

Online-Version/nicht für amtliche Zwecke  
**Fachlehrplan für Mathematik**

**Inhaltsübersicht**

Vorbemerkungen	1190	Grundkurs:	
Jahrgangsstufe 5	1192	Jahrgangsstufe 12	1229
Jahrgangsstufe 6	1195	Jahrgangsstufe 13	1234
Jahrgangsstufe 7	1199	Leistungskurs:	
Jahrgangsstufe 8	1203	Jahrgangsstufe 12	1241
Jahrgangsstufe 9	1207	Jahrgangsstufe 13	1250
Jahrgangsstufe 10	1213		
Jahrgangsstufe 11	1220		

**Vorbemerkungen**

Die Fachlehrpläne bilden die vierte Ebene des Lehrplans für das bayerische Gymnasium (KWMBI I 1990 So.-Nr. 3 S. 125 ff.). Sie enthalten eine ausführliche Darstellung der Ziele und Inhalte des Fachunterrichts.

Für jeden Lehrplanabschnitt werden zunächst **Ziele** beschrieben. Die Beschreibung dieser Ziele soll jeweils deutlich machen, auf welche Art von Entwicklungsprozessen es im Unterricht bei den Schülern ankommt. Bei diesen Prozessen lassen sich vier didaktische Schwerpunkte (a. a. O., S. 138, Ziff. 19) unterscheiden, die für schulisches Lernen im Hinblick auf die personale Entwicklung der Schüler bedeutsam sind: (1.) Wissen, (2.) Können und Anwenden, (3.) Produktives Denken und Gestalten, (4.) Wertorientierung. Diese didaktischen Schwerpunkte stehen in einem inneren Zusammenhang, doch hat jeder seinen eigenen Charakter, der in der Zielformulierung zum Ausdruck kommt.

Danach kommen die **Inhalte**; sie werden in zwei Spalten dargestellt, in der linken aus der Sicht des Faches (vor allem Begriffe, Fakten, Themenbereiche, Daten), in der rechten aus der Sicht des Lehrens und Lernens (vor allem Denkweisen, Prozesse, Wertvorstellungen, daneben auch stoffliche Präzisierungen).

Die **Reihenfolge**, in der die Ziele und Inhalte angeordnet sind, ist nicht verbindlich; sie stellt eine Empfehlung dar und kann innerhalb einer Jahrgangsstufe vom Fachlehrer nach eigenem fachlichem und pädagogischem Ermessen abgeändert werden.

Intensives **Einüben** des Lehrstoffs und häufiges **Wiederholen** sind im Mathematikunterricht für das Erreichen der Lernziele unverzichtbar.

Hinweise auf **Querbezüge** zu anderen Fächern und auf **fächerübergreifende Bildungs- und Erziehungsaufgaben** erfolgen mit Hilfe der Abkürzungen \* (nach den Vorbemerkungen), die auch in den Rahmenplänen verwendet werden. Sie sind näher erläutert, wo sie nicht ohne weiteres verständlich sind.

Alle Aussagen im Lehrplan sind Teil der verbindlichen Vorgaben für den Unterricht, der den Schülern zugedacht ist. Ausführungen, die nur Anregungen oder Beispiele geben sollen, sind durch den Sprachgebrauch als solche gekennzeichnet.

Die als **Zeitrichtwerte** genannten Stundenzahlen geben einen Hinweis für die Unterrichtsplanung, sind aber nicht verbindlich.

Für das Erreichen der Ziele des Fachunterrichts (Darbietung und Erarbeitung des Lehrstoffs, Einübung, Wiederholung, Beobachtung des Lernfortschritts und mündliche Leistungsnachweise) rechnet der Lehrplan bei einem einstündigen Fach mit 28 Unterrichtsstunden im Schuljahr, bei einem mehrstündigen mit einem entsprechenden Vielfachen. Von den darüber hinaus verfügbaren Stunden wird in den Schulaufgabenfächern ein Teil für die Durchführung der Schulaufgaben benötigt; in den übrigen Stunden ist der **pädagogische Freiraum** (a. a. O., S. 138, Ziff. 20) enthalten.

Der **Taschenrechner** ist nach Anlage 9 GSO ab Jahrgangsstufe 9 als Hilfsmittel in schriftlichen Prüfungen zugelassen. Selbstverständlich schließt das nicht aus, daß er schon früher bei sich bietender Gelegenheit im Unterricht verwendet wird. Ebenso wird man im Interesse eines zeitgemäßen Mathematikunterrichts auch den Computer an geeigneten Stellen einsetzen.

Die Fortschritte der Mathematik beruhen immer wieder auf persönlichen Leistungen einzelner Mathematiker. Persönlichkeiten, die für die Entwicklung der Mathematik wichtig waren, werden deshalb mit Namen und Lebensdaten angegeben. Die Jahreszahlen gehören nicht zum verpflichtenden Lernstoff, sondern sind Anhaltspunkte, die eine Einordnung der genannten Persönlichkeiten in die einzelnen Epochen der Geschichte erlauben. Das geschichtliche Grundwissen, wie es im Fachlehrplan Geschichte ausgewiesen ist, dient hier als geeigneter Bezugsrahmen.

Am **Mathematisch-naturwissenschaftlichen Gymnasium** besteht in den Jahrgangsstufen 9, 10 und 11 jeweils **Wahlpflicht** für eines der folgenden Angebote:

- Jahrgangsstufe 9:
- Darstellende Geometrie
  - Informatik (Grundlagen)
- Jahrgangsstufe 10:
- Kegelschnitte
  - Informatik (Grundlagen) bzw. Informatik (Fortführung)
- Jahrgangsstufe 11:
- Komplexe Zahlen (Grundlagen) und Komplexe Zahlen (Abbildungen)
  - Sphärische Trigonometrie (Grundlagen) und Sphärische Trigonometrie (Anwendungen auf die Erd- und Himmelskugel)
  - Komplexe Zahlen (Grundlagen) und Sphärische Trigonometrie (Grundlagen)

In Jahrgangsstufe 13 gibt es im Grundkurs die Lehrplanalternative **Mathematik (Informatik)**. Der Besuch dieses Kurses setzt ausreichende Kenntnisse in Informatik voraus.

\* Abkürzungen

Fächer:	Fächerübergreifende Bildungs- und Erziehungsaufgaben:	
B	Biologie	BOBerufliche Orientierung
C	Chemie	DS PFlege der deutschen Sprache
D	Deutsch	DW"Dritte Welt"
E	Englisch	EUEuropa
Ek	Erdkunde	FAFamilien- und Sexualerziehung
Eth	Ethik	FRFriedenserziehung
Ev	Ev. Religionslehre	FZFreizeiterziehung
F	Französisch	GEGesundheits-erziehung
Fs	Fremdsprachen	ITGInformationstechnische Grundbildung
mFs	moderne Fremdsprachen	MBMusische Bildung
G	Geschichte	MEMedienerziehung
Gr	Griechisch	MTMensch und Technik
Hw	Hauswirtschaft	PPolitische Bildung
It	Italienisch	UUmwelterziehung

K	Kath. Religionslehre	V	Verkehrserziehung
Ku	Kunsterziehung	W	Weltbild - Weltdeutung
L	Latein		
M	Mathematik		
Mu	Musik		
Nw	Naturwissenschaften		
Ph	Physik		
Ru	Russisch		
Rw	Rechnungswesen		
S	Sport		
SG	Sozialpraktische Grundbildung		
Sk	Sozialkunde		
Sp	Spanisch		
TmW	Textilarbeit mit Werken		
WR	Wirtschafts- und Rechtslehre		

## Jahrgangsstufe 5

(4)

### Arithmetik und Geometrie

#### 1 Die natürlichen Zahlen und ihre Darstellungen

(ca. 14 Std.)

Für die grundlegende mathematische Tätigkeit des Zählens benötigt man die natürlichen Zahlen. Zu ihrer Darstellung wurden in verschiedenen Kulturkreisen unterschiedliche Methoden entwickelt. Die Schüler sollen erfahren, daß die ihnen vertraute Darstellung der Zahlen im Zehnersystem nur eine von vielen Möglichkeiten ist. Sie sollen erkennen, daß für die Verwendung von Stellenwertsystemen neben historischen Gründen vor allem auch Zweckmäßigkeitsüberlegungen sprechen.

- Bestimmen und Benennen von Anzahlen Beispiele aus dem Erfahrungsbereich der Schüler
- historische Beispiele von Zahlendarstellungen, insbesondere das römische Zahlensystem (6 L: römische Zahlzeichen, G)
- Zahlendarstellung in Stellenwertsystemen; das Dezimalsystem, das Dualsystem wichtige Begriffe: Grundzahl, Bündelung, Stufenzahlen, Ziffern, Stellenwert einer Ziffer, die Ziffer Null;  
Hinweis auf die technische Anwendung des Dualsystems bei elektronischen Rechnern
- Lesen und Schreiben großer Zahlen; die Menge  $\mathbb{N}$  der natürlichen Zahlen Zahlenraum bis zu einer Billion;  
Hinweis auf die Unbeschränktheit von  $\mathbb{N} = \{1,2,3,\dots\}$
- Anordnung der natürlichen Zahlen Veranschaulichung am Zahlenstrahl

#### 2 Rechnen mit natürlichen Zahlen

(ca. 34 Std.)

Einfache und häufig auftretende Zählprobleme führen auf die vier Grundrechenarten. Die Vertrautheit mit ihren Gesetzmäßigkeiten und die sichere Beherrschung der Rechentechniken sind vorrangige Ziele des Mathematikunterrichts in dieser Jahrgangsstufe. Beim schriftlichen Rechnen sollen die Schüler zu klarer und übersichtlicher Darstellung angeleitet werden.

- |   |  |
|---|--|
| - die vier Grundrechenarten Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division; | Erläuterung der schriftlichen Rechenverfahren; Kommutativgesetze, Assoziativgesetze; die Zahl Null<br>(6 L, D) |
| zugehörige Fachausdrücke  |  |
| - Lösen einfacher Gleichungen und Ungleichungen                                 | Grundmenge, Lösungsmenge; die leere Menge  |
| - Verbindung der vier Grundrechenarten  | Gebrauch von Klammern, Vereinbarung "Punkt vor Strich", Distributivgesetz, Rechenvorteile                      |
| - Gliedern von Termen   | sprachliche und graphische Form  |
| - Runden natürlicher Zahlen, Abschätzen von Größenordnungen                     | Überschlagsrechnen   |

### 3 Rechnen mit Größen aus dem Alltag

(ca. 18 Std.)

Quantitatives Beschreiben und Erfassen von Zusammenhängen ist in vielen Situationen des Alltags erforderlich. Die Schüler sollen lernen, Größen in geeigneten Maßeinheiten anzugeben und mit solchen Maßangaben sachgerecht umzugehen. Dazu gehört, Verständnis für den Vorgang des Messens und die ihm zugrundeliegende Idee zu entwickeln. Von großer Bedeutung, auch über das Fach Mathematik hinaus, ist die Fähigkeit, Sachtexte zu lesen, zu verstehen und zu bearbeiten.

- |   |  |
|---|--|
| - die Größen Geld, Gewicht, Zeit, Länge mit den jeweils gebräuchlichen Maßeinheiten | sicherer Umgang mit Größen, Wechsel der Maßeinheit, auch mehrfach benannte Größen  |
| - Sachaufgaben  | Hierbei sollen<br>-das Erfassen eines verbal beschriebenen Zusammenhangs,<br>-das Aufsuchen eines Lösungswegs,<br>-die Umsetzung in eine klar gegliederte Rechnung sowie<br>-die Deutung des Rechenergebnisses im ursprünglichen Zusammenhang<br>sorgfältig und intensiv geübt werden.<br>(6 WR: kaufmännisches Rechnen)<br>(6 Ek5: Maßstab)<br>(6 Ph; 6 V: Bewegungsaufgaben, Konsequenzen für das eigene Verhalten im Verkehr)<br>(6 W: Zahlen und Größen im Alltag) |
|   | Auf sachgerechten Sprachgebrauch ist hierbei besonders zu achten (6 DS).   |

### 4 Geometrische Grundformen und Grundbegriffe

(ca. 12 Std.)

In zunächst spielerischem und entdeckendem Umgang mit einfachen Körpern und ebenen Figuren sollen grundlegende geometrische Sachverhalte erkannt und mit entsprechenden Begriffen beschrieben werden. Arbeiten mit Modellen und ausgiebiges Zeichnen sollen eine gute Erfahrungsgrundlage schaffen und die Raumvorstellung und das Formempfinden der Schüler fördern.

- |   |  |
|---|--|
| - räumliche Grundformen:<br>Würfel, Quader, Prisma, Pyramide;<br>Kugel, Zylinder, Kegel | auch Schrägbild und Netz eines Quaders;<br>Anfertigen von Modellen<br>(6 Ek5: Globus)                                |
| - Grundbegriffe:<br>Punkt, Strecke, Gerade, Halbgerade;<br>parallel, senkrecht          | gebräuchliche Symbolik;<br>Mengenschreibweisen: $0$ , $1$ , $c$ ;<br>Gitternetz;<br>Umgang mit Lineal und Geodreieck |
| - ebene Grundformen:<br>Quadrat, Rechteck, Dreieck, Kreis;<br>Begriff des Umfangs       | auch Symmetriebetrachtungen und Behandlung<br>von Parkettierungsproblemen (6 Ku);<br>Umgang mit dem Zirkel           |

## 5 Einführung in die Flächenmessung

(ca. 18 Std.)

Aufbauend auf Alltagserfahrungen sollen die Schüler das Prinzip der Flächenmessung kennenlernen. Sie sollen den Gebrauch der üblichen Flächeneinheiten beherrschen und für Quadrate und für Rechtecke die Inhaltsformel kennen und anwenden können.

- |   |  |
|---|--|
| - Prinzip der Flächenmessung,<br>Maßeinheiten für die Fläche                    |  |
| - Flächeninhalt von Rechtecken,<br>Inhaltsformel für Quadrate und für Rechtecke | Berechnung des Inhalts von Flächen, die in<br>Rechtecke zerlegbar sind |
| - Oberfläche eines Quaders  | Berechnung der Oberfläche von Körpern, die in<br>Quader zerlegbar sind |

## 6 Teilbarkeit der natürlichen Zahlen

(ca. 16 Std.)

Teilbarkeitsbetrachtungen geben einen vertieften Einblick in die Eigenschaften der natürlichen Zahlen. Die Besonderheit der Primzahlen soll von den Schülern erkannt, die Rolle dieser Zahlen als "Bausteine" für die zusammengesetzten Zahlen deutlich herausgestellt werden. Sicherheit im Bestimmen von gemeinsamen Teilern oder Vielfachen gegebener Zahlen ist ein wichtiges Lernziel, vor allem im Hinblick auf das Rechnen mit Brüchen in der Jahrgangsstufe 6.

- |  |  |
|--|--|
| - Teiler einer Zahl, Teilmengen                                      | Mengenschreibweisen  |
| - Teilbarkeitsregeln   | Begründung der Regeln für die Teilbarkeit durch<br>Stufenzahlen sowie durch 2, 3, 4, 5, 9 und 25 |
| - Primzahlen und zusammengesetzte Zahlen;<br>Erkennen von Primzahlen | Sieb des Eratosthenes (um 230 v. Chr.);<br>Möglichkeit zum Computereinsatz                       |
| - Primfaktorzerlegung  | Verwendung der Potenzschreibweise  |
| - größter gemeinsamer Teiler von Zahlen                              | Mengendiagramme;<br>Sachaufgaben   |
| - Vielfache einer Zahl, Vielfachenmengen                             | Vielfachenmengen als Beispiele unendlicher<br>Mengen   |
| - kleinstes gemeinsames Vielfaches von Zahlen                        | Sachaufgaben   |

**Jahrgangsstufe 6**

(4)

**Arithmetik und Geometrie****1 Erste Erweiterung des Zahlenbereichs: die Bruchzahlen**

(ca. 10 Std.)

Viele Verteilungsaufgaben aus dem Alltag führen auf Bruchteile. Mit den Bruchzahlen lernen die Schüler einen erweiterten und leistungsfähigeren Zahlenbereich kennen, in dem die Ergebnisse solcher Verteilungsaufgaben uneingeschränkt beschrieben werden können.

- |  |   |
|--|---|
| - Bruchteile und Brüche  | Zähler, Nenner, Bruchstrich;<br>Stammbrüche, echte und unechte Brüche,<br>gemischte Zahlen, Scheinbrüche  |
| - Darstellung von Brüchen auf dem Zahlenstrahl;<br>Bruchzahlen         | Veranschaulichung von Brüchen durch Bruch-<br>teile von Kreisen und Rechtecken;<br>Bruchzahl als Menge aller Brüche mit demselben<br>Bildpunkt auf dem Zahlenstrahl;<br>die natürlichen Zahlen als Teilmenge der Bruch-<br>zahlen |
| - Erweitern und Kürzen von Brüchen;<br>Größenvergleich von Bruchzahlen | gleichnamige Brüche<br>(6 Mu: Notenwerte)   |

**2 Rechnen mit Bruchzahlen**

(ca. 26 Std.)

Die sichere Beherrschung der Grundrechenarten mit Bruchzahlen ist eine wichtige Voraussetzung für das Rechnen mit Dezimalbrüchen und mit Bruchtermen.

- |   |   |
|---|---|
| - die vier Grundrechenarten mit Bruchzahlen;<br>Rechengesetze | Begriff des Hauptnenners;<br>Rechenvorteile durch frühes Kürzen |
| - Lösen einfacher Gleichungen und Unglei-<br>chungen          |   |
| - Verbindung der vier Grundrechenarten                        | (6 ITG)   |

Durch den Einsatz von Übungsprogrammen, hier insbesondere zur Bruchrechnung, werden den Schülern der Unterstufe Lerninhalte der informationstechnischen Grundbildung vermittelt. Die Schüler sollen einen Überblick über die wesentlichen Bestandteile und die prinzipielle Funktionsweise einer Datenverarbeitungsanlage gewinnen, die wichtigsten Fachausdrücke kennenlernen und mit einem Computer und einfachen Programmen umgehen können.

**3 Dezimalbrüche, Rechnen mit Dezimalbrüchen**

(ca. 20 Std.)

Beim praktischen Rechnen werden bevorzugt Zehnerbrüche verwendet. Die Schüler sollen die dafür übliche Kommaschreibweise als konsequente Erweiterung des dezimalen Stellenwertsystems erkennen

sowie die Ausführung der einzelnen Rechenarten verstehen und sicher beherrschen. Unendliche Dezimalbrüche eröffnen interessante Ausblicke auf Themen des späteren Mathematikunterrichts.

- die dezimale Schreibweise für Zehnerbrüche
- die vier Grundrechenarten mit Dezimalbrüchen (6 ITG)
- Verwandlung von Brüchen in Dezimalbrüche  
Begriffe: endliche Dezimalbrüche, unendliche periodische Dezimalbrüche;  
Bedingung für die Darstellbarkeit einer Bruchzahl durch einen endlichen Dezimalbruch
- Runden von Dezimalbrüchen  
Deutung einer gerundeten Dezimalzahl als Intervallangabe

#### 4 Rechnen mit Größen

(ca. 12 Std.)

Beim Rechnen mit Größen spielen vor allem die Dezimalbrüche eine wichtige Rolle. Da für Größen häufig Meßwerte verwendet werden, ist das Rechnen mit gerundeten Zahlen hier besonders zu pflegen. Dabei soll den Schülern auch bewußt werden, daß übertriebene Genauigkeit bei der Angabe von Meßwerten unvernünftig ist (6 Ph).

- Darstellen von Größen in verschiedenen Einheiten  
auch Umrechnen von Zeitspannen
- Rechnen mit gerundeten Zahlen  
Übungen im Schätzen, Überschlagsrechnen;  
Genauigkeit des Ergebnisses
- Sachaufgaben  
In diesem Zusammenhang sollen auch die Begriffe "arithmetisches Mittel" und "relative Häufigkeit" behandelt werden.  
(6 Ek: z. B. Niederschlagsmengen, Temperaturen)  
(6 WR: kaufmännisches Rechnen)  
(6 Ph: Einheiten)

#### 5 Prozentrechnung

(ca. 15 Std.)

Die Angabe relativer Häufigkeiten, bezogen auf die Vergleichszahl 100, führt zum Prozentbegriff. Wegen der großen praktischen Bedeutung der Prozentrechnung ist ihre sichere Beherrschung anzustreben. An geeigneten praxisnahen Beispielen sollen die Schüler die vielseitige Anwendbarkeit der Prozentrechnung kennenlernen.

- der Prozentbegriff  
Verwandlung von Bruchteilen in Prozentangaben;  
Hinweis auf Promille;  
prozentualer Fehler bei Näherungswerten
- Prozentrechnung  
Grundwert, Prozentsatz, Prozentwert  
(6 Ek, Ph, WR, C)  
(6 V: Fahrtüchtigkeit, Konsequenzen für das Verhalten im Verkehr)
- Zinsrechnung  
Begriffe: Kapital, Zinssatz, Zins und Zinszeit;

Herleitung und Anwendung der Zinsformel (6 WR)  
(6 ITG: Einsatz von Übungsprogrammen)

## 6 Direkte und indirekte Proportionalität

(ca. 12 Std.)

Die Behandlung der direkten und der indirekten Proportionalität ist ein wichtiger Schritt bei der Vorbereitung des Funktionsbegriffs. An Beispielen aus ihrer Erfahrungswelt sollen die Schüler die typischen Proportionalitätseigenschaften erarbeiten. Die graphische Darstellung ist dabei eine einprägsame Veranschaulichung dieser funktionalen Zusammenhänge.

- |                              |   |
|------------------------------|---|
| - direkte Proportionalität   | Quotientengleichheit;<br>graphische Darstellung   |
| - indirekte Proportionalität | Produktgleichheit;<br>graphische Darstellung  |
| - Schlußrechnung             | auch zusammengesetzte Schlußrechnungen<br>(6 V: Bewegungsaufgaben, Wahl des angemessenen Verkehrsmittels) |

## 7 Einführung in die Raummessung

(ca. 12 Std.)

Anknüpfend an das schon bekannte Vorgehen bei der Längen- und Flächenmessung, wird nun die Raummessung behandelt. Die Schüler sollen den Gebrauch der üblichen Maßeinheiten für den Rauminhalt beherrschen und die Volumenformel für Würfel und für Quader kennen und anwenden lernen.

- |  |  |
|--|--|
| - Maßeinheiten für den Rauminhalt                                    | auch die Einheiten l, hl und ml  |
| - Rauminhalt von Quadern;<br>Volumenformel für Würfel und für Quader | auch Beispiele von Körpern, die aus Quadern zusammengesetzt sind<br>(6 Ek: Niederschlagsmengen)<br>(6 Ph8: Dichte) |

## 8 Winkel und Winkelmessung

(ca. 5 Std.)

Die aus der Erfahrung vorhandene Winkelvorstellung wird im Sinne der Geometrie präzisiert. Die Schüler sollen Winkel zeichnen, bezeichnen und messen lernen und dabei im Umgang mit den schon früher verwendeten Zeichengeräten sicherer werden.

- |   |   |
|---|---|
| - Winkelbegriff                                 | Scheitel, Schenkel, Winkelfeld  |
| - Größe von Winkeln;<br>Maßeinheiten für Winkel | Vollwinkel, gestreckter Winkel, rechter Winkel, spitzer, stumpfer und überstumpfer Winkel;<br>Grad, Winkelminute, Winkelsekunde<br>(6 G: Babylonier, Sexagesimalsystem)<br>(6 Ek5/6: Himmelsrichtungen, geographische Länge und Breite; Kreisdiagramme) |



**Jahrgangsstufe 7**

(4)

**Algebra** (ca. 56 Std.)**1 Zweite Erweiterung des Zahlenbereichs: die rationalen Zahlen** (ca. 16 Std.)

Beispiele aus der Erfahrung der Schüler und die eingeschränkte Ausführbarkeit der Subtraktion im schon bekannten Zahlenbereich sind Gründe für die Einführung der negativen Zahlen. Anknüpfend an das bisherige Rechnen, werden die vier Grundrechenarten in der Menge der rationalen Zahlen festgelegt. Die Schüler sollen die sich dabei ergebenden Regeln und Gesetze einsehen und sie sicher anwenden lernen.

- negative Zahlen;  
Menge  $\mathbb{A}$  der rationalen Zahlen
- Zahlengerade;  
Menge  $\mathbb{Z}$  der ganzen Zahlen;  
absoluter Betrag;  
Anordnung in  $\mathbb{A}$
- die vier Grundrechenarten mit rationalen Zahlen
- Rechengesetze  
(6 ITG: Einsatz von Übungsprogrammen zum Rechnen mit rationalen Zahlen)

**2 Einführung des Termbegriffs; Arbeiten mit Termen** (ca. 22 Std.)

Für eine prägnante Beschreibung von Sachverhalten und Zusammenhängen sind Terme ein wesentliches mathematisches Hilfsmittel. Die Schüler sollen Terme aufstellen, interpretieren und sicher mit ihnen umgehen lernen. Termumformungen und das Rechnen mit Termen werden in der Algebra immer wieder benötigt und helfen z. B., die Auswertung von Termen zu vereinfachen.

- Termbegriff;  
Aufstellen und Interpretieren, Gliedern und Auswerten von Termen
- Variable;  
Grundmenge, Definitionsmenge
- Umformen von Termen;  
Rechnen mit Termen
- Äquivalenz von Termen;  
Verwendung der Rechengesetze für rationale Zahlen, Klammerregeln, Ausmultiplizieren und Ausklammern  
Beispiele mit Variablen im Nenner sollen hier nicht betrachtet werden.
- die binomischen Formeln
- Anwendung beim Faktorisieren

**3 Lineare Gleichungen und Ungleichungen** (ca. 18 Std.)

Mit Hilfe von Äquivalenzumformungen können Gleichungen und Ungleichungen jetzt systematisch gelöst werden. Die Schüler sollen darin Sicherheit gewinnen und sich eine Grundlage für effektives Arbeiten im Mathematikunterricht der Mittel- und Oberstufe erwerben. Die Bearbeitung von Sachaufgaben bereitet die Anwendung der Mathematik in natur- und gesellschaftswissenschaftlichen Fächern vor.

- |  |   |
|--|---|
| - Lösen linearer Gleichungen mit einer Unbekannten   | Äquivalenz von Gleichungen  |
| - Lösen linearer Ungleichungen mit einer Unbekannten | Äquivalenz von Ungleichungen  |
| - Textaufgaben                                       | Umsetzen von Texten in Gleichungen bzw. Ungleichungen, insbesondere bei Sachaufgaben; historische Beispiele (6 G) |

## **Geometrie** (ca. 56 Std.)

### **1 Grundbegriffe der ebenen Geometrie; geometrisches Zeichnen** (ca. 8 Std.)

Mit einer Wiederholung, Zusammenfassung und Festigung bisheriger geometrischer Erfahrungen und Kenntnisse sollen die Schüler eine tragfähige Basis für den folgenden Geometrieunterricht erwerben. Dazu gehören Sorgfalt, Geschick und Ökonomie beim Zeichnen und auch wachsendes Verständnis für geometrische Fragestellungen und Denkweisen. In diesem Zusammenhang sollen auch historische Beispiele angesprochen werden.

- |   |  |
|---|--|
| - Umgang mit Lineal, Geodreieck und Zirkel  | Geschick beim Zeichnen und Messen wird angestrebt. |
| - Grundfiguren:<br>Punkte;<br>Strecken, Halbgeraden, Geraden;<br>Winkel, Vielecke, Kreise |  |
| - Länge; Winkelmaß  |  |
| - Lagebeziehungen   | parallel, senkrecht                                |
| - Koordinatensystem   | auch negative Koordinaten                          |
| - Grundkonstruktionen:<br>Strecken- und Winkelübertragung                                 | Konstruieren mit Zirkel und Lineal                 |

### **2 Winkel an Geradenkreuzungen; Winkel bei Dreiecken und Vierecken** (ca. 10 Std.)

Bei der Betrachtung von Winkeln an einfachen Figuren sollen die Schüler mit einschlägigen Bezeichnungen, Axiomen und Sätzen vertraut werden. Vorrangiges Ziel des Unterrichts ist es, die Freude am Entdecken geometrischer Eigenschaften zu fördern und zu sachgerechtem Beschreiben und Begründen von Zusammenhängen hinzuführen (6 D; DS). Die Anwendung gewonnener Erkenntnisse zur Ableitung neuer Sätze und für die Berechnung unbekannter Winkel ist dazu eine wichtige Hilfe.

- |  |  |
|--|--|
| - Winkel an zwei sich schneidenden Geraden | Nebenwinkel, Scheitelwinkel  |
| - Winkel an Doppelkreuzungen von Geraden   | Stufenwinkel, Wechselwinkel, Nachbarwinkel;<br>Doppelkreuzung mit Parallelenpaar;<br>Konstruktion von Parallelen |

- Winkel bei Dreiecken und Vierecken
  - Innenwinkel, Außenwinkel;
  - Winkelsummensätze;
  - Außenwinkelsatz für Dreiecke
  - (6 W: euklidische Geometrie und Wirklichkeit)

Es ist möglich, die Winkelsätze an parallelen Geraden auf das Winkelsummenaxiom im Dreieck zu gründen oder vom Parallelenaxiom ausgehend zu den Winkelsätzen im Dreieck zu gelangen.

### 3 Symmetrie und Kongruenz von Figuren

(ca. 18 Std.)

Interessante, häufig beobachtbare Besonderheiten von Figuren sind Achsensymmetrie und Punktsymmetrie. Ihre Untersuchung führt auf Achsenspiegelungen und Punktspiegelungen, und die Schüler erfahren dabei das fruchtbare Ineinandergreifen von Figurengeometrie und Abbildungsgeometrie. Die Betrachtung von Drehungen und Verschiebungen vertieft diese Einsicht und führt zum Begriff der Kongruenz von Figuren. Beim Zeichnen und Konstruieren, beim Entdecken, Beschreiben und Begründen geometrischer Zusammenhänge sollen die Schüler Einfallsreichtum und geistige Wendigkeit entwickeln.

- Achsensymmetrie;
  - Symmetrieachse;
  - Eigenschaften achsensymmetrischer Figuren;
  - Mittelsenkrechte, Winkelhalbierende, Mittelparallele als Symmetrieachsen;
  - Achsenpiegelungen die Abbildung Achsenspiegelung und ihre Eigenschaften, insbesondere Geradentreue, Längen- und Winkeltreue;
  - Grundkonstruktionen und ihre Anwendungen
  - (6 Ku: z. B. Architektur)
  - (6 B: z. B. Schmetterlinge)
  - (6 Ph9: Reflexion am Spiegel)
- Punktsymmetrie;
  - Symmetriezentrum;
  - Eigenschaften punktsymmetrischer Figuren;
  - Punktspiegelungen die Abbildung Punktspiegelung und ihre Eigenschaften;
  - Konstruktionen
- Drehungen
  - Drehpunkt, Drehwinkel;
  - Eigenschaften der Drehung;
  - drehsymmetrische Figuren
  - (6 C: Kristallformen)
  - (6 B: Blütenformen)
  - (6 Ku: z. B. Rosetten in der Gotik, Zentralbauten)

- Verschiebungen  
Verschiebungspfeile, auch in Koordinatendarstellung;  
Eigenschaften der Verschiebung;  
Verkettung von Verschiebungen
- Kongruenz, Kongruenzabbildungen  
kongruente Figuren;  
Geradentreue, Längen- und Winkeltreue der Kongruenzabbildungen;  
Kongruenzsätze für Dreiecke  
(6 Ku: z. B. Mosaik)

Im Sinne einer Betonung der Figurengeometrie werden Punktspiegelungen, Drehungen und Verschiebungen durch ihre Abbildungsvorschriften definiert. Sie können aber auch als Zweifachspiegelungen eingeführt werden.

#### 4 Dreiecke: Transversalen, besondere Dreiecke, Konstruktionen (ca. 20 Std.)

Die systematische Behandlung des Dreiecks, einer grundlegenden geometrischen Figur, soll in übersichtlicher Weise wichtiges Wissen vermitteln und den Schülern die Leistungsfähigkeit der bisher erworbenen Kenntnisse und Fertigkeiten einsichtig machen. Die Untersuchung der Transversalen und die Betrachtung besonderer Dreiecke bieten gute Gelegenheit, Verständnis für die Notwendigkeit des Beweisens zu wecken und erste einfache Beweisschritte durchzuführen (6 W). Ferner eröffnet sich hier die Möglichkeit variantenreicher Dreieckskonstruktionen.

- Transversalen im Dreieck  
Mittelsenkrechte, Winkelhalbierende, Höhen, Seitenhalbierende;  
Schnittpunkt der Mittelsenkrechten, Umkreis;  
Schnittpunkt der Winkelhalbierenden, Inkreis;  
Höhenschnittpunkt;  
Hinweis auf den Schnittpunkt der Seitenhalbierenden (6 M9)
- gleichschenkliges Dreieck  
Schenkel, Spitze, Basis, Basiswinkel;  
Basiswinkelsatz und Umkehrung;  
gleichseitiges Dreieck;  
Winkelkonstruktionen
- rechtwinkliges Dreieck  
Kathete, Hypotenuse;  
Satz von Thales und Umkehrung  
(6 G6, Gr: Thales von Milet, um 600 v. Chr.)
- Dreieckskonstruktionen  
Grundkonstruktionen;  
Beziehungen zwischen Seiten und Winkeln;  
Konstruktionen aus Teildreiecken;  
Anwendungsbeispiele  
(6 DS: Konstruktionsbeschreibungen)

**Algebra**

(ca. 56 Std.)

**1 Bruchterme**

(ca. 22 Std.)

Bruchterme sind Bestandteil vieler Formeln und werden auch sonst für eine mathematische Beschreibung von Abhängigkeiten und Gesetzmäßigkeiten, nicht nur innerhalb der Mathematik, häufig benötigt. Die Schüler sollen Routine im Umgang mit Bruchtermen gewinnen und den Einfluß von Umformungen auf die Definitionsmenge sicher überblicken.

- Aufstellen, Interpretieren und Auswerten von Bruchtermen      Definitionsmenge bei Bruchtermen mit einer Variablen
- Umformen von Bruchtermen      Termumformung von Zähler oder Nenner, Erweitern und Kürzen
- Rechnen mit Bruchtermen
- Lösen von Bruchgleichungen      Definitionsmenge und Lösungsmenge von Bruchgleichungen mit einer Unbekannten; Proportionen; Auflösen von Formeln (6 Ph, WR)

**2 Einführung des Funktionsbegriffs; lineare Funktionen und ihre Graphen**

(ca. 20 Std.)

Beim Erfassen von Zusammenhängen zwischen Größen und beim Beschreiben von Abhängigkeiten spielt der Begriff der Funktion, weit über die Mathematik hinaus, eine entscheidende Rolle. Die ausführliche Behandlung der linearen Funktionen soll die Schüler mit diesem etwa in den Naturwissenschaften grundlegenden Funktionstyp vertraut machen und dabei auch den Funktionsbegriff festigen. Beides ist für das weitere Arbeiten mit Funktionen in den nächsten Jahrgangsstufen eine unabdingbare Voraussetzung.

- Funktionsbegriff; Beispiele von Funktionen      Zuordnungsvorschrift; Definitionsmenge, Wertemenge; Funktionsterm, Funktionsgleichung; Graph im kartesischen Koordinatensystem (6 B: Wachstumsvorgänge)
- lineare Funktionen  $x \mapsto ax+b$       Graph, geometrische Bedeutung der Koeffizienten a, b; Sonderfall: direkte Proportionalität, Proportionalitätsfaktor (6 Ph8: Gesetz von Hooke) (6 WR: Zinsformel, Devisenrechnung) (6 C: stöchiometrische Berechnungen) (6 ITG: Einsatz von Computerprogrammen zur graphischen Darstellung von Geradenscharen) (6 V: Zeit-Weg-Diagramme, z. B. Überholvorgänge, Trassierung von Verkehrswegen)

- Arbeiten mit linearen Funktionen u. a. zeichnerische Verfahren beim Lösen linearer Gleichungen bzw. Ungleichungen; auch intervallweise lineare Funktionen, Betragsfunktion; Gleichungen und Ungleichungen mit Beträgen (6 WR: Beispiele zur linearen Optimierung)
  
- Lösen von Ungleichungen des Typs graphische Darstellung der Vorzeichenverteilung der linearen Terme  
 Install Equation Editor and double -  
 click here to view equation. 18 0 bzw.  
 Install Equation Editor and double -  
 click here to view equation. 28 0

### 3 Lineare Gleichungssysteme

(ca. 14 Std.)

Bereits bei einfachen Problemstellungen sind oft mehrere Größen gesucht. Die Schüler sollen deshalb einen Einblick in das Arbeiten mit mehreren Unbekannten bekommen, lineare Gleichungssysteme kennenlernen und Sicherheit im Umgang mit dem Spezialfall von zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten gewinnen.

- Systeme von zwei linearen Gleichungen mit zwei Unbekannten; Zahlenpaare als Elemente der Lösungsmenge, zeichnerische Interpretation; Gleichsetzverfahren, Einsetzverfahren, Additionsverfahren  
 Beispiele für Systeme mit mehr als zwei Unbekannten
  
- Textaufgaben (6 Ph: z. B. Mischungsaufgaben, Bewegungsaufgaben)  
(6 V: Überholvorgänge, verantwortliches Verhalten im Verkehr)

## Geometrie

(ca. 56 Std.)

### 1 Vierecke:

(ca. 18 Std.)

#### allgemeines Viereck, besondere Vierecke, Konstruktionen

Die Fortführung der Figurenlehre durch Betrachtungen zum Viereck gibt viele Möglichkeiten, Kenntnisse aus der Dreiecksgeometrie zu wiederholen und zu vertiefen. Dreieckslehre und Viereckslehre zusammen bilden eine solide Grundlage für reichhaltige geometrische Untersuchungen. In diesem Abschnitt sollen verstärkt wesentliche Beweistechniken vermittelt werden. Die Schüler sollen schließlich in der Lage sein, Voraussetzung und Behauptung klar zu unterscheiden, einfache Beweise selbständig durchzuführen, Kehrsätze zu formulieren und deren Beweisbedürftigkeit einzusehen.

- Begriffe beim Viereck Gegenecken, Gegenwinkel, Gegenseiten; Diagonalen
  
- Parallelogramm; Eigenschaften, insbesondere Punktsymmetrie und Erzeugung des Parallelogramms durch Verschieben einer Strecke; Vektoraddition (6 Ph8: Kräfte)  
 Vektorbegriff Sonderfälle: Quadrat, Rechteck, Raute

- Drachenviereck, Trapez Eigenschaften;  
Sonderfälle: Raute, gleichschenkliges Trapez

- Viereckskonstruktionen

## 2 Kreise und Geraden; Umfangswinkel

(ca. 14 Std.)

Tangentenvierecke, Sehnenvierecke, Faßkreisbogenpaare sind für die Schüler neuartige Figuren mit überraschenden, leicht beweisbaren Eigenschaften. An ihnen soll etwas vom Zauber der Geometrie spürbar werden. Dies gilt auch für die regulären Vielecke, die mathematikgeschichtlich gesehen wichtig und in künstlerischer Hinsicht besonders beeindruckend sind.

- Kreistangente, Kreissekante Tangentenkonstruktionen
- Tangentenviereck, Sehnenviereck charakterisierende Eigenschaften;  
Sonderfälle
- Umfangswinkelsatz mit Anwendungen Faßkreisbogenpaar;  
Sonderfall: Thaleskreis
- reguläre Vielecke Bestimmungsdreieck;  
Konstruktion von Sechseck, Zwölfeck,... bzw.  
von Achteck, Sechzehneck,...;  
Hinweis auf das Problem der Konstruierbarkeit  
Carl Friedrich Gauß (1777-1855)  
(6 Ku: Architektur)

## 3 Flächenmessung bei Dreiecken und Vierecken

(ca. 10 Std.)

Zur Bestimmung des Flächeninhalts von Vielecken ist die Inhaltsformel für Dreiecke das entscheidende Hilfsmittel. Die Schüler sollen die Herleitung der Inhaltsformel für Parallelogramme und für Dreiecke verstehen und in unterschiedlichen Zusammenhängen anwenden können. Auf das allgemeine Problem der Meßbarkeit soll dabei nicht eingegangen werden.

- Flächeninhalt von Parallelogrammen;  
Inhaltsformel für Parallelogramme und für  
Dreiecke Additivität des Flächeninhalts, Flächengleichheit  
kongruenter Figuren
- Flächenberechnungen und Konstruktionen als  
Anwendung auch Flächenverwandlungen

## 4 Einführung in die Raumgeometrie: Lagebeziehungen, Schrägbild, Prisma

(ca. 14 Std.)

Ausgehend vom Quader sollen raumgeometrische Zusammenhänge und Begriffe einsichtig gemacht werden. In diesem Zusammenhang soll auch das Schrägbildverfahren entwickelt werden. Die Beschäftigung mit dem geraden Prisma ist ein erster Schritt zur systematischen Behandlung komplizierterer räumlicher Grundformen in der Mittelstufe und trägt zur weiteren Förderung des räumlichen Vorstellungsvermögens bei.

- Punkte, Geraden, Ebenen im Raum  
Festlegung einer Ebene;  
Begriffe: windschiefe Geraden, Lotgerade,  
Lotebene, Parallelebene;  
Bestimmung von Lagebeziehungen und von  
Schnittmengen in einfachen Situationen
- Schrägbild  
Begriffe: Verzerrungswinkel, Verzerrungsfaktor  
Hier können auch Grund- und Aufriß verwendet  
werden; an eine systematische Behandlung der  
Parallelprojektion ist jedoch nicht gedacht.  
(6 Ku8: Raumdarstellung)  
(6 MT: technisches Zeichnen und CAD)
- gerades Prisma  
Grund- und Deckfläche, Mantelfläche, Netz;  
Zeichnen von Schrägbildern;  
Berechnung von Oberfläche und Volumen,  
Volumenformel;  
Anwendungen  
(6 Ph9: Strahlenoptik)  
(6 C: Kristallformen)

### Jahrgangsstufe 9

(3, MNG 4)

## Algebra

(ca. 40 Std.)

### 1 Dritte Erweiterung des Zahlenbereichs: die reellen Zahlen

(ca. 16 Std.)

Die Umkehrung des Quadrierens und ihre geometrische Interpretation am Quadrat führen zu der überraschenden Einsicht, daß die Menge der rationalen Zahlen nicht vollständig ist. Die Schüler begegnen dabei einem mathematikgeschichtlich bedeutsamen Problem. Sie sollen eine Definition der reellen Zahlen kennenlernen, mit den geltenden Rechengesetzen vertraut werden und vor allem Sicherheit im Umgang mit Quadratwurzeln erwerben. Strukturbetrachtungen sollen hier nicht im Vordergrund stehen. Beim Einsatz des neuen Hilfsmittels Taschenrechner ist auf Zweckmäßigkeit, Effizienz und auf kritische Wertung der Ergebnisse zu achten. Die Erläuterung der Taschenrechneranzeige gibt Gelegenheit, auf die Schreibweise von Zahlen mittels Zehnerpotenzen einzugehen (6 Ph, WR, C).

- Unvollständigkeit der Menge der rationalen Zahlen  
z. B. Nachweis, daß die Länge der Diagonalen des Einheitsquadrats nicht rational ist  
(6 G6, Gr: Pythagoreer)  
(6 W: Zahl und Wirklichkeit; Meßbarkeit)
- irrationale Zahlen;  
Quadratwurzeln;  
Menge  $\mathbb{R}$  der reellen Zahlen  
Intervallschachtelung (6 ITG)
- Rechnen mit Quadratwurzeln und Wurzel-  
termen  
auch teilweises Radizieren und Rationalmachen  
des Nenners

Beim Aufstellen eines einfachen Algorithmus zur näherungsweisen Berechnung einer Quadratwurzel und beim Ausführen des Verfahrens mit Hilfe eines Taschenrechners lernen die Schüler die strukturierte Aufbereitung eines Problems kennen. Mit Hilfe eines fertigen Programmtextes zur Wurzelberechnung werden ihnen der grundlegende Aufbau und die Gliederung von Computerprogrammen vermittelt.



**2 Quadratische Gleichungen**

(ca. 13 Std.)

Quadratische Gleichungen kommen in vielen Anwendungen der Mathematik vor. Das Lösen quadratischer Gleichungen gehört zum unentbehrlichen Grundwissen. Die Schüler sollen daher die Lösungsverfahren sicher beherrschen.

- Lösungsmethoden für quadratische Gleichungen
  - Sonderfälle;
  - im allgemeinen Fall:
  - quadratische Ergänzung;
  - Lösungsformel, Diskriminante, Kriterium für die Anzahl der Lösungen;
  - auch Gleichungen mit Parametern
  
- Satz von Vieta und seine Anwendungen
  - auch Faktorisieren eines quadratischen Polynoms
  - François Viète (1540 - 1603)
  
- Gleichungen, die sich auf quadratische Gleichungen zurückführen lassen
  - insbesondere biquadratische Gleichungen;
  - exemplarisch: Wurzelgleichungen (Probe!)
  
- Sachaufgaben
  - Hier bietet sich auch eine Verbindung mit den Themen des Geometrieunterrichts an (z. B. Satzgruppe des Pythagoras, Goldener Schnitt).
  - (6 Ph: z. B. Energieerhaltung)
  - (6 C11: Massenwirkungsgesetz)
  - (6 V: Bremsweg)

**3 Quadratische Funktionen und ihre Graphen**

(ca. 11 Std.)

Mit den quadratischen Funktionen lernen die Schüler eine Klasse von nichtlinearen Funktionen kennen, die auch in außermathematischen Bezügen immer wieder vorkommen und deren Graphen, die Parabeln, bemerkenswerte Regelmäßigkeit aufweisen. Die quadratischen Funktionen sind wesentlicher Teil des Funktionenvorrats für die Infinitesimalrechnung in der Oberstufe. Mit ihrer Behandlung geht auch eine Vertiefung des Funktionsbegriffs einher.

- quadratische Funktionen  $x \mapsto ax^2 + bx + c$  ( $a \neq 0$ ) und ihre Graphen
  - Entwicklung der Graphen aus der Normalparabel;
  - Symmetrie, Scheitel, Nullstellen, Wertemenge
  
- die Wurzelfunktion als Umkehrfunktion von  $x \mapsto x^2$ ,  $x \geq 0$ 
  - keine systematische Behandlung der Umkehrbarkeit einer Funktion
  
- Anwendungen
  - auch einfache Extremwertprobleme;
  - Lösen einfacher quadratischer Ungleichungen
  - (6 Ph: Wurfbewegungen, Parabolspiegel, Bewegungsenergie)
  - (6 S: Werfen, Springen)
  - (6 V: Bewegungsenergie)

**Geometrie**

(ca. 44 Std.)

**1 Strahlensatz**

(ca. 11 Std.)

Anhand des Strahlensatzes sollen die Schüler erfahren, wie die Geometrie durch die Verwendung algebraischer Methoden für praktische Zwecke verfügbar wird. Andererseits eröffnen sich damit auch weitere Erkenntnisse in der Figurenlehre.

- Streckenverhältnisse  
Teilung einer Strecke in  $n$  gleiche Teile;  
Teilung einer Strecke in gegebenem Verhältnis
- Strahlensatz  
Der Strahlensatz kann z. B. mit der Teilungskonstruktion begründet werden.  
Hinweis auf das Problem inkommensurabler Strecken
- mathematische Anwendungen  
Mittelparallelen im Dreieck;  
Schnittpunkt der Seitenhalbierenden im Dreieck  
(6 Ph: Schwerpunkt)
- Sachaufgaben  
z. B. Vermessungsaufgaben;  
Meß- und Zeichengeräte (6 MT)  
(6 Ph: Strahlenoptik)

## 2 Maßstäbliches Verkleinern und Vergrößern: zentrische Streckung, Ähnlichkeit (ca. 10 Std.)

Mit Hilfe der zentrischen Streckung wird maßstäbliches Verkleinern und Vergrößern mathematisch erfaßt, die Kongruenzgeometrie wird zur Ähnlichkeitsgeometrie erweitert. Die Schüler sollen ähnliche Figuren erkennen und einschlägige Schlußfolgerungen ziehen können.

- zentrische Streckung  
Zentrum, Streckungsfaktor;  
Grundkonstruktionen;  
Geradentreue, Winkeltreue, Verhältnistreue  
Hier kann die S-Multiplikation von Vektoren eingeführt werden, um die Abbildungsvorschrift einfacher zu formulieren.
- Ähnlichkeit  
ähnliche Figuren;  
Ähnlichkeitssätze für Dreiecke;  
auch einfache Dreieckskonstruktionen;  
Vermessungsaufgaben  
(6 Ek: Landkarten)

## 3 Satzgruppe des Pythagoras (ca. 12 Std.)

Der Satz von Pythagoras steht ebenso wie der Goldene Schnitt in interessanten kulturhistorischen Zusammenhängen. Den Schülern soll die Bedeutung der Satzgruppe des Pythagoras für Längenberechnungen in vielfältigen Situationen in der Mathematik und auch in den Naturwissenschaften und der Technik einsichtig werden.

- Satz von Pythagoras, Katheten- und Höhensatz  
Formulierung auch als Flächensätze;  
Umkehrung des Satzes von Pythagoras  
(6 G, Gr: Pythagoras, 580-500 v. Chr.)
- mathematische Anwendungen;  
Sachaufgaben  
Berechnungen an geometrischen Figuren, insbesondere am gleichseitigen Dreieck und am Kreis;

Konstruktionen;  
geometrisches Mittel;  
Berechnung von Entfernungen  
(6 Ph, Ek)

- Goldener Schnitt  
goldenes Rechteck, reguläres Fünfeck  
(6 Ku: Proportionen, Ästhetik; 6 MB)  
(6 B: z. B. Blattstellungen, Blütenformen)  
(6 G: Renaissance)

#### 4 Fortführung der Raumgeometrie: Pyramide

(ca. 11 Std.)

Mit der Pyramide lernen die Schüler einen weiteren Körper kennen, an dem geometrisches Wissen ergänzt und vertieft, neu erworbene mathematische Kenntnisse (z. B. Strahlensatz, Satz von Pythagoras) eingesetzt sowie die Raumvorstellung weiter geschult werden können. Zur Volumenberechnung wird als neues Hilfsmittel das Prinzip von Cavalieri eingeführt. Es wird in Jahrgangsstufe 10 wieder aufgegriffen und bereitet auf den Grenzwertbegriff vor.

- Pyramide  
Grundfläche, Mantelfläche, Netz;  
Winkel zwischen Kanten und Grundfläche bzw.  
zwischen Seitenflächen und Grundfläche;  
Sonderfälle: quadratische Pyramide, reguläres  
Tetraeder  
(6 G: Ägypten)  
(6 Ku: Architektur)
- Rauminhalt der Pyramide;  
Volumenformel  
Das Prinzip von Cavalieri soll plausibel gemacht  
werden.  
Bonaventura Cavalieri (um 1598 - 1647)

Im Zusammenhang mit der Behandlung des regulären Tetraeders wird ein Überblick über die Platonischen Körper gegeben.  
(6 G: Plato, ca. 429 - ca. 348 v. Chr.; Johannes Kepler, 1571 - 1630)

### Wahlpflichtgebiete für die mathematisch-naturwissenschaftliche Ausbildungsrichtung

#### Darstellende Geometrie

(ca. 28 Std.)

##### 1 Grund-Aufriß-Darstellungen

(ca. 11 Std.)

Das Hauptanliegen des Unterrichts in Darstellender Geometrie ist die Förderung des Raumvorstellungsvermögens. Anhand von Grund-Aufriß-Zeichnungen einfacher Körper sollen die Schüler die Einsicht gewinnen, daß räumliche Objekte durch zwei Normalrisse in zueinander senkrechten Bildebenen nach Lage und Größe festgelegt werden können.

- Abbilden durch senkrechte Parallelprojektion  
Normalrisse einfacher ebenflächig begrenzter Körper
- Darstellung von Punkten und Strecken durch Normalrisse in zueinander senkrechten Ebenen  
Grundriß, Aufriß, Rißachse;  
Anordnung der beiden Risse in der Zeichenebene

- Darstellung von Geraden und Ebenen                      sich schneidende, parallele und windschiefe Geraden;  
Festlegung von Ebenen durch die Risse von Punkten oder Geraden

- Darstellung einfacher Körper

## 2 Konstruktionen

(ca. 17 Std.)

Neben das Darstellen räumlicher Objekte tritt als wichtige Anwendung des Grund-Aufriß-Verfahrens das Konstruieren von Strecken und Winkeln in wahrer Größe sowie von Schnitten und Durchdringungen. An dieser Stelle bietet sich eine gute Gelegenheit, die Schüler zu präzisen Arbeiten zu erziehen und auch ihr ästhetisches Empfinden anzuregen.

- wahre Größe von Strecken und ebenen Figuren      Stützdreieck einer Strecke;  
Konstruktion des Stützdreiecks aus den Rissen
- Schnittpunkt einer Geraden mit einer Ebene;  
Schnittgerade zweier Ebenen                      Verwendung von projizierenden Hilfsebenen
- ebene Schnitte an Prismen und Pyramiden              eventuell Verwendung von Seitenrissen zur Vereinfachung der Konstruktionen
- Durchdringungen bei Prismen und Pyramiden              Beschränkung auf einfache Beispiele  
(6 Ku: Architektur)  
(6 MT, BO: technisches Zeichnen und CAD)

## Informatik (Grundlagen)

(ca. 28 Std.)

### 1 Grundbegriffe

(ca. 5 Std.)

Die Schüler sollen an einem einfachen Beispiel den Ablauf einer Problemlösung von der Aufgabenstellung über das Entwickeln eines Algorithmus bis zum fertigen Programm kennenlernen. Zur Realisierung des Programms müssen sie Einblick in den prinzipiellen Aufbau eines Rechners gewinnen und in die Handhabung des vorhandenen Rechners sowie in den Umgang mit einem Programmiersystem eingeführt werden. Wesentlich dabei ist, daß sich die Schüler beim Dialog mit der Maschine die für den Umgang mit den Informations- und Kommunikationstechniken unerläßliche Fähigkeit des Lernens durch eigene Aktivität aneignen (6 BO, MT).

- Ablauf einer Problemlösung                      Algorithmus, Programm, Prozessor
- Aufbau einer EDV-Anlage                      Zentraleinheit, Massenspeicher, Ein- und Ausgabegeräte
- Handhabung eines Programmiersystems              Betriebssystem, Editor, Compiler bzw. Interpreter

### 2 Grundlegende Kontroll- und Datenstrukturen

(ca. 12 Std.)

Jede algorithmische Problemlösung läßt sich durch nur drei grundlegende Kontrollstrukturen und dem Problem angepaßte Daten beschreiben. Die Übersetzung einfacher Algorithmen in eine Programmiersprache gibt Gelegenheit aufzuzeigen, daß auch komplexe Programme in einer sehr einfachen und überschaubaren Sprache formuliert sind. Auf die beschränkten Ausdrucksmöglichkeiten

einer solchen normierten Sprache im Vergleich zur natürlichen Sprache sollte eingegangen werden.

- |   |   |
|---|---|
| - Kontrollstrukturen                                | Sequenz, Auswahl, Wiederholung  |
| - einfache Datenstrukturen                          | Zahlen, Zeichen, Zeichenketten, Wahrheitswerte; Variable, Konstante     |
| - Einführung in die Syntax einer Programmiersprache | Programmieren der drei Kontrollstrukturen und einfacher Datenstrukturen |

### 3 Mathematische Algorithmen

(ca. 11 Std.)

Das Entwickeln von Algorithmen fördert die Fähigkeit zu strukturellem und konstruktivem Denken (6 W). Anhand mathematischer Probleme, insbesondere aus dem Lehrstoff der Jahrgangsstufe, sollen die Schüler die Erzeugung numerischer Lösungen kennenlernen.

- |  |  |
|--|--|
| - Entwickeln algorithmischer Lösungen von mathematischen Problemen | auch Schachtelung von Wiederholungen und Auswahlen             |
| - Formulieren algorithmischer Problemlösungen als Computerprogramm | Beachtung der Gesichtspunkte des strukturierten Programmierens |
| - Testen und Verbessern von Programmen                             | z. B. Vergleich verschiedener Abbruchkriterien                 |

## Jahrgangsstufe 10

(3, MNG 4)

### Algebra

(ca. 38 Std.)

#### 1 Rechnen mit Potenzen

(ca. 14 Std.)

Ausgehend von Potenzen mit natürlichen Exponenten, lernen die Schüler exemplarisch die schrittweise Erweiterung einer Begriffsbildung kennen, wobei die Beibehaltung der Rechengesetze als Leitfaden dient (Permanenzprinzip). Die Schüler sollen mit Potenzen sicher umgehen lernen und zunehmend auch die vorteilhafte Darstellung betragsmäßig großer und kleiner Zahlen mittels Zehnerpotenzen beherrschen. Die Gleitkommadarstellung erlaubt es, die Genauigkeit gerundeter Größen eindeutig anzugeben.

- |  |  |
|--|--|
| - Potenzen mit natürlichen, ganzzahligen und rationalen Exponenten | Definitionen und Rechengesetze; Wurzelschreibweise von Potenzen  |
| - Rechnen mit Potenzen   | Intensives Üben soll auch algebraische Grundkenntnisse (z. B. Rechnen mit Brüch-<br>termen, Faktorisieren) immer wieder auffrischen. |

Polynomdivision;  
 Gleitkommadarstellung;  
 Einbeziehung des Taschenrechners  
 (6 Ph: Größen; Zahlen mit großem bzw. kleinem Betrag)  
 (6 C: Verdünnungen, ppm, ppb)  
 (6 U: Schadstoffkonzentrationen)

## 2 Potenzfunktionen

(ca. 7 Std.)

Mit der Betrachtung der Potenzfunktionen erhalten die Schüler Zugang zu einer weiteren Funktionenklasse. Das Herausarbeiten geometrischer Gemeinsamkeiten und Unterschiede der Graphen in Verbindung mit der algebraischen Darstellung erzieht zu systematischem Vorgehen und zum Denken in Zusammenhängen. Dadurch wird die Funktionsbetrachtung reichhaltiger und eine wichtige Grundlage für die Infinitesimalrechnung in der Oberstufe gelegt.

- Potenzfunktionen; Eigenschaften, Klassifikation der Graphen
  - Definitionsmenge, Wertemenge, Symmetrien, Monotonieverhalten;
  - Grundtypen: Parabeln und Hyperbeln n-ter Ordnung;
  - Graphen der Wurzelfunktionen
  - (6 Ph: z. B.  $\frac{1}{-1,2}$ -Gesetze)
  - (6 WR: Kostenfunktionen)
- Umkehrbarkeit der Potenzfunktionen
  - Definitionsmenge, Wertemenge und Graph der Umkehrfunktion

Die Potenzfunktionen können jeweils bereits im Anschluß an die Behandlung der entsprechenden Potenztypen besprochen werden.

## 3 Exponentialfunktionen und Logarithmusfunktionen

(ca. 17 Std.)

Exponentialfunktionen spielen ebenso wie ihre Umkehrfunktionen, die Logarithmusfunktionen, eine tragende Rolle, wenn es darum geht, Wachstums- oder Abklingvorgänge in Natur, Wirtschaft und Technik quantitativ zu erfassen und funktional darzustellen (6 BO). Die Schüler sollen dies anhand charakteristischer Beispiele erfahren und die Voraussetzungen erwerben, derlei Zusammenhänge und Vorgänge rational zu bewerten. Dazu ist es nötig, daß sie die dabei auftretenden mathematischen Probleme sowohl graphisch als auch rechnerisch meistern.

- Exponentialfunktionen; Eigenschaften und Graphen;
  - Spätestens hier muß kurz auf Potenzen mit irrationalen Exponenten eingegangen werden.
  - Definitionsmenge, Wertemenge, Monotonie;
  - Verhalten am Rand der Definitionsmenge;
  - Beschreibung von Wachstums- und Abklingvorgängen, rechnerische und zeichnerische Auswertung
  - (6 MT: Probleme des Wachstums)
  - Summenformel mit Anwendungen
  - (6 WR: Zinseszinsen)
- geometrische Folgen
- Logarithmusfunktionen als Umkehrfunktionen der Exponentialfunktionen; Eigenschaften und Graphen
  - Definitionsmenge, Wertemenge, Monotonie;
  - Verhalten am Rand der Definitionsmenge
- Rechnen mit Logarithmen
  - Logarithmen als Bezeichnungen für Exponenten;

- Logarithmengesetze;  
Sonderfall: dekadischer Logarithmus  
(6 G: Seefahrt und Astronomie am Beginn der Neuzeit)  
John Neper (1550 - 1617)  
Jost Bürgi (1552 - 1632)  
Henry Briggs (1561 - 1631)  
Johannes Kepler (1571 - 1630)
- Exponentialgleichungen, logarithmische Gleichungen      exemplarische Behandlung
- Anwendungen, Sachaufgaben      auch graphische Darstellungsmöglichkeiten (einfachlogarithmisches und doppeltlogarithmisches Papier)  
(6 Ph: radioaktiver Zerfall)  
(6 C: pH-Wert)  
(6 B: Bakterienwachstum, Weber-Fechnersches Gesetz)  
(6 Ek: Bevölkerungsexplosion, Ressourcen; 6 U)

## Geometrie (ca. 46 Std.)

### 1 Fortführung der ebenen Geometrie: Kreismessung (ca. 10 Std.)

Die Probleme beim Messen von Kreisumfang und Kreisinhalt sollen den Schülern bewußt werden. Von dem damit zusammenhängenden wissenschaftlichen Bemühen, ja Ringen um Erkenntnis ("Quadratur des Kreises"), das sich über zwei Jahrtausende erstreckt hat, sollen sie erfahren. Bei der Bestimmung von Umfang bzw. Flächeninhalt des Kreises wird eine heuristische Grenzwertbetrachtung durchgeführt. Ein sicheres Umgehen mit den einschlägigen Formeln, insbesondere bei der Anwendung auf Figuren, wird angestrebt.

- Umfang und Flächeninhalt eines Kreises, die Kreiszahl  $\pi$       Begriffsbildung und Herleitung der Formeln mit Hilfe geeigneter Vielecke  
Der Grenzprozeß wird plausibel gemacht.  
(6 ITG: Computereinsatz zur näherungsweisen Berechnung von  $\pi$ )  
(6 G: 1. Buch der Könige, Kap.7, Vers 23; Hippokrates, um 440 v. Chr.; Eratosthenes, um 230 v. Chr.; Archimedes, ca. 287 - 212 v. Chr.; Ludolf van Ceulen, 1539 - 1610; Leonhard Euler, 1707 - 1783; Ferdinand Lindemann, 1852 - 1939)  
(6 Ek: Bestimmung des Erdumfangs)
- Länge eines Kreisbogens, Flächeninhalt eines Kreissektors      auch Berechnung von Figuren, die Kreisteile enthalten  
(6 Ku: gotische Maßwerke)  
(6 Ph: Drehbewegungen, Winkelgeschwindigkeit)  
(6 Ek: Meridianvermessung)

## 2 Fortführung der Raumgeometrie: Zylinder, Kegel, Kugel

(ca. 14 Std.)

Zylinder, Kegel und Kugel kommen in vielfältiger Weise in unserer natürlichen und technischen Umwelt vor und regen zu entdeckender Beschäftigung mit Raumformen besonders an. Die Schüler sollen lernen, Volumen und Oberfläche dieser Körper zu berechnen. Die Entwicklung der entsprechenden Formeln erfordert wiederum Grenzwertbetrachtungen, die zwar erst mit Mitteln der Oberstufenmathematik präzisiert, aber bereits hier vorbereitend angesprochen werden können.

- |   |  |
|---|--|
| - Oberfläche von Zylinder und Kegel;  | Grund- und Deckfläche, beim Schrägbild Hinweis auf Ellipsen;<br>Abwickelbarkeit der Mantelfläche, Mantellinie;<br>Beschränkung auf gerade Kreiszyylinder und gerade Kreiskegel   |
| Formeln für die Oberfläche  |  |
| - Rauminhalt von Zylinder und Kegel;<br>Volumenformeln                                | Analogie zu den entsprechenden Formeln für Prisma und Pyramide<br>In diesem Zusammenhang ist es möglich, das Cavalierische Prinzip wieder aufzugreifen.  |
| - Rauminhalt und Oberfläche der Kugel;<br>Volumenformel und Formel für die Oberfläche | Herleitung der Volumenformel mit Hilfe des Cavalierischen Prinzips<br>Für die Oberflächenberechnung genügt eine Plausibilitätsüberlegung.  |
| - Anwendungsaufgaben;<br>einfache Rotationskörper                                     | Berechnungen auch im Rahmen von Sachaufgaben<br><br>(6 Ph: z. B. Himmelskörper; $\frac{1}{r^2}$ -Gesetze)<br>(6 Ku: z. B. Architektur)<br>(6 Ek: Erdkugel)<br>(6 B: z. B. Bedeutung des Verhältnisses von Oberfläche und Volumen)<br>(6 U: Verpackungsprobleme)<br>(6 MT: Maschinen und Bauformen) |

## 3 Trigonometrie

(ca. 22 Std.)

Mit den trigonometrischen Funktionen lernen die Schüler ein vielseitiges Werkzeug kennen, mit dem man einerseits die Beziehungen zwischen Seiten und Winkeln eines Dreiecks rechnerisch erfassen, andererseits aber auch periodische Zusammenhänge funktional beschreiben kann. Dabei sollen die Schüler den Anwendungsreichtum der Trigonometrie (Vermessungs- und Navigationsaufgaben, Beispiele aus Technik, Physik und Astronomie) erleben. Die Steigung einer Geraden, ein auch für die Infinitesimalrechnung wichtiger Begriff, wird neu beschrieben. Die trigonometrischen Funktionen runden den Funktionenvorrat ab, der für die Oberstufe zur Verfügung stehen muß. Der Formelapparat soll auf das unbedingt Notwendige beschränkt werden.

- |  |   |
|--|---|
| - Sinus, Kosinus, Tangens eines Winkels  | Definition z. B. am rechtwinkligen Dreieck oder am Einheitskreis;<br>$(\sin \hat{\alpha})^2 + (\cos \hat{\alpha})^2 = 1$ ;<br>Sinus-, Kosinus- und Tangenswerte besonderer Winkel |
| - Berechnungen am rechtwinkligen Dreieck | auch senkrechte Projektion,   |



	Steigung einer Geraden, Polarkoordinaten (6 Ph: Brechungsgesetz) (6 Ek: Höhenlinien) (6 V: Steigung von Verkehrswegen) (6 U: z. B. Neigungswinkel bei Solaranlagen)
- Sinussatz und Kosinussatz	trigonometrische Berechnungen am allgemeinen Dreieck; Vermessungsaufgaben (6 Ph: Berechnungen zur Kräftezerlegung) (6 Ek: Landvermessung)
- die trigonometrischen Funktionen und ihre Graphen	Bogenmaß; Definitionsmenge und Wertemenge von sin, cos, tan; Eigenschaften: Periodizität, Symmetrie; Deutung dieser Eigenschaften an den Graphen
- die Funktionenschar $x \mapsto a \sin(bx+c)$	Verlauf der Graphen, Bedeutung der Parameter (6 Ph10: sinusförmige Wechselspannung)
- Additionstheoreme für Sinus und Kosinus	exemplarische Behandlung

### Wahlpflichtgebiete für die mathematisch-naturwissenschaftliche Ausbildungsrichtung

**Kegelschnitte** (ca. 28 Std.)

**1 Zylinderschnitte** (ca. 10 Std.)

Ellipsen kommen im Alltag als Schnittkurven, Kreisprojektionen und Schattenlinien häufig vor, ohne daß dies immer bewußt wahrgenommen wird. Am besonders übersichtlichen Fall des Schnittes einer Drehzylinderfläche mit einer Ebene sollen die Schüler auf diese Phänomene aufmerksam werden und gleichzeitig lernen, wie man ebene Kurven auf Zylinderflächen untersucht und beschreibt. Modelle und Zeichnungen sollen dabei die Raumvorstellung unterstützen und fördern.

- die Ellipse als Schnittkurve; Deutung der Ellipse als Bild eines Kreises bei Parallelprojektion	Symmetrieeigenschaften, Mittelpunkt, Scheitel und Halbachsen einer Ellipse; Mantellinien der Zylinderfläche als Projektionsstrahlen
- Mittelpunktsleichung von Kreis und Ellipse; Konstruktion von Ellipsen bei gegebenen Halbachsen	Die Ellipsengleichung ergibt sich aus der Kreisgleichung mit Hilfe einer axialen Streckung. Konstruktion mit Hilfe der beiden Hauptkreise
- Brennpunkte und Brennpunkteigenschaft einer Ellipse; Ellipsenkonstruktion mit Hilfe der Brennpunkte	Die Brennpunkte und die entsprechende Orts-eigenschaft ergeben sich mit Hilfe der Dandelin-Kugeln. Pierre Dandelin (1794 - 1847) (6 Ku: barocke Architektur) (6 Ph: Flüstergewölbe)

**2 Kegelschnitte**

(ca. 18 Std.)

Beim Schneiden einer Drehkegelfläche mit einer Ebene erhält man Kurven unterschiedlichen Typs. Bei ihrer Untersuchung ergibt sich für die Schüler die überraschende Tatsache, daß manche dieser Kurven schon aus ganz anderem Zusammenhang, nämlich als Graphen von Funktionen bekannt sind. Ein Einblick in die physikalische und technische Bedeutung der Kegelschnitte soll vermittelt werden.

- die drei Typen nichtentarteter Kegelschnitte      Als vorläufige Bezeichnungen werden "geschlossener" bzw. "einteilig-offener" bzw. "zweiteiliger" Kegelschnitt empfohlen.
  
- die Ellipse als Kegelschnitt      Anhand der Brennpunkteigenschaft wird der geschlossene Kegelschnitt als Ellipse erkannt.
  
- die Hyperbel als Kegelschnitt;      Symmetrieeigenschaften, Mittelpunkt, Scheitel, reelle und imaginäre (Halb-)Achse des zweiteiligen Kegelschnitts; Brennpunkte und die entsprechende Ortseigenschaft  
     Hyperbelkonstruktion mit Hilfe der Brennpunkte;  
     Mittelpunktsgleichung der Hyperbel;  
     Asymptoten
  
- die Parabel als Kegelschnitt;      Symmetrieeigenschaft, Brennpunkt und Leitlinie des einteilig-offenen Kegelschnitts, Ortseigenschaft  
     Scheitelgleichung der Parabel;  
     Parabelkonstruktion mit Hilfe von Brennpunkt und Leitlinie  
     Die aus der Ortseigenschaft gewonnene Scheitelgleichung zeigt, daß es sich bei diesen Kurven um die schon bekannten Graphen der quadratischen Funktionen handelt.  
     (6 G: Archimedes, ca. 287 - 212 v. Chr.; Apollonios von Perge ca. 262 - ca. 190 v. Chr.)
  
- physikalische und technische Bedeutung der Kegelschnitte      (6 Ph: Bahnkurven von Planeten, Kometen und Satelliten; Reflektoren, Parabolantennen)  
     (6 G: Tycho Brahe, 1546 - 1601; Johannes Kepler, 1571 - 1630)  
     (6 MT: Raumfahrt)

**Informatik (Grundlagen)**

(ca. 28 Std.)

Dieses Wahlpflichtgebiet kann in Jahrgangsstufe 10 nur gewählt werden, wenn es nicht schon in Jahrgangsstufe 9 behandelt wurde.

Der Lehrplan wird aus Jahrgangsstufe 9 entsprechend übernommen.

**Informatik (Fortführung)**

(ca. 28 Std.)

Die Wahl dieses Wahlpflichtgebiets setzt die Behandlung von Informatik (Grundlagen) in Jahrgangsstufe 9 voraus.

**1 Strukturierung von Programmen: Prozeduren**

(ca. 8 Std.)

Umfangreichere Algorithmen werden durch einen Prozeß der schrittweisen Verfeinerung entwickelt. Die Schüler sollen in dieser Jahrgangsstufe kleinere Algorithmen als Prozeduren und Funktionen selbständig formulieren und dabei systematisches und übersichtliches Vorgehen lernen. In diesem Zusammenhang lassen sich die Inhalte von Informatik (Grundlagen) wiederholen.

- Prozeduren, Funktionen
  - Vereinbarung und Aufruf von Prozeduren und Funktionen;
  - formale und aktuelle Parameter;
  - Werte- und Variablenparameter
  - Auf eine Schachtelung von Prozeduren sollte verzichtet werden.

**2 Strukturierung von Daten: Felder**

(ca. 7 Std.)

Anhand der Datenstruktur "Feld" lernen die Schüler das Zusammenfassen von Daten gleichen Typs mit Hilfe einer geeigneten Indizierung kennen und entwickeln die Fähigkeit, komplexe Situationen zu gliedern.

- Begriff des Feldes, Vereinbarung eines Feldes
  - Index, Komponente;
  - Beschränkung auf ein- und zweidimensionale Felder
- Verwendung von Feldern
  - Eingabe, Sortierung und Ausgabe

**3 Untersuchung einfacher numerischer Verfahren**

(ca. 13 Std.)

Die numerische Lösung eines Problems beruht im allgemeinen auf einem Näherungsverfahren. Den Schülern soll bewußt werden, daß bei der Erzeugung einer Näherung zwangsläufig Fehler auftreten. Auf die Ursachen der Fehler und die möglichen Fehlerarten sollte kurz eingegangen werden. Die Ermittlung von Lösungen eines Problems soll nicht ausschließlich durch die Erstellung eines Programms, sondern auch durch den Einsatz eines geeigneten Werkzeugs, z. B. eines Tabellenkalkulationsprogramms, geschehen. Die Schüler erleben dabei die Situation von Benutzern, die ihre Computeranwendung ohne Kenntnisse einer Programmiersprache gestalten.

- Lösen eines linearen Gleichungssystems mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren
  - Es sollen nur eindeutig lösbar (n,n)-Systeme betrachtet werden.
  - Durchführung der Probe, Untersuchung der Brauchbarkeit einer Lösung;
  - auch Beispiele mit Koeffizienten, bei denen das Verfahren zu unbrauchbaren numerischen Lösungen führt
  - (6 WR: lineare Optimierung)
- Vergleich von Verfahren zur Berechnung der Kreiszahl  $\pi$ 
  - Anhand des Verfahrens von Archimedes läßt sich zeigen, daß algebraisch äquivalente Algorithmen nicht zu gleichen numerischen Lösungen führen müssen.

- Berechnung von Funktionswerten der Sinusfunktion      Verwendung eines einfachen geometrischen Verfahrens zur Approximation der Gegenkathete des rechtwinkligen Dreiecks im Einheitskreis, z. B. nach Archimedes  
Archimedes (ca. 287 - 212 v. Chr.)

## Jahrgangsstufe 11

(3, MNG 5)

### Infinitesimalrechnung

(ca. 84 Std.)

#### 1 Reelle Funktionen

(ca. 11 Std.)

Das Untersuchen reeller Funktionen ist die zentrale Aufgabe der Infinitesimalrechnung in der Schule. Ausgehend von bereits aus der Mittelstufe bekannten Funktionen, sollen die Schüler den allgemeinen Begriff der reellen Funktion kennenlernen, mit den zugehörigen Fachausdrücken vertraut werden und sie sachgerecht anwenden können.

- reelle Funktionen;  
Eigenschaften

Grundbegriffe:

Definitionsmenge, Zuordnungsvorschrift, Wertemenge, Funktionsterm, Funktionsgleichung, Funktionsgraph;

weitere Begriffe:

Symmetrie des Funktionsgraphen, Monotonie, Extremum, Nullstelle;

sorgfältige rechnerische und zeichnerische Behandlung einfacher Beispiele unter obigen Gesichtspunkten

(6 Ph: Zeit-Ort-Funktionen)

(6 WR: z. B. Kostenfunktionen)

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716) Johann Bernoulli (1667 - 1748)

- Umkehrbarkeit einer Funktion,  
Umkehrfunktion

Umkehrbarkeit streng monotoner Funktionen;  
Zusammenhang zwischen den Graphen von Funktion und Umkehrfunktion;  
Bestimmen des Terms der Umkehrfunktion

- Verknüpfung von Funktionen

Summe, Differenz, Produkt, Quotient und Verkettung

#### 2 Grenzwert und Stetigkeit

(ca. 16 Std.)

Einen ersten Zugang zum systematischen Studium reeller Funktionen erhalten die Schüler durch die Untersuchung des Verhaltens einer Funktion in der Umgebung einer Stelle oder bei unbeschränkt wachsendem Argument. Dies soll den sicheren Umgang mit den wichtigen Begriffen Grenzwert und Stetigkeit vorbereiten und dabei die Schüler mit der mathematischen Behandlung des "Unendlich-Kleinen" und des "Unendlich-Großen" bekannt machen. Hier ist es besonders wichtig, die Schüler zu sorgfältigem Sprachgebrauch anzuhalten (6 DS).

- |   |   |
|---|---|
| <ul style="list-style-type: none"> <li>- Grenzwertbegriff;<br/>Verhalten einer Funktion für <math>x \rightarrow 4</math> und für <math>x \rightarrow x_0</math>;<br/>Konvergenz, bestimmte und unbestimmte Divergenz</li> </ul> | <p>Schreibweisen wie</p> $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a, \lim_{x \rightarrow 4} f(x) = a,$ $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 4, \lim_{x \rightarrow 4} f(x) = 4$ <p>Hier bietet sich die Möglichkeit, auf Grenzwerte von Zahlenfolgen einzugehen.<br/>(6 Ph11: mittlere Geschwindigkeit, Momentangeschwindigkeit)<br/>(6 W: Unendlichkeit)</p> |
| <ul style="list-style-type: none"> <li>- Grenzwertsätze für Verknüpfungen von Funktionen</li> </ul>   | <p>Exakte mathematische Begründungen dieser Sätze sind nicht erforderlich.<br/>Grenzwerte rationaler Funktionen können mit Hilfe dieser Sätze auf die Grenzwerte der Funktionen</p> $x \rightarrow k, x \rightarrow x, x \rightarrow \frac{1}{x}$ <p>zurückgeführt werden.</p>  |
| <ul style="list-style-type: none"> <li>- Stetigkeit einer Funktion an einer Stelle der Definitionsmenge;<br/>Stetigkeit in einem Intervall</li> </ul>   | <p>Stetigkeitsuntersuchungen bei intervallweise definierten Funktionen<br/>(6 Ph: Supraleitung, Kippschwingungen)<br/>(6 WR: Steuertarif, Portofunktion)<br/>(6 W: "natura non facit saltus", Chaostheorie)</p>   |
| <ul style="list-style-type: none"> <li>- Stetigkeitssätze für Verknüpfungen von Funktionen</li> </ul>   | <p>Mit Hilfe dieser Sätze wird die Stetigkeit insbesondere der rationalen Funktionen erkannt.</p>   |
| <ul style="list-style-type: none"> <li>- stetige Fortsetzung einer Funktion;<br/>stetige Fortsetzung von <math>x \rightarrow \frac{\sin x}{x}</math></li> </ul>   |   |
| <ul style="list-style-type: none"> <li>- Vollständigkeit von <math>\mathbb{Q}</math> und Zwischenwertsatz</li> </ul>  | <p>Es genügt, den Zwischenwertsatz anschaulich plausibel zu machen.<br/>Deutung der Vollständigkeit von <math>\mathbb{Q}</math> an der Zahlengeraden;<br/>Anwendung beim Nachweis der Existenz von Nullstellen</p>  |

Anstatt des hier vorgesehenen Weges "Grenzwert vor Stetigkeit" kann die Stetigkeit an den Anfang gestellt und der Grenzwert anschließend behandelt werden.

### 3 Differenzieren reeller Funktionen

(ca. 32 Std.)

Die Einführung der Ableitung einer reellen Funktion stellt einen bedeutenden Fortschritt in der Entwicklung der Mathematik dar (6 G: Isaac Newton, 1642 - 1727; Gottfried Wilhelm Leibniz, 1646 - 1716). Die Schüler sollen erfahren, wie sich das Änderungsverhalten einer Funktion durch die Ableitungsfunktion präzise beschreiben läßt und Monotonie sowie Extrema damit rechnerisch zugänglich werden. Ihr bisheriges Instrumentarium zur systematischen Untersuchung reeller Funktionen wird so entscheidend vergrößert. Fertigkeit in der Technik des Differenzierens ist auch wesentlich im Hinblick auf die spätere Integralrechnung und dienlich für andere Fächer, insbesondere für die Physik.

- Steigung des Graphen einer Funktion in einem Punkt;  
Ableitung einer Funktion an einer Stelle der Definitionsmenge;  
Tangenten an einen Graphen
  - Ableitungsfunktion
  - Monotoniekriterium für differenzierbare Funktionen
  - Zusammenhang zwischen Differenzierbarkeit und Stetigkeit
  - Ableitungsregeln für Summe und Produkt
  - höhere Ableitungen
  - ganzrationale Funktionen
  - Kettenregel
  - Quotientenregel
- Differenzenquotient, Differentialquotient;  
Bestimmen der Ableitung in einfachen Fällen;  
Aufstellen von Tangentengleichungen  
(6 Ph11: Momentangeschwindigkeit)  
(6 C: Geschwindigkeit chemischer Reaktionen)  
(6 WR: Änderungsraten)
- Bestimmen der Ableitungsfunktionen von:  
 $x \mu k$ ,  $x \mu x$ ,  $x \mu x^n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ),  
 $x \mu \frac{1}{x}$ ,  $x \mu |x|$ ,  
 $x \mu \sin x$ ,  $x \mu \cos x$
- Install Equation Editor and double-click here to view equation. 3'
- Als Begründung genügen Plausibilitätsbetrachtungen. Die Beweisbedürftigkeit soll den Schülern deutlich gemacht werden.  
Auf den Mittelwertsatz soll hingewiesen werden.  
Bestimmen der Monotonieintervalle und der lokalen Extrema einer differenzierbaren Funktion
- Sonderfälle: Ableitungsfunktionen von  
 $x \mu f(x)+c$ ,  $x \mu cf(x)$   
 insbesondere Bedeutung der 2. Ableitung für die Krümmung des Funktionsgraphen, Wendepunkte  
 (6 Ph11: beschleunigte Bewegung)  
 (6 V: Beschleunigen, Bremsen; Gefahren unangepaßter Geschwindigkeit)
- Untersuchung des Graphen auf Symmetrie bezüglich der y-Achse oder bezüglich des Ursprungs;  
Verhalten für  $x \ll 4$ ;  
Teilbarkeit des Funktionsterms  $f(x)$  durch  $x - x_0$ , falls  $f(x_0)=0$ ;  
Hinweis auf den Satz von der maximalen Anzahl der Nullstellen;  
Stetigkeit und Differenzierbarkeit;  
auch Untersuchung intervallweise ganzrationaler Funktionen
- Darlegung der Beweisidee;  
Übung anhand vielfältiger Beispiele  
(6 Ph: harmonische Schwingung)
- Begründung mit Hilfe der Produktregel

#### 4 Kurvendiskussion; Extremwertprobleme

(ca. 25 Std.)

Der nunmehr erreichte Kenntnisstand ermöglicht es den Schülern, den Verlauf eines Funktionsgraphen rasch zu ermitteln. Für die Suche nach Extrempunkten und nach Wendepunkten werden dabei notwendige bzw. hinreichende Kriterien entwickelt und eingesetzt. Insbesondere die Frage nach

Maxima und Minima spielt in der Praxis bei funktionalen Zusammenhängen eine wichtige Rolle. Extremwertprobleme sollen daher mit den Schülern eingehend behandelt werden.

- |   |   |
|---|---|
| <ul style="list-style-type: none"> <li>- Kurvendiskussion;</li> </ul> <p style="margin-left: 40px;">notwendige Kriterien und hinreichende Kriterien für lokale und globale Eigenschaften des Funktionsgraphen</p> | <p>Gesichtspunkte:<br/> maximale Definitionsmenge, Wertemenge;<br/> Symmetrie des Graphen bezüglich einer Geraden <math>x=x_0</math> oder bezüglich eines Punktes;<br/> Nullstellen;<br/> Verhalten am Rand der Definitionsmenge;<br/> Monotonieverhalten, Hoch-, Tief- und Terrassenpunkte;<br/> Krümmungsverhalten, Wendepunkte;<br/> Zeichnen des Graphen unter Verwendung der ermittelten Eigenschaften</p> |
| <ul style="list-style-type: none"> <li>- Bestimmen von ganzrationalen Funktionen mit vorgegebenen Eigenschaften</li> </ul>  | <p>auch Hinweis auf Interpolationspolynome</p>  |
| <ul style="list-style-type: none"> <li>- Kurvenscharen</li> </ul>   | <p>auch Ortskurven ausgezeichneter Punkte;<br/> Möglichkeit zum Computereinsatz<br/> (6 Ph: Kinematik)</p>  |
| <ul style="list-style-type: none"> <li>- Extremwertprobleme</li> </ul>  | <p>inner- und außermathematische Beispiele;<br/> Deutung der gefundenen Lösung<br/> (6 Ph: Brechungsgesetz)<br/> (6 WR: z. B. Kostenfunktion)<br/> (6 MT: Optimierungsprobleme)</p>   |

### **Wahlpflichtgebiete für die mathematisch-naturwissenschaftliche Ausbildungsrichtung**

(Die Auswahlvorschriften sind auf Seite 1191 genannt.)

#### **Komplexe Zahlen (Grundlagen)**

(ca. 28 Std.)

#### **1 Prinzipien für Zahlenbereichserweiterungen; Strukturen**

(ca. 6 Std.)

Bei einem Blick auf den in Unter- und Mittelstufe zurückgelegten Weg von den natürlichen bis zu den reellen Zahlen lassen sich wesentliche Prinzipien für Zahlenbereichserweiterungen herauskristallisieren. Die Schüler sollen bei der Betrachtung der bekannten Zahlenbereiche den Sinn der Einführung der Strukturen Gruppe und Körper einsehen und dabei die Möglichkeit erhalten, über die Grenzen der Schulmathematik hinauszublicken.

- |   |  |
|---|--|
| <ul style="list-style-type: none"> <li>- Zahlenbereichserweiterungen von <math>\mathbb{N}</math> bis <math>\mathbb{C}</math>;<br/> Prinzipien für Zahlenbereichserweiterungen;<br/> die Strukturen Gruppe und Körper</li> </ul> | <p>Auf die historische Entwicklung des Zahlenbegriffs soll eingegangen werden.</p> <p>Richard Dedekind (1831 - 1916)</p> |
|---|--|

#### **2 Vierte Erweiterung des Zahlenbereichs: die komplexen Zahlen**

(ca. 7 Std.)

An Hand historischer Betrachtungen zum Lösen algebraischer Gleichungen sollen die Schüler insbesondere erfahren, daß die Verwendung der imaginären Einheit  $i$  durch Euler zwar erfolgreich, aber letztlich mathematisch ohne Fundament war und erst im 19. Jahrhundert auf eine exakte Grundlage gestellt werden konnte.

- der historische Weg zu den komplexen Zahlen      Geronimo Cardano (1501 - 1576)  
Rafael Bombelli (1526 - 1572)  
Leonhard Euler (1707 - 1783)  
Carl Friedrich Gauß (1777 - 1855)
  
- Konstruktion der komplexen Zahlen;  
der Körper  $\mathbb{C}$       komplexe Zahl als Paar reeller Zahlen;  
Realteil, Imaginärteil;  
Menge  $\mathbb{C}$  der komplexen Zahlen;  
Definition von Addition und Multiplikation in  $\mathbb{C}$ ;  
Einbettung von  $\mathbb{R}$  in  $\mathbb{C}$ ;  
Summenschreibweise komplexer Zahlen;  
Struktur von  $\mathbb{C}$

### 3 Rechnen mit komplexen Zahlen; Lösen von Gleichungen in $\mathbb{C}$ (ca. 15 Std.)

Veranschaulichung und Deutung der komplexen Zahlen in der Gaußschen Zahlenebene lassen Anwendungsmöglichkeiten innerhalb der Mathematik sowie in Naturwissenschaft und Technik sichtbar werden. Die Kreisteilungsgleichungen und der Fundamentalsatz der Algebra sind Glanzpunkte in der Entwicklung der Mathematik; die Schüler sollen beide kennenlernen und in diesem Zusammenhang eine Abrundung der bisherigen Gleichungslehre erleben.

- Veranschaulichung komplexer Zahlen;  
konjugiert komplexe Zahl  $z^*$  einer komplexen  
Zahl  $z$ ,  
Betrag einer komplexen Zahl      Gaußsche Zahlenebene;  
geometrische Deutung der Addition  
Carl Friedrich Gauß (1777 - 1855)
  
- Grundrechenarten      auch Lösen quadratischer Gleichungen
  
- Polarform komplexer Zahlen      Schreibweise:  $z = |z|(\cos \hat{\alpha} + i \sin \hat{\alpha})$ ;  
Anwendung bei Multiplikation und Division,  
Formel von Moivre;  
geometrische Deutung der Multiplikation  
komplexer Zahlen  
Abraham de Moivre (1667 - 1754)  
(6 Ph: Wechselstromwiderstände, Schwingun-  
gen)
  
- reine Gleichungen,  
Kreisteilungsgleichungen      Bestimmen der Lösungsmenge;  
Gruppe der n-ten Einheitswurzeln,  
Zusammenhang mit regulären Vielecken
  
- Fundamentalsatz der Algebra      Überblick über die Lösungsmengen quadra-  
tischer bzw. kubischer Gleichungen mit reellen  
Koeffizienten;  
Mitteilung des Fundamentalsatzes,  
Linearfaktorzerlegung als Folgerung;  
algebraische Abgeschlossenheit von  $\mathbb{C}$ ;  
Hinweis auf den Satz von Abel  
Carl Friedrich Gauß (1777 - 1855)  
Niels Henrik Abel (1802 - 1829)  
Evariste Galois (1811 - 1832)

### Komplexe Zahlen (Abbildungen)

(ca. 28 Std.)



**Abbildungen in der Zahlenebene**

(ca. 28 Std.)

Die Schüler sollen lernen, Punktmengen in der Gaußschen Zahlenebene analytisch zu beschreiben und nicht zu schwierige Abbildungen von  $\mathbb{C}$  in  $\mathbb{C}$  zu überblicken. Im Vordergrund steht hierbei der geometrische Aspekt. Im Zusammenhang mit der Spiegelung am Einheitskreis sollen die Schüler mit der Riemannschen Zahlenkugel eine überraschende Veranschaulichung komplexer Zahlen kennenlernen. Die Untersuchung von Folgen komplexer Zahlen, die durch wiederholte Anwendung einer Abbildung erzeugt werden, macht mit der wichtigen mathematischen Methode der Iteration bekannt und führt zu Juliamengen und zur Mandelbrotmenge. Veranschaulichungen dieser fraktalen Gebilde sind von hohem ästhetischem Reiz.

- Darstellung einfacher Punktmengen in der Zahlenebene
  - Parallelen zur reellen und zur imaginären Achse, Ursprungsgeraden, Kreislinien; Parallelstreifen, Rechtecke, Kreisscheiben, Kreisringe, Kreissektoren; Bestimmen geometrischer Örter, z. B. Thaleskreis, Kreis des Apollonius; Erkennen von Punktmengen, die in Parameterform gegeben sind
  
- elementare Abbildungen von  $\mathbb{C}$  in  $\mathbb{C}$ 
  - $z \mapsto z + a$ ,  $z \mapsto az$ ,  $z \mapsto z^*$ ; auch Verkettungen dieser Abbildungen; Betrachtungen hinsichtlich Längentreue, Winkeltreue, Fixpunkten, Fixgeraden; Involutionen; Bestimmen der Bilder einfacher Punktmengen
  
- die Spiegelung am Einheitskreis
  - Eigenschaften von  $z \mapsto 1/\bar{z}$ ; Install Equation Editor and double-click here to view equation. [4](#); unendlich ferner Punkt, Riemannsche Zahlenkugel; Spiegeln am Einheitskreis mit Zirkel und Lineal; Bestimmen der Bilder einfacher Punktmengen Bernhard Riemann (1826 - 1866)
  
- weitere nichtlineare Abbildungen von  $\mathbb{C}$  in  $\mathbb{C}$ 
  - insbesondere  $z \mapsto z^2$  (6 Ph: Umströmung von Tragflächen, Shukowski-Profil)
  
- durch Iteration erzeugte Folgen komplexer Zahlen
  - einfache Iterationen, z. B.  $z_{n+1} = z_n^*$ ,  $z_{n+1} = iz_n$ ,  $z_{n+1} = z_n^2$ , Deutung in der Zahlenebene; die Iterationen  $z_{n+1} = z_n^2 + c$  für  $c \neq 0$ , Juliamengen und Mandelbrotmenge Gaston Julia (1893 - 1978) Benoit Mandelbrot (geb. 1924) (6 W: Chaostheorie) (6 Ku: Computergraphik)

**Sphärische Trigonometrie (Grundlagen)**

(ca. 28 Std.)

**1 Geometrie auf der Kugel**

(ca. 10 Std.)

In der Kugelgeometrie müssen die Schüler viele aus der ebenen Geometrie vertraute Begriffe und

Zusammenhänge neu überdenken. An die Stelle von Geraden treten Großkreise, das Parallelenaxiom gilt nicht mehr, und die Winkelsumme ist überraschenderweise nicht mehr für alle Dreiecke gleich. Die Schüler erfahren dabei, daß geometrische Aussagen nur einen bestimmten Geltungsbereich haben, und sie erkennen, wie wichtig die Wahl eines geeigneten mathematischen Modells zur Lösung von Anwendungsproblemen ist.

- |  |   |
|--|---|
| - Großkreise und Kleinkreise auf der Kugeloberfläche | geographisches Koordinatensystem (6 Ek)<br>kürzeste (sphärische) Verbindung zweier Kugelpunkte  |
| - Kugelzweieck                                       | Seiten, Winkel;<br>Flächeninhalt  |
| - Kugeldreieck                                       | Es werden hier und im folgenden nur Eulersche Kugeldreiecke betrachtet.<br>Festlegung von Seiten und Winkeln am Dreikant;<br>Flächeninhalt;<br>Polardreieck<br>Leonhard Euler (1707 - 1783) |
| - Sätze über Seiten und Winkel im Kugeldreieck       | Seitensumme, Winkelsumme;<br>Beziehungen zwischen Seiten und Winkeln<br>Dabei läßt sich durch Übergang zum Polardreieck zu jedem Satz die polare Übertragung gewinnen.                      |

## 2 Berechnungen im Kugeldreieck

(ca. 18 Std.)

Die Herleitung der Grundformeln des Kugeldreiecks gibt den Schülern Gelegenheit, ihre trigonometrischen Kenntnisse aufzufrischen und zu festigen. Das systematische Bearbeiten der Grundaufgaben ermöglicht es, die später auftretenden Anwendungsprobleme zu lösen. Anhand von geeigneten Zeichnungen und Modellen soll das räumliche Vorstellungsvermögen unterstützt und weiterentwickelt werden.

- |  |   |
|--|---|
| - Grundformeln der sphärischen Trigonometrie:<br>Sinussatz;<br>Seitenkosinussatz;<br>Winkelkosinussatz | Herleitung des Winkelkosinussatzes aus dem Seitenkosinussatz durch Übergang zum Polardreieck                                      |
| - Lösen der Grundaufgaben  | Berechnungen im Kugeldreieck  |
| - Anwendungen auf die Erdkugel   | Entfernung zweier Erdorte;<br>Kurswinkel, Hinweis auf Loxodrome;<br>Abstand eines Punktes von einem Großkreis<br>(6 Ek: Geodäsie) |

Anstatt Sinussatz und Seitenkosinussatz direkt aus Betrachtungen am Dreikant zu gewinnen, kann auch zunächst das rechtwinklige Kugeldreieck behandelt und dann das allgemeine Kugeldreieck entsprechend zerlegt werden.

## Sphärische Trigonometrie (Anwendungen auf die Erd- und Himmelskugel)

(ca. 28 Std.)

## 1 Mathematische Geographie

(ca. 14 Std.)

Zu Beginn der Neuzeit ergab sich vor allem bei der Seefahrt verstärkt die Notwendigkeit, sichere Methoden zur Ortsbestimmung zu finden. Anhand von Peilungsproblemen sollen die Schüler einen ersten Eindruck vom Anwendungsreichtum der sphärischen Trigonometrie gewinnen. Die Beschäftigung mit Kartenentwürfen zeigt die grundsätzlichen Schwierigkeiten auf, die bei der Abbildung der Kugeloberfläche in die Ebene entstehen.

- |   |  |
|---|--|
| - Peilungsprobleme  | Fremdpeilung;<br>Eigenpeilung durch Bestimmung der Peilwinkelgleichungen, z. B. mit Hilfe eines Tabellenkalkulationsprogramms;<br>Bestimmung von Erdbebenzentren   |
| - Kartenentwürfe  | Hier ist zunächst nur an einen Überblick über die drei Haupttypen Zylinderentwurf, Azimutalentwurf und Kegelentwurf gedacht.<br>Begriffe: Längentreue, Winkeltreue, Flächentreue;<br>Unmöglichkeit der Abwicklung einer Kugeloberfläche in die Ebene |
| - exemplarische Behandlung eines der drei Kartenentwurfstypen | Bestimmung der Abbildungsgleichungen;<br>Zeichnen des Netzentwurfs;<br>Abbildungseigenschaften<br>(6 Ek: Geodäsie)   |

## 2 Mathematische Astronomie

(ca. 14 Std.)

Die mathematische Astronomie beschäftigt sich mit den scheinbaren Bewegungen der Himmelskörper infolge der täglichen Drehung der Erde. Die Schüler lernen mit der Himmelskugel ein Modell kennen, an dem sie ihre mathematischen Kenntnisse zur Lösung nautischer Probleme einsetzen können.

- |  |  |
|--|--|
| - Himmelskugel als mathematisches Modell           | Sternenhimmel, Ekliptik, Bewegung der Planeten<br>(6 Ph11)<br>(6 W: Entwicklung des naturwissenschaftlichen Weltbilds) |
| - Koordinatensysteme der mathematischen Astronomie | Horizontsystem, Äquatorsystem;<br>nautisches Dreieck;<br>Bestimmung der geographischen Breite<br>(6 Ph: Astronomie)    |
| - Grundbegriffe der Zeitrechnung                   | tägliche und jährliche Bewegung der Sonne;<br>wahre Ortszeit, mittlere Ortszeit, Zonenzeit                             |

## Grundkurs

(3)

### Jahrgangsstufe 12

#### Infinitesimalrechnung

(ca. 40 Std.)

#### 1 Berechnung von Flächeninhalten, das bestimmte Integral

(ca. 9 Std.)

Die Berechnung der Inhalte elementarer Flächen im Geometrieunterricht der Unter- und Mittelstufe erreicht bei der Kreismessung ihren Höhepunkt. Damit haben die Schüler bereits typische, mathematikgeschichtlich interessante Vorgehensweisen bei der Flächenmessung kennengelernt und können nun die Berechnung allgemeiner krummlinig begrenzter Flächen als naheliegende Erweiterung dieses Themenkreises verstehen. Mit dem bestimmten Integral begegnet ihnen in diesem Zusammenhang eine eindrucksvolle Anwendung des Grenzwertbegriffs der Infinitesimalrechnung.

- Berechnung von Flächeninhalten durch Grenzwertprozesse      Streifenmethode;  
auch Abschätzungen von Flächeninhalten, z. B. mittels Tabellenkalkulation  
(6 G: Archimedes, ca. 287 - 212 v. Chr.)
- das bestimmte Integral als Grenzwert von Summenfolgen;  
Eigenschaften des bestimmten Integrals      Begriffe: Untersumme, Obersumme;  
Integrand, Integrationsintervall;  
Deutung des bestimmten Integrals als Flächenbilanz;  
Linearitätseigenschaften  
(6 G: Isaac Newton, 1642 - 1727;  
Gottfried Wilhelm Leibniz, 1646 - 1716)  
Bernhard Riemann (1826 - 1866)

## 2 Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung und seine Anwendung

(ca. 13 Std.)

Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung verbindet Differenzieren und Integrieren und ermöglicht in vielen Fällen eine schnelle Auswertung bestimmter Integrale ohne mühsame Grenzwertberechnung. Vor allem bei anwendungsbezogenen Beispielen soll den Schülern die praktische Bedeutung des Hauptsatzes bewußt werden.

- Integralfunktion;  
der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung      Beim Beweis des Hauptsatzes kann man sich auf monotone stetige Funktionen beschränken.  
Integration als Umkehrung der Differentiation
- Stammfunktion und Berechnung des bestimmten Integrals mit Hilfe einer Stammfunktion;  
unbestimmtes Integral      Stammfunktionen von  $x \mapsto x^n$  ( $n \in \mathbb{Z}, n \neq -1$ ),  
 $x \mapsto \sin x$ ,  $x \mapsto \cos x$ ;  
Abgrenzung der Begriffe Integralfunktion, Stammfunktion, unbestimmtes Integral
- Anwendungen      insbesondere Berechnung von Flächeninhalten  
(6 Ph: Bewegungsvorgänge, Arbeit)  
(6 WR, Ek: Mittelwerte)

Anstatt mit der Berechnung von Flächeninhalten zu beginnen, kann man auch die Stammfunktion an den Anfang stellen.

## 3 Logarithmusfunktionen und Exponentialfunktionen, ihre Behandlung mit den Mitteln der Infinitesimalrechnung

(ca. 18 Std.)

Logarithmusfunktionen und Exponentialfunktionen spielen bei der Beschreibung vieler technisch-naturwissenschaftlicher, wirtschaftlicher und soziologischer Probleme eine wichtige Rolle. Die Schüler sollen daher die Eigenschaften dieser Funktionen kennenlernen. Die Beschäftigung mit diesen Funktionen bietet eine hervorragende Gelegenheit zur Wiederholung und Vertiefung der Methoden der Infinitesimalrechnung. Ein zentrales Anliegen des Unterrichts muß es sein, die Schüler anhand vielfältiger Anwendungen aus den oben genannten Bereichen von der Bedeutung der Logarithmusfunktionen und der Exponentialfunktionen zu überzeugen (6 BO).

- |  |  |
|--|--|
| - Exponentialfunktionen und ihre Eigenschaften   | Wiederholung aus der Mittelstufe   |
| - Ableitung von Exponentialfunktionen;   | Die Konvergenz von<br>Install Equation Editor and double-click here to view equation. 5 für<br>Install Equation Editor and double-click here to view equation. 6 kann<br>experimentell einsichtig gemacht werden.  |
| die Eulersche Zahl $e$ und ihre Grenzwertdarstellung   | Definition von $e$ mit Hilfe anschaulicher Überlegungen durch<br>Install Equation Editor and double-click here to view equation. 7;<br>Hinweis auf die Irrationalität von $e$ und auf Berechnungsmöglichkeiten von $e$<br>Leonhard Euler (1707 - 1783)                                       |
| - die Exponentialfunktion zur Basis $e$ und ihre Eigenschaften   | auch Behandlung von $x \mu a e^{bx}$<br>(6 MT, U, W: Probleme des Wachstums)   |
| - die natürliche Logarithmusfunktion als Umkehrfunktion der $e$ -Funktion und ihre Ableitung;<br>Eigenschaften der $\ln$ -Funktion | geometrischer Zusammenhang zwischen den Tangenten in entsprechenden Graphenpunkten von Funktion und Umkehrfunktion   |
| - Darstellung allgemeiner Exponentialfunktionen bzw. Logarithmusfunktionen mit Hilfe der $e$ -Funktion bzw. der $\ln$ -Funktion    |  |
| - Aufgaben und Anwendungen   | Kurvendiskussionen, auch mit einfachen Integrationen<br>(6 B: Wachstumsvorgänge, z. B. Wachstum von Populationen)<br>(6 Ek: Bevölkerungswachstum; 6 DW)<br>(6 Ph, C: Abklingvorgänge, z. B. radioaktiver Zerfall; Absorptionsvorgänge)<br>(6 WR: stetige Verzinsung; 6 U: Wachstumsvorgänge) |

Anstatt des hier vorgesehenen Weges kann man auch mit der Einführung der Logarithmusfunktion als Integralfunktion von  $x \mu x^{-1}$  zur unteren Grenze 1 beginnen.

## Wahrscheinlichkeitsrechnung/Statistik

(ca. 44 Std.)

### 1 Zufallsexperimente

(ca. 6 Std.)

Probleme aus dem Alltag, aus den Naturwissenschaften und den Sozialwissenschaften führen auf den Begriff des Zufallsexperiments, mit dem nicht kausal erschließbare Vorgänge beschrieben werden können. Die Schüler sollen lernen, in einfachen Fällen reale Situationen durch mathematische Modelle zu erfassen und die dabei eingeführten Sprechweisen und Begriffe sachgerecht zu verwenden.

- Zufallsexperimente; Ergebnisse und Ergebnisraum;  
Ereignisse und Ereignisraum
- Glücksspiele, Urnenexperimente  
(6 B: Vererbung von Eigenschaften)  
(6 Ph: radioaktiver Zerfall)  
(6 W: Wirklichkeit und mathematisches Modell)  
Beschränkung auf endliche Ergebnisräume;  
Umsetzung umgangssprachlicher Aussagen in  
Mengenschreibweise (6 DS)

## 2 Relative Häufigkeit und Wahrscheinlichkeitsbegriff (ca. 6 Std.)

Bei einfachen Zufallsexperimenten lernen die Schüler, relative Häufigkeiten von Ereignissen experimentell zu bestimmen und graphisch darzustellen. Die Eigenschaften der relativen Häufigkeit führen zur Definition der Wahrscheinlichkeit nach Kolmogorow. Auf die historische Entwicklung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs soll eingegangen werden.

- relative Häufigkeit eines Ereignisses; Eigenschaften;  
  
empirisches Gesetz der großen Zahlen
- Versuchsreihen, z. B. Münzwurf, Würfelwurf,  
Ziehen aus einer Urne;  
Möglichkeit der Computersimulation;  
graphische Darstellung der relativen Häufigkeit  
eines Ereignisses in Abhängigkeit von der Anzahl  
der Versuche;  
  
Stabilisierung der relativen Häufigkeit
- Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses
- Axiome nach Kolmogorow, Folgerungen;  
klassischer Wahrscheinlichkeitsbegriff von  
Laplace;  
Hinweis auf die statistische Wahrscheinlichkeit  
nach v. Mises  
(6 Ph, C: Orbitalmodell)  
(6 G: Pierre Simon Laplace, 1749 - 1827)  
Richard v. Mises (1883 - 1953)  
Andrej Nikolajewitsch Kolmogorow (1903 -  
1987)

## 3 Einführung in die Kombinatorik (ca. 9 Std.)

Zahlreiche Vorgänge in der Wirklichkeit lassen sich durch mehrstufige Zufallsexperimente mathematisch beschreiben. In der Kombinatorik lernen die Schüler, die möglichen Ausgänge solcher Experimente durch geschickte Darstellung und durch systematisches Zählen zu erfassen. Damit können Laplace-Wahrscheinlichkeiten auch in komplizierteren Fällen berechnet werden.

- mehrstufige Zufallsexperimente;  
allgemeines Zählprinzip
- insbesondere Urnenmodell: Ziehen mit Zurück-  
legen, Ziehen ohne Zurücklegen;  
Baumdiagramme, Pfade
- k-Tupel, k-Permutationen, k-Teilmengen aus  
einer n-Menge;  
Formeln für ihre Anzahl
- Einführung der Symbole  $n!$  und  $\binom{n}{k}$
- Anwendungen
- insbesondere Berechnung von Laplace-Wahr-  
scheinlichkeiten

## 4 Unabhängigkeit zweier Ereignisse (ca. 4 Std.)

Es ist eine Alltagserfahrung, daß manche Vorgänge einander nicht beeinflussen, andere dagegen wohl. Mit den mathematischen Begriffen Unabhängigkeit und Abhängigkeit zweier Ereignisse wird diese Erfahrung modelliert. Die Schüler sollen einsehen, daß die Anwendung dieser Begriffe in der Praxis eine Entscheidung in unklaren Fällen unterstützen kann.

- Unabhängigkeit bzw. Abhängigkeit zweier Ereignisse;  
Produktformel
- Abgrenzung des Begriffs Unabhängigkeit vom Begriff Unvereinbarkeit

## 5 Bernoulli-Kette und Binomialverteilung

(ca. 12 Std.)

Die Bernoulli-Kette, der einfachste Typ eines mehrstufigen Zufallsexperiments, liefert ein aussagekräftiges und gut verständliches Modell für viele Vorgänge, z. B. in der Wirtschaft und im Gesundheitsbereich. Bei der Untersuchung von Bernoulli-Ketten lernen die Schüler am Beispiel der Binomialverteilung den zentralen Begriff der Wahrscheinlichkeitsverteilung kennen.

- Bernoulli-Experiment, Bernoulli-Kette
- Verwenden von Urnenmodell und Baumdiagrammen;
- Sprechweisen: Treffer, Niete, Bernoulli-Kette der Länge  $n$  mit dem Parameter  $p$   
Jakob Bernoulli (1655 - 1705)  
(6 WR: Stichproben, z. B. für Qualitätskontrollen)  
(6 B: Ansteckungsrisiko, z. B. bei AIDS)  
(6 GE, W: Wirklichkeit und mathematisches Modell)
- Binomialverteilung
- $B(n;p): k \mu B(n;p;k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$  ;  
Stabdiagramme, Histogramme;  
Berechnung von Wahrscheinlichkeitssummen mit Hilfe von  
Install Equation Editor and double -  
click here to view equation. 8 ,  
Verwenden von Tabellen;  
experimentelle Überprüfung, z. B. am Galtonbrett  
Francis Galton (1828 - 1911)

## 6 Testen von Hypothesen in einfachen Fällen

(ca. 7 Std.)

Beim Testen einer Hypothese wird eine Vermutung oder eine Behauptung über die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses mit Hilfe eines geeigneten Testverfahrens angenommen oder abgelehnt. In beiden Fällen ist die Entscheidung mit einer gewissen Irrtumswahrscheinlichkeit behaftet. Die Schüler sollen diese Problematik verstehen (6 K, Ev, Eth), sie sollen lernen, einfache Tests durchzuführen, und dabei insbesondere einsehen, daß das Testergebnis von der festgelegten Entscheidungsregel abhängt.

- Testen einer Hypothese
- Alternativtest, Signifikanztest;  
Entscheidungsregel,  
Annahmehbereich, Ablehnungsbereich;  
Fehler und Risiko 1. bzw. 2. Art,  
Signifikanzniveau  
(6 WR: Qualitätskontrollen)  
(6 Sk: Wahlprognosen)





## Jahrgangsstufe 13

**Infinitesimalrechnung** (ca. 16 Std.)

**4 Rationale Funktionen** (ca. 16 Std.)

Mit den gebrochenrationalen Funktionen lernen die Schüler Funktionen kennen, welche in Naturwissenschaft und Technik interessante Anwendungen haben. Die Schüler erhalten damit einen sinnvollen Abschluß ihrer Ausbildung auf dem Gebiet der Infinitesimalrechnung.

- |   |  |
|---|--|
| <ul style="list-style-type: none"> <li>- rationale Funktionen und ihre Eigenschaften;<br/>Kurvendiskussionen</li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>Definitionsmenge;</li> <li>Stetigkeit und Differenzierbarkeit;</li> <li>Verhalten an den Definitionslücken und im Unendlichen;</li> <li>stetige Fortsetzung, Polstellen;</li> <li>Asymptoten</li> <li>(6 Ph: z. B. Abbildung durch optische Linsen, Parallelschaltung von Widerständen, Satellitenbewegung, Van-der-Waals-Gleichung realer Gase)</li> </ul> |
|---|--|

**Analytische Geometrie** (ca. 54 Std.)

**1 Rechnen mit Vektoren im Anschauungsraum** (ca. 6 Std.)

Der Vektorbegriff ist bereits in der ebenen Geometrie der Mittelstufe anschaulich eingeführt worden und hat auch in der Physik gute Dienste geleistet. Daran anknüpfend soll er nun im Anschauungsraum erklärt werden. Hier sollen die Schüler auch den sicheren Umgang mit Vektoraddition und S-Multiplikation lernen.

- |   |   |
|---|---|
| <ul style="list-style-type: none"> <li>- Vektorbegriff</li> </ul>                     | <ul style="list-style-type: none"> <li>Vektor als Menge aller parallelgleichen Pfeile im Anschauungsraum, Repräsentanten eines Vektors, Deutung eines Vektors als Translation;</li> <li>Darstellung von Vektoren in einem Koordinatensystem als 2- bzw. 3-Tupel reeller Zahlen</li> <li>(6 Ph: z. B. Geschwindigkeiten, Beschleunigungen, Kräfte, Feldstärken)</li> </ul> |
| <ul style="list-style-type: none"> <li>- Vektoraddition, S-Multiplikation;</li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>anschauliche Motivation durch Verkettung von Translationen bzw. durch die zentrische Streckung;</li> <li>Rechengesetze;</li> </ul>   |
| <ul style="list-style-type: none"> <li>reeller Vektorraum</li> </ul>                  | <ul style="list-style-type: none"> <li>Hinweis auf ein nichtgeometrisches Beispiel eines reellen Vektorraums</li> </ul>   |

**2 Lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit von Vektoren** (ca. 10 Std.)

Die Verbindung von Vektoraddition und S-Multiplikation führt zu Linearkombinationen von Vektoren. Von dort gelangt man weiter zum Begriff der linearen Abhängigkeit bzw. Unabhängigkeit von Vektoren und zu den Begriffen Basis und Dimension eines Vektorraums. Beim Versuch, einen Vektor als Linearkombination von Vektoren zu schreiben, ergeben sich in natürlicher Weise lineare Gleichungssysteme. Die Schüler sollen die neuen Begriffe sachgerecht verwenden und die

Lösungsmengen linearer Gleichungssysteme mit zwei oder drei Unbekannten sicher bestimmen lernen.

- |   |  |
|---|--|
| - Linearkombination von Vektoren;<br>lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit von Vektoren | Veranschaulichung durch kollineare bzw. komplanare Vektoren;<br>einfache geometrische Anwendungen  |
| - Basis und Dimension eines Vektorraums   | Beschränkung auf $\vec{u}^1, \vec{u}^2, \vec{u}^3$   |
| - lineare Gleichungssysteme   | homogene und inhomogene Systeme mit zwei oder drei Unbekannten<br>Hier können auch zwei- bzw. dreireihige Determinanten verwendet werden, etwa zum Testen der linearen Abhängigkeit. |

### 3 Koordinatendarstellung von Vektoren und von Punkten (ca. 5 Std.)

Nach Wahl eines Bezugspunktes kann man die Lage eines jeden Punktes im Anschauungsraum durch einen Vektor eindeutig beschreiben. Die Schüler sollen den Zusammenhang zwischen dem seit langem vertrauten Begriff des Koordinatensystems in der Ebene bzw. im Anschauungsraum und dem neuen Begriff der Basis des Vektorraums  $\vec{u}^2$  bzw.  $\vec{u}^3$  verstehen.

- |   |   |
|---|---|
| - Koordinaten eines Vektors bezüglich einer Basis     | Eindeutigkeit der Basisdarstellung;<br>insbesondere Verwendung der Standardbasis des $\vec{u}^2$ bzw. des $\vec{u}^3$ |
| - Punkte und ihre Ortsvektoren,<br>Koordinatensysteme | Unterscheidung zwischen Vektorraum und Punktraum  |
| - Teilverhältnis                                      | innere und äußere Teilung einer Strecke;<br>Mittelpunkt einer Strecke, Schwerpunkt eines Dreiecks                     |

### 4 Geraden- und Ebenengleichungen (ca. 7 Std.) in Vektor- und Koordinatenschreibweise

Vektoren ermöglichen die einfache Beschreibung von Geraden und Ebenen des Anschauungsraums durch Gleichungen in Parameterform. Eliminieren der Parameter führt zur Koordinatendarstellung von Geraden in der Ebene und von Ebenen im Raum. Die Schüler sollen lernen, anschaulich zu argumentieren und die Darstellungsformen sorgfältig zu unterscheiden. Sie sollen auch Sicherheit in der zeichnerischen Darstellung einfacher räumlicher Situationen gewinnen.

- |  |   |
|--|---|
| - Geraden- und Ebenengleichungen in vektorieller Parameterform | Hinweis auf Nichteindeutigkeit der Darstellung;<br>geeignete Zeichnungen und Skizzen  |
| - Geraden- und Ebenengleichungen in Koordinatenform            | Gewinnen der Koordinatenform durch Eliminieren der Parameter; auch umgekehrt Aufstellen einer Parameterform aus einer Koordinatenform;<br>Zusammenhang mit der Geradengleichung aus der Mittelstufe;<br>Achsenabschnittsform;<br>Spurpunkte und Spurgeraden;<br>achsenparallele Geraden bzw. Ebenen;<br>zeichnerische Darstellungen |

**5 Lagebeziehungen zwischen Punkten, Geraden und Ebenen**

(ca. 7 Std.)

Die Schüler sollen lernen, Lagebeziehungen von Punkten, Geraden und Ebenen rechnerisch zu untersuchen, Schnittpunkte bzw. Schnittgeraden sicher zu bestimmen und sich die gegenseitige räumliche Lage der geometrischen Objekte vorzustellen. Dabei wird auf die Kenntnisse über lineare Gleichungssysteme zurückgegriffen.

- Lagebeziehungen von Punkten und Geraden in der Ebene      auch geometrische Deutung von linearen (2,2)-Systemen
- Lagebeziehungen von Punkten, Geraden und Ebenen im Raum      geometrische Interpretation rechnerischer Ergebnisse;  
auch zeichnerische Darstellung einfacher räumlicher Situationen

**6 Skalarprodukt von Vektoren, Längen- und Winkelberechnungen**

(ca. 10 Std.)

Bisher fehlen in der Analytischen Geometrie die Mittel für Längen- und Winkelberechnungen. Diese Lücke wird nun mit dem Skalarprodukt geschlossen, für das man etwa mit dem Begriff der physikalischen Arbeit Interesse wecken kann. Die Schüler sollen Längen und Winkel sicher berechnen können und an einigen Beispielen den Zusammenhang mit der Elementargeometrie erkennen.

- Skalarprodukt zweier Vektoren      Beschränkung auf das Standardskalarprodukt;  
Rechengesetze  
(6 Ph: Arbeit)
- Längen- und Winkelberechnungen      Betrag eines Vektors, Winkel zweier Vektoren;  
Einheitsvektoren, orthogonale Vektoren;  
Entfernung zweier Punkte, Winkel zwischen zwei Geraden;  
Zusammenhang mit der Elementargeometrie (z. B. Satz von Pythagoras, Satz von Thales);  
Kreisgleichungen, Kugelgleichungen

**7 Normalenformen von Geraden- bzw. Ebenengleichungen, geometrische Anwendungen**

(ca. 9 Std.)

Die Schüler sollen verstehen, daß man die Koordinatenform von Geraden- und Ebenengleichungen mit Hilfe des Skalarprodukts als Normalenform auffassen kann. Sie sollen weiter die Bedeutung der Hesseschen Normalenform einsehen und Sicherheit in ihrer Anwendung bei Abstandsproblemen gewinnen.

- Normalenvektor einer Geraden bzw. einer Ebene; Geraden- und Ebenengleichungen in Normalenform      orthogonale Geraden und Ebenen;  
skalare und vektorielle Schreibweise
- Hessesche Normalenform; geometrische Anwendungen      Abstand eines Punktes von einer Geraden bzw. von einer Ebene  
Otto Hesse (1811 - 1874)

**Mathematische Grundlagen**

(ca. 31 Std.)

**1 Folgen**

(ca. 13 Std.)

Bei einer Vielzahl von Problemen erfolgt die numerische Lösung durch schrittweises Berechnen von Näherungswerten, meist durch die Auswertung einer rekursiv dargestellten Folge. Die Schüler lernen, verschiedene Folgentypen zu unterscheiden und Glieder einer Folge zu berechnen, sie müssen aber auch in der Lage sein, Bildungsgesetze zu erkennen und zu formulieren. Die Vollständige Induktion dient dabei im wesentlichen zum Nachweis der Übereinstimmung der expliziten mit der rekursiven Darstellung einer Folge und sollte nicht zu sehr vertieft werden.

- |   |   |
|---|---|
| - arithmetische Folgen erster und höherer Ordnung;<br>geometrische Folgen | explizite und rekursive Darstellung einer Zahlenfolge;<br>Ermittlung des Bildungsgesetzes;<br>Auswerten einer Meßreihe, z. B. bei beschleunigter Bewegung (6 Ph);<br>Erstellen von Programmen zum Berechnen der Glieder einer Folge |
| - Vollständige Induktion  | Erklärung an einfachen Beispielen;<br>Hinweis auf die Bedeutung der Vollständigen Induktion bei der Verifikation von Algorithmen  |

**2 Differenzgleichungen**

(ca. 18 Std.)

Mit Hilfe von Differenzgleichungen lassen sich unter anderem Wachstums- und Abklingvorgänge sowie Angebots- und Nachfragezyklen untersuchen und Zins- und Rentenberechnungen durchführen. Beim Aufstellen und Lösen von Differenzgleichungen sollen die Schüler einerseits Praxisnähe erfahren, andererseits typische Vorgehensweisen bei der Modellbildung kennenlernen.

- |   |   |
|---|---|
| - numerische Lösung einer Differenzgleichung erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten und konstanter Inhomogenität | die Tilgungsgleichung $y_{k+1} = ay_k + b$ ;<br>graphische Darstellung der Lösung im $(k, y_k)$ - und im $(y_k, y_{k+1})$ - System;<br>auch Lösung einer allgemeinen Differenzgleichung erster Ordnung<br>(6 WR: Tilgung eines Darlehens)                     |
| - die Lösungsfälle der Tilgungsgleichung  | Ermittlung der geschlossenen Lösung;<br>Diskussion der Lösung in Abhängigkeit von den Parametern;<br>Konvergenzuntersuchungen   |
| - lineare Differenzgleichung zweiter Ordnung  | Beschränkung auf die verallgemeinerte Fibonacci-Gleichung<br>$y_{k+2} + ay_{k+1} + by_k = 0$ ;<br>Ermittlung der geschlossenen Lösung;<br>Berechnungsformel der klassischen Fibonacci-Zahlen<br>Leonardo von Pisa, genannt Fibonacci<br>(ca. 1170 - ca. 1240) |
| - Modellbildung mit Differenzgleichungen  | Diskretisierung dynamischer Prozesse, z. B.   |

beim Räuber-Beute-Problem oder bei der Bewegung im Gravitationsfeld (6 B, Ph);  
nur numerische Lösung der Differenzgleichungen

## Projektarbeit

(ca. 39 Std.)

### Phasen eines Projekts

(ca. 5 Std.)

Die immer komplexer werdenden Aufgaben in Naturwissenschaft und Technik führen dazu, daß die Projektarbeit zur vorherrschenden Arbeitsform in diesen Bereichen wird. Projektarbeit als Verfahren zum Erstellen eines Software-Produkts wird zunächst als Lerngegenstand thematisiert. Hierbei lernen die Schüler, wie man ein Projekt in Phasen gliedern kann. Anschließend sollen sie an zwei der drei beschriebenen Projekte die Methode der Projektarbeit als Mittel zur Bewältigung inhaltlich und organisatorisch komplexer Aufgaben begreifen und lernen, Teile eines Projekts selbst durchzuführen.

- |                      |  |
|----------------------|--|
| - Konzeptionsphase   | Ist-Analyse, Soll-Konzept, Durchführbarkeitsstudie, Projektplanung   |
| - Realisierungsphase | Modularisierung, Modulerstellung, Systemintegration, Installation, Funktionsüberprüfung                    |
| - Bewertungsphase    | Qualitätskriterien nach DIN 66 234;<br>Wartbarkeit, Anpaßbarkeit, Portabilität;<br>Effizienzuntersuchungen |

Es werden zwei der folgenden Projekte behandelt:

### 1 Stochastische Prozesse

(ca. 17 Std.)

Besonderes Gewicht soll bei diesem Projekt auf die Konzeptionsphase gelegt werden.

- |   |   |
|---|---|
| - stochastische Beschreibung von Zufallsprozessen   | Wiederholung der Begriffe Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit;<br>Zufallszahlen;<br>Erwartungswert, z. B. für die Augensumme beim Wurf zweier Würfel;<br>mittlere Spieldauer, z. B. bei einer Irrfahrt                                    |
| - Nachbildung eines stochastischen Prozesses auf dem Computer mit Hilfe von Pseudozufallszahlen | Erzeugen und Prüfen von Pseudozufallszahlen in Gruppenarbeit;<br>graphische Darstellungen   |
| - Konzeption eines Programms zur Simulation von Zufallsprozessen mit Hilfe von Markow-Ketten    | Beschränkung auf endliche homogene Markow-Ketten;<br>Graph eines Zufallsprozesses;<br>Zustände, Übergänge;<br>Besetzungsvektor, Übergangsmatrix;<br>Erstellen eines Anforderungskatalogs für das Programm<br>A. A. Markow (1856 - 1922) |

Hinweise zur Projektdurchführung:

Um ein Programm zur Auswertung der Markow-Kette zu entwickeln, müssen zunächst im Rahmen der Soll-Konzeption das Aussehen des Programms und die Bedienungs- und Veränderungsmöglichkeiten diskutiert und festgelegt werden. Es entsteht ein Anforderungskatalog, der die Projektplanung abschließt.

Je nach Arbeitsfortschritt des Kurses können das Programm oder Teile davon realisiert werden, oder man kann den Schülern ein fertiges Programm zur Verfügung stellen. Die weitere Arbeit besteht nun darin, konkrete Aufgaben zu analysieren, auf das Modell zu übertragen, zu lösen und die Ergebnisse schließlich zu interpretieren. Qualitätsmerkmale und Einsatzmöglichkeiten des Programms müssen herausgearbeitet werden.

## 2 Lineare Optimierung

(ca. 17 Std.)

Besonderes Gewicht soll bei diesem Projekt auf die Realisierungsphase gelegt werden.

- |  |   |
|--|---|
| - lineare Optimierungsprobleme, graphische Lösung                      | Mathematisieren einfacher Aufgaben zur Optimierung, z. B. Produktions-, Transport-, Mischungs- oder Verschnittprobleme (6 WR, MT); Normalform des Maximumproblems; Begriffe: Zielfunktion, Nebenbedingungen; graphisches Lösungsverfahren für Aufgaben mit zwei Variablen |
| - Realisierung eines Programms zum Lösen linearer Optimierungsprobleme | Erläuterung des regulären Simplexverfahrens; Modularisierung des Verfahrens; Modulprogrammierung; Modultest; Systemintegration  |
| - Lösen linearer Optimierungsprobleme mit dem erstellten Programm      | Lösen eines Optimierungsproblems mit mindestens drei Variablen; Diskussion der Einsatzmöglichkeiten des Programms   |

Hinweise zur Projektdurchführung:

Nach einem kurzen Hinweis auf die mathematischen Grundlagen wird das Simplexverfahren, z. B. in Form eines Programmablaufplans, vorgestellt. Auf eine mathematische Herleitung des Algorithmus und ausführliche Begründungen muß verzichtet werden.

Der Hauptteil der Projektarbeit entfällt auf die Realisierungsphase. Bei der gemeinsamen Modularisierung des Verfahrens entstehen Arbeitsaufträge für einzelne Gruppen zum Programmieren und Testen der Module und zur Systemintegration. Als Ergebnis steht ein Programm zur Lösung linearer Optimierungsprobleme zur Verfügung. Zumindest ein komplexeres Problem sollte mit diesem Programm gelöst werden. Dabei sollten Qualitätsmerkmale und Einsatzmöglichkeiten des Programms wenigstens angesprochen werden.

## 3 Differentialgleichungen

(ca. 17 Std.)

Besonderes Gewicht soll bei diesem Projekt auf die Bewertungsphase gelegt werden.

- |  |  |
|--|--|
| - numerische Verfahren zum Lösen linearer Differentialgleichungen erster und zweiter Ordnung                     | Mathematisieren geeigneter Situationen, z. B. radioaktiver Zerfall, begrenztes Wachstum oder gedämpfte Schwingungen (6 Ph);<br>verschiedene Lösungsverfahren, z. B. Euler-Cauchy-, Halbschritt-, Runge-Kutta-Verfahren<br>Leonhard Euler (1707 - 1783)<br>Augustin-Louis Cauchy (1789 - 1857)<br>Carl Runge (1856 - 1927)<br>M. W. Kutta (1869 - 1944) |
| - Erstellen einer Prozedurbibliothek für die behandelten Iterationsverfahren                                     | Formulieren eines Iterationsalgorithmus für Differentialgleichungen erster Ordnung, Umsetzen in ein Programm   |
| - Einsatz, Bewertung und Dokumentation eines Programms zum Lösen linearer Differentialgleichungen erster Ordnung | Prüfung der Qualität und der Effizienz des Programms;<br>Beurteilung der Iterationsverfahren durch den Vergleich numerischer mit analytischen Lösungen   |

#### Hinweise zur Projektdurchführung:

Nach der Analyse verschiedener Beispiele wird die Projektplanung für das Erstellen eines Programms zum Lösen linearer Differentialgleichungen durchgeführt. Die Schüler entwickeln arbeitsteilig Programmbausteine für verschiedene Lösungsverfahren. Mit Hilfe eines bereits fertigen Benutzerumfeldes, in das die Programmbausteine eingesetzt werden, läßt sich die Realisierungsphase abkürzen.

Bei der Bewertung des nun vorliegenden Programms muß vor allem die Genauigkeit der Lösungen überprüft werden. Durch die Anwendung auf Gleichungen, die sich analytisch lösen lassen, kann die Abweichung der Näherungslösung von der exakten Lösung in Abhängigkeit von der Schrittweite bzw. der Schrittzahl und dem gewählten Verfahren festgestellt werden.

Im Hinblick auf mögliche Einsatzbereiche und Anwender sollten Qualitätsmerkmale wie Aufgabenangemessenheit, Selbsterklärungsfähigkeit, Steuerbarkeit, Verlässlichkeit, Fehlertoleranz und Fehlertransparenz (DIN 66 234) arbeitsteilig geprüft und gemeinsam diskutiert werden.

## Leistungskurs (6)

### Jahrgangsstufe 12

#### **Infinitesimalrechnung** (ca. 68 Std.)

#### **1 Meßbarkeit von Flächen, Berechnung von Flächeninhalten, Begriff des bestimmten Integrals** (ca. 16 Std.)

Die im Geometrieunterricht der Unter- und Mittelstufe durchgeführten elementaren Flächenmessungen gingen von einem anschaulich motivierten Inhaltsbegriff aus. Die Schüler erkennen nun anhand geeigneter Beispiele, daß das Konzept des Flächeninhalts neu überdacht werden muß, wobei die intuitiv vorausgesetzten Eigenschaften als Richtschnur dienen. Diese Überlegungen führen zum Begriff des bestimmten Integrals, mit dessen Hilfe die Schüler krummlinig begrenzte Flächen zu berechnen lernen und damit erneut die Tragweite des Grenzwertbegriffs der Infinitesimalrechnung erfahren. Auf die geschichtliche Entwicklung der Integralrechnung soll im Unterricht eingegangen werden.

- |  |   |
|--|---|
| - Meßbarkeit von Flächen   | Axiome des Flächeninhalts: Nichtnegativität, Normiertheit, Additivität  |
| - Berechnung von Flächeninhalten durch Grenzprozesse   | Streifenmethode, auch mit verschiedenen breiten Streifen;<br>Hinweis auf die Zerlegungsinvarianz des Flächeninhalts;<br>Abschätzungen von Flächeninhalten, z. B. mittels Tabellenkalkulation<br>(6 G: Archimedes, ca. 287 - 212 v. Chr.)                                  |
| - das bestimmte Integral als Grenzwert von Summenfolgen;<br>Eigenschaften des bestimmten Integrals | Begriffe: Untersumme, Obersumme;<br>Integrand, Integrationsintervall;<br>Deutung des bestimmten Integrals als Flächenbilanz;<br>Linearitätseigenschaften<br>(6 G: Isaac Newton, 1642 - 1727;<br>Gottfried Wilhelm Leibniz, 1646 - 1716)<br>Bernhard Riemann (1826 - 1866) |

## 2 Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung und seine Anwendung

(ca. 16 Std.)

Bei stetigen Integranden ermöglicht die Differentialrechnung in zahlreichen Fällen die Auswertung bestimmter Integrale, wofür der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung die Grundlage bietet. Die Schüler sollen an dieser Stelle erneut erfahren, wie erfolgreich die Infinitesimalrechnung gerade auch zur Lösung anspruchsvoller Probleme eingesetzt werden kann. Anhand anwendungsbezogener Beispiele wird sich die praktische Bedeutung des Hauptsatzes deutlich herausstellen.

- |   |   |
|---|---|
| - Integralfunktion;<br>der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung                                     | Beweis des Hauptsatzes;<br>Integration als Umkehrung der Differentiation  |
| - Stammfunktion und Berechnung des bestimmten Integrals mit Hilfe einer Stammfunktion;<br>unbestimmtes Integral | Stammfunktionen von $x \mapsto x^n$ ( $n \in \mathbb{Z}, n \neq -1$ ),<br>$x \mapsto \sin x$ , $x \mapsto \cos x$ ;<br>Abgrenzung der Begriffe Integralfunktion, Stammfunktion, unbestimmtes Integral |
| - Anwendungen   | insbesondere Berechnung von Flächeninhalten;<br>auch Volumenberechnungen einfacher Rotationskörper<br>(6 Ph: Bewegungsvorgänge, Arbeit)<br>(6 WR, Ek: Mittelwerte)                                    |

Anstatt mit der Berechnung von Flächeninhalten zu beginnen, kann man auch die Stammfunktion an den Anfang stellen.

## 3 Logarithmusfunktionen und Exponentialfunktionen, ihre Behandlung mit den Mitteln der Infinitesimalrechnung

(ca. 26 Std.)

Die Untersuchung der Integralfunktion von  $x \mapsto x^{-1}$  zur unteren Grenze 1 zeigt, daß diese Funktion die



typischen Eigenschaften der schon aus der Mittelstufe bekannten Logarithmusfunktionen hat. Die natürliche Exponentialfunktion wird als Umkehrfunktion der natürlichen Logarithmusfunktion definiert; daraus ergeben sich ihre Eigenschaften. Logarithmusfunktionen und Exponentialfunktionen spielen bei der Beschreibung vieler Probleme aus so unterschiedlichen Bereichen wie etwa Naturwissenschaften, Wirtschaft und Soziologie eine wichtige Rolle; davon sollen sich die Schüler anhand zahlreicher Beispiele überzeugen (6 BO).

- |  |  |
|--|--|
| - die natürliche Logarithmusfunktion und ihre Eigenschaften;   | die Integralfunktion<br>Install Equation Editor and double -<br>click here to view equation. 9,<br>schrittweise Begründung für das Vorliegen einer Logarithmusfunktion;  |
| die Eulersche Zahl e   | Definition von e durch<br>Install Equation Editor and double -<br>click here to view equation. 10<br>Leonhard Euler (1707 - 1783)  |
| - Grenzwertdarstellung für die Zahl e  | Nachweis von<br>Install Equation Editor and double -<br>click here to view equation. 11<br>Hinweis auf weitere Berechnungsmöglichkeiten sowie auf die Irrationalität und die Transzendenz von e  |
| - Umkehrfunktionen und ihre Ableitung  | Wiederholung der Begriffe Umkehrbarkeit einer Funktion und Umkehrfunktion;<br>Satz von der Ableitung der Umkehrfunktion und sein Beweis;<br>Hinweis auf die Ableitung der Potenzfunktionen mit rationalen Exponenten   |
| - die natürliche Exponentialfunktion als Umkehrfunktion der ln-Funktion;<br>Eigenschaften der e-Funktion | Herleitung der Eigenschaften aufgrund des Zusammenhangs mit der ln-Funktion  |
| - allgemeine Exponentialfunktionen bzw. Logarithmusfunktionen  | Darstellung mit Hilfe der e-Funktion bzw. der ln-Funktion;<br>Ableitung und Integration von $x \mu a^x$ ,<br>Ableitung von $x \mu \log_a x$  |
| - Aufgaben und Anwendungen   | Kurvendiskussionen;<br>Integrationen, auch<br>Install Equation Editor and double -<br>click here to view equation. 12<br>(6 B: Wachstumsvorgänge, z. B. Wachstum von Populationen; Weber-Fechnersches Gesetz)<br>(6 Ek: Bevölkerungswachstum; 6 DW)<br>(6 Ph, C: Abklingvorgänge, z. B. radioaktiver Zerfall; Absorptionsvorgänge)<br>(6 WR: stetige Verzinsung; 6 U: Wachstumsvorgänge) |

#### 4 Rationale Funktionen\*

(ca. 10 Std.)

Mit den gebrochenrationalen Funktionen lernen die Schüler Funktionen kennen, bei deren Un-

tersuchung die bisherigen Kenntnisse und Arbeitstechniken aus der Infinitesimalrechnung auf vielfältige Weise zum Einsatz kommen. Dies gilt insbesondere für anspruchsvollere Kurvendiskussionen. Dabei sollen die Schüler einen Einblick in die zahlreichen interessanten Anwendungsmöglichkeiten rationaler Funktionen in Naturwissenschaft und Technik erhalten.

- |   |   |
|---|---|
| - rationale Funktionen und ihre Eigenschaften;<br>Kurvendiskussionen    | Definitionsmenge;<br>Stetigkeit und Differenzierbarkeit;<br>Verhalten an den Definitionslücken und im Unendlichen;<br>stetige Fortsetzung, Polstellen, Asymptoten;<br>Integration in einfachen Fällen |
| - Anwendungen rationaler Funktionen in<br>Naturwissenschaft und Technik | (6 Ph: z. B. Abbildung durch optische Linsen,<br>Parallelschaltung von Widerständen,<br>Satellitenbewegung, Van-der-Waals-Gleichung<br>realer Gase)<br>(6 MT: Festigkeitslehre, Statik)               |

## Wahrscheinlichkeitsrechnung/Statistik

(ca. 52 Std.)

### 1 Zufallsexperimente; Mathematisierung realer Vorgänge

(ca. 8 Std.)

Probleme aus dem Alltag, aus den Naturwissenschaften und den Sozialwissenschaften führen auf den Begriff des Zufallsexperiments, mit dem nicht kausal erschließbare Vorgänge beschrieben werden können. Die Schüler sollen lernen, reale Situationen durch mathematische Modelle zu erfassen und die dabei eingeführten Sprechweisen und Begriffe sachgerecht zu verwenden.

\* Dieser Abschnitt ist aus systematischen Gründen in Jahrgangsstufe 12 aufgeführt, seine Behandlung kann sich aber in die Jahrgangsstufe 13 erstrecken.

- |  |  |
|--|--|
| - Zufallsexperimente;  | Glücksspiele, Urnenexperimente<br>(6 B: Vererbung von Eigenschaften)<br>(6 Ph: radioaktiver Zerfall)<br>(6 Sk: Meinungsumfragen)<br>(6 W: Wirklichkeit und mathematisches Modell)<br>Beschränkung auf endliche Ergebnisräume;<br>Umsetzung umgangssprachlicher Aussagen in<br>Mengenschreibweise (6 DS)<br>Rechengesetze |
| Ergebnisse und Ergebnisraum;<br>Ereignisse und Ereignisraum; |  |
| Ereignisalgebra  |  |

### 2 Relative Häufigkeit und Wahrscheinlichkeitsbegriff

(ca. 8 Std.)

Bei einfachen Zufallsexperimenten lernen die Schüler, relative Häufigkeiten von Ereignissen experimentell zu bestimmen und graphisch darzustellen. Die Eigenschaften der relativen Häufigkeit motivieren die Einführung des axiomatischen Wahrscheinlichkeitsbegriffs nach Kolmogorow. Frühere Versuche zur Definition von Wahrscheinlichkeiten sollen diskutiert werden, um den Schülern die Schwierigkeiten bei der Festlegung dieses Begriffs bewußt zu machen.

- relative Häufigkeit eines Ereignisses;  
Eigenschaften;
- Versuchsreihen, z. B. Münzwurf, Würfelwurf,  
Ziehen aus einer Urne;  
Möglichkeit der Computersimulation;  
graphische Darstellung der relativen Häufigkeit  
eines Ereignisses in Abhängigkeit von der Anzahl  
der Versuche;  
Stabilisierung der relativen Häufigkeit
- empirisches Gesetz der großen Zahlen
- historische Entwicklung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs;  
Wahrscheinlichkeitsmaß, Wahrscheinlichkeit  
eines Ereignisses;  
Wahrscheinlichkeitsraum
- klassischer Wahrscheinlichkeitsbegriff von  
Laplace;  
statistische Wahrscheinlichkeit nach  
v. Mises;  
Axiome nach Kolmogorow, Folgerungen;  
Vergleich mit dem Flächenmaß  
(6 Ph, C: Orbitalmodell)  
(6 G: Pierre Simon Laplace, 1749 - 1827)  
Richard v. Mises (1883 - 1953)  
Andrej Nikolajewitsch Kolmogorow (1903 -  
1987)

### 3 Einführung in die Kombinatorik

(ca. 10 Std.)

Zahlreiche Vorgänge in der Wirklichkeit lassen sich durch mehrstufige Zufallsexperimente mathematisch beschreiben. In der Kombinatorik lernen die Schüler, die möglichen Ausgänge solcher Experimente durch geschickte Darstellung und durch systematisches Zählen zu erfassen. Damit können Laplace-Wahrscheinlichkeiten auch in komplizierteren Fällen berechnet werden.

- mehrstufige Zufallsexperimente;  
allgemeines Zählprinzip
- insbesondere Urnenmodell: Ziehen mit Zurücklegen,  
Ziehen ohne Zurücklegen;  
Baumdiagramme, Pfade
- k-Tupel, k-Permutationen, k-Teilmengen,  
k-Kombinationen aus einer n-Menge;  
Formeln für ihre Anzahl
- Einführung der Symbole  $n!$  und  $\binom{n}{k}$
- Anwendungen
- insbesondere Berechnung von Laplace-Wahrscheinlichkeiten

### 4 Bedingte Wahrscheinlichkeit, Unabhängigkeit von Ereignissen

(ca. 10 Std.)

Etwa bei Urnenexperimenten kann man feststellen, daß die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses von den zur Verfügung stehenden Informationen abhängen kann. Diese Tatsache wird mit Hilfe der bedingten Wahrscheinlichkeit genau beschrieben und führt zu den mathematischen Begriffen Unabhängigkeit und Abhängigkeit von Ereignissen. Die Schüler sollen verstehen, wie die Verwendung dieser Begriffe eine Entscheidung darüber unterstützen kann, ob Vorgänge einander beeinflussen oder nicht.

- bedingte Wahrscheinlichkeit
- Definition durch  
Install Equation Editor and double-  
click here to view equation. 13 ;  
Nachweis, daß die Funktion  $P_B$  ein Wahrscheinlichkeitsmaß ist;  
Pfadregeln und totale Wahrscheinlichkeit

- Formel von Bayes Lösung eines Umkehrproblems;  
Herleitung für zweielementige Zerlegungen  
Thomas Bayes (1702 - 1761)
- Unabhängigkeit bzw. Abhängigkeit zweier Ereignisse;  
Produktformel Abgrenzung des Begriffs Unabhängigkeit vom Begriff Unvereinbarkeit;  
Hinweis auf die Unabhängigkeit von mehr als zwei Ereignissen
- Aufgaben und Anwendungen etwa zur Bevölkerungsstatistik  
(6 GE: Rauchen und Lebenserwartung)  
(6 D: Textverständnis)

## 5 Zufallsgrößen und ihre Verteilungsfunktionen (ca. 8 Std.)

Beispiele von Glücksspielen oder aus dem Versicherungswesen zeigen, daß in der Praxis den Ergebnissen von Zufallsexperimenten häufig Zahlen zugeordnet werden, etwa ein Gewinn bzw. eine Prämie. Die so entstehenden reellwertigen Funktionen bezeichnet man als Zufallsgrößen. Zu ihrer Charakterisierung dienen Wahrscheinlichkeitsfunktionen und Verteilungsfunktionen. Die Schüler sollen hier eine hilfreiche Anbindung der Wahrscheinlichkeitsrechnung an die Infinitesimalrechnung erfahren.

- Zufallsgrößen
- Wahrscheinlichkeitsverteilung, Wahrscheinlichkeitsfunktion und Verteilungsfunktion einer Zufallsgröße Definition und Eigenschaften;  
Graphen, Stabdiagramme, Histogramme
- gemeinsame Wahrscheinlichkeitsfunktion zweier Zufallsgrößen;  
Unabhängigkeit zweier Zufallsgrößen;  
Verknüpfungen von Zufallsgrößen Definition als reellwertige Funktion zweier reeller Variablen  
 $W_{X,Y} : (x,y) \mapsto P(X=x \vee Y=y)$

## 6 Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung als Maßzahlen von Zufallsgrößen (ca. 8 Std.)

Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung dienen der groben Charakterisierung von Zufallsgrößen. In der Praxis stellt sich oft die Frage, ob bestimmte zufällige Ereignisse, etwa beim Klima, noch in den Rahmen des Üblichen fallen oder als ungewöhnlich zu bewerten sind. In übersichtlichen Situationen sollen die Schüler lernen, solchen Fragen mit Hilfe der genannten Maßzahlen genauer nachzugehen.

- Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung einer Zufallsgröße Definition, Verständnis für die Begriffsbildung;  
Eigenschaften von Erwartungswert und Varianz,  
auch bei Verknüpfungen von Zufallsgrößen
- Aufgaben und Anwendungen (6 WR: mittlere Reparaturkosten)  
(6 Ph: Meßgenauigkeit)  
(6 MT, U: Klima)

## Analytische Geometrie (ca. 48 Std.)

### 1 Rechnen mit Vektoren im Anschauungsraum; Vektorräume (ca. 10 Std.)

Der Vektorbegriff ist bereits in der ebenen Geometrie der Mittelstufe anschaulich eingeführt worden und hat auch in der Physik gute Dienste geleistet. Daran anknüpfend soll er nun im Anschauungsraum erklärt werden. Hier sollen die Schüler auch den sicheren Umgang mit Vektoraddition und S-Multiplikation lernen. Die erarbeiteten Rechenregeln werden dann als Axiome des abstrakten reellen Vektorraums betrachtet.

- |                                       |  |
|---------------------------------------|--|
| - Vektorbegriff                       | Vektor als Menge aller parallelgleichen Pfeile im Anschauungsraum, Repräsentanten eines Vektors;<br>Deutung eines Vektors als Translation;<br>Darstellung von Vektoren in einem Koordinatensystem als 2- bzw. 3-Tupel reeller Zahlen<br>(6 Ph: z. B. Geschwindigkeiten, Beschleunigungen, Kräfte, Feldstärken) |
| - Vektoraddition,<br>S-Multiplikation | anschauliche Motivation durch Verkettung von Translationen bzw. durch die zentrische Streckung;<br>Rechengesetze;<br>Gruppenstruktur   |
| - reeller Vektorraum                  | Vektorraumaxiome;<br>nichtgeometrisches Beispiel eines reellen Vektorraums;<br>Hinweis auf die Körperstruktur von $\mathbb{U}$ und auf Vektorräume über beliebigen Körpern   |

## 2 Lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit von Vektoren; (ca. 14 Std.) Basis und Dimension eines Vektorraums

Die Verbindung von Vektoraddition und S-Multiplikation führt zu Linearkombinationen von Vektoren. Von dort gelangt man weiter zum Begriff der linearen Abhängigkeit bzw. Unabhängigkeit von Vektoren und zu den Begriffen Basis und Dimension eines Vektorraums. Beim Versuch, einen Vektor als Linearkombination von Vektoren darzustellen, ergeben sich in natürlicher Weise lineare Gleichungssysteme. Die Schüler sollen die neuen Begriffe sachgerecht verwenden und die Lösungsmengen linearer Gleichungssysteme mit zwei oder drei Unbekannten sicher bestimmen können. Darüber hinaus sollen sie das Gaußsche Eliminationsverfahren als leistungsfähige Lösungsmethode für beliebige lineare Systeme erkennen.

- |   |   |
|---|---|
| - Linearkombination von Vektoren;<br>lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit von Vektoren | allgemeine Definition für reelle Vektorräume;<br>Veranschaulichung im $\mathbb{U}^3$ durch kollineare bzw. komplanare Vektoren;<br>geometrische Anwendungen |
| - Basis und Dimension eines reellen Vektorraums   | insbesondere $\mathbb{U}^1$ , $\mathbb{U}^2$ , $\mathbb{U}^3$ ;<br>nichtgeometrisches Beispiel<br>(6 Ph: 6-dimensionaler Ort-Impuls-Raum, Phasenräume)      |

- lineare Gleichungssysteme
  - homogene und inhomogene Systeme mit zwei oder drei Unbekannten;
  - Gaußscher Algorithmus
  - Hier können auch zwei- bzw. dreireihige Determinanten verwendet werden;
  - auch Beispiele größerer Systeme,
  - Möglichkeit zum Computereinsatz
  - Carl Friedrich Gauß (1777 - 1855)
  - (6 Ph: z. B. Festkörperphysik, Raumfahrt)
  - (6 WR: lineare Optimierung)

### 3 Koordinatendarstellung von Vektoren; Vektorraum und Punktraum (ca. 7 Std.)

Jeder Vektor eines Vektorraums ist bezüglich einer fest gewählten Basis eindeutig als Linearkombination und damit in Koordinaten darstellbar. Nach Wahl eines Bezugspunktes kann man die Lage eines jeden Punktes im Anschauungsraum durch einen Vektor eindeutig beschreiben. Die Schüler sollen den Zusammenhang zwischen dem seit langem vertrauten Begriff des Koordinatensystems in der Ebene bzw. im Anschauungsraum und dem neuen Begriff der Basis des Vektorraums  $\mathbb{U}^2$  bzw.  $\mathbb{U}^3$  verstehen.

- Koordinaten eines Vektors bezüglich einer Basis
  - Eindeutigkeit der Basisdarstellung;
  - insbesondere Verwendung der Standardbasis des  $\mathbb{U}^2$  bzw.  $\mathbb{U}^3$
- Punkte und ihre Ortsvektoren, Koordinatensysteme
  - Unterscheidung zwischen Vektorraum und Punktraum
- Teilverhältnis
  - innere und äußere Teilung einer Strecke,
  - harmonische Teilung;
  - Mittelpunkt einer Strecke,
  - Schwerpunkt eines Dreiecks

### 4 Geraden- und Ebenengleichungen in Vektor- und Koordinatenschreibweise (ca. 6 Std.)

Vektoren ermöglichen die einfache Beschreibung von Geraden und Ebenen des Anschauungsraums durch Gleichungen in Parameterform. Eliminieren der Parameter führt zur Koordinatendarstellung von Geraden in der Ebene und von Ebenen im Raum. Die Schüler sollen lernen, anschaulich zu argumentieren und die Darstellungsformen sorgfältig zu unterscheiden. Sie sollen auch Sicherheit in der zeichnerischen Darstellung räumlicher Situationen gewinnen.

- Geraden- und Ebenengleichungen in vektorieller Parameterform
  - Hinweis auf Nichteindeutigkeit der Darstellung;
  - geeignete Zeichnungen und Skizzen
- Geraden- und Ebenengleichungen in Koordinatenform
  - Gewinnen der Koordinatenform durch Eliminieren der Parameter; auch umgekehrt Aufstellen einer Parameterform aus einer Koordinatenform;
  - Zusammenhang mit der Geradengleichung aus der Mittelstufe;
  - Achsenabschnittsform;
  - Spurpunkte und Spurgeraden;
  - achsenparallele Geraden bzw. Ebenen;
  - zeichnerische Darstellungen

### 5 Lagebeziehungen zwischen Punkten, Geraden und Ebenen (ca. 11 Std.)

Die Schüler sollen lernen, Lagebeziehungen von Punkten, Geraden und Ebenen rechnerisch zu untersuchen, Schnittpunkte bzw. Schnittgeraden sicher zu bestimmen und sich die gegenseitige räumliche Lage der geometrischen Objekte vorzustellen. Dabei wird auf die Kenntnisse über lineare Gleichungssysteme zurückgegriffen.

- Lagebeziehungen von Punkten und Geraden in der Ebene      auch geometrische Deutung von linearen (2,2)-Systemen
- Lagebeziehungen von Punkten, Geraden und Ebenen im Raum      geometrische Interpretation rechnerischer Ergebnisse;  
auch zeichnerische Darstellung räumlicher Situationen;  
geometrische Deutung von linearen (3,3)-Systemen

## **Jahrgangsstufe 13**

**Infinitesimalrechnung** (ca. 45 Std.)

**5 Integration durch Substitution; partielle Integration** (ca. 18 Std.)

Mit der Integration durch Substitution sowie der partiellen Integration lernen die Schüler zwei Verfahren kennen, mit deren Hilfe sie nun viel mehr Funktionen integrieren können als bisher. Der Aspekt der Integration als Umkehrung der Differentiation wird hierbei nochmals besonders deutlich. Die Schüler sollen ausreichende Geläufigkeit in der Handhabung dieser Verfahren erlangen.

- Integration durch Substitution      Begründung mit Hilfe der Kettenregel
- partielle Integration      Begründung mit Hilfe der Produktregel

**6 Uneigentliche Integrale** (ca. 7 Std.)

Uneigentliche Integrale spielen in der Mathematik und in naturwissenschaftlich-technischen Disziplinen eine bedeutende Rolle. Deshalb sollen die Schüler lernen, uneigentliche Integrale zu erkennen, mit geeigneten Methoden auszuwerten und entsprechende Beispiele, etwa aus der Physik, zu behandeln.

- uneigentliche Integrale:      Definition und Auswertung  
Integrale mit unbeschränktem Integrationsintervall,      (6 Ph: z. B. Potential im Zentralfeld: Fluchtgeschwindigkeit, Coulomb-Wall)  
Integrale mit unbeschränktem Integranden

**7 Die Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen** (ca. 20 Std.)

Die in Naturwissenschaft und Technik wichtigen trigonometrischen Funktionen sind bereits aus dem Mittelstufenunterricht bekannt. Sie sind bei geeigneter Einschränkung ihrer Definitionsmenge umkehrbar. Ihre Umkehrfunktionen, die Arcusfunktionen, erweisen sich sowohl bei der Winkelberechnung wie beim Integrieren als nützlich.

- die Funktionen arcsin, arccos, arctan und ihre Eigenschaften      Definitionsmenge, Wertemenge, Graph, Symmetrie, Monotonie
- Ableitung der Arcusfunktionen      Herleitung über die Ableitung der Umkehrfunktionen, Verhalten am Rand der Definitionsmenge;  
Stammfunktionen zu  
Install Equation Editor and double-click here to view equation.      14      und  
Install Equation Editor and double-click here to view equation.      15
- Aufgaben und Anwendungen      Kurvendiskussionen, insbesondere bei Verknüpfungen von Arcusfunktionen mit anderen Funktionen;  
Integrationen

### Wahrscheinlichkeitsrechnung/Statistik (ca. 62 Std.)

#### 7 Bernoulli-Kette und Binomialverteilung (ca. 14 Std.)

Die Bernoulli-Kette, der einfachste Typ eines mehrstufigen Zufallsexperiments, liefert ein aussagekräftiges und gut verständliches Modell für viele Vorgänge, z. B. in der Wirtschaft und im Gesundheitsbereich. Die Untersuchung von Bernoulli-Ketten führt zu binomialverteilten Zufallsgrößen, bei deren Behandlung die Schüler ihre bisherigen Kenntnisse aus der Stochastik anwenden und vertiefen können.

- Bernoulli-Experiment, Bernoulli-Kette      Verwenden von Urnenmodell und Baumdiagrammen;  
Sprechweisen: Treffer, Niete, Bernoulli-Kette der Länge  $n$  mit dem Parameter  $p$   
Jakob Bernoulli (1655 - 1705)
- Binomialverteilung, binomialverteilte Zufallsgrößen       $B(n;p): k \mu B(n;p;k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$  ;  
Stabdiagramme, Histogramme;  
Verteilungsfunktion  
Install Equation Editor and double-click here to view equation.      16 ;  
Verwenden von Tabellen;  
experimentelle Überprüfung, z. B. am Galtonbrett  
Francis Galton (1828 - 1911)  
Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung binomialverteilter Zufallsgrößen
- Aufgaben und Anwendungen      (6 WR: Qualitätskontrolle)  
(6 B: Ansteckungsrisiko, z. B. bei AIDS)  
(6 GE, W: Wirklichkeit und mathematisches Modell)

#### 8 Tschebyschow-Ungleichung; Gesetz der großen Zahlen (ca. 8 Std.)

Die Tschebyschow-Ungleichung erlaubt allein aus der Kenntnis von Erwartungswert und Varianz einer



Zufallsgröße eine Abschätzung der Wahrscheinlichkeit, mit der eine bestimmte Abweichung vom Erwartungswert nicht überschritten wird. Weiter läßt sich aus ihr das schwache Gesetz der großen Zahlen ableiten. Die Schüler sollen erkennen, daß damit die empirisch bereits festgestellte Stabilisierung der relativen Häufigkeit mathematisch präzisiert wird und die Verwendung relativer Häufigkeiten als Wahrscheinlichkeiten gerechtfertigt ist.

- Tschebyschow-Ungleichung allgemeine Herleitung aus der Varianz,  
Spezialisierung auf die Binomialverteilung  
P. L. Tschebyschow (1821 - 1894)  
(6 WR: Qualitätskontrolle)
- Gesetze der großen Zahlen Folgerung des schwachen Gesetzes aus der  
Tschebyschow-Ungleichung;  
Hinweis auf das starke Gesetz  
Jakob Bernoulli (1655 - 1705)  
(6 W: Wirklichkeit und mathematisches Modell)

## 9 Näherungen für die Binomialverteilung, die Normalverteilung (ca. 18 Std.)

Die Untersuchung von Binomialverteilungen  $B(n;p)$  zu festem Parameter  $p$  bei wachsendem  $n$  führt über den lokalen und den integralen Grenzwertsatz zur Approximation der Binomialverteilung durch die Normalverteilung. In diesem Zusammenhang werden auch Kenntnisse aus der Infinitesimalrechnung eingesetzt. Mit der Normalverteilung eröffnet sich den Schülern ein weites Feld von Anwendungen in Naturwissenschaft und Technik, in der Wirtschaft und den Sozialwissenschaften.

- lokaler Grenzwertsatz,  
integraler Grenzwertsatz Zur Darlegung der Beweisidee wird die standar-  
disierte Dichtefunktion der Binomialverteilung  
eingeführt.  
Abraham de Moivre (1667 - 1754)  
(6 G: Pierre Simon Laplace, 1749 - 1827)
- Normalverteilung in erster Linie als Näherung der Binomial-  
verteilung;  
Eigenschaften und Graphen von Dichtefunktion  
und Verteilungsfunktion;  
Verwenden von Tabellen
- zentraler Grenzwertsatz Hinweis auf Aussage und Bedeutung
- Aufgaben und Anwendungen (6 WR: Güterproduktion)  
(6 Sk: Verfahren zur Erstellung von Wahl-  
prognosen)  
(6 B: Verteilung von Merkmalen)

## 10 Testen von Hypothesen (ca. 22 Std.)

Beim Testen einer Hypothese wird eine Vermutung oder eine Behauptung über die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses mit Hilfe eines geeigneten Testverfahrens angenommen oder abgelehnt. In beiden Fällen ist die Entscheidung mit einer gewissen Irrtumswahrscheinlichkeit behaftet. Die Schüler sollen diese Problematik verstehen (6 K, Ev, Eth) und an praktischen Beispielen lernen, mit Hilfe von Binomialverteilung und Normalverteilung Tests sachgerecht zu formulieren und auszuwerten. Darüber hinaus sollen sie in der Lage sein, Tests und deren Ergebnisse kritisch zu beurteilen.

- Testen von Hypothesen  
Alternativtest, Signifikanztest;  
einfache und zusammengesetzte Hypothesen;  
Stichproben;  
Entscheidungsregel, Annahmehbereich,  
Ablehnungsbereich;  
Fehler und Risiko 1. bzw. 2. Art, Signifikanz-  
niveau
- Operationscharakteristik eines Ereignisses  
sorgfältige Begriffsbildung;  
Graphen;  
Abhängigkeit der OC-Kurven von Stichpro-  
benlänge und Annahmehbereich;  
Optimierungsüberlegungen;  
Hinweis auf verfälschte Tests
- Aufgaben und Anwendungen  
(6 WR: Schadensminimierung)  
(6 B: Vererbung von Merkmalen)

## Analytische Geometrie (ca. 33 Std.)

### 6 Skalarprodukt von Vektoren; (ca. 15 Std.) Betrachtungen zur Metrik, Längen- und Winkelberechnungen

Mit den Vektorraumaxiomen allein läßt sich noch keine Längen- und Winkelmessung begründen. Dazu bedarf es einer zusätzlichen Struktur, die durch das Skalarprodukt erzeugt wird. Die Schüler sollen verstehen, daß Länge und Winkel relative Begriffe sind, die von der Wahl des Skalarprodukts abhängen. Im Anschauungsraum sollen sie Längen und Winkel sicher berechnen können und an einigen Beispielen den Zusammenhang mit der Elementargeometrie erkennen.

- Skalarprodukt zweier Vektoren eines reellen  
Vektorraums;  
euklidischer Vektorraum  
Axiome des Skalarprodukts;  
verschiedene Skalarprodukte im  $\mathbb{U}^3$ ,  
insbesondere Verwendung des Standardskalar-  
produkts  
Hier kann auch ein nichtgeometrisches Beispiel  
betrachtet werden.  
(6 Ph: Arbeit)
- Längen- und Winkelberechnungen  
Betrag eines Vektors, Winkel zweier Vektoren;  
Einheitsvektoren, orthogonale Vektoren, Ortho-  
normalbasis, orthogonale Projektion eines  
Vektors auf einen Vektor;  
Entfernung zweier Punkte, Winkel zwischen  
zwei Geraden;  
Abstand windschiefer Geraden;  
Zusammenhang mit der Elementargeometrie (z.  
B. Satz von Pythagoras, Satz von Thales);  
Kreisgleichungen, Kugelgleichungen

### 7 Vektorprodukt (ca. 6 Std.)

Das Vektorprodukt ist eine Rechenoperation im  $\mathbb{U}^3$ , die zwei Vektoren einen Vektor zuordnet. Die Schüler sollen sich den Unterschied zum Skalarprodukt bewußtmachen und das Vektorprodukt bei Flächenberechnungen und bei der Bestimmung von Normalenvektoren anwenden lernen.

- Vektorprodukt im  $\mathbb{U}^3$  Definition, Eigenschaften
- Anwendungen Normalenvektor einer Ebene;  
Flächeninhalt eines Parallelogramms,  
Volumen eines Spats  
(6 Ph: Drehmoment, Drehimpuls, Lorentzkraft)

### **8 Normalenformen von Geraden- bzw. Ebenengleichungen, geometrische Anwendungen** (ca. 12 Std.)

Die Schüler sollen verstehen, daß man die Koordinatenform von Geraden- und Ebenengleichungen mit Hilfe des Skalarprodukts als Normalenform auffassen kann. Sie sollen weiter die Bedeutung der Hesseschen Normalenform einsehen und Sicherheit in ihrer Anwendung bei Abstandsproblemen gewinnen.

- Normalenvektor einer Geraden bzw. einer Ebene; orthogonale Geraden und Ebenen;  
Geraden- und Ebenengleichungen in Normalenform skalare und vektorielle Schreibweise
- Hessesche Normalenform; Abstand eines Punktes von einer Geraden bzw. von einer Ebene;  
geometrische Anwendungen Winkel zwischen zwei Ebenen;  
winkelhalbierende Geraden und winkelhalbierende Ebenen  
Otto Hesse (1811 - 1874)