



**Lehrplan zum Erwerb der  
Fachhochschulreife  
durch die Ergänzungsprüfung in  
beruflichen Bildungsgängen  
(ohne kolleg 24)**

im Fach Mathematik  
technische Ausbildungsrichtungen



BAYERISCHES STAATSMINISTERIUM FÜR UNTERRICHT UND KULTUS

**Lehrplan zum Erwerb der Fachhochschulreife durch die Ergänzungsprüfung in  
beruflichen Bildungsgängen (ohne kolleg24)**

**im Fach Mathematik**

**technische Ausbildungsrichtungen**

Mai 2025

Der Lehrplan wurde mit Verfügung vom 30.05.2025 (AZ VII.6-BS9510.2/22/28) genehmigt und gilt mit Beginn des Schuljahres 2025/2026

Herausgeber:

Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung, Schellingstr. 155, 80797 München

Telefon 089 2170-2211, Telefax 089 2170-2215

Internet: [www.isb.bayern.de](http://www.isb.bayern.de)

## Inhaltsverzeichnis

1	Einführung.....	4
1.1	Bildungs- und Erziehungsauftrag.....	4
1.1.1	Profil und Anspruch des Unterrichts zum Erwerb der Fachhochschulreife durch die Ergänzungsprüfung .....	4
1.1.2	Die Teilnehmenden der Ergänzungsprüfung zum Erwerb der Fachhochschulreife .....	5
1.1.3	Der Unterricht zur Vorbereitung auf die Ergänzungsprüfung .....	6
1.1.4	Übergänge gestalten .....	7
1.1.5	Qualitätsentwicklung des Bildungsangebots zum Erwerb der Fachhochschulreife .....	7
1.2	Übergreifende Bildungs- und Erziehungsziele .....	7
2	Fachprofil Mathematik.....	12
2.1	Selbstverständnis des Faches Mathematik und sein Beitrag zur Bildung ....	12
2.2	Kompetenzorientierung im Fach Mathematik.....	13
2.2.1	Kompetenzstrukturmodell .....	13
2.2.2	Prozessbezogene Kompetenzen .....	14
2.2.3	Gegenstandsbereiche.....	15
2.2.4	Förderung von Kompetenzen .....	16
2.3	Aufbau des Fachlehrplans im Fach Mathematik .....	16
2.4	Grundlegende Kompetenzen .....	17
2.5	Querverbindungen zu anderen Fachbereichen.....	18
2.6	Beitrag des Faches Mathematik zu den übergreifenden Bildungs- und Erziehungszielen.....	18
3	Übersicht über die Lernbereiche .....	20
4	Fachlehrplan .....	21
5	Anhang.....	32

## 1 Einführung

### 1.1 Bildungs- und Erziehungsauftrag

Das Bildungsangebot zum Erwerb der Fachhochschulreife durch die Ergänzungsprüfung bietet jungen Menschen die Möglichkeit, neben ihrer beruflichen Ausbildung die Fachhochschulreife zu erlangen. Dabei vertiefen bzw. erweitern sie Kompetenzen, Wissen und Fähigkeiten, bilden neue Einstellungen und Haltungen aus und entfalten so ihr individuelles Potenzial. Dies bestärkt sie darin, als mündige Mitglieder der Gesellschaft verantwortlich zu handeln und die eigene Zukunft zu gestalten.

Dabei ist die Vorbereitung auf die Teilnahme an der Ergänzungsprüfung zum Erwerb der Fachhochschulreife den obersten Bildungs- und Erziehungszielen verpflichtet, die in Art. 131 der Bayerischen Verfassung festgelegt sind: „Die Schulen sollen nicht nur Wissen und Können vermitteln, sondern auch Herz und Charakter bilden. Oberste Bildungsziele sind Ehrfurcht vor Gott, Achtung vor religiöser Überzeugung und vor der Würde des Menschen, Selbstbeherrschung, Verantwortungsgefühl und Verantwortungsfreudigkeit, Hilfsbereitschaft, Aufgeschlossenheit für alles Wahre, Gute und Schöne und Verantwortungsbewusstsein für Natur und Umwelt. Die Schüler sind im Geiste der Demokratie, in der Liebe zur bayerischen Heimat und zum deutschen Volk und im Sinne der Völkerversöhnung zu erziehen.“

#### 1.1.1 Profil und Anspruch des Unterrichts zum Erwerb der Fachhochschulreife durch die Ergänzungsprüfung

Der Unterricht zum Erwerb der Fachhochschulreife durch die Ergänzungsprüfung ist ein Bildungsangebot für leistungsbereite und leistungsfähige Studierende bzw. Schülerinnen und Schüler unterschiedlicher beruflicher Schulen. Begleitend zur regulären Stundentafel besuchen sie – je nach den Voraussetzungen der Schulart – auch Unterricht in Deutsch, Mathematik, Englisch sowie im naturwissenschaftlichen und gesellschaftswissenschaftlichen Bereich. Dieser verfolgt einen ganzheitlichen Bildungsansatz, der berufliche Gesichtspunkte mit allgemein- und persönlichkeitsbildenden Aspekten vereint. Eine wichtige Rolle spielen dabei auch das selbstorganisierte Lernen und Methodenkompetenzen. Auf diese Weise werden wichtige Grundlagen für ein Hochschulstudium, eine höhere berufliche Tätigkeit oder den weiteren schulischen Weg zur fachgebundenen bzw. allgemeinen Hochschulreife gestärkt.

#### Abschlüsse

Das Bildungsangebot ermöglicht den Lernenden den Erwerb der Fachhochschulreife. Voraussetzung dafür sind der erfolgreiche Berufsabschluss sowie das Bestehen der Ergänzungsprüfung zum Erwerb der Fachhochschulreife.

Nach dem erfolgreichen Abschluss der Fachhochschulreife können die Lernenden bundesweit ein Studium an einer Fachhochschule aufnehmen oder die 13. Jahrgangsstufe der Berufsoberschule absolvieren, um die fachgebundene Hochschulreife oder allgemeine Hochschulreife (mit zweiter Fremdsprache) zu erwerben.

**Wertorientierung**

Die Gestaltung des Bildungsangebots orientiert sich an den in der Verfassung des Freistaates Bayern genannten Bildungszielen sowie an den Grundsätzen von Demokratie und Rechtsstaatlichkeit im Sinne des Grundgesetzes der Bundesrepublik Deutschland und der Verfassung des Freistaates Bayern. Weitere Grundlagen bilden das Bayerische Gesetz über das Erziehungs- und Unterrichtswesen, die Bayerische Schulordnung und die Ausbildungs- und Prüfungsordnung Ergänzungsprüfung.

Auf Basis dieser Werte beobachten und reflektieren die Lernenden ihr Handeln und ihre Begegnungen mit anderen. Sie erfahren die Bedeutung und Notwendigkeit eines achtsamen und respektvollen Umgangs mit anderen Menschen und betrachten sich selbst als aktiven Teil der Gesellschaft. Durch die Auseinandersetzung mit unterschiedlichen Weltanschauungen, religiösen Überzeugungen, sozialen Prägungen, beruflichen Erfahrungen sowie unterschiedlichen Meinungen und Lebensweisen erweitern sie ihren Erfahrungshorizont, ihre Bewertungsmaßstäbe und ihre Handlungsmöglichkeiten. Sie festigen dadurch die Einsicht, dass gemeinsame gesellschaftliche Werte die notwendige Grundlage für ein bereicherndes und friedliches Miteinander sind.

**Inklusion**

Die Berücksichtigung der besonderen Bedürfnisse von geeigneten Lernenden mit sonderpädagogischem Förderbedarf ist selbstverständlich. Das gemeinsame Lernen orientiert sich an den individuellen Interessen und Stärken der Lernenden und berücksichtigt die jeweiligen kulturellen, religiösen, sprachlichen und sozialen Hintergründe. Der Unterricht richtet sich an den unterschiedlichen Lern- und Entwicklungsbedürfnissen aus und achtet auf gleichberechtigte Teilhabe.

**Partizipation**

Die Lernenden haben das Recht, verantwortungsbewusst an Entscheidungen mitzuwirken, die sie selbst oder die Schulgemeinschaft betreffen. Im Unterricht werden sie ermuntert, sich bei entsprechenden Entscheidungsprozessen verantwortungsbewusst einzubringen. Die Lernenden festigen so ihr Verständnis von Demokratie und deren Prinzipien. Lehrkräfte sind dabei Vorbilder – in ihrem respektvollen Umgang mit anderen, in ihren Werthaltungen sowie in der Art und Weise, wie sie ihre eigenen Rechte und Pflichten wahrnehmen.

**1.1.2 Die Teilnehmenden der Ergänzungsprüfung zum Erwerb der Fachhochschulreife**

Der Teilnehmerkreis der Ergänzungsprüfung zum Erwerb der Fachhochschulreife ist in der zugrundeliegenden Prüfungsordnung geregelt. Die Teilnehmenden sind aufgrund ihrer Leistungsbereitschaft sowie ihres Leistungsvermögens in der Lage, neben den Anforderungen der Berufsausbildung die Kompetenzen aufzubauen, die sie später für ein Hochschulstudium und für verantwortungsvolle berufliche Aufgaben benötigen.

Durch die Verknüpfung von Berufsausbildung und Vorbereitung auf die Ergänzungsprüfung zum Erwerb der Fachhochschulreife erwerben die Lernenden zentrale Handlungskompetenzen ihres Berufs und vertiefen zugleich ihre Allgemeinbildung. Sie entfalten ihre Sozial- und Selbstkompetenz und entwickeln die Bereitschaft und Fähigkeit, sich aktiv Ziele zu setzen, persönliche sowie berufliche Herausforderungen anzunehmen und diese

erfolgreich zu bewältigen. Sie reflektieren dabei ihre Entscheidungen und Verhaltensweisen und ziehen daraus Rückschlüsse für ihr zukünftiges Handeln.

So erlangen die Lernenden jene fachlichen, persönlichen und sozialen Kompetenzen, die sie zu einem erfolgreichen Einstieg in eine höher qualifizierte berufliche Tätigkeit oder zu einem Studium befähigen.

### **1.1.3 Der Unterricht zur Vorbereitung auf die Ergänzungsprüfung**

#### **Kompetenzorientierung**

Zur Entwicklung einer umfassenden Handlungskompetenz ist neben dem Erwerb von Fachkompetenzen auch die Weiterentwicklung überfachlicher Kompetenzen unerlässlich. Zu diesen zählen Selbstkompetenz (z. B. Zuverlässigkeit, Selbstreflexion), Sozialkompetenz (z. B. Kommunikationsfähigkeit, Teamfähigkeit, interkulturelle Kompetenz) und Methodenkompetenz (z. B. Informationsbeschaffung, Präsentationstechniken, Lernstrategien). Die Förderung des nachhaltigen Erwerbs dieser Kompetenzen ist Aufgabe aller Fächer. Sie unterstützen erfolgreiches Lernen und tragen wesentlich zur Persönlichkeitsentwicklung bei.

Das Bildungsangebot zielt zudem auf eine Entwicklung und Erweiterung von Kompetenzen ab, die für eine verantwortungsvolle berufliche Tätigkeit oder ein Studium qualifizieren. Ausgangspunkt für die Unterrichtsgestaltung bilden daher alltagsnahe und beruflich relevante Probleme und Fragestellungen, die mithilfe wissenschaftlicher Recherche und Analyse gelöst werden.

Zur Vorbereitung auf die weiterführende Ausbildung an der Hochschule werden die Lernenden in grundlegende wissenschaftliche Arbeitsmethoden eingeführt.

#### **Unterrichtsgestaltung**

Im kompetenzorientierten Unterricht werden Lernsituationen methodisch sinnvoll und der Komplexität der Lerngegenstände angemessen gestaltet. Der Unterricht ist durch eine Aufgabekultur geprägt, die den Anwendungs- und Lebensweltbezug im Blick hat, die Eigenständigkeit der Lernenden fördert und der Heterogenität der Lerngruppe gerecht wird.

Lernsituationen sind wesentlicher Bestandteil eines kompetenzorientierten Unterrichts. Sie sind materialgestützt, in alltagsnahe Situationen eingebettet und ermöglichen dadurch einen Lebensweltbezug. Sie geben den Lernenden Gelegenheit zur Entwicklung eigener Hypothesen sowie unterschiedlicher Lern- und Lösungswege. Durch die Wiederholung und Vertiefung von Wissen und die kontinuierliche Weiterentwicklung und Anwendung bereits erworbener Kompetenzen wird nachhaltiges, kumulatives Lernen gefördert. Kompetenzorientierte Aufgaben regen die Lernenden dazu an, Sachverhalte, die eigene Vorgehensweise und den eigenen Lernzuwachs zu hinterfragen. Ihre Bearbeitung erfordert Motivation, Ausdauer und Leistungsbereitschaft. Aufgaben mit fächerübergreifenden Gedanken ermöglichen vernetztes Denken und Handeln.

Kompetenzorientierte Unterrichtsgestaltung ist geprägt von angemessener Methodenvielfalt. Der auf die Lernsituation abgestimmte, flexible Einsatz verschiedener Unterrichtsmethoden ermöglicht es nicht nur, den Unterrichtsgegenständen gerecht zu werden, sondern auch, die Lernenden in die Gestaltung des Unterrichts einzubeziehen, die Lernwege auf unterschiedliche Lernvoraussetzungen abzustimmen und durch Abwechslungsreichtum

Lernmotivation, Interesse und Konzentration zu fördern. Durch soziale Lernformen werden die Bedingungen und Vorzüge kooperativen Arbeitens vermittelt.

Die Teilnehmenden am Bildungsangebot zur Vorbereitung auf die Ergänzungsprüfung sind im Hinblick auf ihre Vorkenntnisse und Begabungen heterogen. Die Lehrkräfte berücksichtigen diese Unterschiedlichkeit, führen die Lernenden zu einer realistischen Einschätzung ihrer Stärken und Schwächen und fördern gezielt ihre Potenziale.

#### **1.1.4 Übergänge gestalten**

Der Unterricht zur Vorbereitung auf die Ergänzungsprüfung ist ein Bildungsangebot, das dazu beiträgt, das bayerische Schulsystem für vielfältige individuelle Bildungswege zu öffnen. Durch die Verknüpfung der beruflichen Ausbildung an Schulen und im dualen System mit der Möglichkeit, die Fachhochschulreife zu erwerben, finden sich dort Lernende unterschiedlicher Zubringerschulen: Realschulen, Wirtschaftsschulen, Mittelschulen oder Gymnasien. Um den Lernenden mit ihren unterschiedlichen Voraussetzungen den Einstieg in den anspruchsvollen Unterricht zur Vorbereitung auf die Ergänzungsprüfung zu erleichtern, steuern Lehrkräfte die Lernprozesse individuell, professionell und mit angemessener Sensibilität.

Die Teilnehmenden der Ergänzungsprüfung werden durch die Vermittlung einer profunden Allgemeinbildung sowie grundlegender Techniken des wissenschaftlichen Arbeitens zum Erwerb der Fachhochschulreife befähigt, die ein Studium an einer Fachhochschule ermöglicht.

Des Weiteren werden die fachlichen sowie überfachlichen Kompetenzen vermittelt, um durch den Besuch der 13. Jahrgangsstufe der Berufsoberschule die fachgebundene oder allgemeine Hochschulreife (mit zweiter Fremdsprache) zu erwerben.

#### **1.1.5 Qualitätsentwicklung des Bildungsangebots zum Erwerb der Fachhochschulreife**

Bei der organisatorischen und didaktischen Umsetzung des Unterrichts zur Vorbereitung auf die Ergänzungsprüfung haben die unterschiedlichen Schulen Entscheidungsspielräume, sodass sie auf vielfältige soziale, berufliche oder gesellschaftliche Entwicklungen reagieren können. Auf Basis ihres Schulprofils nehmen die Schulen in Eigenverantwortung didaktische und methodische Schwerpunktsetzungen vor, um den Zusatzunterricht optimal an ihre Zielgruppe anzupassen und diese zu einem erfolgreichen Abschluss zu befähigen.

Das Unterrichtsangebot zur Vorbereitung auf die Ergänzungsprüfung kann nicht losgelöst vom restlichen Unterricht der Standortschulen betrachtet werden. Daher sollte es auch im Schulentwicklungsprogramm berücksichtigt werden, um eine kontinuierliche Weiterentwicklung zu ermöglichen. Ein Qualitätsmanagementsystem ist dabei ein unerlässliches Instrument für die Sicherung der Qualität.

### **1.2 Übergreifende Bildungs- und Erziehungsziele**

Die Lernenden sehen sich in Gesellschaft, Kultur, Politik, Natur und Technik mit Phänomenen und Entwicklungen konfrontiert, die über die Grenzen eines einzelnen Faches hinausreichen.

Die schulart- und fächerübergreifenden Bildungs- und Erziehungsziele beschreiben entsprechende Themenbereiche, denen die Lernenden im Bildungsgang begegnen. Die Auseinandersetzung mit ihnen trägt zur Entwicklung einer ganzheitlich gebildeten Persönlichkeit bei.

Die folgenden Kurzbeschreibungen geben einen Überblick über die zentralen Aussagen der schulart- und fächerübergreifenden Bildungs- und Erziehungsziele. Schulart- und fachspezifische Verknüpfungen finden sich im Bildungs- und Erziehungsauftrag sowie im jeweiligen Fachprofil bzw. Fachlehrplan.

### **Alltagskompetenz und Lebensökonomie**

Im weitesten Sinne versteht man unter Alltagskompetenzen Fähigkeiten, die Lernende in die Lage versetzen, sich im Alltag zurechtzufinden. Sie fördern Einstellungen und Handlungsstrategien, die zur konstruktiven Lösung alltäglicher Herausforderungen wie auch zur Bewältigung von Problemen und Existenzfragen beitragen. Alltagskompetenzen unterstützen die Heranwachsenden in ihrer Entwicklung zu Menschen, die sich selbst vertrauen und Eigenverantwortung für ihr Leben übernehmen. Dabei werden u. a. folgende Kompetenzen angestrebt:

Die Lernenden

- erwerben Gesundheitskompetenzen, die langfristig einen gesunden Lebensstil fördern, nehmen sich selbst und ihre Umwelt reflektiert und differenziert wahr, insbesondere Gefühle, Bedürfnisse und Interessen von sich selbst und anderen, z. B. in Konfliktsituationen,
- gehen achtsam, verantwortungsvoll und wertschätzend mit sich selbst, ihren Mitmenschen und der Umwelt um,
- kommunizieren auf einer ihrem Alter entsprechenden Ebene gewaltfrei und konstruktiv, insbesondere im Rahmen zwischenmenschlicher Beziehungen (z. B. sozialverträgliches Nein-Sagen, Ich-Botschaften und wertschätzendes Feedback),
- erwerben eine positive Einstellung zu ihren eigenen Wirkungsmöglichkeiten, verfolgen Ziele und erfahren in ihrem Tun Sinn,
- verstehen, dass auch Misserfolge zum Leben gehören und Scheitern auch ein Wachstum der Persönlichkeit bedeuten kann,
- bewältigen die Herausforderungen des Alltags und bauen ein stabiles Selbstwertgefühl auf.

### **Berufliche Orientierung**

Berufliche Orientierung in den weiterführenden und beruflichen Schulen legt den Grundstein für die spätere berufliche Ausrichtung von Lernenden. Auf der Basis ihrer persönlichen Stärken und Schwächen sowie ihrer Neigungen und Interessen setzen sie sich mit verschiedenen Berufsbildern auseinander. Sie beobachten und reflektieren Strukturen und Entwicklungen auf dem Arbeits- und Ausbildungsmarkt, um tragfähige Entscheidungen für ihre berufliche Ausrichtung zu treffen. Externe Partner sowie fachkundige Beratung (Bundesagentur für Arbeit, Beratungslehrkräfte) unterstützen die Entwicklung der für die berufliche Orientierung notwendigen Kompetenzen.

### **Bildung für Nachhaltige Entwicklung (Umweltbildung, Globales Lernen)**

Im Rahmen einer Bildung für Nachhaltige Entwicklung entwickeln die Lernenden Kompetenzen, die sie befähigen, nachhaltige Entwicklungen als solche zu erkennen und aktiv mitzugestalten. Sie entwickeln Verantwortungsbewusstsein für Natur und Umwelt und erweitern ihre Kenntnisse über die komplexe und wechselseitige Abhängigkeit zwischen Mensch und Umwelt. Sie gehen sorgsam mit den ökologischen, ökonomischen und sozialen

Ressourcen um, damit Lebensgrundlage und Gestaltungsmöglichkeiten der jetzigen und der zukünftigen Generationen in allen Regionen der Welt gesichert werden. Die Lernenden eignen sich Wissen über Umwelt- und Entwicklungsprobleme, deren komplexe Ursachen sowie Auswirkungen an und setzen sich mit Normen und Werten auseinander, um ihre Umwelt wie auch die vernetzte Welt im Sinne des Globalen Lernens kreativ mitgestalten zu können.

### **Familien- und Sexualerziehung**

Die Familien- und Sexualerziehung begleitet den seelischen und körperlichen Reifungsprozess von Lernenden. Sie hilft ihnen, auf der Grundlage eines sachlich begründeten Wissens zu Fragen der menschlichen Sexualität ihre individuelle Entwicklung vorbereitet zu erleben und ihre Geschlechtlichkeit anzunehmen. Zuneigung, gegenseitige Achtung und Verlässlichkeit begreifen die Lernenden als wichtige Bestandteile persönlicher Beziehungen, beständiger Partnerschaft und des Familienlebens. Die Lernenden äußern sich zu sexuellen Themen sprachlich angemessen. Sie erkennen die Notwendigkeit eines vorbeugenden und verantwortungsvollen Verhaltens, um ihre Gesundheit und die anderer vor Krankheit, z. B. AIDS, zu schützen und um wertschätzend miteinander umzugehen. Die Lernenden erkennen Gefahrensituationen für sexuelle Belästigungen und Gewalt und erlernen präventive Verhaltensweisen und Handlungsstrategien, um in gefährdenden Situationen angemessen zu reagieren.

### **Gesundheitsförderung**

Gesundheitsförderung zielt auf eine aktive Gesundheitsvorsorge, Suchtprävention und die Entwicklung eines gesunden Lebensstils, der auf einer physischen, psychischen, sozialen, ökologischen und spirituellen Balance beruht. Die Lernenden setzen sich mit den Themenfeldern Ernährung, Bewegung, Hygiene, Stress und psychische Gesundheit, Sucht- und Gewaltprävention auseinander und lernen, achtsam und verantwortungsvoll mit sich selbst umzugehen. Eine aktive Freizeitgestaltung sowie die Kenntnis von Bewältigungsstrategien in Belastungssituationen stärken und schützen die Gesundheit der Lernenden.

### **Interkulturelle Bildung**

Im Rahmen der Interkulturellen Bildung erwerben die Lernenden elementare Kenntnisse über andere Kulturen und Religionen, die in einer pluralistischen und globalisierten Gesellschaft ein kultursensibles Verhalten und ein friedvolles Zusammenleben ermöglichen. Im Vergleich eigener Einstellungen und Haltungen mit denen anderer entwickeln sie Interesse und Offenheit, gegenseitigen Respekt sowie Toleranz gegenüber anderen Menschen mit ihren kulturspezifischen Vorstellungen und Verhaltensweisen, z. B. hinsichtlich Lebensführung, Sprache und Religion. Interkulturelle Kompetenz zeigt sich darin, dass Menschen und Kulturen voneinander lernen und sich so gegenseitig bereichern.

### **Kulturelle Bildung**

Die Auseinandersetzung mit Gegenständen der Kulturellen Bildung eröffnet den Lernenden Zugänge zu Kunst und Kultur sowie zum eigenen künstlerischen Potenzial. Ein differenziertes ästhetisches Wahrnehmen, Erleben und Gestalten erfahren sie als Bereicherung des Lebens und der eigenen Persönlichkeit. Die Lernenden entwickeln ein Bewusstsein für künstlerisches Schaffen und schätzen die Bedeutung kultureller Leistungen für die Gesellschaft. Kulturelle Bildung dient einer ganzheitlichen Bildung. Sie fördert eine Lebensgestaltung, in der sowohl Individualität, z. B. Werthaltungen und Identität, als auch gesellschaftliche Teilhabe ihren

Ausdruck finden. Den jährlichen Kulturtag an bayerischen Schulen nutzen die Lernenden z. B. zum Ausbau künstlerisch-kultureller Netzwerke mit externen Kulturschaffenden und kulturellen Einrichtungen.

### **Medienbildung/Digitale Bildung**

Die Lernenden erwerben im Rahmen der schulischen Medienbildung Kenntnisse und Fertigkeiten, um sachgerecht, selbstbestimmt und verantwortungsvoll in einer multimedial geprägten Gesellschaft zu handeln. Sie analysieren und bewerten Vorzüge und Gefahren von Medien und nutzen diese bewusst und reflektiert für private und schulische Zwecke. Insbesondere wägen sie kriteriengeleitet ihren Umgang mit sozialen Netzwerken ab.

### **Ökonomische Verbraucherbildung**

Das wachsende Angebot an Konsummöglichkeiten und der immer früher einsetzende Zugang zu allen Formen der modernen Kommunikationsmedien unterstreichen die Notwendigkeit, dass Lernenden zuverlässig ein bewusstes Verbraucherverhalten entwickeln. Im Rahmen der Ökonomischen Verbraucherbildung erwerben sie vor allem Markt-, Finanz- sowie Daten- und Informationskompetenzen, die sie zu einem verantwortungsvollen, nachhaltigen und wertorientierten Konsumhandeln befähigen. Dabei gewinnen sie auch einen Einblick in die Möglichkeiten der finanziellen Vorsorge und in die Notwendigkeit des bewussten Umgangs mit persönlichen Daten.

### **Politische Bildung**

Politische Bildung basiert auf der Kenntnis und Akzeptanz von Demokratie und freiheitlich-demokratischer Grundordnung sowie dem Wissen um den föderalen, rechtsstaatlichen und sozialstaatlichen Aufbau der Bundesrepublik Deutschland. Die Lernenden achten und schätzen den Wert der Freiheit und der Grundrechte. Auf der Grundlage einer altersgemäßen Fähigkeit und Bereitschaft zur Teilhabe am politischen Prozess tragen sie zu einer positiven wirtschaftlichen und sozialen Entwicklung der Gesellschaft und zum Erhalt des Friedens bei. Sie nehmen aktuelle Herausforderungen an, etwa im Zusammenhang mit der Entwicklung eines europäischen Zusammengehörigkeitsgefühls oder mit zentralen gesellschaftlichen und politischen Veränderungen von der kommunalen und Landesebene bis hin zu prägenden Tendenzen der Globalisierung.

### **Soziales Lernen**

Im Sinne der obersten Bildungsziele der Bayerischen Verfassung achten die Lernenden die Würde anderer Menschen in einer pluralen Gesellschaft. Sie üben Selbstbeherrschung, übernehmen Verantwortung und zeigen Hilfsbereitschaft. Sie gestalten Beziehungen auf der Grundlage von Konflikt- und Kommunikationsfähigkeit, Empathie, Toleranz und Selbstbestimmtheit; sie haben Respekt vor anderen Standpunkten und sind fähig, Kompromisse zu schließen, die der Gemeinschaft nützen.

### **Sprachliche Bildung**

Sprache ermöglicht die kommunikative Teilhabe an einer Gemeinschaft. Die Beherrschung der deutschen Sprache ist Voraussetzung für schulischen Erfolg und ihre Pflege nicht nur ein Anliegen des Faches Deutsch, sondern eine zentrale Aufgabe aller Fächer. Durch die Versprachlichung eigener und fremder Gedanken in Wort und Schrift fördern die Lernenden die Begriffsentwicklung und festigen ihr Sprachhandeln. Sie halten die Regeln der

Standardsprache als verbindliche Norm ein, um verständlich und situationsangemessen kommunizieren zu können, und bedienen sich einer treffenden, angemessenen und wertschätzenden Ausdrucksweise.

### **Technische Bildung**

Technik ist die gezielte nutzbringende Anwendung naturwissenschaftlicher Erkenntnisse. Technik bedeutet Fortschritt, kann aber auch Gefahren für den Einzelnen, die Gesellschaft und die Umwelt in sich bergen. Die Lernenden kennen den Entwicklungsprozess von der Idee zum Produkt und reflektieren die Chancen und Risiken neuer technischer Entwicklungen und deren Folgen. Sie handeln auf der Grundlage eines ethisch-moralischen Bewusstseins nach ökologischen, ökonomischen, sozialen und politischen Kriterien.

### **Verkehrserziehung**

Verkehrserziehung zielt auf die Befähigung der Lernenden zu einer sicheren Teilhabe am Verkehr sowie zu selbstverantwortlicher und altersgerechter Mobilität. Sie schulen ihre motorischen Fähigkeiten sowie ihr antizipatorisches Wahrnehmungs- und Reaktionsvermögen, um als Fußgänger, Radfahrer, Mitfahrer und Benutzer motorisierter Fahrzeuge sowie öffentlicher Verkehrsmittel gefahrenbewusst und verantwortungsvoll zu agieren. Ihr Mobilitätshandeln zeigt Problembewusstsein für ökologische und ökonomische Fragen und Bereitschaft zu Rücksichtnahme und defensivem Verhalten.

### **Werteerziehung**

Die Lernenden begegnen in einer offenen und globalisierten Gesellschaft der Vielfalt von Sinnangeboten und Wertvorstellungen. Sie setzen sich mit den verschiedenen Antworten auf Sinnfragen auseinander, um in politischen, religiösen und sozialen Zusammenhängen zu eigenen, reflektierten Werthaltungen zu finden. Das christliche Menschenbild und die daraus abzuleitenden Bildungs- und Erziehungsziele sind Grundlage und Leitperspektive für die Achtung vor dem Leben und vor der Würde des Menschen. Die Lernenden respektieren unterschiedliche Überzeugungen und handeln aufgeschlossen und tolerant in einer pluralen Gesellschaft.

## 2 Fachprofil Mathematik

### 2.1 Selbstverständnis des Faches Mathematik und sein Beitrag zur Bildung

Die Mathematik entwickelt sich seit Jahrtausenden als gemeinsame Kulturleistung der Menschheit. Ursprünglich aus konkreten, praktischen Fragestellungen entstanden, bilden sich aus ihr selbst heraus abstrakte Begriffe, Strukturen und Theorien. Dadurch bietet sie Ideen und Strategien zur Lösung verschiedenster Fragestellungen an und liefert fundamentale Beiträge zur Gestaltung und zur Beschreibung unserer heutigen, modernen Welt. Sie ist Grundlage sämtlicher Bereiche der digitalen Umgebung und Basis der rasant fortschreitenden Entwicklungen im Bereich der künstlichen Intelligenz (KI).

Mathematische Kompetenzen schaffen wesentliche Voraussetzungen für den Erkenntnisgewinn in unterschiedlichsten Disziplinen: Mathematik ist nicht nur ein charakteristischer Teil der Sprache der Naturwissenschaften und der Technik; mathematische Methoden dienen auch (z. B. in Wirtschaft und Politik sowie in den Sozialwissenschaften) der Objektivierung und der Strukturierung komplexer Sachverhalte. So gewonnene Aussagen bilden oft eine maßgebliche Basis für Bewertungen und Entscheidungen im täglichen Leben.

Zentrale Aufgabe des Faches Mathematik an beruflichen Schulen zum Erwerb der Fachhochschulreife durch die Ergänzungsprüfung ist es, die Lernenden, aufbauend auf ihre Fähigkeiten und Fertigkeiten, bis zur Fachhochschulreifeprüfung mit weiteren erforderlichen Kompetenzen für ein zukünftiges Studium bzw. für die Fortsetzung ihrer Berufslaufbahn auszustatten.

Konkret bedeutet dies an beruflichen Schulen einerseits, dass die Lernenden sich im Rahmen des Aufbaus von Kompetenzen mathematische Fachkenntnisse und Arbeitsweisen aneignen. Andererseits sollen sie allgemeinere Einsichten in Prozesse des Denkens und der Entscheidungsfindung gewinnen, die für eine aktive und verantwortungsbewusste Mitgestaltung der Gesellschaft von Bedeutung sind. Dabei soll auch deutlich werden, dass Mathematik ein hilfreiches Werkzeug zur Analyse und für den Erkenntnisgewinn sein kann, das letztlich auf menschlicher Kreativität beruht, und dass sie z. B. wegen ihrer ästhetischen Komponente auch einen Wert an sich darstellt.

Kennzeichen mathematischer Arbeitsweisen sind präziser Sprachgebrauch (einschließlich der Fachsprache), die exakte Verwendung mathematischer Schreibweisen und Symbole, Entwicklung klarer Begriffe, folgerichtige Gedankenführung und Argumentation, systematisches Vorgehen sowie das Erfassen von Zusammenhängen. Durch Übung in diesen Arbeitsweisen setzen sich die Lernenden intensiv mit dem eigenen Denken auseinander und erweitern ihr Abstraktionsvermögen. Sie beschäftigen sich mit verschiedenen Formen mathematischer Betrachtungs- und Vorgehensweisen, wodurch sie ihre geistige Beweglichkeit und ihre Offenheit für unterschiedliche Fragestellungen und Sichtweisen weiterentwickeln. Beim Entdecken von Gesetzmäßigkeiten sowie beim Vergleichen und Reflektieren von Lösungswegen verfeinern sie ihr Repertoire an Denk- und Handlungsstrategien. Indem sie Ergebnisse und eingesetzte Strategien überprüfen und bewerten, entwickeln sie auch ihre Urteilsfähigkeit weiter und bauen bei der exakten, systematischen Analyse einer Fragestellung, wie sie bei den meisten mathematischen

Problemen nötig ist, ihre Fähigkeit aus, einen Sachverhalt fundiert und unvoreingenommen einzuschätzen.

Daneben wird durch die Beschäftigung mit mathematischen Fragestellungen die grundsätzliche Bereitschaft der Lernenden zu geistiger Betätigung ausgebildet und ihre Konzentrationsfähigkeit gefördert. Beim Lösen mathematischer Probleme sind Ausdauer, Durchhaltevermögen und Zielstrebigkeit erforderlich – Eigenschaften, die nicht nur im täglichen Leben, sondern auch für die erfolgreiche Beschäftigung mit Wissenschaft benötigt werden. Dabei lernen sie auch, sorgfältig und genau zu arbeiten, beispielsweise beim Zeichnen von Graphen oder beim Arbeiten mit Termen, und entwickeln Kreativität und Fantasie, etwa beim Aufstellen und Begründen von Vermutungen. Das Fach Mathematik an beruflichen Schulen zum Erwerb der Fachhochschulreife durch die Ergänzungsprüfung ist demnach mehr als die bloße Vermittlung von Formeln und das Einüben von Rechenverfahren, sondern legt wichtige Grundlagen für strukturiertes Arbeiten, was für das spätere erfolgreiche Absolvieren eines Studiums sowie im beruflichen Alltag vorteilhaft ist.

## 2.2 Kompetenzorientierung im Fach Mathematik

### 2.2.1 Kompetenzstrukturmodell



Das dem Lehrplan zugrunde liegende Kompetenzstrukturmodell orientiert sich an den Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Primarstufe, für den Mittleren Schulabschluss und für die Allgemeine Hochschulreife (2003, 2004 und 2012) der Kultusministerkonferenz. Es unterscheidet zentrale Aspekte mathematischen Arbeitens, die als prozessbezogene allgemeine mathematische Kompetenzen beschrieben werden (äußerer Ring), und konkrete mathematische Inhalte, die nach Gegenstandsbereichen geordnet sind (innere Felder).

Die allgemeinen mathematischen Kompetenzen werden von den Lernenden in aktiver Auseinandersetzung mit den mathematischen Inhalten – also nicht isoliert davon – erworben und angewandt. Entsprechend lassen sich die allgemeinen mathematischen Kompetenzen vielfältig inhaltsbezogen konkretisieren, wobei in der Regel an jedem Fachinhalt alle allgemeinen mathematischen Kompetenzen entwickelt werden können und sollen.

### 2.2.2 Prozessbezogene Kompetenzen

#### **Argumentieren**

Diese Kompetenz ist sowohl für das Entwickeln als auch für das Verstehen, Erläutern und Bewerten mathematischer Aussagen erforderlich. Die Lernenden müssen dazu mit verschiedenen Begründungsmustern (z. B. Widerlegen mit Gegenbeispiel, indirekter Beweis, Kausalkette) vertraut werden.

#### **Probleme lösen**

Diese Kompetenz wird immer dann benötigt, wenn bei einer Aufgabe die Lösungsstruktur nicht offensichtlich ist oder mehrere aufeinander aufbauende Lösungsschritte notwendig sind, die Bearbeitung der Aufgabe also ein strategisches Vorgehen erfordert. Die Lernenden müssen folglich über Strategien zum Entwickeln von Lösungsideen sowie zum Ausführen geeigneter Lösungswege verfügen, z. B. Verwenden einer Skizze, Figur, Tabelle; Einzeichnen von Hilfslinien; systematisches Probieren; Vorwärts- oder Rückwärtsarbeiten; Zerlegen oder Ergänzen; Nutzen von Symmetrien oder Analogien.

#### **Modellieren**

Diese Kompetenz ist erforderlich, um einen realitätsbezogenen Sachverhalt zu verstehen, diesen zu strukturieren und schließlich die zugehörige Aufgabenstellung zu lösen. Insbesondere müssen dazu die Möglichkeiten der Mathematik hinsichtlich der Beschreibung der Realität erkannt und beurteilt werden. Eine Modellierung besteht in der Regel aus folgenden Teilschritten: Verstehen des Sachverhalts – Strukturieren und Vereinfachen des Sachverhalts – Übertragen des Sachverhalts in ein mathematisches Modell – Lösen der Aufgabe im mathematischen Modell – Interpretation und Reflexion des Ergebnisses im Sachzusammenhang (ggf. auch Diskussion von Grenzen des Modells).

#### **Darstellungen verwenden**

Diese Kompetenz wird benötigt, um Darstellungen zu erstellen oder zu verändern, zwischen verschiedenen Darstellungsformen zu wechseln und mit vorgegebenen Darstellungen durchdacht umzugehen (insbesondere aus vorgegebenen Darstellungen Informationen entnehmen und diese interpretieren oder bewerten). Unter Darstellungen werden u. a. Skizzen, Zeichnungen, Abbildungen, Fotos, Tabellen, Diagramme und Graphen, aber auch Formeln und sprachliche Darstellungen verstanden.

#### **Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen**

Diese Kompetenz umfasst folgende mathematische Fähigkeiten und Fertigkeiten: Anwenden von Definitionen, Regeln, Algorithmen und Formeln; formales Arbeiten mit Zahlen, Größen, Variablen, Termen, Gleichungen, Funktionen und Vektoren; Ausführen von Lösungs- und Kontrollverfahren; Anfertigung von Skizzen und Zeichnungen, Verwenden von Hilfsmitteln einschließlich geeigneter Software. Diese Kompetenz beinhaltet auch mathematisches Fakten- und Regelwissen, einschließlich des Wissens über die Unterscheidung von

mathematischen Regeln und Konventionen (z. B. Punkt vor Strich), Axiomen und begründbaren Aussagen.

### **Kommunizieren**

Diese Kompetenz ist für die Bearbeitung nahezu jeder Aufgabe erforderlich. Sie besitzt sowohl eine passive als auch eine aktive Komponente. Einerseits müssen schriftliche Texte oder mündliche Aussagen mit mathematischen Inhalten verstanden, andererseits Überlegungen oder Ergebnisse schriftlich oder mündlich unter Verwendung der Fachsprache in angemessener Form dargestellt und präsentiert werden können.

## **2.2.3 Gegenstandsbereiche**

### **Zahlen und Operationen**

Dieser Gegenstandsbereich thematisiert zum einen die Darstellung von Zahlen sowie Zahlbereichserweiterungen (bis zur Verallgemeinerung des Zahlbegriffs durch Tupel), zum anderen Rechengesetze sowie Verfahren, denen Algorithmen zugrunde liegen, z. B. das Lösen eines Gleichungssystems.

### **Größen und Messen**

In diesem Gegenstandsbereich steht die Bestimmung von Größen im Vordergrund, die nur im weiteren Sinne als Ergebnisse von Messprozessen aufgefasst werden können. Dies umfasst z. B. die Berechnung von Längen-, Flächen- und Volumenmaßen bei analytischen und geometrischen Fragestellungen sowie von Änderungsraten.

### **Raum und Form**

Dieser Gegenstandsbereich befasst sich mit dem Erkennen und Beschreiben geometrischer Strukturen (Punkte, Geraden, Ebenen) sowie der Ermittlung ihrer gegenseitigen Lage in der Ebene und im Raum.

### **Funktionaler Zusammenhang**

Dieser Gegenstandsbereich zielt darauf ab, funktionale Vorstellungen und Denkweisen aufzubauen. Dabei erstreckt sich das Spektrum von der Einführung von Variablen bis hin zu Methoden der Analysis.

### **Daten und Zufall**

Dieser Gegenstandsbereich vernetzt Begriffe und Methoden zur Beschreibung und Modellierung zufallsabhängigen Geschehens mit solchen zur Aufbereitung und Interpretation von statistischen Daten und umfasst dabei auch Aspekte der beurteilenden Statistik.

### 2.2.4 Förderung von Kompetenzen

Von entscheidender Bedeutung für die Entwicklung mathematischer Kenntnisse, Fähigkeiten und Fertigkeiten ist es, dass die Lernenden zu vertieftem Nachdenken und intensiver Auseinandersetzung mit den Lerninhalten angeregt werden. Diese kognitive Aktivierung ist Voraussetzung für den Erwerb mathematischer Kompetenzen. Wesentlich hierfür sind die eingesetzten Fragen, Aufgaben und Medien sowie deren Einbettung in den Unterricht an beruflichen Schulen zum Erwerb der Fachhochschulreife durch die Ergänzungsprüfung. Gute Aufgaben bieten ein breites Spektrum im Hinblick auf die Art der Fragestellung, den Kontext und das Anforderungsniveau, sie wecken Interesse und regen die Lernenden zur Reflexion sowie zur selbständigen Beschäftigung mit Mathematik an.

Für den Mathematikunterricht ist zu berücksichtigen, dass sich kognitive Aktivierung sowohl z. B. in fragend entwickelnden Unterrichtsphasen als auch in anderen Arbeits- oder Sozialformen erreichen lässt und generell weitgehend methodenunabhängig ist. Die Variation der Unterrichtsmethoden bietet jedoch einen günstigen Rahmen für die Entwicklung mathematischer Kompetenzen und hat positive Effekte auf die Motivation der Lernenden.

Kennzeichen eines guten Mathematikunterrichts sind mathematische Fragestellungen, von denen sich die Lernenden angesprochen fühlen. Um dies zu gewährleisten, sind die Berücksichtigung von Vorerfahrungen sowie ein altersgemäßes Anknüpfen an die Lebenswelt der Lernenden unerlässlich. Erfolgreicher Mathematikunterricht setzt Prinzipien wie kumulatives, vernetzendes und entdeckendes Lernen um. In gutem Mathematikunterricht erfolgt zudem systematisches Wiederholen sowie Lernen aus Fehlern (Spiralcurriculum). Die verschiedenen Lerninhalte müssen von den Lernenden im Verlauf der schulischen Laufbahn bewusst aufeinander bezogen und miteinander verknüpft werden können. Dadurch wird ihnen ihr persönlicher Lernzuwachs deutlich, wodurch auch ihre Motivation wächst.

Im Mathematikunterricht muss dabei auch die Entwicklung grundlegender mathematischer Fertigkeiten sowie die Festigung grundlegender Kenntnisse im Blick behalten werden. Deshalb müssen regelmäßig geeignete Aufgaben bereitgestellt werden, die von den Lernenden ohne elektronische Hilfsmittel (z. B. Taschenrechner, Software) bzw. ohne Merkhilfe oder Formelsammlung zu bearbeiten sind.

### 2.3 Aufbau des Fachlehrplans im Fach Mathematik

Der Fachlehrplan Mathematik gliedert sich für die Themengebiete Analysis und analytische Geometrie jeweils in Lernbereiche (LB), die nach der jeweiligen inhaltlichen Schwerpunktsetzung benannt sind.

Eine mögliche sinnvolle Abfolge der Lernbereiche innerhalb der Analysis bzw. analytischen Geometrie im Unterricht wird durch den Fachlehrplan vorgeschlagen. Die bei den Lernbereichen angegebene prozentuale Gewichtung bezieht sich auf die Gesamtstundenzahl der zur Verfügung stehenden Zeit im Fach Mathematik. Sie soll lediglich die zeitliche Planung unterstützen und ist keineswegs verbindlich. Dies würde andernfalls der grundsätzlichen Philosophie eines kompetenzorientierten Lehrplans widersprechen.

Die Lernbereiche der Analysis und analytischen Geometrie sollen je nach Schulart und zur Verfügung stehender Stundenzahl sinnvoll auf die Jahrgangsstufen verteilt und dort kombiniert werden. Es ist nicht zwingend erforderlich, einen Lernbereich vollständig in einer Jahrgangsstufe zu unterrichten, eine Aufteilung auf verschiedene Jahrgangsstufen ist möglich. Ein logischer fachlicher und didaktischer Aufbau ist dabei stets zu gewährleisten.

Innerhalb der Lernbereiche sind die ausformulierten Kompetenzerwartungen und nachfolgend explizit die Inhalte hierzu aufgeführt. Kompetenzerwartungen und Inhalte müssen stets in Kombination betrachtet werden. Eine starke Orientierung an den Kompetenzerwartungen sowie die Verknüpfung von prozessbezogenen Kompetenzen und Inhalten werden durch den Lehrplan sichergestellt. Bei den einzelnen Formulierungen stehen jeweils bestimmte prozessbezogene Kompetenzen im Vordergrund. Da jedoch die allgemeinen mathematischen Kompetenzen immer im Verbund erworben werden, soll in jedem Lernbereich der Aufbau aller prozessbezogenen Kompetenzen gefördert werden.

## 2.4 Grundlegende Kompetenzen

- Analysis
  - Beschreibung und Ermittlung der grundlegenden Eigenschaften von ganzrationalen Funktionen und deren Graphen (ohne Differenzialrechnung)
  - Bestimmung von Funktionstermen ganzrationaler Funktionen aus vorgegebenen Informationen
  - Einführung der Differenzialrechnung
  - Verwendung der Differenzialrechnung zur Bestimmung von lokalen Änderungsraten, maximalen Monotonie- und Krümmungsintervallen sowie Extrem- und Wendepunkten
  - Beschreibung des Zusammenhangs zwischen dem Graphen einer Funktion und dem Graphen der zugehörigen ersten und zweiten Ableitungsfunktion
  - Aufstellen von Termen ganzrationaler Funktionen mithilfe der Differenzialrechnung und linearer Gleichungssysteme
  - Lösung anwendungsorientierter Optimierungsprobleme
  - Beschreibung von Wachstums- und Zerfallsprozessen mithilfe der Exponentialfunktion
  - Diskussion von Funktionen, die aus der Verknüpfung und/oder Verkettung der e-Funktion mit linearen Funktionen entstehen
  - Lösen von anwendungsorientierten Problemstellungen, bei denen Funktionen auftreten, die aus der Verknüpfung und/oder Verkettung der e-Funktion mit linearen Funktionen entstehen
  - Berechnung von Flächenbilanzen und Maßzahlen von Flächeninhalten endlicher Flächenstücke mithilfe der Integralrechnung

- Analytische Geometrie
  - Darstellung von Vektoren als Linearkombination von Vektoren und Entscheidung, ob eine endliche Menge von Vektoren linear abhängig oder unabhängig ist
  - Bestimmung der Lösungsmenge von linearen Gleichungssystemen mit dem Gauß'schen Eliminationsverfahren
  - Berechnung des Winkels zwischen Vektoren mithilfe des Skalarprodukts
  - Berechnung von Flächen- und Rauminhalten mithilfe des Vektorprodukts bzw. Spatprodukts
  - Ermittlung von Geraden- und Ebenengleichungen
  - Beschreibung spezieller Lagen von Geraden und Ebenen im Koordinatensystem
  - Untersuchung der gegenseitigen Lage von Punkten, Geraden und Ebenen
  - Ermittlung von Abständen, Schnittmengen und ggf. der Größe von Schnittwinkeln

## 2.5 Querverbindungen zu anderen Fachbereichen

Die Mathematik steht aufgrund ihrer Universalität in enger Beziehung zu einer Vielzahl anderer Disziplinen. Sie ist unverzichtbar für Naturwissenschaften, Technik und Wirtschaft, spielt aber auch beispielsweise in der Psychologie, Soziologie, Pädagogik oder in der Medizin eine wichtige Rolle. Dementsprechend gibt es vielfältige Verknüpfungen mit der Mathematik. Insbesondere in der Physik liegt bei einer Fülle von Themen eine enge Kooperation nahe. Mit dem Fach Informatik hat die Mathematik u. a. die Konzepte Algorithmus, Funktion und Graph sowie die Methoden des Abstrahierens und des Modellierens gemeinsam und bildet die Basis für viele moderne Technologien, wie z. B. künstliche Intelligenz. Aber auch mit dem Fach Chemie und gesellschaftswissenschaftlichen Fächern bestehen Anknüpfungspunkte. Die Fächer aus dem Wirtschaftsbereich greifen zudem etwa auf Elemente der Funktionenlehre zurück. Neben konkreten thematischen Verbindungen können Einblicke in die Geschichte der Mathematik und in die Biografien von Mathematikerinnen und Mathematikern Verknüpfungen zu anderen Disziplinen aufzeigen.

## 2.6 Beitrag des Faches Mathematik zu den übergreifenden Bildungs- und Erziehungszielen

Das Fach Mathematik leistet zu zahlreichen übergreifenden Bildungs- und Erziehungszielen wertvolle Beiträge. Die wichtigsten Aspekte sind im Folgenden aufgeführt:

### **Medienbildung/Digitale Bildung**

Darstellungen von Informationen und Zusammenhängen, z. B. in Diagrammen, Statistiken und Grafiken, spielen in der Mathematik eine zentrale Rolle. Die Lernenden werden befähigt, solche medialen Darstellungen (z. B. in der Zeitung) kritisch zu reflektieren und zu bewerten.

Gleiches gilt für den Einsatz technischer Hilfsmittel wie Taschenrechner oder geeignete Software. Hier steht neben dem Erlernen einer sachgerechten Nutzung von Informations- und Kommunikationstechnologie und dem Erleben außergewöhnlicher Einblicke insbesondere die Frage im Vordergrund, wann der Einsatz sinnvoll ist und welche Grenzen zu beachten sind.

### **Sprachliche Bildung**

Mathematik wird aufgrund ihrer hoch entwickelten, international einheitlich verwendeten Symbolik oft als eigene Sprache bezeichnet. Im schulischen Kontext üben sich die Lernenden jedoch nicht nur in der Verwendung dieser Symbolik, sondern verbessern insbesondere beim Beschreiben und verbalen Begründen mathematischer Zusammenhänge auch ihre allgemeine Sprachkompetenz. Ihr Sprachgefühl wird insbesondere beim Analysieren von Aussagen (z. B. Unterscheiden von Voraussetzung und Behauptung, Satz und Kehrsatz) weiterentwickelt. Das exakte und logische Formulieren von Argumentationsketten fördert u. a. eine prägnante Ausdrucksweise.

### **Kulturelle Bildung**

Hoch entwickelte Kulturen haben sich seit jeher durch ein hohes Ansehen und einen entsprechenden Stellenwert der Mathematik ausgezeichnet. Im Mathematikunterricht gewinnen die Lernenden einen Einblick in kulturelle Leistungen, die Grundlage für wesentliche Fortschritte, z. B. in der Astronomie, der Technik und der Architektur, waren. Die Beiträge bedeutender Mathematikerinnen und Mathematiker bereichern den Lernprozess nicht nur in der Geometrie (z. B. Pythagoras, Thales), sondern in vielen weiteren mathematischen Teildisziplinen (insbesondere Infinitesimalrechnung: Leibniz und Newton) und zeigen das gemeinsame Streben der Menschen nach Erkenntnisgewinn auf.

### **Technische Bildung**

Die Lernenden ergänzen ihr grundlegendes Verständnis der Funktionsweise technischer Geräte. Im Mathematikunterricht entwickeln sie zudem die Fähigkeit, sich selbständig Funktionsprinzipien moderner Technologien anhand von Fachtexten zu erschließen.

### **Alltagskompetenz und Lebensökonomie, Bildung für Nachhaltige Entwicklung (Umweltbildung, Globales Lernen) und Ökonomische Verbraucherbildung**

Die Lernenden erwerben eine Vielzahl mathematischer Kenntnisse und Strategien zur verständigen Teilhabe an wichtigen gesellschaftlichen Fragestellungen sowie zur Bewältigung von Alltagssituationen. So sind z. B. Wachstumsvorgänge, die Arbeit mit Diagrammen und Statistiken, die Prozent- und Zinsrechnung sowie die Grundlagen der Funktionenlehre zentrale Themen der Mathematik, mit denen sich die Lernenden vertieft auseinandersetzen. Dies befähigt sie, typische Fragestellungen aus Ökonomie und Ökologie (z. B. im Zusammenhang mit dem Klimaschutz), aus Finanzwelt und Versicherungswesen und aus der Politik (z. B. im Zusammenhang mit Wahlen und Umfragen) sowie im Zusammenhang mit einer sicheren Teilnahme am Straßenverkehr zu beantworten, als verantwortungsvolle Bürgerinnen und Bürger Informationen aus diesen Bereichen kritisch zu hinterfragen und dabei sowohl ihre Einstellungen zu überdenken als auch ihr Handeln zu optimieren.

### 3 Übersicht über die Lernbereiche

Mathematik (Ergänzungsprüfung in technischen Ausbildungsrichtungen)		
<b>Analysis</b> 65 %	LB A1	Lineare und quadratische Funktionen (ca. 5 %)
	LB A2	Ganzrationale Funktionen ab Grad 3 (ca. 15 %)
	LB A3	Differenzialrechnung bei ganzrationalen Funktionen (ca. 25 %)
	LB A4	Exponentialfunktionen (ca. 15 %)
	LB A5	Integralrechnung (ca. 5 %)
<b>analytische Geometrie</b> 35 %	LB G1	Vektoren im $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ , lineare Unabhängigkeit und lineare Gleichungssysteme (ca. 10 %)
	LB G2	Produkte von Vektoren (ca. 5 %)
	LB G3	Geraden und Ebenen im $\mathbb{R}^3$ (ca. 10 %)
	LB G4	Geometrische Anwendungen im $\mathbb{R}^3$ (ca. 10 %)

## 4 Fachlehrplan

### Lernbereich A1: Lineare und quadratische Funktionen (ca. 5 %)

#### Anmerkungen

In diesem Lernbereich wird auch geeignete Software zur Visualisierung von Funktionsgraphen sowie des Einflusses von Veränderungen des Wertes eines Parameters darauf eingesetzt.

#### Kompetenzerwartungen

Die Lernenden ...

- beschreiben und ermitteln die wesentlichen Eigenschaften von linearen und quadratischen Funktionen und deren Graphen, um u. a. die zugehörigen Graphen zu skizzieren.
- ermitteln die Wertemenge von linearen und quadratischen Funktionen unter Beachtung ihrer maximalen bzw. eingeschränkten Definitionsmenge.
- ermitteln anhand von vorgegeben Eigenschaften oder Graphen linearer bzw. quadratischer Funktionen passende Funktionsgleichungen.
- ermitteln die Koordinaten der Schnittpunkte zweier Funktionsgraphen.
- ermitteln bei linearen und quadratischen Funktionen, die von einem linearen Parameter abhängen, den Wert des Parameters so, dass die Funktion bzw. deren Graph eine vorgegebene, wesentliche Eigenschaft besitzt.

#### Inhalte

- Lage und Vielfachheit von Nullstellen, Schnittpunkte des Graphen mit den Koordinatenachsen, Wertemenge bei eingeschränkter Definitionsmenge
- lineare Funktionen: allgemeine Form und Punkt-Steigungs-Form, Steigung und  $y$ -Achsenabschnitt einer Geraden, grafische Darstellung
- quadratische Funktionen: allgemeine Form, Scheitelpunktform, Linearfaktorform, grafische Darstellung, Öffnungsfaktor, Verschiebung des Graphen entlang der  $x$ - bzw.  $y$ -Achse, Scheitelpunkt und Öffnungsrichtung einer Parabel
- Schnittpunkte von Funktionsgraphen
- Aufstellen von Funktionstermen, auch mithilfe des Additions- oder Einsetzungsverfahrens
- lineare und quadratische Funktionen mit linearem Parameter: Bestimmung des Werts des Parameters für eine vorgegebene Eigenschaft, z. B. Anzahl der Nullstellen einer quadratischen Funktion

**Lernbereich A2: Ganzrationale Funktionen ab Grad 3 (ca. 15 %)****Anmerkungen**

In diesem Lernbereich wird auch geeignete Software zur Visualisierung von Funktionsgraphen eingesetzt.

**Kompetenzerwartungen**

Die Lernenden ...

- ermitteln Nullstellen ganzrationaler Funktionen samt ihrer Vielfachheit mithilfe geeigneter Verfahren. Sie stellen den Funktionsterm auch vollständig faktorisiert dar und bestimmen das Vorzeichenverhalten der Funktionswerte in der Umgebung der Nullstellen, um damit den Graphen der Funktion zu skizzieren.
- berechnen die Koordinaten der gemeinsamen Punkte zweier Funktionsgraphen.
- beschreiben das Verhalten der Funktionswerte ganzrationaler Funktionen für  $x \rightarrow -\infty$  bzw.  $x \rightarrow \infty$ .
- untersuchen das Symmetrieverhalten von Funktionsgraphen bzgl. des Koordinatensystems.
- zeichnen bzw. skizzieren die Graphen von ganzrationalen Funktionen, um z. B. die Lösungsmenge von Ungleichungen, in denen ganzrationale Terme vorkommen, anzugeben. Dabei nutzen sie vorgegebene oder bereits durch Rechnung ermittelte Eigenschaften der Funktionen bzw. Funktionsgraphen.
- treffen geeignete Aussagen zu Fragestellungen hinsichtlich anwendungsbezogener Vorgänge, die sich durch ganzrationale Funktionen modellieren lassen.
- ermitteln aus vorgegebenen Informationen bzgl. einer ganzrationalen Funktion bzw. deren Graphen den dazugehörigen Funktionsterm, um damit auf weitere Eigenschaften der Funktion und/oder auf den weiteren Verlauf des Graphen zu schließen.

**Inhalte**

- Grad und Funktionsterm ganzrationaler Funktionen, Leitkoeffizient, Koeffizient, Polynom
- Nullstellen und deren Vielfachheit, faktorisierte Darstellung des Funktionsterms, grafische Darstellung
- anschauliches Verständnis der Stetigkeit von Funktionen
- Nullstellenbestimmung durch Ausklammern, Anwenden binomischer Formeln, systematisches Probieren, Polynomdivision und Substitution

- Schnittpunkte zweier Funktionsgraphen
- Verhalten der Funktionswerte für  $x \rightarrow -\infty$  bzw.  $x \rightarrow \infty$  (qualitativ)
- Symmetrie von Funktionsgraphen: Achsensymmetrie zur  $y$ -Achse, Punktsymmetrie zum Ursprung
- Funktionsgraph: Zeichnung, Skizze
- Lösungsmenge von Ungleichungen
- Aufstellen von Funktionstermen, Lösen von dabei auftretenden Gleichungssystemen mit maximal drei Unbekannten

### Lernbereich A3: Differenzialrechnung bei ganzrationalen Funktionen (ca. 25 %)

#### Anmerkungen

In diesem Lernbereich wird auch geeignete Software zur Visualisierung von Funktionsgraphen, des Übergangs von der Sekanten- zur Tangentensteigung sowie der Lage von Hoch-, Tief-, Wende- und Terrassenpunkten eingesetzt. Außerdem werden die Zusammenhänge zwischen Funktionsgraph und den Graphen der Ableitungsfunktionen veranschaulicht. Weiter wird in diesem Lernbereich auch geeignete Software zur Visualisierung des Graphen der Zielfunktion bei Optimierungsaufgaben verwendet.

#### Kompetenzerwartungen

Die Lernenden ...

- berechnen Werte von Differenzenquotienten und deuten diese geometrisch als Sekantensteigungen. Außerdem interpretieren sie den Differenzenquotienten als mittlere Änderungsrate und nutzen diese Interpretation auch im Sachkontext, z. B. durchschnittliche Steigung eines Wegs, Durchschnittsgeschwindigkeit.
- berechnen Werte von Differenzialquotienten, deuten diesen geometrisch als Tangentensteigung und interpretieren ihn als lokale Änderungsrate. Sie nutzen diese Interpretation auch im Sachkontext (z. B. Momentangeschwindigkeit, größte Abnahmegeschwindigkeit der Konzentration eines Medikamentes im Blut nach der Einnahme des Medikamentes) und argumentieren damit. Sie ermitteln für ganzrationale Funktionen Werte für Differenzialquotienten auch grafisch.
- ermitteln die größtmöglichen Intervalle, in denen der Graph einer ganzrationalen Funktion jeweils gleiches Monotonieverhalten bzw. Krümmungsverhalten aufweist. Weiterhin begründen sie damit die Existenz von relativen Extrempunkten und Wendepunkten. Sie bestimmen ferner Art und Koordinaten solcher Punkte.

- entscheiden unter Berücksichtigung von ggf. vorhandenen Randextrempunkten über die Existenz und Lage von absoluten Extrempunkten eines Funktionsgraphen. Damit ermitteln sie auch die Wertemenge der zugehörigen Funktion.
- berechnen die Änderungsrate einer Größe mithilfe von Ableitungsfunktionen und bestimmen insbesondere Stellen stärksten Wachstums und stärkster Abnahme.
- beschreiben und begründen, wie der Graph einer Funktion mit dem Verlauf der Graphen der zugehörigen ersten und zweiten Ableitungsfunktion zusammenhängt, um ausgehend vom Graphen einer dieser Funktionen den qualitativen Verlauf der jeweils anderen Funktionsgraphen zu skizzieren.
- ermitteln aus vorgegebenen Informationen bzgl. einer ganzrationalen Funktion und ihrer Ableitungsfunktionen (bzw. deren Graphen) den zugehörigen Funktionsterm. Damit bestimmen sie weitere Eigenschaften der Funktion und/oder des Graphen. Ggf. auftretende lineare Gleichungssysteme lösen sie mit bekannten Lösungsverfahren.
- lösen anwendungsorientierte Optimierungsprobleme (z. B. das Problem des geringsten Materialverschnitts) mit den Methoden der Differenzialrechnung. Dabei achten sie auf die Verwendung einer sinnvollen Definitionsmenge für die zur Modellierung verwendete Zielfunktion und berücksichtigen deren ggf. vorhandene Randextrema bezüglich dieser Definitionsmenge.

#### Inhalte

- Differenzenquotient, Sekantensteigung, mittlere Änderungsrate
- Differenzialquotient, Tangentensteigung, lokale Änderungsrate
- Ableitungsfunktion
- Tangentengleichung
- Ableitungsregeln: Potenz-, Faktor- und Summenregel
- lokale und absolute Extrempunkte, Randextrempunkte, Wendepunkte, Terrassenpunkte
- maximale Monotonie- und Krümmungsintervalle
- Wertemenge von Funktionen, u. a. mit eingeschränkter Definitionsmenge
- Zusammenhang der Graphen von Funktion und Ableitungsfunktionen
- Aufstellen von Funktionstermen, Lösen von linearen Gleichungssystemen mit maximal drei Unbekannten
- anwendungsorientierte Optimierungsprobleme

**Lernbereich A4: Exponentialfunktionen (ca. 15 %)**

**Anmerkungen**

In diesem Lernbereich wird auch geeignete Software zur Visualisierung des Einflusses der Werte von  $a, b, c, d$  und  $y_0$  auf den Verlauf des Graphen einer Exponentialfunktion verwendet.

**Kompetenzerwartungen**

Die Lernenden ...

- beschreiben und ermitteln die grundlegenden Eigenschaften von Funktionen der Form  $f: x \mapsto a \cdot b^{c(x-d)} + y_0$  ( $b > 0$ ), um bei exponentiellen Vorgängen in Realsituationen Vorhersagen zu treffen.
- entscheiden, welchen Einfluss eine Veränderung der Werte der Parameter  $a, b, c, d$  und  $y_0$  jeweils auf den Verlauf des Graphen einer Funktion der Form  $f: x \mapsto a \cdot b^{c(x-d)} + y_0$  mit  $b > 0$  und insbesondere  $b = e$  (Eulersche Zahl) hat. Umgekehrt bestimmen sie anhand eines vorgegebenen Graphen einer solchen Funktion möglichst viele Informationen über den zugehörigen Funktionsterm.
- modellieren den exponentiellen Zusammenhang zweier Größen in anwendungsorientierten Problemstellungen (z. B. Kapitalverzinsung, radioaktiver Zerfall, Bakterienwachstum) durch geeignete Funktionen, um Aussagen über die Entwicklung einer Größe in Abhängigkeit der anderen Größe zu treffen.
- berechnen, für welche Werte der unabhängigen Größe (z. B. Zeit  $t$ ) die abhängige Größe (z. B. Anzahl der Bakterien) bestimmte Werte annimmt, um beispielsweise Vorhersagen bezüglich der zeitlichen Entwicklung einer Populationsgröße zu treffen. Sie lösen auftretende Exponentialgleichungen.
- ermitteln die Eigenschaften von Funktionen der Form  $f: x \mapsto g(x) \cdot e^{h(x)} + y_0$  auch unter Verwendung der Differentialrechnung. Dabei sind  $g$  und  $h$  lineare Funktionen. Die in diesem Zusammenhang auftretenden Ableitungen berechnen sie unter Verwendung der Kettenregel und der Produktregel.
- zeichnen bzw. skizzieren Funktionsgraphen unter Verwendung der zuvor ermittelten Eigenschaften der untersuchten Funktionen.
- lösen anwendungsorientierte Problemstellungen (z. B. Analyse der Entwicklung der Schadstoffkonzentration in der Atmosphäre), bei denen durch Idealisierung und/oder Modellierung Funktionen der Form  $f: x \mapsto g(x) \cdot e^{h(x)} + y_0$  auftreten. Dabei sind  $g$  und  $h$  lineare Funktionen.

**Inhalte**

- Eigenschaften der Funktion bzw. des Graphen: Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen, Asymptote, exponentielle Zu- oder Abnahme, Wertemenge

- Einfluss der Parameter auf den Verlauf des Graphen
- natürliche Exponentialfunktion
- Modellierung anwendungsorientierter Problemstellungen
- Lösen von Exponentialgleichungen mithilfe des Logarithmus
- Logarithmusgesetz  $\log_b(x^a) = a \cdot \log_b(x)$
- Eigenschaften von Funktionen der Form  $f: x \mapsto g(x) \cdot e^{h(x)} + y_0$  mit linearen Funktionen  $g$  und  $h$  bzw. deren Graphen: Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen, Extrempunkte, Wendepunkte, Verhalten für  $x \rightarrow -\infty$  bzw.  $x \rightarrow \infty$  (Limes-Schreibweise), maximale Monotonie- und Krümmungsintervalle, Wertemenge
- Ketten- und Produktregel
- Skizzieren und Zeichnen der Funktionsgraphen

### Lernbereich A5: Integralrechnung (ca. 5 %)

#### Anmerkungen

In diesem Lernbereich wird auch geeignete Software zur Visualisierung von ganz oder teilweise durch Funktionsgraphen begrenzte Flächenstücke und von Flächenbilanzen verwendet.

#### Kompetenzerwartungen

Die Lernenden ...

- führen den Nachweis, dass eine vorgegebene Funktion  $F$  eine Stammfunktion einer Funktion  $f$  ist.
- bestimmen Terme von Stammfunktionen ganzzahliger Funktionen und von Funktionen der Form  $f: x \mapsto a \cdot e^{c(x-d)} + y_0$ .
- beschreiben und begründen, wie der Graph einer Funktion mit dem Graphen einer zugehörigen Stammfunktion zusammenhängt.
- berechnen mithilfe von Stammfunktionen Werte von bestimmten Integralen, um damit Flächenbilanzen und Maßzahlen von Flächeninhalten endlicher Flächenstücke zu bestimmen, die durch vertikale Geraden und/oder Graphen von Funktionen begrenzt sind, und nutzen ihr Verständnis, dass das bestimmte Integral eine Flächenbilanz beschreibt, für Argumentationen im Sachzusammenhang.

#### Inhalte

- Stammfunktion, unbestimmtes Integral, bestimmtes Integral

- Faktorregel, Summenregel, Intervalladditivität, Vertauschen der Integrationsgrenzen
- Flächenbilanz, Berechnung der Maßzahl von Flächeninhalten

**Lernbereich G1: Vektoren im  $\mathbb{R}^2$  und  $\mathbb{R}^3$ , lineare Unabhängigkeit und lineare Gleichungssysteme (ca. 10 %)****Kompetenzerwartungen**

Die Lernenden ...

- visualisieren die Addition, Subtraktion und skalare Multiplikation von Vektoren des Anschauungsraums mithilfe von geeigneten Repräsentanten, um z. B. grafisch die resultierende Kraft auf einen Körper zu bestimmen, auf den mehrere Teilkräfte wirken.
- stellen die Vektoren des Anschauungsraums durch Spaltenvektoren (bzgl. der Standardbasis) dar und bilden Linearkombinationen von Vektoren, um damit die Koordinaten der Ortsvektoren von speziellen Punkten in geometrischen Objekten (z. B. Schwerpunkt eines Dreiecks) im dreidimensionalen Anschauungsraum zu berechnen.
- entscheiden, ob eine endliche Menge von Vektoren linear abhängig oder linear unabhängig ist.
- berechnen die Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems mit maximal drei Gleichungen und drei Unbekannten, indem sie auch unter Verwendung der erweiterten Koeffizientenmatrix die elementaren Umformungen des Gauß'schen Eliminationsverfahren (Gauß-Verfahren) anwenden, um auch anwendungsorientierte Aufgaben zu lösen.

**Inhalte**

- Addition, Subtraktion und skalare Multiplikation von Vektoren
- Spaltenvektor, Ortsvektor
- Linearkombination von Vektoren
- lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit von Vektoren
- Gauß-Verfahren zur Bestimmung der Lösungsmenge von linearen Gleichungssystemen mit maximal drei Gleichungen und drei Unbekannten

**Lernbereich G2: Produkte von Vektoren (ca. 5 %)****Kompetenzerwartungen**

Die Lernenden ...

- berechnen das Skalarprodukt zweier Vektoren, um z. B. den Kosinus des Winkels zwischen beiden Vektoren zu ermitteln. Sie bestimmen daraus die Maßzahl des Winkels zwischen den beiden Vektoren und prüfen, ob die beiden Vektoren orthogonal zueinander sind.
- bestimmen das Vektorprodukt zweier Vektoren sowie dessen Betrag, um damit z. B. einen gemeinsamen Normalenvektor der beiden Vektoren zu bilden sowie Maßzahlen von Flächeninhalten bei Parallelogrammen und Dreiecken zu berechnen.
- ermitteln das Spatprodukt dreier Vektoren sowie dessen Betrag, um damit u. a. die Maßzahl der Rauminhalte von geometrischen Körpern (z. B. Spat, Pyramide) zu berechnen.

**Inhalte**

- Skalarprodukt, Betrag eines Vektors, Winkel zwischen zwei Vektoren
- Vektorprodukt, Normalenvektor, Maßzahl des Flächeninhaltes von Parallelogramm und Dreieck
- Spatprodukt, Maßzahl des Rauminhalts von Spat und Pyramiden

**Lernbereich G3: Geraden und Ebenen im  $\mathbb{R}^3$  (ca. 10 %)****Anmerkungen**

In diesem Lernbereich wird auch geeignete Software zur Visualisierung von Punktmengen im  $\mathbb{R}^3$  und deren Lage im Koordinatensystem verwendet.

**Kompetenzerwartungen**

Die Lernenden ...

- beschreiben Geraden und Ebenen in einem Koordinatensystem des  $\mathbb{R}^3$  durch geeignete Gleichungen in Parameterform und ermitteln für Ebenen auch mögliche Gleichungen in Koordinatenform, z. B. mithilfe des Normalenvektors der Ebene.
- folgern aus Geraden- und Ebenengleichungen eventuell vorhandene spezielle Lagen der zugehörigen Geraden und Ebenen im Koordinatensystem des  $\mathbb{R}^3$  (Parallelität zu Koordinatenachsen bzw. zu Koordinatenebenen).

**Inhalte**

- Parameterform einer Geradengleichung
- Parameter-, Normalen- und Koordinatenform einer Ebenengleichung
- spezielle Lage von Geraden und Ebenen im Koordinatensystem

**Lernbereich G4: Geometrische Anwendungen im  $\mathbb{R}^3$  (ca. 10 %)****Anmerkungen**

In diesem Lernbereich werden keine Abstände von windschiefen Geraden bestimmt.  
In diesem Lernbereich wird auch geeignete Software zur Visualisierung von Lagebeziehungen von verschiedenen Punktmengen im  $\mathbb{R}^3$  zueinander verwendet.

**Kompetenzerwartungen**

Die Lernenden ...

- bestimmen die gegenseitige Lage zwischen zwei gleichartigen sowie verschiedenartigen Objekten (Punkt, Gerade, Ebene) in einem kartesischen Koordinatensystem des  $\mathbb{R}^3$ .
- berechnen Abstände zwischen zwei gleichartigen sowie verschiedenartigen Objekten (Punkt, Gerade, Ebene) und ermitteln vorhandene Schnittmengen und die Größe von Schnittwinkeln. Damit lösen sie auch anwendungsbezogene Probleme.

**Inhalte**

- Lagebeziehungen zwischen Punkten, Geraden und Ebenen
- Abstands- und Winkelberechnung, Lotfußpunktmethode
- Schnittmengen

