierte Funktionen, Grundlagen der Differenzialrechnung

Hinweise zur Bearbeitung

Zu a)

Zeilen 1 - 5: Um Aufgabe a) zu lösen, ist die Faktorisierung des Terms der 1. Ableitungsfunktion von f (in Zeile 3) nicht notwendig. Diese Umformung wird erst in Teilaufgabe c) ausgenutzt. Die Schülerinnen und Schüler erkennen, dass die Steigung von G_f im Ursprung kleiner als $\sqrt{3}$ ist.

Zu b)

Zeilen 6 - 7: Von den vier Lösungen in Zeile 6 ist nur die Lösung x = 16 größer 15 und erfüllt somit die in der Aufgabe gestellte Bedingung.

1	f(x) := 80x / (x² + 64) $\rightarrow\ f(x) := 80 \cdot \frac{x}{x^2+64}$
2	f'(x):=Ableitung(f(x), x) $\rightarrow\ f'(x) := -160 \cdot \frac{x^2}{(x^2+64)^2} + \frac{80}{x^2+64}$
3	Faktorisiere(f'(x), x) $\rightarrow\ -80\,(x-8)\,\frac{x+8}{(x^2+64)^2}$
4	f'(0) $\rightarrow\ \frac{5}{4}$
5	tan(60°) $\rightarrow\ \sqrt{3}$
6	Löse(f'(x)=-0.15, x) $\rightarrow\ \left\{x = -16, x = -8 \cdot \frac{\sqrt{21}}{3}, x = 8 \cdot \frac{\sqrt{21}}{3}, x = 16\right\}$
7	g(x):=Wenn(x>=16, Tangente(16, f(x))) $\rightarrow\ g(x) := \text{Wenn}\left(x \geq 16, -\frac{3}{20}\,x + \frac{32}{5}\right)$

Zu c)

Die nicht allgemeine Bestimmung der Wandhöhe w dient als Einstieg und bereitet die Teilaufgabe d) vor.

Die Bedingung in Zeile 10 beschränkt die Lösung auf die sog. „Landseite“. Die obere Schranke können die Schülerinnen und Schüler der Faktorisierung der Ableitungsfunktion in Zeile 3 entnehmen.

8	b:=1 $\rightarrow\ b := 1$
9	h:=2.5 $\rightarrow\ h := \frac{5}{2}$
10	Löse(f(x)=h, x,0<=x<8) $\rightarrow\ \left\{x = -8\,\sqrt{3} + 16\right\}$
11	f(RechteSeite($10) + b) - h $\rightarrow\ \left\{\frac{1}{150146}\left(42240\,\sqrt{3} + 62555\right)\right\}$
12	Numerisch($11) $\rightarrow\ \{0.9\}$

Zu d)

Zeilen 1 - 4: allgemeine Bestimmung von b

Zur Vereinfachung ist die Funktion f in Zeile 1 nochmals dargestellt. Die Schülerinnen und Schüler sollen erkennen, dass nicht alle positiven Werte für h bzw. w erlaubt sind, da ansonsten ein oder mehrere Radikanden negative Werte haben können. In Zeile 4 erhält man den allgemeinen Ausdruck für die Breite b des Wegs mittels der linken und der rechten Weggrenze aus den beiden Zeilen 2 und 3.

Zeile 5: Durch Probieren werden die Schülerinnen und Schüler im Umgang mit der Thematik sicherer. Beispielsweise wird das Ergebnis von Teilaufgabe c) bestätigt.

1	f(x):=80*x/(64+x^2) $\rightarrow\ f(x) := 80 \cdot \frac{x}{x^2+64}$
2	Löse(f(x)=abs(h), x) $\rightarrow \left\{ x = \frac{8\sqrt{-h^2+25}+40}{\lvert h\rvert}, x = \frac{-8\sqrt{-h^2+25}+40}{\lvert h\rvert} \right\}$
3	Löse(f(x)=abs(h)+abs(w),x) $\rightarrow \left\{ x = \frac{8\sqrt{-h^2-w^2-2\lvert h\rvert\lvert w\rvert+25}+40}{\lvert h\rvert+\lvert w\rvert}, x = \frac{-8\sqrt{-h^2-w^2-2\lvert h\rvert\lvert w\rvert+25}+40}{\lvert h\rvert+\lvert w\rvert} \right\}$
4	RechteSeite(Element($3,2)) - RechteSeite(Element($2,2)) $\rightarrow -\frac{\left(-8\sqrt{-h^2+25}+40\right)}{\lvert h\rvert} + \frac{-8\sqrt{-h^2-w^2-2\lvert h\rvert\lvert w\rvert+25}+40}{\lvert h\rvert+\lvert w\rvert}$
5	Numerisch(Ersetze($4,{h, w},{2.5, 0.9})) $\rightarrow 1$

3 Einsatz von CAS im Themengebiet Analytische Geometrie

Die folgenden Vorschläge zur Gestaltung des Unterrichts zeigen exemplarisch, an welchen Stellen und zu welchem Zweck ein CAS gewinnbringend im Themengebiet Analytische Geometrie eingesetzt werden kann bzw. die Lehrkräfte bei der Entwicklung von eigenen Unterrichtsideen unterstützen kann. Auch hier wird auf das vielfältige Angebot von Aufgaben und Beispielen in der Literatur verwiesen.

3.1 Schnelleinstieg in das Themengebiet – Wichtige grundlegende Befehle

Punkte und Vektoren

Punkte werden durch ihre Ortsvektoren festgelegt. Sie werden als einzeilige Matrix eingegeben.

Vektoren werden ebenfalls als einzeilige Matrix eingegeben.

Zeile 3: Ein Vektor zwischen zwei Punkten wird als „Differenz der beiden Punkte“ (Ortsvektoren) festgelegt.

1 A:=(-1,-3,2)
→ $A := (-1, -3, 2)$

2 B:=(2,4,1)
→ $B := (2, 4, 1)$

3 v:=B-A
→ $v := \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix}$

Betrag (Länge) von Vektoren

Der Betrag eines Vektors lässt sich mit dem Befehl *Länge* bestimmen.

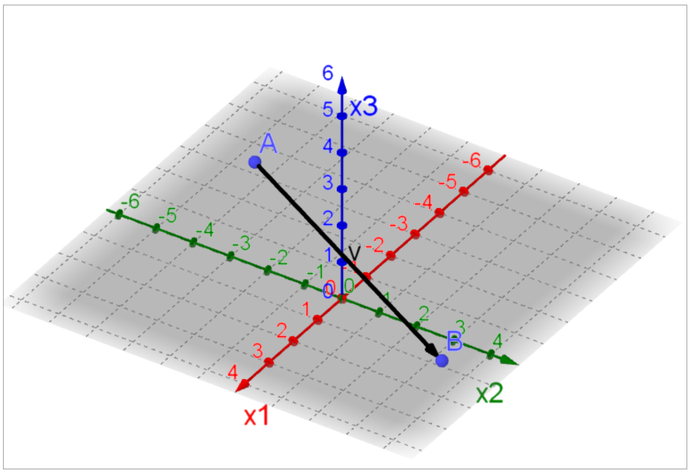
4 Länge(v)
→ $\sqrt{59}$

Räumliche Darstellung: 3D-Grafik

Durch Aktivieren der Ansicht *3D-Grafik* werden die definierten Objekte 3-dimensional dargestellt.

Die Ansicht im 3D-Fenster kann komfortabel mithilfe der Maus beliebig verändert werden. Auf diese Weise ist es möglich, die gegenseitige Lage verschiedener Objekte zu erforschen bzw. aussagekräftig darzustellen.

Im 3D-Fenster können außerdem weitere Optionen zur Darstellung der dreidimensionalen Objekte ausgewählt werden, z. B.:



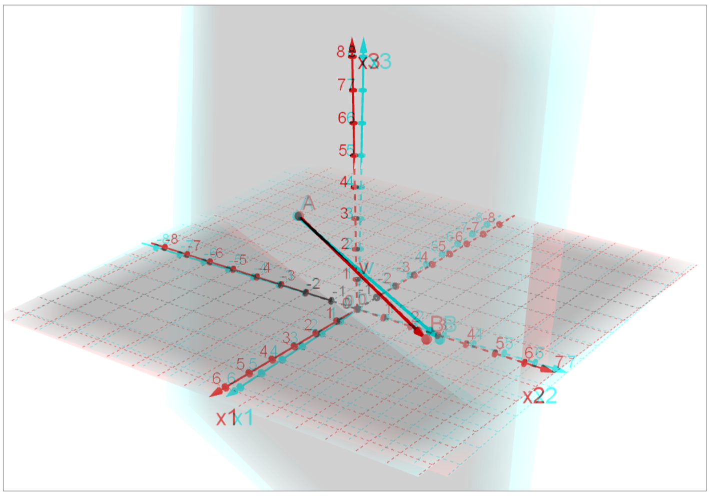
Drehen der Ansicht starten/stoppen: Hier wird die 3D-Grafik-Ansicht automatisch verändert. Die Drehrichtung und die Drehgeschwindigkeit kann festgelegt werden.

Blickrichtung einstellen: Damit kann zwischen den Ansichten in Richtung der x-y-Ebene, der x-z-Ebene und der y-z-Ebene gewechselt werden und mit wird die Ansicht in Standardblickrichtung wiederhergestellt.

Projektion für 3D-Brille

Mit der Projektion für 3D-Brillen kann das 3D-Fenster in ein Rot-Cyan-Bild verändert werden. Betrachtet man dieses mithilfe einer handelsüblichen Rot-Cyan-Brille, so entsteht vor dem Auge des Betrachters eine plastische dreidimensionale Darstellung.

Speziell diese Darstellung kann im Unterricht veranschaulichend und motivationssteigernd wirken.



Produkte von Vektoren

S-Multiplikation:

Berechnung der Koordinaten des Mittelpunkts einer Strecke

4 M:=0.5* (A + B)
→ $M := \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$

Skalarprodukt:

Berechnung des Skalarprodukts zwischen zwei Vektoren und Berechnung des Winkels zwischen zwei Vektoren

5 Skalarprodukt(v, (-3,2,5))
→ **0**

6 Winkel(v, (-3,2,5))
→ $\frac{1}{2}\pi$

Äußeres Vektorprodukt – Kreuzprodukt:

Berechnung des Flächeninhalts der Dreiecksfläche

7 Fläche:=0.5*Länge(Kreuzprodukt((1,1,1),(2,1,-2),(3,-3,3)))
→ **Fläche := 2.55**

Vektorgleichung

Gleichungen mit Vektoren sind im CAS komfortabel zu lösen, da sie als Vektorgleichungen eingegeben werden können, z. B.:

$$r\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\6\\6\end{pmatrix}\quad \text{mit } r,s,t\in\mathbb{R}$$

8 Löse(r*(0,0,2)+s*(0,1,0)+t*(3,0,0)=(6,6,6),{r,s,t})
→ $\{\{r = 3, s = 6, t = 2\}\}$

Geraden

Die Gerade g ist durch die Punkte A und B festgelegt:

$A(-1|-3|2)$ und $B(2|4|1)$

So hat g folgende Gleichung:

$g: \vec{x} = \overrightarrow{OA} + \lambda \cdot \overrightarrow{AB}$ mit $\lambda \in R$

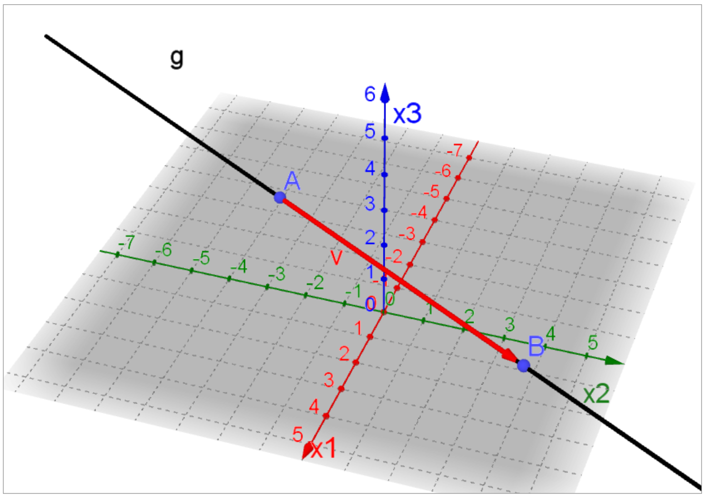
$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Zeilen 1 - 2: Eingabe der Punkte als Ortsvektoren

Zeile 3: Berechnung des Richtungsvektors

Zeile 4 - 5: Definition der Geraden für die 3D-Ansicht

1	A:=(-1,-3,2) → $A := (-1, -3, 2)$
2	B:=(2,4,1) → $B := (2, 4, 1)$
3	v:=B-A → $v := \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix}$
4	Gerade(A,v) → $X = (-1, -3, 2) + \lambda\,(3, 7, -1)$
5	g(λ):=A+λ*v → $g(\lambda) := (3\lambda - 1, 7\lambda - 3, -\lambda + 2)$



Lagebeziehungen zweier Geraden

Zeilen 1 - 6: Bestimmung der Koordinaten des Schnittpunkts zweier Geraden (durch Lösen des zugehörigen Gleichungssystems) sowie spitzen Schnittwinkels

1	g(λ):=(1,0,2)+λ*(-1,2,7) √ $g(\lambda) := (1, 0, 2) + \lambda\,(-1, 2, 7)$
2	h(μ):=(-2,2,-15)+μ*(1,0,12) √ $h(\mu) := (-2, 2, -15) + \mu\,(1, 0, 12)$
3	Löse[g(λ)=h(μ),{λ,μ}] → $\{\{\lambda = 1, \mu = 2\}\}$
4	g(1) → $(0, 2, 9)$
5	Winkel[(-1,2,7), (1,0,12)] ≈ 0.35
6	$5 / (2π) 360 ≈ 20.28

Ebenen

Im folgenden Beispiel ist die Ebene E durch die Punkte A, B und C festgelegt:

$A(1|3|5)$, $B(1|1|0)$ und $C(-2|0|3)$

Damit ergibt sich folgende Gleichung für die Ebene E:

$$E: \vec{x} = \overrightarrow{OA} + \lambda \cdot \overrightarrow{AB} + \mu \cdot \overrightarrow{AC} \quad \text{mit } \lambda, \mu \in R$$

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und entsprechend in Normalenform:

$$E: \overrightarrow{n_E} \cdot \left(\vec{x} - \overrightarrow{OA}\right) = 0 \quad \text{bzw.}$$

$$E: \left(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right) \cdot \left(\vec{x} - \overrightarrow{OA}\right) = 0$$

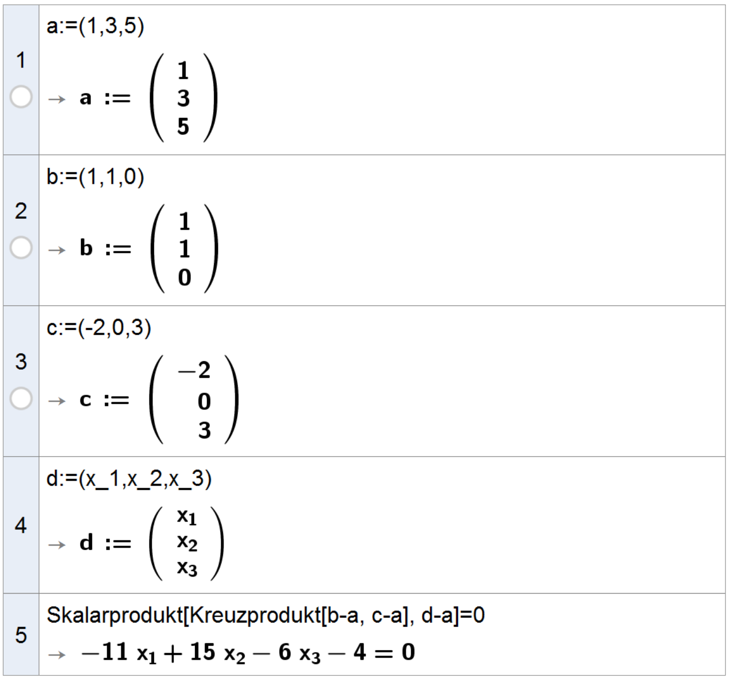
Zeilen 1 - 3: Eingabe der Ortsvektoren

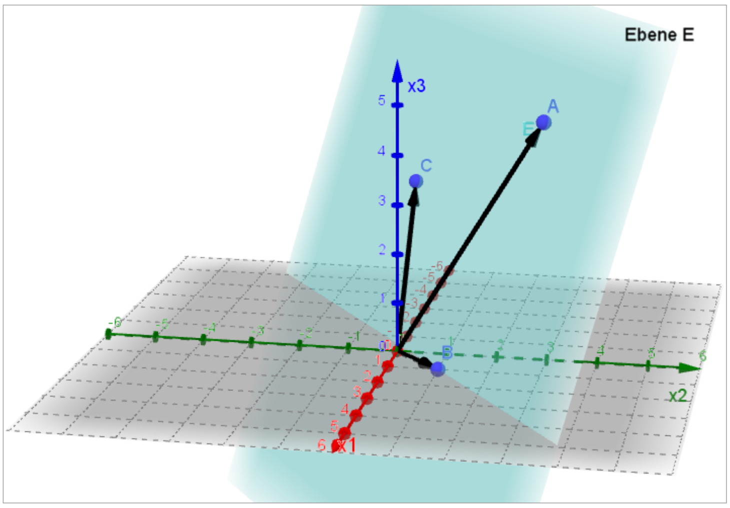
Zeile 4: Eingabe des Ortsvektors von $D(x_1|x_2|x_3)$

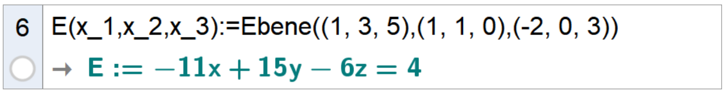
Zeile 5: Koordinatenform der Ebenengleichung berechnen

Zeile 6: Die Ebenengleichung kann vom CAS auch über den Befehl *Ebene* berechnet werden. Hierbei ist zu beachten, dass das CAS die Ebenengleichung mit den Variablen x, y und z ausgibt.

Die hier definierte Ebene E kann samt Aufpunkt und Richtungsvektoren in der 3D-Ansicht betrachtet werden. Den Schülerinnen und Schülern kann damit ein weiterer Zugang zur Vorstellung eines dreidimensionalen Objekts angeboten werden.





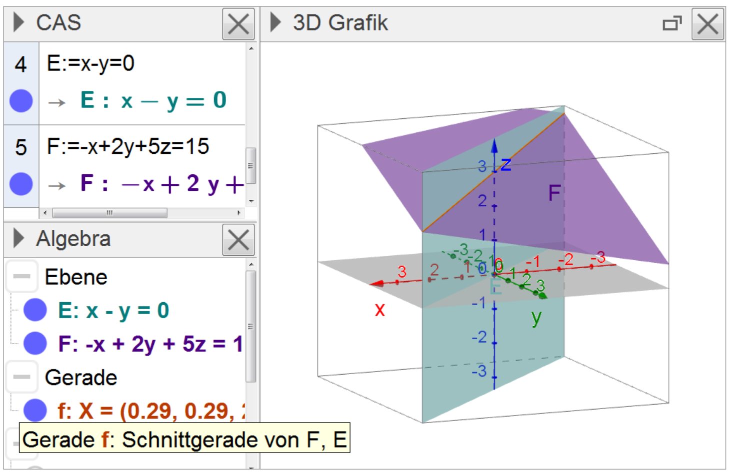


Lagebeziehungen von Ebenen

Lagebeziehungen können im 3D-Grafikfenster unmittelbar visualisiert werden.

Mithilfe des in der Werkzeugleiste zur Verfügung stehenden Geometriewerkzeugs „Schneide zwei Flächen" lässt sich in wenigen Schritten (Anklicken der beiden Ebenen) die Schnittgerade der beiden Ebenen ermitteln, deren Gleichung (näherungsweise) unmittelbar im Algebra-Fenster angezeigt wird:

f: x = (0.29, 0.29, 0.29) + λ (5, 5, -1)



3.2 Vektoren im IR^2 und im IR^3

Vorschläge zur Unterrichtsgestaltung

Durch den Einsatz eines CAS wird die Festigung des räumlichen Vorstellungsvermögens und die Entwicklung der Vorstellung von Lagebeziehungen im Raum gefördert.

Im Zusammenhang mit den beschriebenen Vorschlägen zur Unterrichtsgestaltung kommen insbesondere folgende CAS-Grundfertigkeiten zur Anwendung:

- Punkt definieren
- Vektor definieren
- Vektorkette aufstellen
- Skalarprodukt berechnen
- Vektorprodukt berechnen
- Betrag eines Vektors berechnen
- Maß des Winkels zwischen zwei Vektoren bestimmen

Aufgabe 1: Pyramide – nach Fachabiturprüfung Bayern 2018, Technik B II

Ein Hotel wurde in Form einer vierseitigen Pyramide mit gläsernen Seitenflächen gebaut. In einem kartesischen Koordinatensystem des $\mathbb{R}^3$ stellen die Punkte $A(2|1|3)$, $B(2|31|3)$, $C(-28|31|3)$ und $D(-28|1|3)$ die Eckpunkte der Grundfläche und der Punkt $S(-13|16|30)$ die Spitze der Pyramide dar.

a) Zeigen Sie, dass die Grundfläche $ABCD$ des Hotels quadratisch ist.

b) Ermitteln Sie das Maß des Winkels zwischen einer Diagonalen der Grundfläche und einer Außenkante der Pyramide.

Zielsetzung Übung

Voraussetzung Länge eines Vektors, Skalarprodukt, Winkel zwischen zwei Vektoren

Hinweise zur Bearbeitung

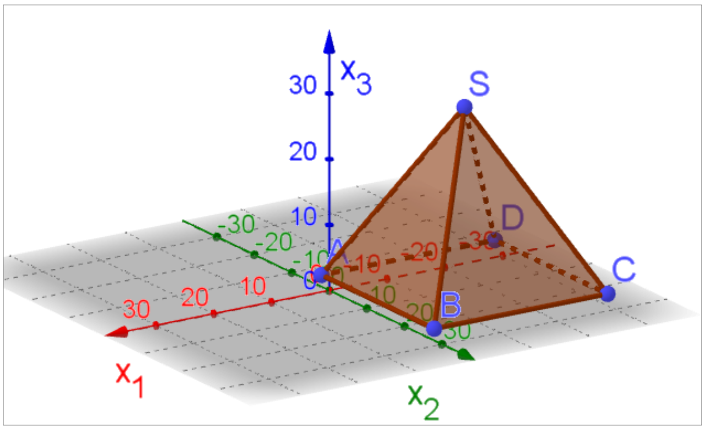
Zu a)

Zeilen 1 - 5: Eingabe der Koordinaten der Punkte

Zeilen 6 - 7: Prüfung auf Längengleichheit

Zeile 8:. Berechnung einer Winkelmaßzahl mit dem Befehl *Winkel*. Das Ergebnis wird im Bogenmaß ausgegeben.

Zeilen 9 - 10: Prüfung auf Orthogonalität mithilfe des Skalarprodukts



1	A:=(2,1,3)
	→ $A := (2, 1, 3)$
2	B:=(2,31,3)
	→ $B := (2, 31, 3)$
3	C := (-28 | 31 | 3)
	→ $C := (-28, 31, 3)$
4	D := (-28 | 1 | 3)
	→ $D := (-28, 1, 3)$
5	S := (-13 | 16 | 30)
	→ $S := (-13, 16, 30)$
6	Länge(B-A)
	→ 30
7	Länge(C-B)
	→ 30
8	Winkel(B-A,C-B)
	→ $\frac{1}{2}\pi$
9	Skalarprodukt(B-A, C-B)
	→ 0
10	Skalarprodukt(A-D, C-D)
	→ 0

Zu b)

Zeile 11: Berechnung der gesuchten Winkelmaßzahl

Zeile 12: Berechnung eines Näherungswerts für das Maß des Winkels im Bogenmaß

Zeile 13: Umrechnung in das Gradmaß

11	Winkel(C-A,S-A)
	→ $\cos^{-1}\left(5 \cdot \frac{\sqrt{262}}{131}\right)$
12	Numerisch($11)
	→ 0.9
13	Numerisch($12 * 180 / π)
	→ 51.84

Aufgabe 2

Ein Schlitten wird durch die Zugkraft $\vec{F}_Z = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$ reibungsfrei auf einer Ebene E gezogen. Der Normalenvektor der Ebene E lautet: $\vec{n}_E = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}$. Auf die Angabe und Mitführung der Einheiten wird verzichtet.

Prüfen Sie, ob sich der Schlitten in Richtung von $\vec{v}_1$ und/oder $\vec{v}_2$ bewegt.

a) $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 4.5 \\ 5 \\ 0,1 \end{pmatrix}$

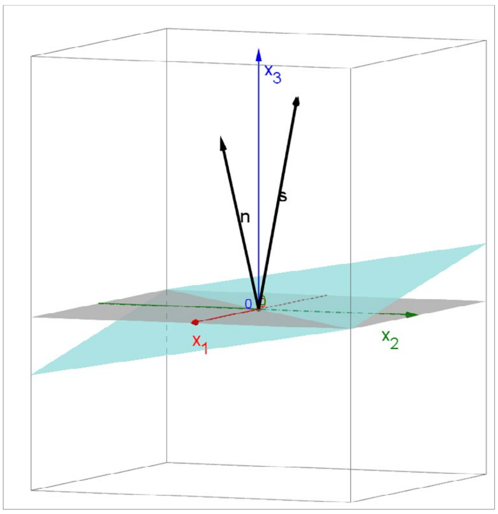
b) $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 89 \\ 101 \\ 2 \end{pmatrix}$

Zielsetzung Übung

Voraussetzung Vektorketten, Gleichungssysteme, Vektorgleichungen, lineare Abhängigkeit, Grundwissen aus der Physik

Hinweise zur Bearbeitung

Die definierten Objekte können in der 3D-Ansicht visualisiert werden.



1
$\rightarrow$ **s** $:= \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$

2
n := (1, -1, 6)
$\rightarrow$ **n** $:= \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}$

3
v_1:=(4.5,5,0.1)
$\rightarrow$ $\mathbf{v_1} := \begin{pmatrix} \frac{9}{2} \\ 5 \\ \frac{1}{10} \end{pmatrix}$

4
v_2:=(89,101,2)
$\rightarrow$ $\mathbf{v_2} := \begin{pmatrix} 89 \\ 101 \\ 2 \end{pmatrix}$

5
Löse(k_1 n + k_2 v_1 = s,{k_1, k_2})
$\rightarrow$ {}

Zu a)

Zeilen 1 - 4: Definition der Vektoren

Zeile 5: Lösen der Vektorgleichung

Hinweis: Bei manchen CAS muss das zugrunde liegende Gleichungssystem explizit eingegeben werden.

Die drei Vektoren sind linear unabhängig.

Zu b)

Die Vektorgleichung ist lösbar.

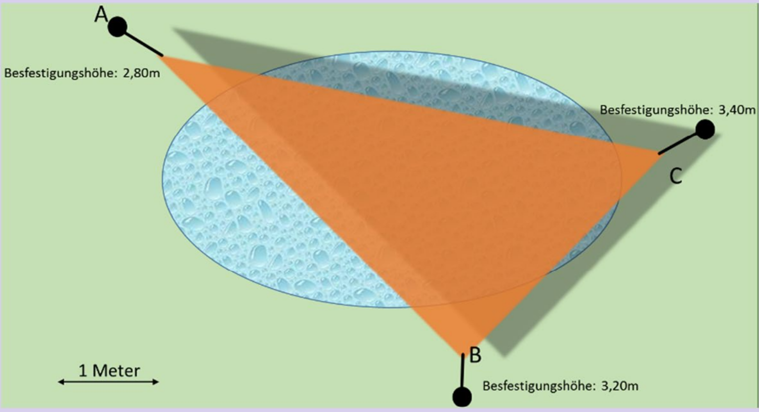
Die drei Vektoren sind linear abhängig.

6 Löse(k_1 n + k_2 v_2 = s,{k_1, k_2})

$\rightarrow \left\{\left\{k_1 = \frac{25}{19}, k_2 = \frac{1}{19}\right\}\right\}$

Aufgabe 3: Sonnensegel

In einem Schwimmbad wurde ein neues Sonnensegel für das dortige Kinderplanschbecken aufgebaut. Das Sonnensegel besitzt eine dreieckige Form und ist an den Ecken an Pfosten befestigt (siehe Skizze). Leider hat man festgestellt, dass das Sonnensegel in der Mitte bei Regen zu stark durchhängt und sich Wasser in diesem Durchhang sammelt. Deshalb soll es zusätzlich von oben an einer geeigneten Stelle befestigt und gehalten werden, damit das Wasser abfließt.



Die Bauarbeiter vor Ort haben eine maßstabsgetreue Skizze von der derzeitigen Situation angefertigt. Nun ist derjenige Punkt auf dem Sonnensegel gesucht, an dem die zusätzliche Befestigung angebracht werden muss, damit der beabsichtigte Effekt maximal wird.

Ermitteln Sie die Koordinaten dieses Punkts.

Mit der Annahme, dass mit der zusätzlichen Befestigung das Sonnensegel eben ist, soll der Flächeninhalt des Sonnensegels bestimmt werden. Berechnen Sie die Maßzahl des Flächeninhalts. Begründen Sie, warum diese Maßzahl nicht direkt aus der maßstabsgetreuen Zeichnung bestimmt werden kann.

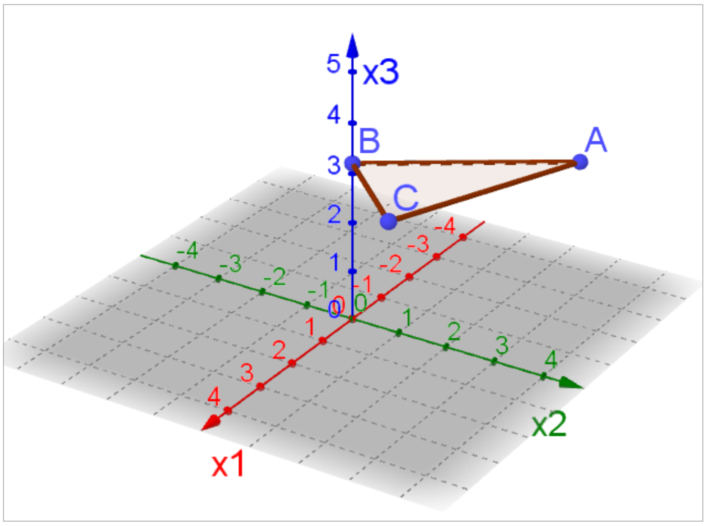
Zielsetzung Übung (Vektorrechnung, Argumentieren im Sachzusammenhang)

Voraussetzung Schwerpunkt eines Dreiecks, Bildung von Vektorketten

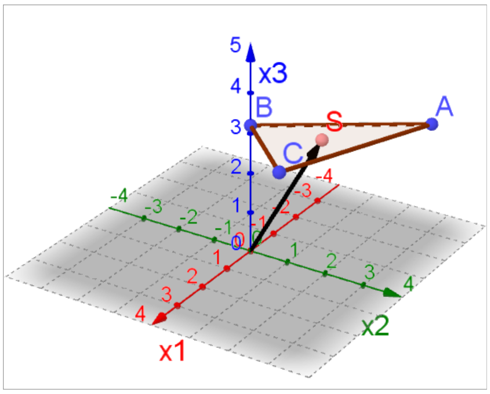
Anmerkung: Zusätzlich kann der Flächeninhalt der beschatteten Fläche bestimmt werden, sofern ausreichende Informationen über die Richtung der Lichtquelle angegeben werden.

Hinweise zur Bearbeitung

Ein geeignetes Koordinatensystem wird gewählt. Die Koordinaten der Punkte A und C können dann durch Abmessen aus der maßstabsgetreuen Skizze bestimmt werden. Die Höhe der Punkte über dem Boden wird durch die x_3 -Koordinate dargestellt.



Mithilfe der dynamischen Geometriefunktion des CAS lassen sich das Dreieck ABC sowie der zugehörige Schwerpunkt darstellen.



Zeilen 1 - 3: Definition der Ortsvektoren

1 A := (-3,3,2.8)

$\rightarrow$ **A** $:= \left(-3, 3, \frac{14}{5}\right)$

2 B:=(0,0,3.2)

$\rightarrow$ **B** $:= \left(0, 0, \frac{16}{5}\right)$

3 C := (2, 2, 3.4)

$\rightarrow$ **C** $:= \left(2, 2, \frac{17}{5}\right)$

Zeile 4 - 5: Berechnung des Ortsvektors des Schwerpunkts

4 os:=1/3*(A+B+C)

$\rightarrow$ **os** $:= \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{5}{3} \\ \frac{47}{15} \end{pmatrix}$

5 S:=1/3*(A+B+C)

$\rightarrow$ **S** $:= \left(-\frac{1}{3}, \frac{5}{3}, \frac{47}{15}\right)$

Zeile 6: Die Maßzahl des Flächeninhalts des Dreiecks lässt sich direkt mit dem Befehl *Fläche* berechnen.

6 Fläche(A,B,C)

$\rightarrow$ **6.04**

Zeile 7 - 8: Alternative Berechnung mithilfe des Kreuzprodukts

7 0.5*Länge(Kreuzprodukt((B-A), (C-A)))

$\rightarrow \frac{1}{2}\sqrt{146}$

8 Numerisch($7)

$\rightarrow$ **6.04**

3.3 Geraden und Ebenen

Vorschläge zur Unterrichtsgestaltung

Im Zusammenhang mit den beschriebenen Vorschlägen zur Unterrichtsgestaltung kommen insbesondere folgende CAS-Grundfertigkeiten zur Anwendung:

- Gerade durch ihre Gleichung definieren
- Ebene durch ihre Gleichung definieren
- Abstand zwischen Punkten, Geraden und Ebenen berechnen
- Koordinaten des Schnittpunkts einer Geraden mit einer Ebene berechnen
- Gleichung der Schnittgeraden von zwei Ebenen berechnen

Aufgabe 1

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte $A(2|-3|5)$, $B(1|1|3)$, $P(0{,}5|3|2)$ und $Q(1|6|3)$ gegeben.

a) Bestimmen Sie eine Gleichung der Geraden g, die durch die Punkte A und B verläuft. Prüfen Sie, ob die Punkte P und Q auf g liegen.

b) Bestimmen Sie eine Gleichung der Geraden h, die g senkrecht schneidet und den Punkt Q enthält.

Zielsetzung Übung (Festigung von Grundfertigkeiten im Umgang mit Geradengleichungen)

Voraussetzung Geradengleichung, Skalarprodukt

Hinweise zur Bearbeitung

Zu a)

Zeilen 1 - 3: Definition der Geraden

Zeilen 4 - 7: Prüfung der Lagebeziehung

1	A := (2, -3, 5) $\rightarrow$ $A := (2, -3, 5)$
2	B := (1, 1, 3) $\rightarrow$ $B := (1, 1, 3)$
3	g(λ):=A+λ*(B-A) $\rightarrow$ $g(\lambda) := (2 - \lambda, -3 + 4\lambda, 5 - 2\lambda)$
4	P := (0.5, 3, 2) $\rightarrow$ $P := \left(\frac{1}{2}, 3, 2\right)$
5	Q := (1, 6, 3) $\rightarrow$ $Q := (1, 6, 3)$
6	Löse(g(λ)=P) $\rightarrow$ $\left\{\lambda = \frac{3}{2}\right\}$
7	Löse(g(λ)=Q) $\rightarrow$ $\{\}$

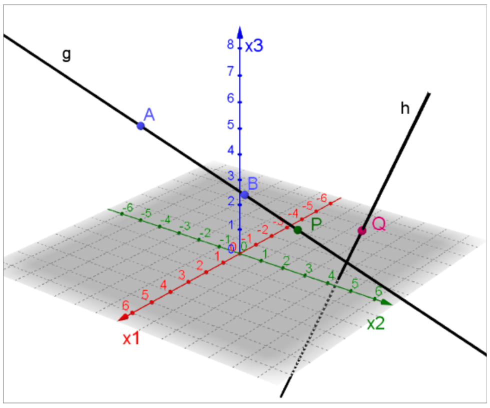
Zu b)

Bestimmung des Richtungsvektors von h

Zeile 8: Vektor $\overrightarrow{XQ}$; X ist ein beliebiger Punkt auf der Geraden g.

Zeilen 9 - 10: Bestimmung der Koordinaten von X, sodass $\overrightarrow{XQ}$ senkrecht zu g ist

Zeile 11: Ausgabe der Gleichung der Gerade h



8	g_{gQ}(λ_L):=g(λ_L)-Q → $g_{gQ}(\lambda_L) := (-\lambda_L + 1, 4\ \lambda_L - 9, -2\ \lambda_L + 2)$
9	Löse(Skalarprodukt(g_{gQ}(λ_L),B-A)=0,λ_L) → $\left\{\lambda_L = \frac{41}{21}\right\}$
10	g_{gQ}(41/21) → $\left(-\frac{20}{21}, -\frac{25}{21}, -\frac{40}{21}\right)$
11	h(μ):=Q+μ*g_{gQ}(41/21) → $h(\mu) := \left(1 - \frac{20}{21}\ \mu, 6 - \frac{25}{21}\ \mu, 3 - \frac{40}{21}\ \mu\right)$

Aufgabe 2

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte $A(1|3|5)$, $B(1|1|0)$ und $C(-2|0|3)$ gegeben. Sie legen die Ebene E fest.

a) Bestimmen Sie jeweils eine Gleichung der Ebene E in Parameterform und in Koordinatenform.

b) Prüfen Sie, ob die Punkte $P(-1|-3|4)$ und $Q(19|15|2)$ in der Ebene liegen.

Zielsetzung Übung (Festigung von Grundfertigkeiten im Umgang mit Ebenengleichungen in Parameter- und Koordinatenform)

Voraussetzung Ebenengleichung in Parameter- und Koordinatenform

Hinweise zur Bearbeitung

Zu a)

Zeilen 1 - 3: Eingabe der drei Punkte

Zeile 4: Definition der Gleichung in Parameterform

1	A:=(1,3,5) → $A := (1, 3, 5)$
2	B:=(1,1,0) → $B := (1, 1, 0)$
3	C:=(-2,0,3) → $C := (-2, 0, 3)$
4	e(λ,μ):=A+λ*(B-A)+μ*(C-A) → $e(\lambda, \mu) := (1 - 3\ \mu, 3 - 2\ \lambda - 3\ \mu, 5 - 5\ \lambda - 2\ \mu)$

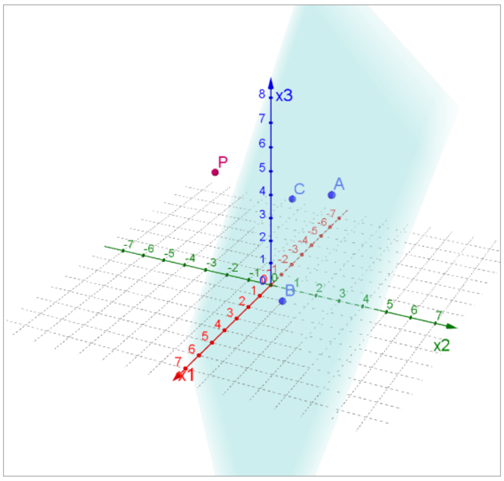
Zeilen 5 - 6: Bestimmung der Gleichung in Koordinatenform

5	n_E:=(Kreuzprodukt((B-A), (C-A))) $\rightarrow n_E := \begin{pmatrix} -11 \\ 15 \\ -6 \end{pmatrix}$
6	Skalarprodukt(n_E,(x_1,x_2,x_3)-A)=0 $\rightarrow -11\,x_1 + 15\,x_2 - 6\,x_3 - 4 = 0$

Zeile 7: alternatives Vorgehen (nicht bei allen CAS möglich)

Zeilen 8 - 11: Überprüfung, ob P und Q in der Ebene E liegen

7	a:=Ebene(A,B,C) $\rightarrow a := -11x + 15y - 6z = 4$
8	P := (-1, -3, 4) $\rightarrow P := (-1, -3, 4)$
9	Löse(e(λ,μ)=P,{λ,μ}) $\rightarrow \{\}$
10	Q:=(19,15,2) $\rightarrow Q := (19, 15, 2)$
11	Löse(e(λ,μ)=Q,{λ,μ}) $\rightarrow \{\{\lambda = 3, \mu = -6\}\}$



Aufgabe 3

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Gerade

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}, \ \lambda \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad \text{der Punkt } P_a(-2\,|\,1\,|\,a) \text{ mit } a \in \mathbb{R}$$

gegeben. Bestimmen Sie den Wert von a so, dass P_a von g den Abstand 10 [LE] hat.

Zielsetzung Übung

Voraussetzung Geradengleichung, Länge eines Vektors, Abstand Punkt – Gerade

Hinweise zur Bearbeitung

Zeilen 1 - 2: Definition der Geraden g und des Punktes P_a

1	g(λ):=(6,7,2)+λ*(-2,5,4) $\rightarrow g(\lambda) := (6 - 2\,\lambda, 7 + 5\,\lambda, 2 + 4\,\lambda)$
2	P(a):=(-2,1,a) $\rightarrow P(a) := (-2, 1, a)$

Zeilen 3 - 4: Bestimmung der Koordinaten des Lotfußpunktes F

Zeile 5: Die möglichen Werte von a ergeben sich als Lösungen der Gleichung $\left|\overrightarrow{OF}-\overrightarrow{OP}\right|=10$.

3	Löse[Skalarprodukt[(-2,5,4), g(λ)-P(a)]=0,λ]
	$\to \left\{\lambda = \frac{4}{45}\,a - \frac{22}{45}\right\}$
4	F(a):=g(4 / 45 a - 22 / 45)
	$\to F(a) := \left(-\frac{8}{45}\,a + \frac{314}{45}, \frac{4}{9}\,a + \frac{41}{9}, \frac{16}{45}\,a + \frac{2}{45}\right)$
5	Löse[Länge[F(a)-P(a)] = 10,a]
	$\to \left\{a = \frac{-42\sqrt{5}+2}{29}, a = \frac{42\sqrt{5}+2}{29}\right\}$

Lösungsvariante

Alternativ kann mithilfe des CAS der Abstand von P_a zu g auch mithilfe der Differenzialrechnung ermittelt werden. Die nebenstehenden Zeilen 3 und 4 ersetzen die obige Zeile 3.

3	d(λ):=Abstand[g(λ), P(a)]
	$\to d(\lambda) := \sqrt{(2\lambda-8)^2+(-5\lambda-6)^2+(a-4\lambda-2)^2}$
4	Löse[Ableitung[d(λ)]=0,λ]
	$\to \left\{\lambda = \frac{4}{45}\,a - \frac{22}{45}\right\}$

Weitere Lösungsvariante

Zeile 3: Gleichung einer Ebene, die den Punkt P_a enthält und senkrecht zu g ist

Zeilen 4 - 5: Bestimmung des Schnittpunkts von E und g

Zeile 6: Die möglichen Werte von a ergeben sich als Lösungen der Gleichung $\left|\overrightarrow{OF}-\overrightarrow{OP}\right|=10$.

3	E:=Skalarprodukt[(x,y,z)-P(a), (-2,5,4)]=0
	$\to E:\ -4a-2x+5y+4z-9=0$
4	Ersetze[E, {x=6-2λ,y=7+5λ,z=2+4λ}]
	$\to -4a+45\lambda+22=0$
5	Löse[$4,λ]
	$\to \left\{\lambda = \frac{4}{45}\,a - \frac{22}{45}\right\}$
6	Löse[Abstand[P(a),g(4 / 45 a - 22 / 45)] = 10,a]
	$\to \left\{a = \frac{-42\sqrt{5}+2}{29}, a = \frac{42\sqrt{5}+2}{29}\right\}$

Gegenseitige Lage von zwei Geraden, von zwei Ebenen sowie von einer Geraden und einer Ebene

Anhand der folgenden Aufgaben 4 bis 9 können die Schülerinnen und Schüler mögliche Fälle untersuchen. Es bietet sich eine Bearbeitung dieser Aufgaben in unterschiedlichen Sozialformen an, z. B. in Form eines vereinfachten Expertenpuzzles.

Aufgabe 4

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Geraden

$$g\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix}8\\1\\7\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix},\ \lambda \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad h\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix}-1\\5\\-9\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}1\\-2\\4\end{pmatrix},\ \mu \in \mathbb{R}$$

gegeben. Zeigen Sie, dass sich g und h schneiden.

Bestimmen Sie die Koordinaten des Schnittpunkts sowie das Maß des Schnittwinkels der beiden Geraden.

Zielsetzung Übung (Untersuchung der gegenseitigen Lage von zwei Geraden)

Voraussetzung Geradengleichung, Winkel zwischen Vektoren, Gleichungssysteme

Hinweise zur Bearbeitung

Der Nachweis, dass sich die Geraden schneiden, kann z. B. dadurch erfolgen, dass die Lösbarkeit der entsprechenden Vektorgleichung (Zeile 3) dokumentiert wird.

Zeilen1 - 2: Definition der Geraden g und h

Zeile 3: Bestimmung der Schnittmenge

Zeile 4: Berechnung der Koordinaten des Schnittpunkts

Zeile 5: Berechnung des Winkelmaßes

1	g(λ):=(8,1,7)+λ*(3,1,2) $\rightarrow\ \mathbf{g(\lambda)\ :=\ (3\,\lambda+8, \lambda+1, 2\,\lambda+7)}$
2	h(μ):=(-1,5,-9)+μ*(1,-2,4) $\rightarrow\ \mathbf{h(\mu)\ :=\ (\mu-1, -2\,\mu+5, 4\,\mu-9)}$
3	Löse[g(λ)=h(μ)] $\rightarrow\ \mathbf{\{\{\lambda=-2, \mu=3\}\}}$
4	g(-2) $\rightarrow\ \mathbf{(2, -1, 3)}$
5	Winkel[(3,1,2),(1,-2,4)]*180/ π $\approx\ \mathbf{58.34}$

Aufgabe 5

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Geraden

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix}-9\\1\\-1\end{pmatrix} + \lambda\cdot\begin{pmatrix}11\\1\\2\end{pmatrix},\ \lambda \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad h: \vec{x} = \begin{pmatrix}-10\\3\\-2\end{pmatrix} + \mu\cdot\begin{pmatrix}5\\-1\\3\end{pmatrix},\ \mu \in \mathbb{R}$$

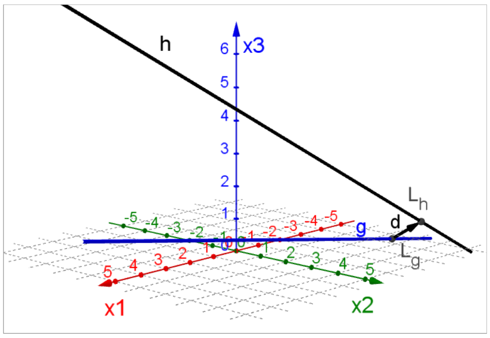
gegeben.

Zeigen Sie, dass g und h windschief zueinander sind, und bestimmen Sie den Abstand der beiden Geraden.

Zielsetzung Übung (Untersuchung der gegenseitigen Lage von zwei Geraden)

Voraussetzung Geradengleichung, Winkel zwischen Vektoren, Abstand Punkt – Gerade

Hinweise zur Bearbeitung



1	A := (-9, 1, -1) → $\mathbf{A} := (-9, 1, -1)$
2	u:=(11,1,2) → $\mathbf{u} := \begin{pmatrix} 11 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$
3	B:=(-10,3,-2) → $\mathbf{B} := (-10, 3, -2)$
4	v:=(5,-1,3) → $\mathbf{v} := \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$
5	g(λ):=A+λ*u → $\mathbf{g}(\lambda) := (11\lambda - 9, \lambda + 1, 2\lambda - 1)$
6	h(μ):=B+μ*v → $\mathbf{h}(\mu) := (5\mu - 10, -\mu + 3, 3\mu - 2)$

Zeilen 7 - 8: Nachweis, dass g und h nicht parallel sind und keinen gemeinsamen Punkt haben

7	Löse[u=k*v,k] → {}
8	Löse[g(λ)=h(μ),{λ,μ}] → {}

Zeilen 9 - 10:

Mithilfe des CAS können die Koordinaten der beiden Lotfußpunkte durch Lösen des Gleichungssystems

$$\vec{u} \circ \left(\vec{x}_h - \vec{x}_g\right) = 0 \quad \text{und} \quad \vec{v} \circ \left(\vec{x}_h - \vec{x}_g\right) = 0$$

verhältnismäßig einfach ermittelt werden, wobei $\vec{u}$ und $\vec{v}$ Richtungsvektoren und $\vec{x}_g$ und $\vec{x}_h$ die Ortsvektoren von Punkten auf g bzw. h bezeichnen. In diesem Beispiel wurden, anstelle des Befehls Skalarprodukt, direkt die beiden Vektoren miteinander multipliziert, welches das hier verwendete CAS korrekt interpretiert.

9	Löse[{u*(h(μ)-g(λ))=0,v*(h(μ)-g(λ))=0},{λ,μ}] → $\left\{\left\{\lambda = \frac{43}{162}, \mu = \frac{20}{27}\right\}\right\}$
10	Länge[Ersetze[h(μ) - g(λ),$9]] → $\sqrt{10} \cdot 63 \cdot \frac{1}{162}$
11	Vereinfache[$10] → $7 \cdot \frac{\sqrt{10}}{18}$

Aufgabe 6

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Ebene

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 2{,}5 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -0{,}5 \\ 1 \\ -0{,}5 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -0{,}5 \\ 1{,}5 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \lambda, \mu \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad \text{die Gerade } g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ -13 \\ -6 \end{pmatrix} + \rho \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \ \rho \in \mathbb{R}$$

gegeben.

Zeigen Sie, dass sich E und g schneiden. Bestimmen Sie die Koordinaten des Schnittpunkts sowie das Maß des Winkels, unter dem sich die Gerade g die Ebene E schneiden.

Zielsetzung Übung (Untersuchung der gegenseitigen Lage von einer Geraden und einer Ebene)

Voraussetzung Ebenengleichung in Parameterform, Winkel zwischen Vektoren, Gleichungssysteme

Hinweise zur Bearbeitung

Zeile 1: Definition der Ebene E

Zeile 2: Definition der Gerade g

Zeile 3: Nachweis, dass sich E und g schneiden

Zeilen 4 - 7: Bestimmung der Koordinaten des Schnittpunkts sowie des Maßes des eingeschlossenen Winkels

1	e(λ,μ):=(0.5,2.5,2)+λ*(-0.5,1,-0.5)+μ*(-0.5,1.5,0) $\rightarrow \ \mathbf{e(\lambda,\mu)} := \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\lambda - \frac{1}{2}\mu, \frac{5}{2} + \lambda + \frac{3}{2}\mu, 2 - \frac{1}{2}\lambda\right)$
2	g(ρ):=(-2,-13,-6)+ρ*(-1,3,2) $\rightarrow \ \mathbf{g(\rho)} := (-\rho - 2, 3\rho - 13, 2\rho - 6)$
3	Löse[e(λ,μ)=g(ρ)] $\rightarrow \ \left\{\left\{\lambda = 46, \mu = -56, \rho = -\frac{15}{2}\right\}\right\}$
4	g(-15/2) $\rightarrow \ \left(\frac{11}{2}, -\frac{71}{2}, -21\right)$
5	Winkel[(-1,3,2),Kreuzprodukt[(-0.5,1,-0.5),(-0.5,1.5,0)]] $\rightarrow \ \frac{1}{2}\pi + \arcsin\left(\frac{\sqrt{154}}{77}\right)$
6	$5 / π 180 $\approx$ **99.27**
7	$6 - 90 $\approx$ **9.27**

Lösungsvariante

Ausgehend von einem Normalenvektor $\vec{n}$ von E lässt sich ein möglicher Schnittpunkt von E und g auch durch Lösen der Gleichung $\vec{n} \circ \left(\vec{x}_g - \overrightarrow{OA}\right) = 0$ bestimmen, wobei A ein Punkt der Ebene E ist und $\vec{x}_g$ der Ortsektor eines Geradenpunkts von g bezeichnet.

Liefert das CAS eine eindeutige Lösung für die Variable (Zeile 4), so schneiden sich E und g in einem Punkt. Hinweis: Läge g in E, dann würde das CAS $\{\rho = \rho\}$ ausgeben.

3	n:=Kreuzprodukt[(-0.5,1,-0.5), (-0.5,1.5,0)] $\rightarrow \ \mathbf{n} := \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$
4	Löse[Skalarprodukt[n, g(ρ)-(0.5,2.5,2)]=0] $\rightarrow \ \left\{\rho = -\frac{15}{2}\right\}$

Aufgabe 7

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Ebene

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \lambda, \mu \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad \text{die Gerade } g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \rho \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \ \rho \in \mathbb{R}$$

gegeben.

Zeigen Sie, dass g parallel zu E ist, jedoch nicht in E verläuft. Bestimmen Sie den Abstand von E und g.

Zielsetzung Übung (Untersuchung der gegenseitigen Lage von einer Geraden und einer Ebene)

Voraussetzung Ebenengleichung in Parameterform, Lotfußpunkt, Gleichungssysteme

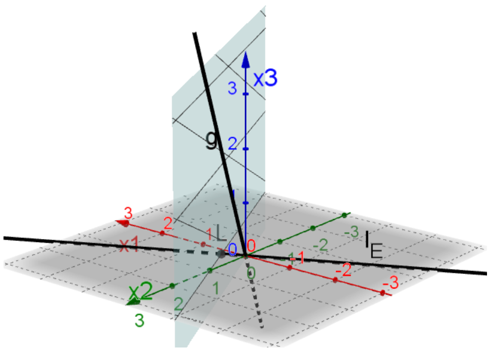
Hinweise zur Bearbeitung

Zeile 1: Definition der Ebene E

Zeile 2: Definition der Geraden g

Zeile 3: Nachweis der Lagebeziehung

Zeilen 4 - 7: Berechnung der Koordinaten des Lotfußpunktes



Zeile 8: Bestimmung des Abstands

1	e(λ,μ):=(-1,3,0)+λ*(-1,2,1)+μ*(-1,2,0) $\rightarrow \mathbf{e(\lambda,\mu)} := (-\lambda-\mu-1, 2\lambda+2\mu+3, \lambda)$
2	g(ρ):=(0,0,0)+ρ*(-1,2,3) $\rightarrow \mathbf{g(\rho)} := (-\rho, 2\rho, 3\rho)$
3	Löse(e(λ,μ)=g(ρ),{λ,μ,ρ}) $\rightarrow \{\}$
4	n_E:=Kreuzprodukt((-1,2,1),(-1,2,0)) $\rightarrow \mathbf{n_E} := \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$
5	l_E(σ):=(0,0,0)+σ*(n_E) $\rightarrow \mathbf{l_E(\sigma)} := (-2\sigma, -\sigma, 0)$
6	Löse(e(λ,μ)=l_E(σ),{λ,μ,σ}) $\rightarrow \left\{\left\{\lambda = 0, \mu = -\frac{7}{5}, \sigma = -\frac{1}{5}\right\}\right\}$
7	L:=(l_E(-1/5)) $\rightarrow \mathbf{L} := \left(\frac{2}{5}, \frac{1}{5}, 0\right)$
8	Länge(L-(0,0,0)) $\rightarrow \frac{1}{\sqrt{5}}$

Aufgabe 8

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Ebenen

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 2{,}5 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -0{,}5 \\ 1 \\ -0{,}5 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -0{,}5 \\ 1{,}5 \\ 0 \end{pmatrix},\ \lambda, \mu \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad F: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \sigma \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \tau \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix},\ \sigma, \tau \in \mathbb{R}$$

gegeben.

Zeigen Sie, dass sich E und F schneiden und bestimmen Sie eine Gleichung der Schnittgeraden.

Zielsetzung Übung (Untersuchung der gegenseitigen Lage von zwei Ebenen)

Voraussetzung Ebenengleichung in Parameterform, Gleichungssysteme

Hinweise zur Bearbeitung

Zeile 3: Nachweis der Lagebeziehung

Zeile 4: Bestimmung der Koordinaten eines Punktes auf der Schnittgeraden

1	E(λ,μ):=(0.5,2.5,2)+λ*(-0.5,1,-0.5)+μ*(-0.5,1.5,0) $\rightarrow\ \mathbf{E(\lambda,\mu)\ :=\ \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\,\lambda-\frac{1}{2}\,\mu,\ \frac{5}{2}+\lambda+\frac{3}{2}\,\mu,\ 2-\frac{1}{2}\,\lambda\right)}$
2	F(σ,τ):=(5,0,2)+σ*(1,1,2)+τ*(-1,3,1) $\rightarrow\ \mathbf{F(\sigma,\tau)\ :=\ (\sigma-\tau+5,\ \sigma+3\,\tau,\ 2\,\sigma+\tau+2)}$
3	Löse[E(λ,μ)=F(σ,τ)] $\rightarrow\ \left\{\left\{\lambda=-4\,\tau+22,\ \mu=5\,\tau-20,\ \sigma=\frac{1}{2}\,\tau-\frac{11}{2}\right\}\right\}$
4	F(1 / 2 τ - 11 / 2,τ) $\rightarrow\ \left(-\frac{1}{2}\,\tau-\frac{1}{2},\ \frac{7}{2}\,\tau-\frac{11}{2},\ 2\,\tau-9\right)$

Lösungsvariante

Ausgehend von einem Normalenvektor $\vec{n}$ von E lassen sich die Koordinaten der Geradenpunkte der Schnittgeraden von E und F auch durch Lösen der Gleichung $\vec{n} \circ \left(\vec{x}_F - \overrightarrow{OA}\right) = 0$ bestimmen, wobei A ein Punkt der Ebene E ist und $\vec{x}_F$ den Ortsvektor eines Punkts der Ebene F bezeichnet.

3	n:=Kreuzprodukt[(-0.5,1,-0.5), (-0.5,1.5,0)] $\rightarrow\ \mathbf{n}\ := \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$
4	Löse[Skalarprodukt[n, F(σ,τ)-(0.5,2.5,2)]=0,τ] $\rightarrow\ \{\tau=2\,\sigma+11\}$
5	Ersetze[F(σ, τ),$4] $\rightarrow\ (-\sigma-6,\ 7\,\sigma+33,\ 4\,\sigma+13)$

Aufgabe 9

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Ebenen

$$E:\vec{x}=\begin{pmatrix}4\\-4\\2\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}4\\0\\-3\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}-2\\3\\1{,}5\end{pmatrix},\ \lambda,\mu\in\mathbb{R},\ \text{und}\ F:\vec{x}=\begin{pmatrix}3\\-2\\-4\end{pmatrix}+\sigma\begin{pmatrix}2\\-2\\-1{,}5\end{pmatrix}+\tau\begin{pmatrix}4\\0{,}5\\-3\end{pmatrix},\ \sigma,\tau\in\mathbb{R}$$

gegeben. Zeigen Sie, dass E und F zueinander parallel, jedoch nicht identisch sind und bestimmen Sie den Abstand der beiden Ebenen.

Zielsetzung Übung (Untersuchung der gegenseitigen Lage von zwei Ebenen)

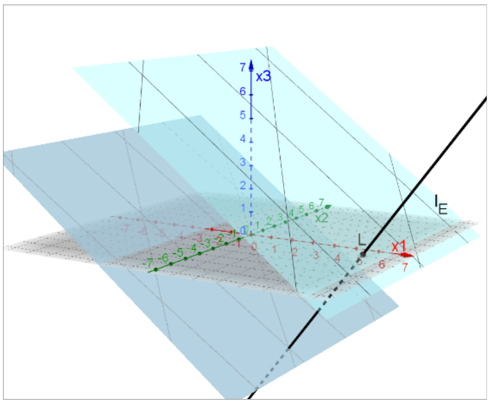
Voraussetzung Ebenengleichung in Parameterform, Lotfußpunkt, Gleichungssysteme

Hinweise zur Bearbeitung

Zeilen 1 - 2: Definition der Ebenen E und F

Zeile 3: Nachweis der Lagebeziehung

Zeilen 4 - 7: Berechnung des Lotfußpunktes



1	E(λ,μ) := (4,-4,2)+λ*(4,0,-3)+μ*(-2,3,1.5) $\rightarrow E(\lambda,\mu) := \left(4\lambda-2\mu+4, 3\mu-4, -3\lambda+\frac{3}{2}\mu+2\right)$
2	F(σ,τ) := (3,-2,-4)+σ*(2,-2,-1.5)+τ*(4,0.5,-3) $\rightarrow F(\sigma,\tau) := \left(2\sigma+4\tau+3, -2\sigma+\frac{1}{2}\tau-2, -\frac{3}{2}\sigma-3\tau-4\right)$
3	Löse(E(λ,μ)=F(σ,τ),{λ,μ,σ,τ}) $\rightarrow \{\}$
4	n_E:=Kreuzprodukt((4,0,-3),(-2,3,1.5)) $\rightarrow n_E := \begin{pmatrix}9\\0\\12\end{pmatrix}$
5	l_E(ε):=(3,-2,-4)+ε*(n_E) $\rightarrow l_E(\varepsilon) := (9\varepsilon+3, -2, 12\varepsilon-4)$
6	Löse(E(λ,μ)=l_E(ε),{λ,μ,ε}) $\rightarrow \left\{\left\{\lambda=\frac{67}{75}, \mu=\frac{2}{3}, \varepsilon=\frac{9}{25}\right\}\right\}$
7	L:=(l_E(9/25)) $\rightarrow L := \left(\frac{156}{25}, -2, \frac{8}{25}\right)$

4 Einsatz von CAS im Themengebiet Stochastik

Im Zusammenhang mit den beschriebenen Vorschlägen zur Unterrichtsgestaltung kommen insbesondere folgende CAS-Grundfertigkeiten zur Anwendung:

- CAS als herkömmlichen Taschenrechner verwenden
- Termwert berechnen
- Gleichung lösen
- Tabellenkalkulation durchführen
- Histogramm zeichnen
- Binomialverteilung im Sachzusammenhang anwenden

4.1 Schnelleinstieg in das Themengebiet – Wichtige grundlegende Befehle

Kombinatorik

Zeilen 1 - 4: Befehle *nPr* und *nCr* analog wie bei herkömmlichen Taschenrechnern

1	nPr(z, k) $\rightarrow \frac{z!}{(-k+z)!}$
2	nPr(12, 3) $\rightarrow$ **1320**
3	nCr(z, k) $\rightarrow \frac{z!}{(-(k-z))!\,k!}$
4	nCr(12, 3) $\rightarrow$ **220**

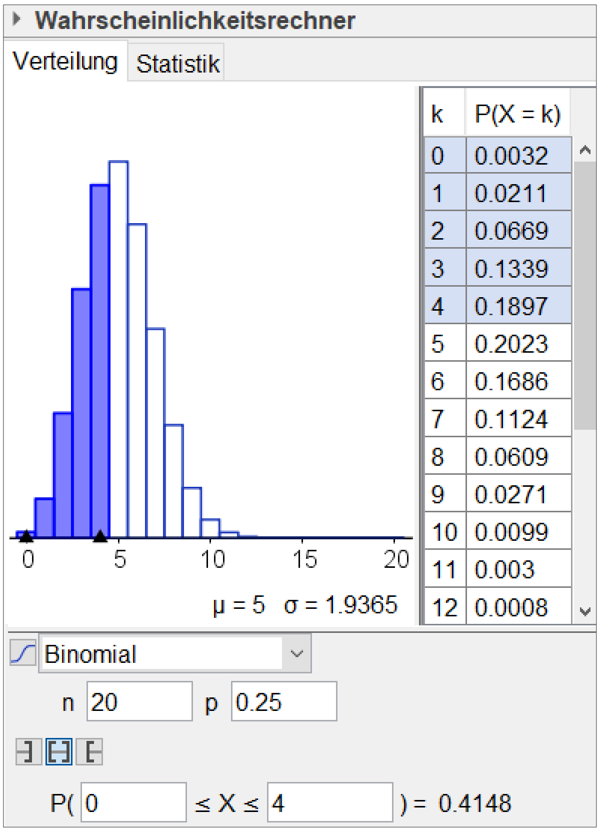
Binomialverteilung

Ziele 1 - 2: Bestimmung der Wahrscheinlichkeiten $P^{20}_{0,25}(X=4)$ und $P^{20}_{0,25}(X \leq 4)$

Zeile 3: alternative Eingabe von $P^{20}_{0,25}(X \leq 4)$

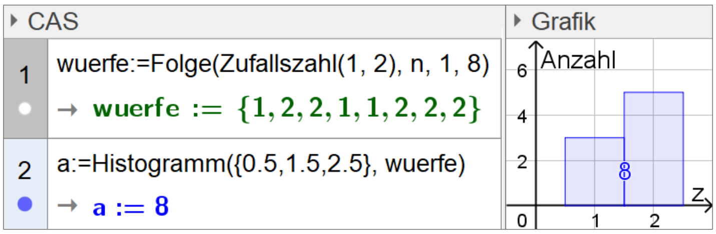
1	Numerisch(Binomial(20, 0.25, 4, false), 5) $\rightarrow$ **0.18969**
2	Numerisch(Binomial(20, 0.25, 4, true), 5) $\rightarrow$ **0.41484**
3	Numerisch(Binomial(20, 0.25, 0..4),5) $\rightarrow$ **0.41484**

Häufig bieten CAS auch die Möglichkeit, mithilfe von Tabellenkalkulationen die Binomialverteilung grafisch darzustellen. Das Modul „Wahrscheinlichkeitsrechner" beim hier verwendeten CAS erleichtert das Vorgehen wesentlich.



Simulation von Bernoulli-Experimenten

Bernoulli-Experimente können mit CAS simuliert werden. Das Ergebnis für z. B. acht aufeinanderfolgende Münzwürfe, wird zusätzlich grafisch dargestellt.



4.2 Zufallsgröße und Wahrscheinlichkeitsverteilung

Im Gegensatz zu den herkömmlichen Taschenrechnern erleichtert der Einsatz von CAS die Simulation von Zufallsexperimenten und deren grafische Auswertung sehr.

Vorschläge zur Unterrichtsgestaltung

Aufgabe 1: Gepäckstücke – nach Prüfung zum Erwerb der fachgebundenen Hochschulreife Bayern 2011, Technik S II

Auf dem Nürnberger Flughafen werden die zu transportierenden Gepäckstücke unabhängig voneinander auf ein Förderband gelegt. Die Wahrscheinlichkeit, dass eines dieser Gepäckstücke für den Zielflughafen Palma de Mallorca bestimmt ist, sei p.

Die Wahrscheinlichkeit, dass von zwei aufeinanderfolgenden Gepäckstücken höchstens eines für den Zielflughafen Palma bestimmt ist, sei 87,75 %. Berechnen Sie daraus die Wahrscheinlichkeit p.

Zielsetzung Übung

Voraussetzung binomialverteilte Zufallsgröße mit unbekannter „Treffer-Wahrscheinlichkeit"

Hinweise zur Bearbeitung

Die Schülerinnen und Schüler verwenden das CAS zum Lösen der Gleichung $P(X \leq 1) = 0{,}8775$. Nur das positive Ergebnis ist für die Wahrscheinlichkeit p sinnvoll.

1	Löse(Binomial(2, p, 1, true)=.8775, p) $\rightarrow \left\{p = -\frac{7}{20}, p = \frac{7}{20}\right\}$
2	Löse(Binomial(2, p,0..1)=.8775,p) $\rightarrow \left\{p = -\frac{7}{20}, p = \frac{7}{20}\right\}$

Aufgabe 2: Menüvarianten – nach Fachabiturprüfung Bayern 2017, Nichttechnik S II

Die Fluggesellschaft TransAir bietet ihren Fluggästen neben den Standardmenüs auch rein vegetarische Menüs an. Von den verschiedenen Menüvarianten ist nur die vegetarische Kost mit einem alkoholfreien Getränk ohne Aufpreis erhältlich. Für ein Standardmenü selbst wird ein Aufpreis von 3 € und für ein alkoholisches Getränk generell ein Aufpreis von 2 € erhoben. Die Zufallsgröße X beschreibt den möglichen Aufpreis in €. Die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X lautet:

X	0	2	3	5
P(X = x)	0,15	0,05	0,4	0,4

a) Berechnen Sie den durchschnittlich zu zahlenden Aufpreis sowie die Standardabweichung von X.

b) Stellen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X in einem Histogramm dar.

Im vollbesetzten Flugzeug sitzen 200 Fluggäste.

c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:

E_1 : „Mindestens 30 Fluggäste zahlen keinen Aufpreis."

E_2 : „Mehr als 25, aber höchstens 35 Fluggäste zahlen keinen Aufpreis."

d) TransAir vermutet, dass infolge des gestiegenen Gesundheitsbewusstseins in der Bevölkerung der Anteil derjenigen, die keinen Aufpreis zahlen müssen, zugenommen hat (Gegenhypothese). Daher wird für das voll besetzte Flugzeug ein Hypothesentest auf dem Signifikanzniveau von 5 % vorgenommen. Geben Sie die Nullhypothese sowie die Testgröße an und bestimmen Sie den größtmöglichen Ablehnungsbereich für die Nullhypothese.

Zielsetzung Übung

Voraussetzung Erwartungswert und Standardabweichung einer Zufallsgröße, Histogramm, Binomialverteilung, einseitiger Signifikanztest, Erzeugung und Umgang mit Listen, Vorkenntnisse im Umgang mit einer Tabellenkalkulation

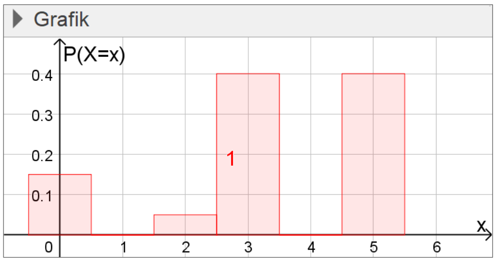
Hinweise zur Bearbeitung

Zu a) und b)

Zeilen 1 - 4: Der Erwartungswert (Zeile 3) und die Standardabweichung (Zeile 4) der Zufallsgröße X werden mit dem CAS berechnet.

Anmerkung: Mit dem hier verwendeten CAS können auch Listen multipliziert werden.

Zeilen 5 - 6: Erzeugung des Diagramms



1	Liste_k:={0,1,2,3,4,5} → $\text{Liste}_k := \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$
2	Liste_p:={0.15,0,0.05,0.4,0,0.4} → $\text{Liste}_p := \left\{\frac{3}{20}, 0, \frac{1}{20}, \frac{2}{5}, 0, \frac{2}{5}\right\}$
3	Summe(Liste_k*Liste_p) → $\frac{33}{10}$
4	stdevp(Liste_k, Liste_p) → 1.71
5	Liste_g:={-0.5,.5,1.5,2.5,3.5,4.5,5.5} → $\text{Liste}_g := \left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \frac{9}{2}, \frac{11}{2}\right\}$
6	a:=Histogramm(Liste_g, Liste_p) → a := 1

Zu c)

Die gesuchten Werte der Binomialverteilung können direkt über die jeweiligen Befehle ausgegeben werden.

7	Numerisch(1-Binomial(200, 0.15, 29, true), 5) → 0.53027
8	Numerisch(Binomial(200, 0.15, 30..200), 5) → 0.53027
9	Numerisch(Binomial(200, 0.15, 26, 35), 5) → 0.060344

Zu d)

Verwendet man den Ablehnungsbereich $\{k;\ldots;200\}$ der Nullhypothese $H_0: p = 0{,}15$, so ist $k = 39$ die kleinste ganzzahlige Lösung der aufgestellten Ungleichung $P_{0{,}15}^{200}(X \geq k) \leq 0{,}05$.

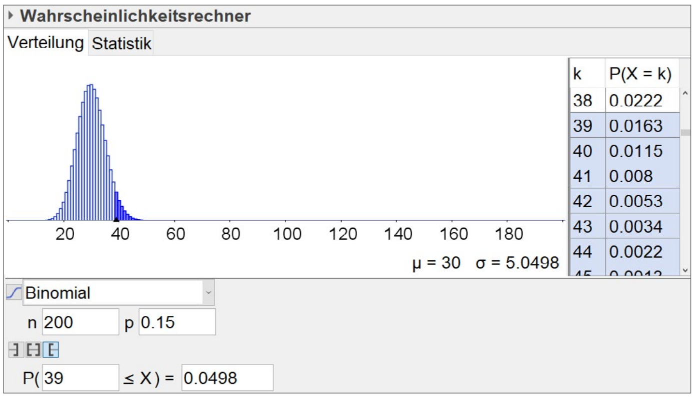
Tabelle

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	31	0.45149						
2	32	0.37525						
3	33	0.3042						
4	34	0.24037						
5	35	0.18504						
6	36	0.13873						
7	37	0.10128						
8	38	0.07198						
9	39	0.0498						
10	40	0.0						
11	41	0.022						

Zahl **B9**: Binomial(200, 0.15, A9…200)

Dieses Ergebnis können die Schülerinnen und Schüler beispielsweise durch das Erstellen einer Wertetabelle bestimmen.

Alternativ können die Schülerinnen und Schüler die Lösung mit dem hier verwendeten CAS auch durch systematisches Probieren finden. Hierzu verwendet man beispielsweise das Modul „Wahrscheinlichkeitsrechner".



Anmerkung: Hier wird das CAS nur als Werkzeug zur Beschaffung der benötigten Werte genutzt, um die Aufgabe zu lösen. In der Handreichung über den Einsatz von CAS am Gymnasium in der Jahrgangsstufe 11 und 12 (vgl. [HR CAS Gym 11-12]) wird sehr ausführlich mit dem CAS die Auswirkung der einzelnen Kenngrößen des Signifikanztests auf dessen Aussage untersucht.

Literatur

Lehrbücher (zugelassen für die Verwendung an der Beruflichen Oberschule)

- Fielk, Werner; Altrichter, Volker; Ioffe, Mikhail; Ott, Georg; Meier, Peter; Körner, Daniel; Konstandin, Stefan, Mathematik - Berufliche Oberschule Bayern - Nichttechnik · Band 1 (FOS 11/BOS 12),), Berlin 2017 (Cornelsen Verlag)]
- Fielk, Werner; Altrichter, Volker; Ioffe, Mikhail; Ott, Georg; Roßmann, Franz; Meier, Peter; Körner, Daniel; Konstandin, Stefan., Mathematik - Berufliche Oberschule Bayern - Nichttechnik · Band 2 (FOS/BOS 12), Berlin 2018 (Cornelsen Verlag)]
- Fielk, Werner; Altrichter, Volker; Ioffe, Mikhail; Ott, Georg; Körner, Daniel; Konstandin, Stefan, Mathematik - Berufliche Oberschule Bayern - Technik · Band 1 (FOS 11/BOS 12),), Berlin 2017 (Cornelsen Verlag)]
- Fielk, Werner; Altrichter, Volker; Ioffe, Mikhail; Ott, Georg; Meier, Peter; Körner, Daniel; Konstandin, Stefan, Mathematik - Berufliche Oberschule Bayern - Nichttechnik · Band 2 (FOS/BOS 12), Berlin 2018 (Cornelsen Verlag)]

Handreichungen des Staatsinstituts für Schulqualität und Bildungsforschung

- Computer-Algebra-Systeme (CAS) im Mathematikunterricht des Gymnasiums – Jahrgangsstufe 10, München 2011 [HR CAS Gym 10]
- Computer-Algebra-Systeme (CAS) im Mathematikunterricht des Gymnasiums - Jahrgangstufen 11 und 12, München 2017 [HR CAS Gym 11-12]

Lehrplan

- LehrplanPLUS für die Fachoberschule, https://www.lehrplanplus.bayern.de

Weitere gedruckte Publikationen

- Arnold E., Bichler E., Fritsche F., Seidel K., Sinzinger M., Fokus Mathematik. Gymnasium Bayern. Mathematik mit CAS – Arbeitsheft für Schülerinnen und Schüler. Bände 1-3, Berlin 2010, 2011 bzw. 2013.
- Barzel B., Computeralgebra im Mathematikunterricht: Ein Mehrwert – aber wann? Münster 2012.
- Barzel B., Pallack A. (Hrsg.), ... aller Anfang ist leicht. Aufgaben mit TI-Nspire/TI-Nspire CAS, Münster 2008.
- Barzel B., Pallack A. (Hrsg.), Aufgaben mit TI-Nspire/TI-Nspire CAS, Münster 2007.
- Baumann R., Analysis I. Ein Arbeitsbuch mit Derive, Stuttgart 2002.
- Bergmann D., Braun M., Fischer F., Kessler S., Weishaupt J., delta – neu / CAS-Arbeitsheft 12. Mathematik für Gymnasien / Mathematik mit CAS, Bamberg 2013.
- Bichler E., Explorative Studie zum langfristigen Taschencomputereinsatz im Mathematikunterricht. Der Modellversuch Medienintegration im Mathematikunterricht (M³) am Gymnasium, Hamburg 2010.
- Böhm J., Optimierungsaufgaben grafisch, analytisch und numerisch lösen mit dem TI-92, Hagenberg 2005.
- Brandt D., Reinelt G., Lambacher Schweizer. Mathematik für Gymnasien. Gesamtband Oberstufe mit CAS, Stuttgart 2007.
- Braun M., Grunick C., Kessler S., Weishaupt J., delta – neu / CAS-Arbeitsheft 10 bzw. 11. Mathematik für Gymnasien / Mathematik mit CAS, Bamberg 2011 bzw. 2012.
- Bruder R. (Hrsg.), Aufgaben mit CAS-Einsatz. Modellversuch 2004/2005 Hessen, Freising 2006.
- Bruder R., Weiskirch W. (Hrsg.), CALiMERO. Computer-Algebra im Mathematikunterricht: Entdecken, Rechnen, Organisieren. Bände 1 - 5, Münster 2007 - 2009.
- Demana F., Waits B., Foley G., Kennedy, D., Precalculus. Functions and Graphs, Boston 2004.
- Deschauer S. (Hrsg.), Der Mathematikunterricht (MU) – Schwerpunkt Computer-Algebra-Systeme. Jahrgang 60, Heft 1, Seelze 2014.
- Deschauer S. (Hrsg.), Der Mathematikunterricht (MU) – Schwerpunkt Didaktisches Potential von GeoGebra. Jahrgang 60, Heft 4, Seelze 2014.
- Dopfer G., Reimer R., Funktionen mit Parametern, Kurvenscharen. Arbeitsmaterialien unter Einsatz eines GTR/CAS. Lehrermaterialien und Lösungshinweise, Stuttgart 2003.
- Edwards C. H., Penney D. E., Single Variable Calculus, Athens 2002.
- Fulge R., Röttger A., Neue Ideen für den Mathematikunterricht. Einsatz moderner Technologien im Vorkurs der Jahrgangsstufe 11, Hannover 1999.
- Greefrath G., Oldenburg R., Siller H.-S., Ulm V., Weigand H.-G., Didaktik der Analysis – Aspekte und Grundvorstellungen zentraler Begriffe, Heidelberg u. Berlin 2016.
- Greefrath G., Mühlenfeld U. (Hrsg.), Realitätsbezogene Aufgaben für die Sekundarstufe II. Mit Ausarbeitungen für den ClassPad 300 Plus. Entwickelt im Rahmen des Modellversuchs SINUS-Transfer NRW, Troisdorf 2007.

- Heintz G., Pinkernell G., Schacht F. (Hrsg.), Digitale Werkzeuge für den Mathematikunterricht. Festschrift für Hans-Jürgen Elschenbroich, Neuss 2016.
- Heugl H., Mathematikunterricht mit Technologie. Ein didaktisches Handbuch mit einer Vielzahl an Aufgaben, Linz 2014.
- Heugl H., Klinger W., Lechner J., Mathematikunterricht mit Computeralgebra-Systemen. Ein didaktisches Lehrbuch mit Erfahrungen aus dem österreichischen Derive-Projekt, Bonn 1996.
- Hischer H., Mathematikunterricht und neue Medien. Hintergründe und Begründungen in fachdidaktischer und fachübergreifender Sicht, Hildesheim 2002.
- Kaenders R., Schmidt R. (Hrsg.), Mit GeoGebra mehr Mathematik verstehen. Beispiele für die Förderung eines tieferen Mathematikverständnisses aus dem GeoGebra Institut Köln/Bonn, Wiesbaden 2011, 2014.
- KMK-Sekretariat (Hrsg.), Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife, Bonn und Berlin 2015. [BS M Allg. HSR]
- Knechtel H., Kramer H., Krüger U.-H., Weiskirch W., Materialien für den Einsatz von Grafikrechnern und Computeralgebra. Teil 1, Braunschweig 2003.
- Moldenhauer W. (Hrsg.), Der Einsatz des TI-89 in der Jahrgangsstufe 10 an Thüringer Gymnasien, Freising 2003.
- Landesinstitut für Schulentwicklung Baden-Württemberg (Hrsg.), Unterrichtspraxis mit dem grafikfähigen Taschenrechner in der Klassenstufe 7/8. Erfahrungsberichte und Unterrichtsmaterialien zur Leitidee funktionaler Zusammenhang, Heimsheim 2007.
- Lokar M., Robutti O., Sinclair N., Weigand H.-G., Introduction to the papers of TWG 16: Students learning mathematics with resources and technology. Proceedings of the CERME 2015 in Prague. 2390-2393, 2016.
- Pallack A. (Hrsg.), mathematik lehren – Digitale Medien nutzen. Heft 189, Seelze, 2015
- Pallack A., Mit CAS zum Abitur. TI-89 Titanium und Voyage 200 in Unterricht und Prüfung, Braunschweig 2006.
- Prugger E., Rauniak C., Schneider E., Wachstums- und Abnahmeprozesse mit dem TI-92. Ein Lehrgang zur Behandlung von Exponential- und Logarithmusfunktionen, Hagenberg 2002.
- Ralle B. (Hrsg.), MNU Journal – Schwerpunkt Digitale Werkzeuge. Jahrgang 69, Heft 6, Neuss 2016.
- Ruppert M., Wörler J. (Hrsg.), Technologien im Mathematikunterricht: Eine Sammlung von Trends und Ideen, Wiesbaden 2013.
- Schmid A. (Hrsg.), Lambacher Schweizer. Mathematik – Oberstufe mit CAS-Einsatz, Stuttgart 2016.
- Schneider G., Girlinger H., Paul M., Tinhof F., Mathematik II HLW/HLT/HLM/ALM/HLK, Linz 2007.
- Sächsisches Staatsinstitut für Bildung und Schulentwicklung (Hrsg.), Einsatz von Computer-Algebra-Systemen im Mathematikunterricht. Handreichung, Lapertswalde 2006.
- Weigand H.-G., Weth T., Computer im Mathematikunterricht. Neue Wege zu alten Zielen, Heidelberg 2002, 2010.

Publikationen im Internet

- www.mebis.bayern.de → Lernplattform → teachSHARE (abgerufen am 20.12.2016)
  „TeachSHARE“, die Austauschplattform für Lehrkräfte innerhalb der passwortgeschützten Lernplattform des Portals „mebis“ des Bayerischen Staatsministeriums für Bildung und Kultus, Wissenschaft und Kunst, bietet ausgearbeitete Bespiele für den Unterrichtseinsatz zur unmittelbaren Integration in den eigenen Bereich der Lernplattform.
- www.geogebra.org/materials/ (abgerufen am 20.12.2016)
  Die Internetseiten der „GeoGebra Community“ weisen eine Vielzahl von Materialien auf, welche sich nach Stichworten durchsuchen lassen. Sie stehen zum Download zur Verfügung, lassen sich aber auch online im Browser nutzen.
- www.t3deutschland.de (abgerufen am 20.12.2016)
  Die Internetseiten des Lehrerfortbildungsprojekts „Teachers Teaching with Technology“ (T^3) enthalten eine umfangreiche Datenbank mit Literaturangaben zum Einsatz von CAS.
- www.acdca.ac.at (abgerufen am 20.12.2016)
  Die Internetseiten des „Austrian Center for Didactics of Computer Algebra“ bieten eine umfangreiche Sammlung von Materialien zum Einsatz von CAS im Unterricht.
- wiki.zum.de/Mathematik-digital (abgerufen am 20.12.2016)
  Das Wiki „Mathematik Digital“ enthält eine Sammlung von Unterrichtsmaterialien sowie eine Sammlung von Links zu digitalen Materialien für den Mathematikunterricht, insbesondere digitalen Lernpfaden (als interaktive Unterrichtseinheiten).
- www.nctm.org (abgerufen am 20.12.2016)

Die Internetseiten des „National Council of Teachers of Mathematics“, des größten Verbandes von Mathematiklehrkräften der USA, bieten eine umfangreiche Sammlung von Materialien, die teilweise ohne Abschluss einer (kostenpflichtigen) Mitgliedschaft verfügbar sind.

HANDREICHUNG

BERUFLICHE OBERSCHULE

Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung
Schellingstraße 155, 80797 München
Tel.: 089 2170-2101
Fax: 089 2170-2105
Internet: www.isb.bayern.de