1 Zusammengesetzte Zufallsexperimente, Pfadregeln

Aufbauend auf den Erfahrungen aus den vorhergehenden Jahrgangsstufen beschäftigen sich die Schüler systematisch mit zusammengesetzten Zufallsexperimenten und veranschaulichen den Ablauf solcher Vorgänge an Baumdiagrammen.
Mit Hilfe der (als Axiome eingeführten) Pfadregeln bestimmen sie Wahrscheinlichkeiten (Gewinnchancen).

Oft lassen sich komplexe Zufallsexperimente als Zusammensetzung einfacherer Zufallsexperimente auffassen.

Beispiele:
- Es wird mit drei Würfeln gewürfelt. Dies lässt sich durch das dreimalige Ausführen des Zufallsexperiments „Einen Würfel werfen“ ersetzen.
- Statt vier Münzen zu werfen, kann man auch eine Münze viermal werfen.

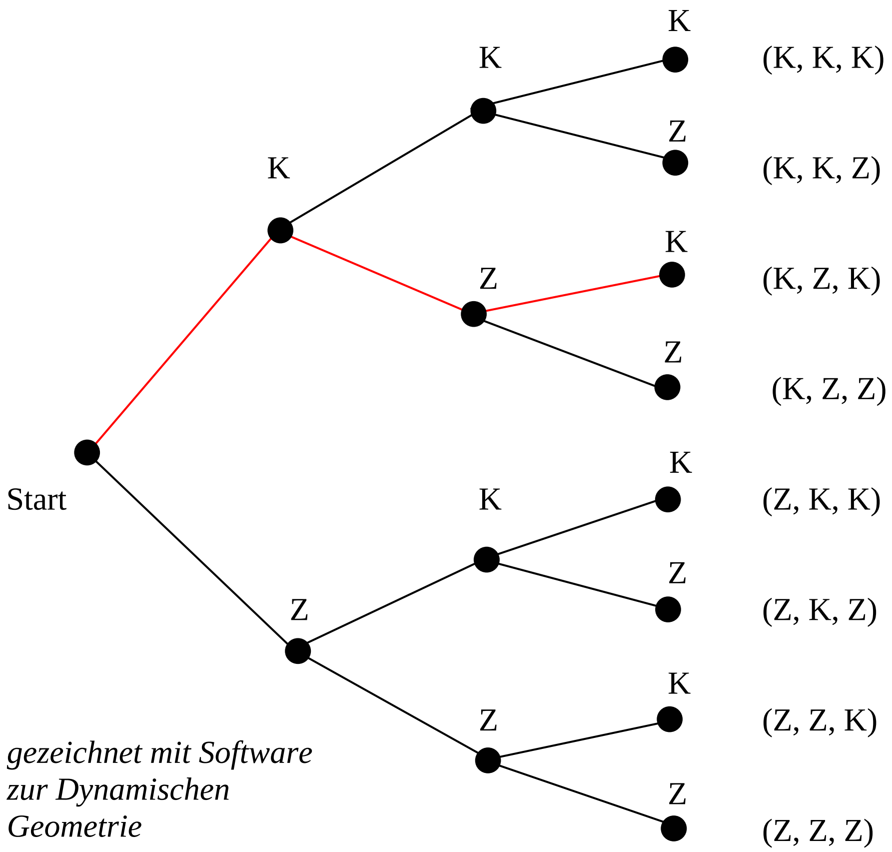
Solche Experimente lassen sich durch Baumdiagramme übersichtlich darstellen.

Beispiel: Dreifacher Münzwurf

Bei jedem Wurf gibt es zwei Möglichkeiten, Kopf K oder Zahl Z. Insgesamt ergeben sich $2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3 = 8$ Möglichkeiten, die sich im Baumdiagramm übersichtlich darstellen lassen.
Der Baum besteht aus Knoten ● und Ästen, die je zwei Knoten miteinander verbinden. Die Endknoten werden Blätter genannt. Jeder Baum beginnt mit dem Startknoten (Anfangsknoten oder Wurzel) und endet mit den Blättern.
Ein Weg vom Startknoten zu einem Blatt heißt Pfad.

Baumdiagramm

1. Wurf 2. Wurf 3. Wurf Ergebnis (Ausgang)



gezeichnet mit Software zur Dynamischen Geometrie

Pfadregeln

Mit Hilfe der Pfadregeln kann man oft eine rasche, einfache Berechnung von Wahrscheinlichkeiten durchführen. Man kommt ohne Ergebnismenge, ohne Ereignisse als Mengen darzustellen und ohne kombinatorische Berechnungen aus.

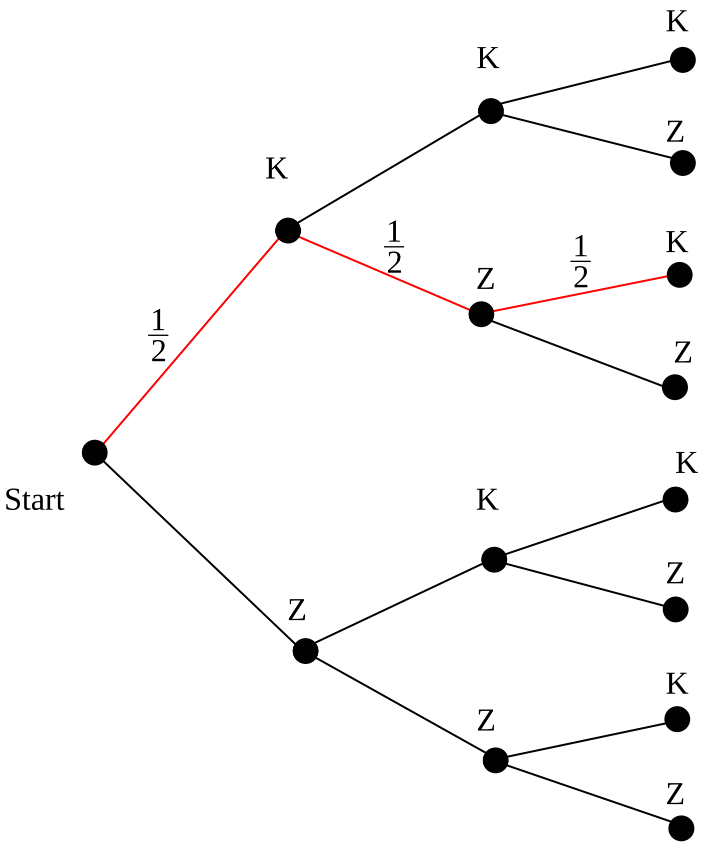
Für ein durch ein Baumdiagramm veranschaulichtes Zufallsexperiment gilt:

(1)	**Pfad-Multiplikationsregel:**	Die Wahrscheinlichkeit für ein Ergebnis erhält man durch die Multiplikation der Wahrscheinlichkeiten längs des zum Blatt gehörigen Pfades.
(2)	**Pfad-Additionsregel:**	Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses ist gleich der Summe der Wahrscheinlichkeiten aller zugehörigen Ergebnisse (Pfade).

Beispiel

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für die Abfolge K, Z, K beim dreifachen Werfen einer Münze?

1. Wurf 2. Wurf 3. Wurf



Ausgang (Ergebnis)	Wahrscheinlichkeit
(K, K, K)	$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$
(K, K, Z)	$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$
(K, Z, K)	$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$
(K, Z, Z)	$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$
(Z, K, K)	$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$
(Z, K, Z)	$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$
(Z, Z, K)	$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$
(Z, Z, Z)	$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$
Summe:	1

Da auf jeden Fall eines der Ergebnisse eintritt, ist die Summe der Wahrscheinlichkeiten aller Ergebnisse 1.

Beispiele:

Die Wahrscheinlichkeit „erst Kopf, dann Zahl und dann Kopf zu werfen“ beträgt

$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8} = 0{,}125 = 12{,}5\%$ (Pfad-Multiplikationsregel).

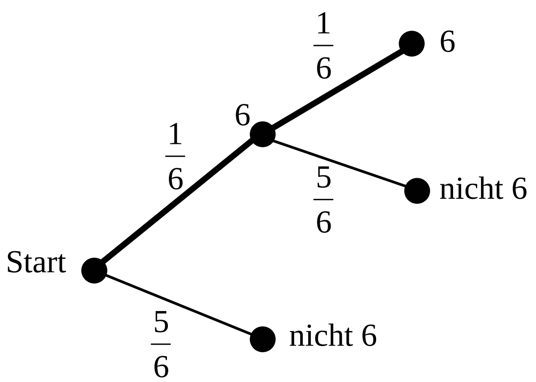
Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis „genau zweimal Zahl zu werfen“ beträgt

$\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8} = 0{,}375 = 37{,}5\%$ (Pfad-Additionsregel).

Bei vielen Problemen reicht es, vereinfachte Baumdiagramme zu zeichnen. So bietet es sich oftmals an, nur Ereignis und Gegenereignis darzustellen.

Beispiel: Es werden zwei Würfel geworfen.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit fällt ein Sechserpasch?

Lösung mit Teilbaum:



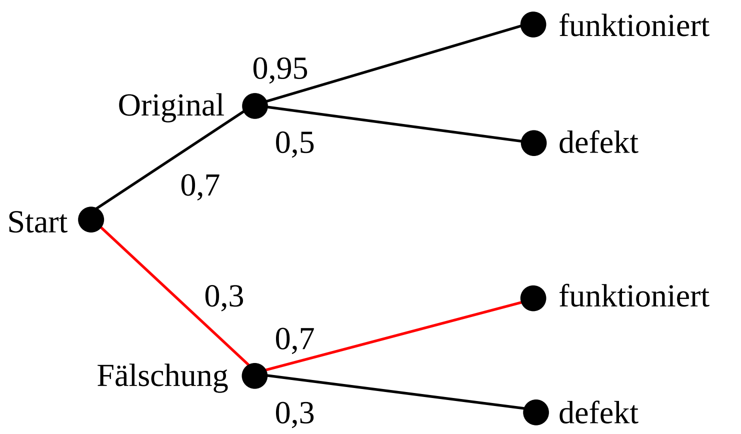
Bei jedem Wurf ist hierbei nur das Ereignis „Es fällt eine 6“ und das Gegenereignis „Es fällt keine 6“ dargestellt.
Die Wahrscheinlichkeit für einen Sechserpasch beträgt

$\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36} = 0{,}02\overline{7} \approx 2{,}78\%$.

Beispiel: In einem Koffer befinden sich 200 Uhren. Davon sind 70% Originaluhren und 30% Fälschungen, die sich auf den ersten Blick nicht unterscheiden.
Von den Originaluhren sind 5% defekt, von den Fälschungen sind 30% defekt.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, eine funktionierende Fälschung zu erhalten, wenn man eine Uhr aus dem Koffer nimmt?
b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, eine defekte Uhr aus dem Koffer zu nehmen?

Lösung:



$0,7 \cdot 0,05 = 0,665 = 66,5\%$

$0,7 \cdot 0,05 = 0,035 = 3,5\%$

$0,3 \cdot 0,7 = 0,21 = 21\%$

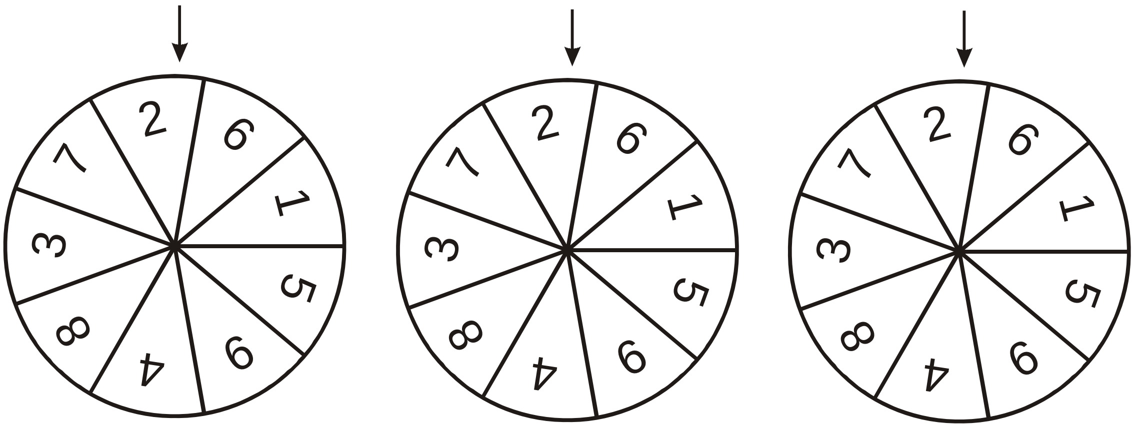
$0,3 \cdot 0,3 = 0,09 = 9\%$

Summe: 1 = 100%

a) Die Wahrscheinlichkeit, eine funktionierende Fälschung aus dem Koffer zu nehmen, beträgt 21%.
b) Die Wahrscheinlichkeit, eine defekte Uhr aus dem Koffer zu nehmen, beträgt 3,5% + 9% = 12,5%.

Aufgaben – Pfadregeln

1. Die drei Glücksräder drehen sich gleichzeitig. Dreimal die Ziffer 3 gewinnt.

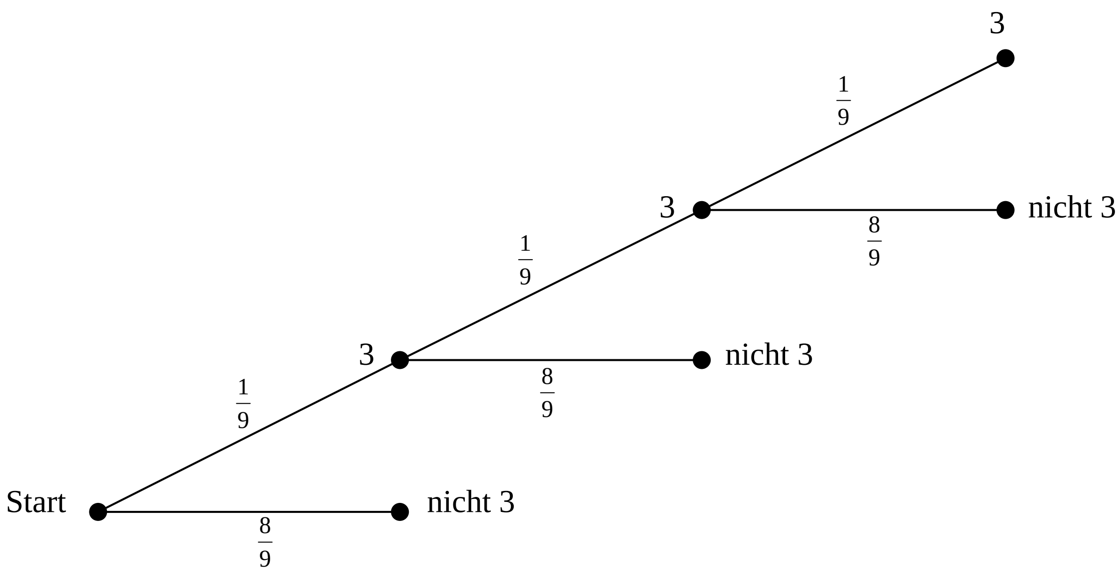


a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit (Gewinnchance), dass alle drei Glücksräder die Ziffer 3 anzeigen?

b) Dreimal die gleiche Ziffer gewinnt. Wie groß ist die Gewinnchance?

Lösung mit Teilbaum:

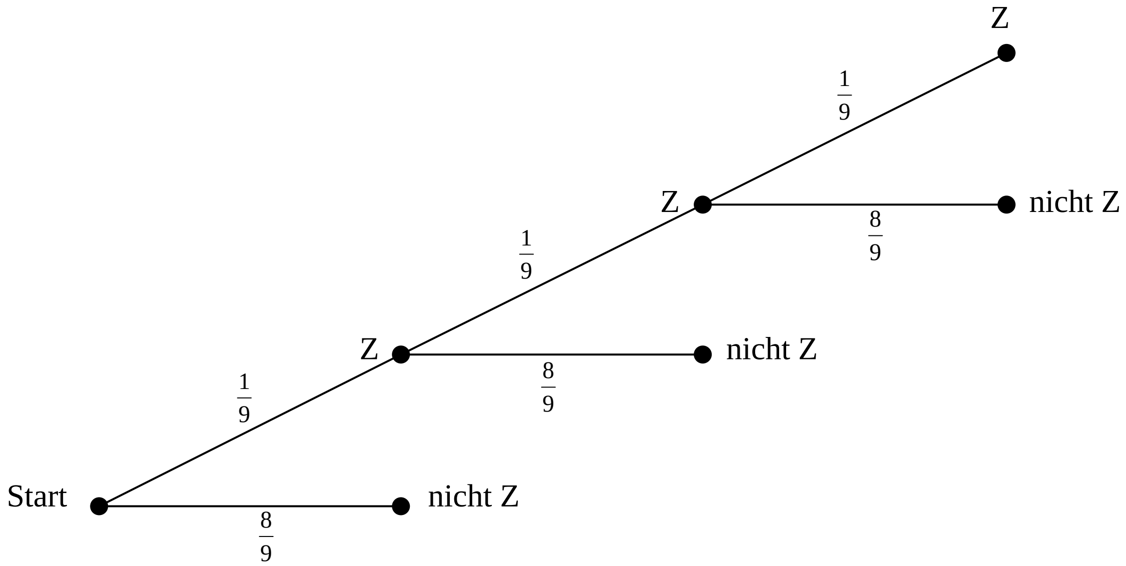
a)



Die Gewinnchance für „dreimal die Ziffer 3“ beträgt:

$P(3;3;3) = \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{9}$ $\qquad$ $P(3;3;3) = \frac{1}{729} \approx 0{,}14\%.$

b)



Die Gewinnchance für „dreimal eine gleiche Ziffer Z“ beträgt:

$$P(Z;Z;Z) = \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{9} \qquad P(Z;Z;Z) = \frac{1}{729} \approx 0{,}14\%.$$

Da die Gewinnchance für jede der 9 Ziffern gleich groß ist, folgt für die Gewinnchance „dreimal die gleiche Ziffer“ gewinnt:

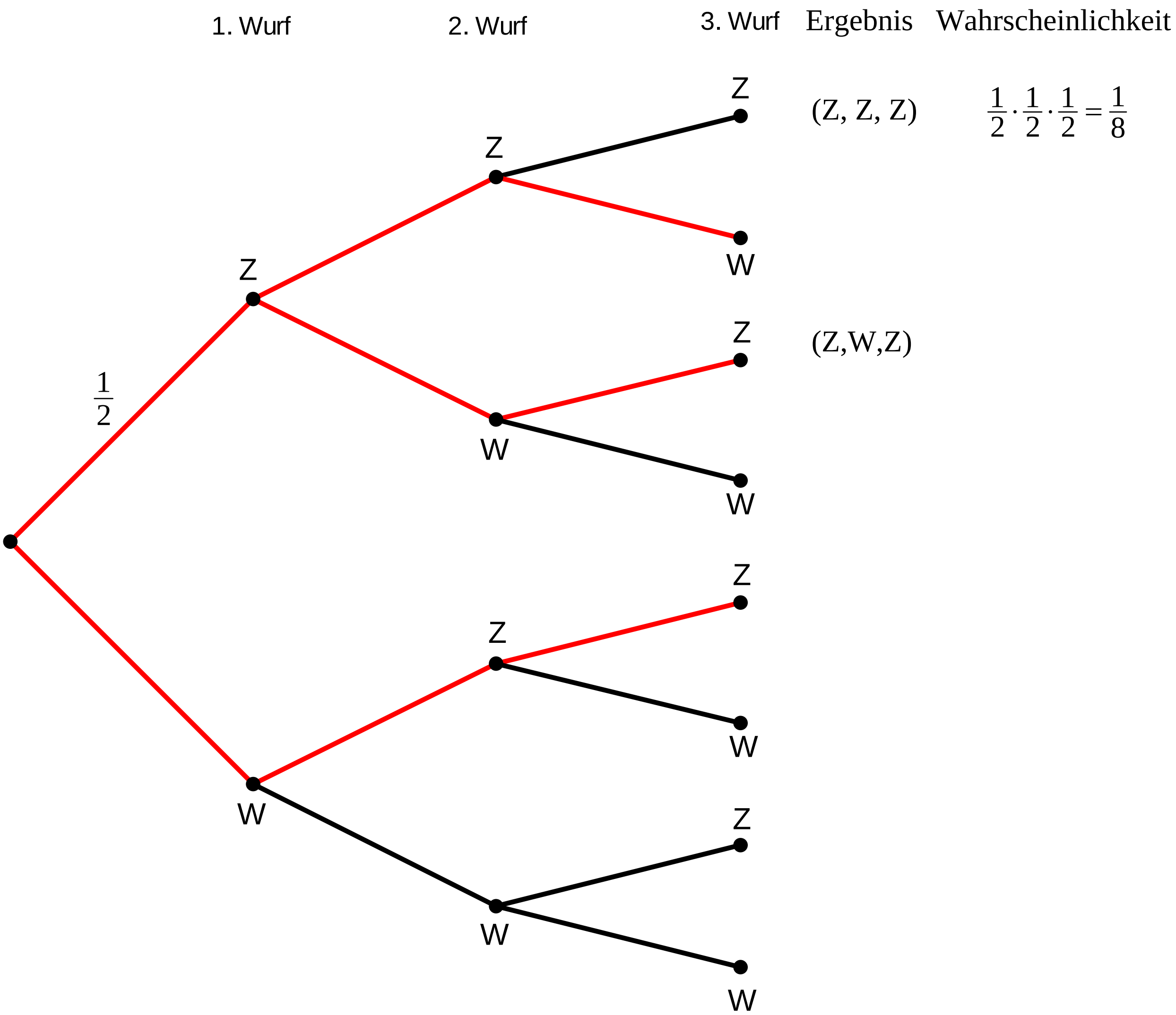
$$P(\text{dreimal eine gleiche Ziffer}) = \frac{1}{729} + \frac{1}{729} + \frac{1}{729} + \frac{1}{729} + \frac{1}{729} + \frac{1}{729} + \frac{1}{729} + \frac{1}{729} + \frac{1}{729}$$

$$P(\text{dreimal eine gleiche Ziffer}) = \frac{9}{729}$$

$$P(\text{dreimal eine gleiche Ziffer}) = \frac{1}{81} \approx 1{,}2\%.$$

2. Peter bietet seinem Bruder Paul folgende Wette an:
„Wenn bei drei Würfen mit einer 1-Euro-Münze mindestens zweimal Zahl fällt, mache ich deine Hausaufgaben, sonst machst du meine Hausaufgaben.“
Soll Paul darauf eingehen?

a) Vervollständige das Baumdiagramm.



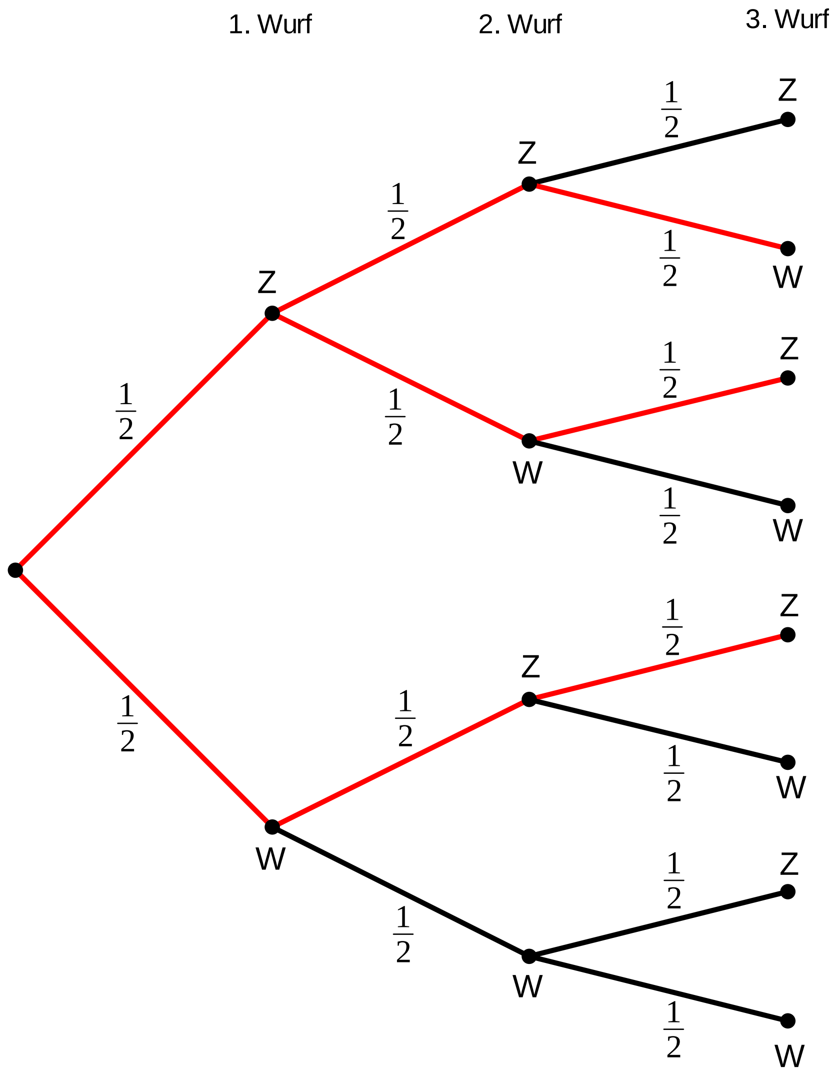
b) Schreibe alle Ausgänge zu dem Ereignis „mindestens zweimal Zahl“ auf.

c) Ermittle die Wahrscheinlichkeit zum Ereignis „mindestens zweimal Zahl“.

d) Wie soll sich Paul entscheiden? Begründe.

Lösung zu Aufgabe 2:

a) Vervollständige das Baumdiagramm



Ergebnis	Wahrscheinlichkeit
(Z, Z, Z)	$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$
(Z, Z, W)	$\frac{1}{8}$
(Z, W, Z)	$\frac{1}{8}$
(Z,W,W)	$\frac{1}{8}$
(W,Z,Z)	$\frac{1}{8}$
(W,Z,W)	$\frac{1}{8}$
(W,W,Z)	$\frac{1}{8}$
(W,W,W)	$\frac{1}{8}$

b) Schreibe alle Ausgänge zu dem Ereignis „mindestens zweimal Zahl“ auf.

(Z,Z,Z), (Z,Z,W), (Z,W,Z), (W,Z,Z).

c) Ermittle die Wahrscheinlichkeit zum Ereignis „mindestens zweimal Zahl“.

P(mindestens zweimal Zahl) = $\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{2}=50\%$.

d) Wie soll sich Paul entscheiden? Begründe.

Z. B.: Von der Gewinnchance betrachtet, handelt es sich um ein faires Spiel – er könnte es also annehmen. Hat Paul den Sinn von Hausaufgaben erkannt, dürfte er auf die Wette nicht eingehen.

Zusammengesetzte Zufallsexperimente

Beispielaufgabe mit vereinfachtem Baumdiagramm (Ereignis – Gegenereignis)

3. Ein Würfel wird dreimal nacheinander geworfen.
   Mit welcher Wahrscheinlichkeit würfelt man dabei

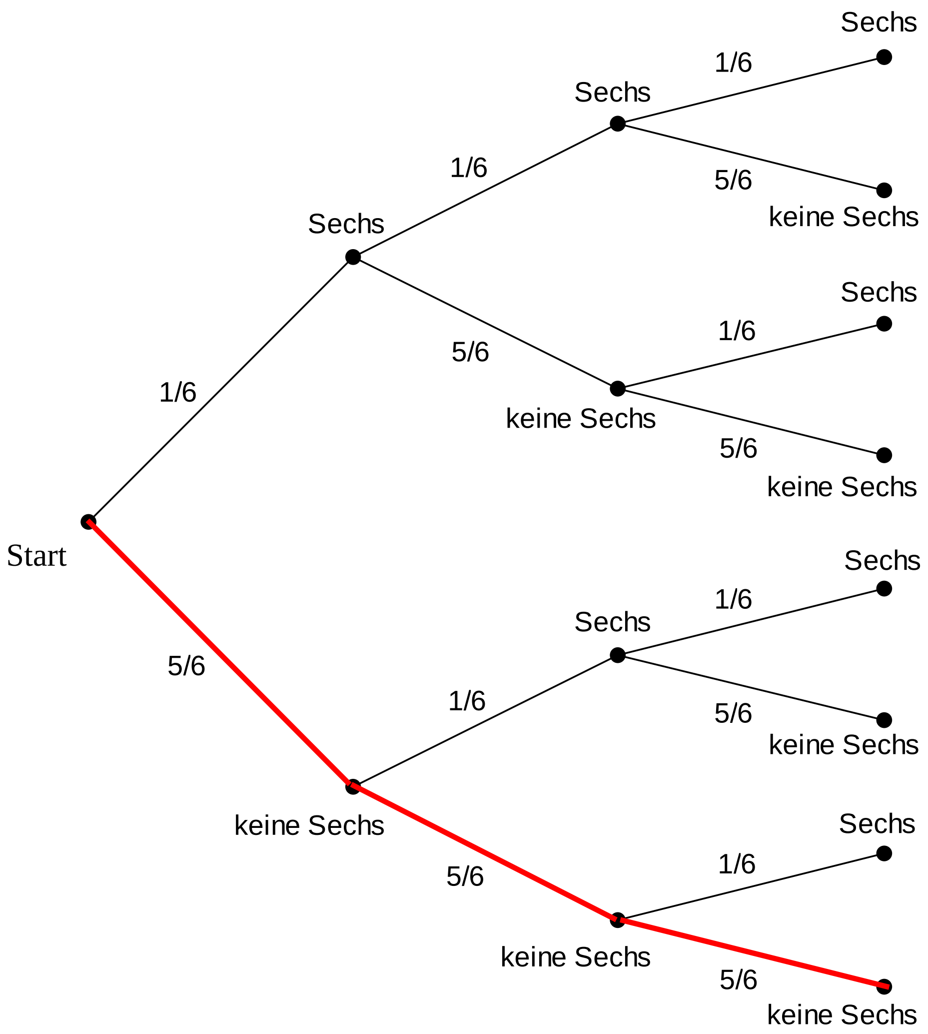
   a) keine Sechs?

   b) genau eine Sechs?

   b) höchstens eine Sechs?

   d) mindestens eine Sechs?

Lösung zu Aufgabe 3 mit Hilfe des Baumdiagramms:



Wahrscheinlichkeit

$$\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{216}$$

$$\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}=\frac{5}{216}$$

$$\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{5}{216}$$

$$\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}=\frac{25}{216}$$

$$\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{5}{216}$$

$$\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}=\frac{25}{216}$$

$$\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{25}{216}$$

$$\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}=\frac{125}{216}$$

a) „Keine Sechs“ wird mit einer Wahrscheinlichkeit von
$\frac{125}{216} = 0,5787 = 57,87\%$ gewürfelt.

b) „Genau eine Sechs“ wird mit einer Wahrscheinlichkeit von
$\frac{25}{216} + \frac{25}{216} + \frac{25}{216} = \frac{75}{216} = 0,3472 = 34,72\%$ gewürfelt.

c) „Höchstens eine Sechs“ wird mit einer Wahrscheinlichkeit von
$\frac{125}{216} + \frac{25}{216} + \frac{25}{216} + \frac{25}{216} = \frac{200}{216} = 0,9259 = 92,59\%$ gewürfelt.

d) „Mindestens eine Sechs“ wird mit einer Wahrscheinlichkeit von

$$\frac{1}{216} + \frac{5}{216} + \frac{5}{216} + \frac{25}{216} + \frac{5}{216} + \frac{25}{216} + \frac{25}{216} = \frac{91}{216} = 0,42129 \approx 42,13\%$$

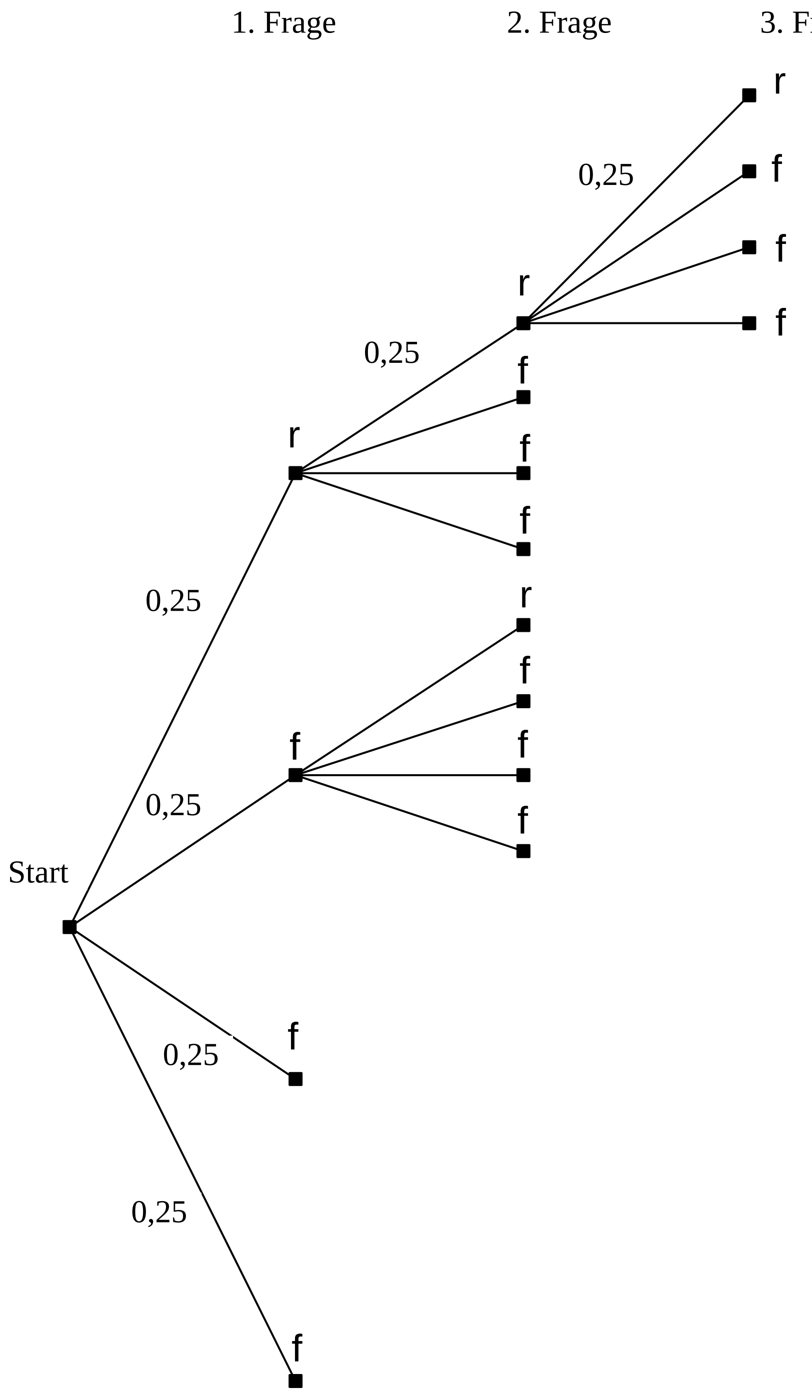
oder:

$1 - \frac{125}{216} = 1 - 0,5787 = 0,4213 = 42,13\%$ (Gegenereignis zu „keine Sechs“) gewürfelt.

4. Bei einem Test kann man bei drei Fragen zwischen vier vorgegebenen Antworten wählen, von denen jeweils genau eine Antwort richtig (r) ist, die anderen drei sind falsch (f). Wenn man nicht weiß, welche Antwort richtig ist, kann man raten.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass man bei dem Test nur durch Raten

a) genau zwei Antworten richtig hat?
b) nur eine Antwort richtig hat?
c) mindestens eine Antwort richtig hat?

Baumdiagramm (unvollständig) mögliche Ergebnisse Wahrscheinlichkeit



r, r, r	$0{,}25 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}25$
r, r, f	$0{,}25 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}25$
r, r, f	$0{,}25 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}25$
r, r, f	$0{,}25 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}25$

r, f, r	r, f, f	r, f, f	r, f, f
r, f, r	r, f, f	r, f, f	r, f, f
r, f, r	r, f, f	r, f, f	r, f, f
f, r, r	f, r, f	f, r, f	f, r, f
f, f, r	f, f, f	f, f, f	f, f, f
f, f, r	f, f, f	f, f, f	f, f, f
f, f, r	f, f, f	f, f, f	f, f, f
f, r, r	f, r, f	f, r, f	f, r, f
f, f, r	f, f, f	f, f, f	f, f, f
f, f, r	f, f, f	f, f, f	f, f, f
f, f, r	f, f, f	f, f, f	f, f, f
f, r, r	f, r, f	f, r, f	f, r, f
f, f, r	f, f, f	f, f, f	f, f, f
f, f, r	f, f, f	f, f, f	f, f, f
f, f, r	f, f, f	f, f, f	f, f, f

Lösung:

Insgesamt gibt es $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$ mögliche Ergebnisse (Ausgänge), von denen beim Raten nach der Pfad-Multiplikationsregel jedes mit der gleichen Wahrscheinlichkeit von $0{,}25 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}25 = 0{,}015625$ eintritt.

a) Genau zwei Antworten sind richtig bei den Ergebnissen

r, f, f   r, r, f   r, r, f
r, f, r   r, f, r   r, f, r
f, r, r   f, r, r   f, r, r .

Nach der Pfad-Additionsregel ergibt sich eine Wahrscheinlichkeit von

$$\begin{aligned}&0{,}015625 + 0{,}015625 + 0{,}015625 + 0{,}015625 + 0{,}015625 + 0{,}015625 +\\&0{,}015625 + 0{,}015625 + 0{,}015625 = 9 \cdot 0{,}015625\\&= 0{,}140625\\&\approx 14{,}1\%.\end{aligned}$$

b) Genau eine Antwort ist richtig bei den Ereignissen

r, f, f   (kommt 9-mal vor)
f, r, f   (kommt 9-mal vor)
f, f, r   (kommt 9-mal vor) .

Nach der Pfad-Additionsregel ergibt sich eine Wahrscheinlichkeit von

$$\begin{aligned}9 \cdot 0{,}015625 + 9 \cdot 0{,}015625 + 9 \cdot 0{,}015625 &= 27 \cdot 0{,}015625\\&= 0{,}421875\\&\approx 42{,}2\%.\end{aligned}$$

c) Mindestens eine Antwort ist richtig, wenn das Gegenereignis zu „alle Antworten sind falsch“ eintritt.

Die Wahrscheinlichkeit für das Ergebnis f, f, f beträgt $27 \cdot 0{,}015625 = 0{,}421875 \approx 42{,}2\%$.

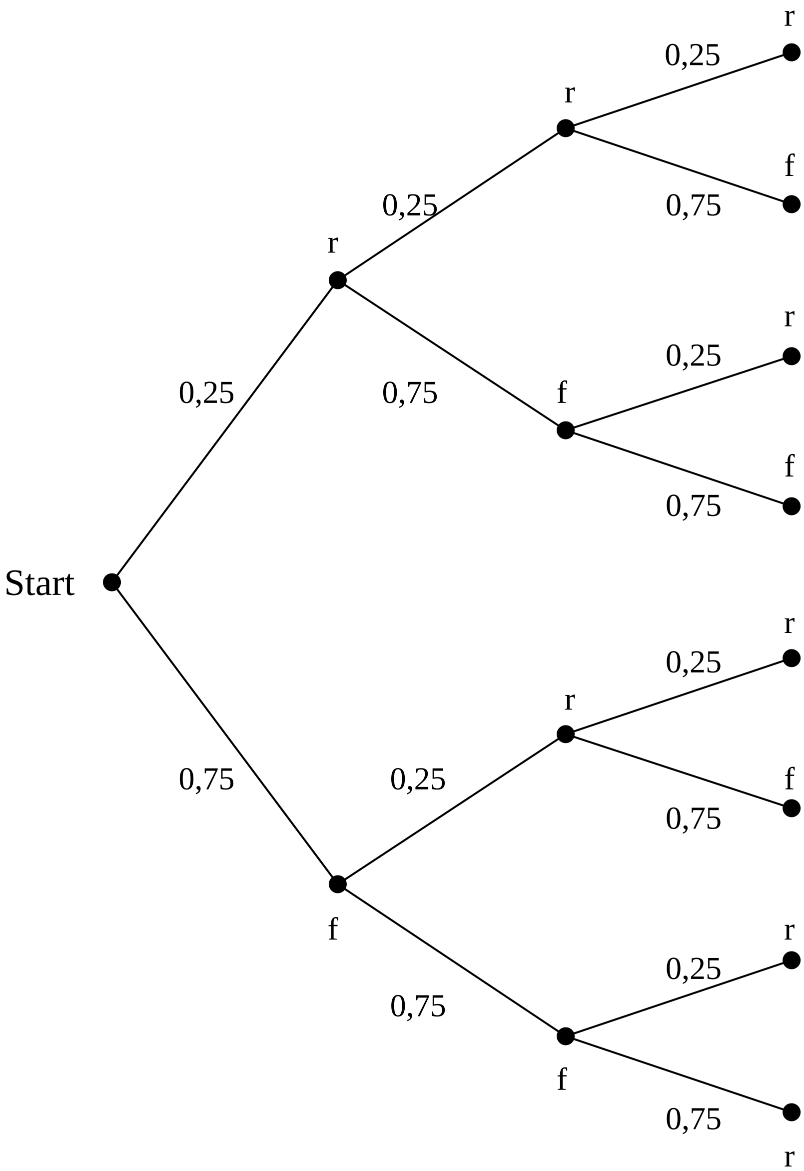
Die Wahrscheinlichkeit für mindestens eine richtige Antwort beträgt damit

$1 - 0{,}421875 = 0{,}578125 \approx 57{,}8\%$.

Anmerkung: Ein vereinfachtes Baumdiagramm mit Hilfe des Gegenereignisses macht die Lösung übersichtlicher und einfacher.

(siehe nächste Seite)

Lösung zu Aufgabe 4 mit Hilfe eines Teilbaums:



Ergebnisse	Wahrscheinlichkeit
r, r, r	$0{,}25 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}25$
r, r, f	$0{,}25 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}75$
r, f, r	$0{,}25 \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}25$
r, f, f	$0{,}25 \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}25$
f, r, r	$0{,}75 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}25$
f, r, f	$0{,}75 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}75$
f, f, r	$0{,}75 \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}25$
f, f, f	$0{,}75 \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}75$

a) Genau zwei Antworten sind richtig, wenn die Ergebnisse r, r, f r, f, r f, r, r eintreten. Hierfür beträgt die Wahrscheinlichkeit nach den Pfadregeln:

$0{,}25 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}75 + 0{,}25 \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}25 + 0{,}75 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}25 = 3 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}75$
$= 0{,}140625$
$\approx 14{,}1\%$.

b) Genau eine Antwort ist richtig, wenn die Ergebnisse r, f, f f, r, f f, f, r eintreten. Hierfür beträgt die Wahrscheinlichkeit nach den Pfadregeln:

$0{,}25 \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}75 + 0{,}75 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}75 + 0{,}75 \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}25 = 3 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}75$
$= 0{,}421875$
$\approx 42{,}2\ \%$.

c) Mindestens eine Antwort ist richtig, wenn das Gegenereignis zum Ergebnis f, f, f eintritt.
Für das Ergebnis f, f, f ergibt sich nach der Pfad-Multiplikationsregel die Wahrscheinlichkeit:

$0{,}75 \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}75 = 0{,}421875.$

Die Wahrscheinlichkeit für das Gegenereignis ist dann: $1 - 0{,}421875 \approx 57{,}8\%$.

Aufgaben – zusammengesetzte Zufallsexperimente

5. Ein Würfel wird 4-mal geworfen.
   Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit nur Fünfen oder nur Sechsen zu werfen?

6. Eine Urne enthält 3 schwarze und 5 weiße Kugeln. Zwei Kugeln werden nacheinander mit (ohne) Zurücklegen gezogen.
   a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, zweimal eine schwarze Kugel zu ziehen.
   b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die zweite Kugel schwarz ist.

7. Von 10 Zahlen sind 5 positiv, 5 negativ. Zwei Zahlen werden zufällig ohne Zurücklegen gewählt und miteinander multipliziert.
   Ist ein positiver oder ein negativer Produktwert wahrscheinlicher?

8. Von 8 Zahlen sind 4 gerade, 4 ungerade. Zwei Zahlen werden zufällig ohne Zurücklegen gewählt und miteinander multipliziert.
   Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Produktwert eine gerade Zahl ist?

9. Zwei Jäger schießen auf dasselbe Ziel. Ihre Trefferwahrscheinlichkeiten sind jeweils 0,5.
   Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird das Ziel wenigstens einmal getroffen?

10. Ein Schütze hat die Trefferwahrscheinlichkeit 0,5.
    Wie oft muss er auf das Ziel schießen, um es mit mindestens 99% Wahrscheinlichkeit zu treffen?

Lösungen (Kurzform):

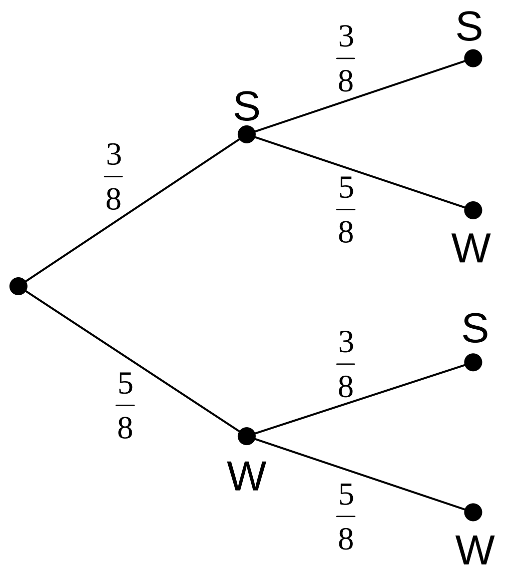
zu 5. $P(5, 5, 5, 5) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{1296}$

$P(6, 6, 6, 6) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{1296}$

$P((5, 5, 5, 5) \text{ oder } (6, 6, 6, 6)) = \frac{1}{1296} + \frac{1}{1296} = \frac{1}{648} \approx 0{,}15\%$.

zu 6. Mit Zurücklegen (S steht für eine schwarze, W für eine weiße Kugel):

Baumdiagramm



Ergebnis	Wahrscheinlichkeit
S, S	$\frac{3}{8} \cdot \frac{3}{8} = \frac{9}{64}$
S, W	$\frac{3}{8} \cdot \frac{5}{8} = \frac{15}{64}$
W, S	$\frac{5}{8} \cdot \frac{3}{8} = \frac{15}{64}$
W, W	$\frac{5}{8} \cdot \frac{5}{8} = \frac{25}{64}$

. a) Die Wahrscheinlichkeit, dass zwei schwarze Kugeln gezogen werden, beträgt:

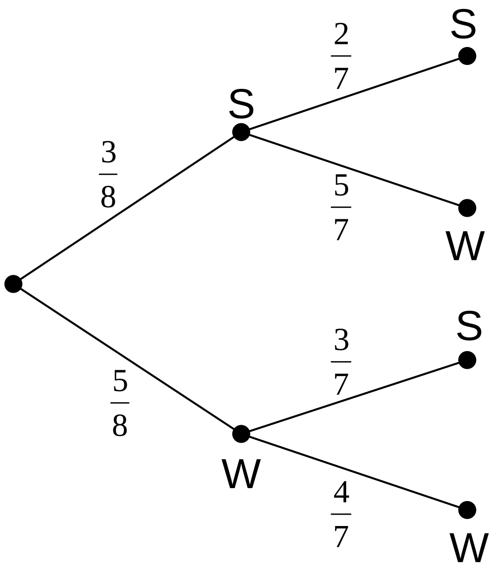
$\frac{3}{8} \cdot \frac{3}{8} = \frac{9}{64} = 14{,}1\%.$

b) Die Wahrscheinlichkeit, dass die zweite gezogene Kugel schwarz ist, beträgt:

$\frac{9}{64} + \frac{15}{64} = \frac{3}{8} = 37{,}5\%.$

zu 6. Ohne Zurücklegen (S steht für eine schwarze, W für eine weiße Kugel):

Baumdiagramm



Ergebnis	Wahrscheinlichkeit
S, S	$\frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} = \frac{6}{56}$
S, W	$\frac{3}{8} \cdot \frac{5}{7} = \frac{15}{56}$
W, S	$\frac{5}{8} \cdot \frac{3}{7} = \frac{15}{56}$
W, W	$\frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} = \frac{20}{56}$

a) Die Wahrscheinlichkeit, dass zwei schwarze Kugeln gezogen werden, beträgt:

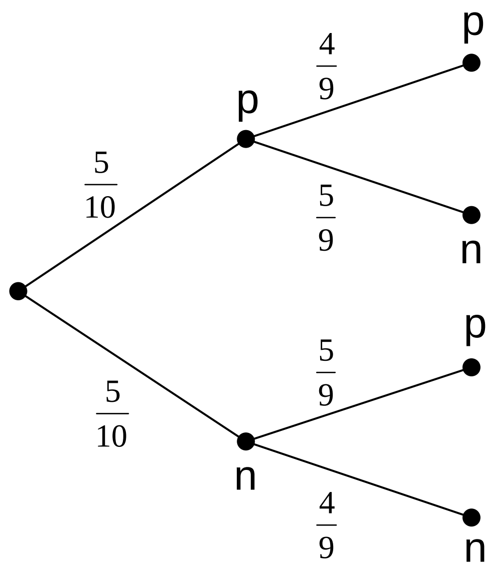
$$\frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} = \frac{6}{56} = 10{,}7\%.$$

b) Die Wahrscheinlichkeit, dass die zweite gezogene Kugel schwarz ist, beträgt:

$$\frac{6}{56} + \frac{15}{56} = \frac{21}{56} = \frac{3}{8} = 37{,}5\%.$$

zu 7. (p steht für eine positive, n für eine negative Zahl)

Baumdiagramm



Ergebnis	Wahrscheinlichkeit
p, p	$\frac{5}{10}\cdot\frac{4}{9}=\frac{2}{9}$
p, n	$\frac{5}{10}\cdot\frac{5}{9}=\frac{5}{18}$
n, p	$\frac{5}{10}\cdot\frac{5}{9}=\frac{5}{18}$
n, n	$\frac{5}{10}\cdot\frac{4}{9}=\frac{2}{9}$

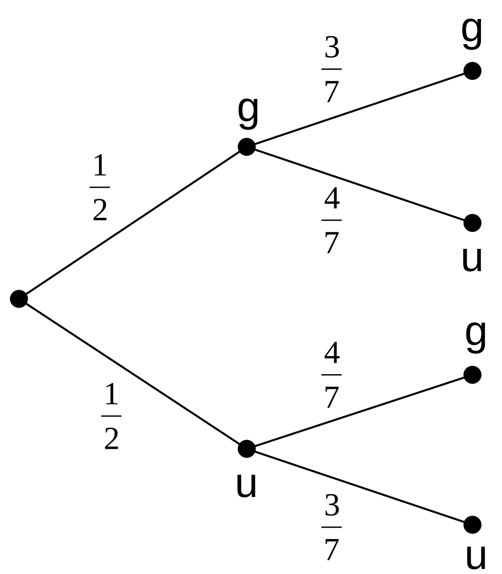
Ein positiver Produktwert tritt bei den Ergebnissen p, p und n, n ein.

Die Wahrscheinlichkeit für einen positiven Produktwert beträgt: $\frac{2}{9}+\frac{2}{9}=\frac{4}{9}$.

Damit ist ein negativer Produktwert wahrscheinlicher.

zu 8. (g steht für eine gerade, n für eine ungerade Zahl)

Baumdiagramm



Ergebnis	Wahrscheinlichkeit
g, g	$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{7}=\frac{3}{14}$
g, u	$\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{7}=\frac{2}{7}$
u, g	$\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{7}=\frac{2}{7}$
u, u	$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{7}=\frac{3}{14}$

Eine gerade Zahl als Produktwert tritt ein, wenn mindestens ein Faktor gerade ist, also bei den Ergebnissen g, g g, u und u, g.

Damit ist die Wahrscheinlichkeit für eine gerade Zahl als Produktwert:

$$\frac{3}{14}+\frac{2}{7}+\frac{2}{7}=\frac{11}{14}$$

oder als Gegenereignis zu u, u: $1-\frac{3}{14}=\frac{11}{14}\approx 78,6\%$.

zu 9. Das Ziel wird wenigstens einmal getroffen, wenn nicht beide Jäger daneben schießen (wofür die Wahrscheinlichkeit $0,5\cdot 0,5=0,25$ beträgt).
Somit gilt für das Gegenereignis „Ziel wenigstens einmal getroffen“ eine Wahrscheinlichkeit von 1 – 0,25 = 0,75 = 75%.

zu 10. Das Gegenereignis zu „mindestens einmal Treffen“ ist „keinmal Treffen“, wofür die Wahrscheinlichkeit bei n Schüssen $0,5^n$ ist.

n	p(kein Treffer)	p(mindestens ein Treffer)
1	0,5	50 %
2	0,5·0,5 = 0,25	1 – 0,25 = 75 %
3	0,5·0,5·0,5 = 0,125	1 – 0,125 = 87,5 %
4	0,5·0,5·0,5·0,5 = 0,0625	1 – 0,0625 = 93,75 %
5	0,5·0,5·0,5·0,5·0,5 = 0,03125	1 – 0,03125 = 96,875 %
6	0,5·0,5·0,5·0,5·0,5·0,5 = 0,015625	1 – 0,015625 = 98,4375 %
7	0,5·0,5·0,5·0,5·0,5·0,5·0,5 = 0,0078125	1 – 0,0078125 = 99,21875 %

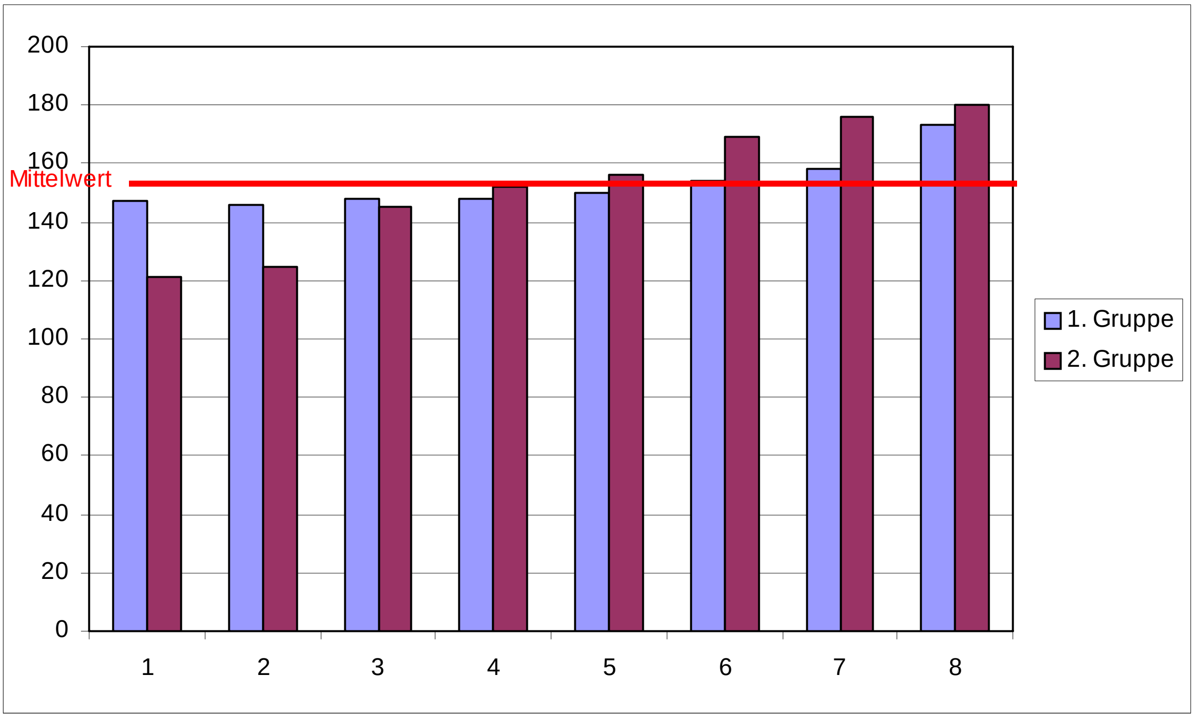
Er muss mindestens 7-mal auf das Ziel schießen.

2 Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung (nur 9 I)

Von zwei Gruppen zu je 8 Kindern werden die Körpergrößen gemessen.

	1. Gruppe Körpergröße in cm	**2. Gruppe** Körpergröße in cm
	147	121
	146	125
	148	145
	148	152
	150	156
	154	169
	158	176
	173	180
Summe:	1224	1224
Mittelwert:	153	153

Die Messwerte der Körpergrößen ergeben für beide Gruppen den gleichen Mittelwert von 153 cm. Jedoch ist in keiner der beiden Gruppen ein Kind 153 cm groß.
Wie unterscheiden sich nun die beiden Gruppen, obwohl sie den gleichen Mittelwert haben?
Die graphische Darstellung der Messwerte zeigt Unterschiede:



Wir untersuchen für beide Gruppen die Abweichungen vom Mittelwert (Streuung) und stellen fest: Summieren der Abweichungen vom Mittelwert ergibt stets Null.
Das sollte eigentlich keine Überraschung sein, sondern folgt aus den Eigenschaften des Mittelwerts: Die Abweichungen „+“ und „–“ heben sich gegenseitig auf.
Wir könnten die Beträge der Abweichungen aufsummieren und damit ein Maß für die Streuung festlegen.
Es gibt jedoch eine bessere Idee:
Wenn wir die Abweichungen quadrieren, dann werden ihre Werte alle positiv. Als weitere Folge des Quadrierens ergibt sich, dass größere Abweichungen vom Mittelwert stärker berücksichtigt werden als kleinere. Z. B. wirkt sich durch das Quadrieren eine Abweichung um zehn Einheiten vom Mittelwert genauso stark aus wie hundert Abweichungen um eine Einheit.

Aufgabe:

Überlege, warum dies so ist und gib weitere Beispiele dafür an.

Der Mittelwert der Quadrate der Abweichungen ist ein Maß für die Streuung. Er heißt **Varianz**.
Nun stehen durch das Quadrieren die ursprünglichen Einheiten im Quadrat. Das können wir dadurch korrigieren, dass wir die Wurzel ziehen.
Die Wurzel aus der Varianz, also die Wurzel aus der Summe der Quadrate der Abweichungen, heißt **Standardabweichung**.
Die Standardabweichung ist der Mittelwert aller Abweichungen vom Mittelwert. Sie ist ein Maß für die Streuung.

Aufgabe:

Werte die Körpergrößen beider Gruppen mit einem Tabellenkalkulationsprogramm aus.

Hinweis:

Die Formel für die Varianz lautet in Excel =varianzen(), die Formel für die Standardabweichung lautet =stabwn().

Lösung:

	1. Gruppe Körpergröße in cm	Abweichung vom Mittelwert in cm	Quadrat der Abweichung in cm^2	**2. Gruppe** Körpergröße in cm	Abweichung vom Mittelwert in cm	Quadrat der Abweichung in cm^2
	147	-6	36	121	-32	1024
	146	-7	49	125	-28	784
	148	-5	25	145	-8	64
	148	-5	25	152	-1	1
	150	-3	9	156	3	9
	154	1	1	169	16	256
	158	5	25	176	23	529
	173	20	400	180	27	729
Summe:	1224		570	1224		3396
Mittelwert:	153			153		
Mittelwert der Quadrate der Abweichungen →**Varianz**:			71,25 cm^2			424,5 cm^2
Wurzel daraus → **Standardabweichung**:			8,441 cm			20,603 cm

Als grobe Vorstellung gilt: Die „durchschnittliche“ Abweichung der Einzelwerte vom Mittelwert beträgt in der 1. Gruppe 8,4 cm und in der 2. Gruppe 20,6 cm.
Sicher ist: Die Körpergrößen streuen in der zweiten Gruppe deutlich stärker als in der ersten.

Nur für den Lehrer:
Von unserer Formel für Varianz zur Excel-Formel =varianzen():

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\bar{x}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^{\ 2}-2\bar{x}\cdot\sum_{i=1}^{n}x_i+\sum_{i=1}^{n}\left(\bar{x}\right)^2\right)$$ beim mittleren Glied ist $\bar{x}$ ein Faktor, beim letzten

$$\Leftrightarrow \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^{\ 2}-2\bar{x}\cdot n\cdot\bar{x}+n\cdot\left(\bar{x}\right)^2\right)$$ wird es n-mal aufsummiert.

$$\Leftrightarrow \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^{\ 2}-n\cdot\left(\bar{x}\right)^2\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^{\ 2}-n\cdot\left(\bar{x}\right)^2}{n}$$

$$\Leftrightarrow \frac{n\cdot\sum_{i=1}^{n}x_i^{\ 2}-n^2\cdot\left(\bar{x}\right)^2}{n^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{n\cdot\sum_{i=1}^{n}x_i^{\ 2}-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2}{n^2}$$ Formel in Excel: =varianzen()

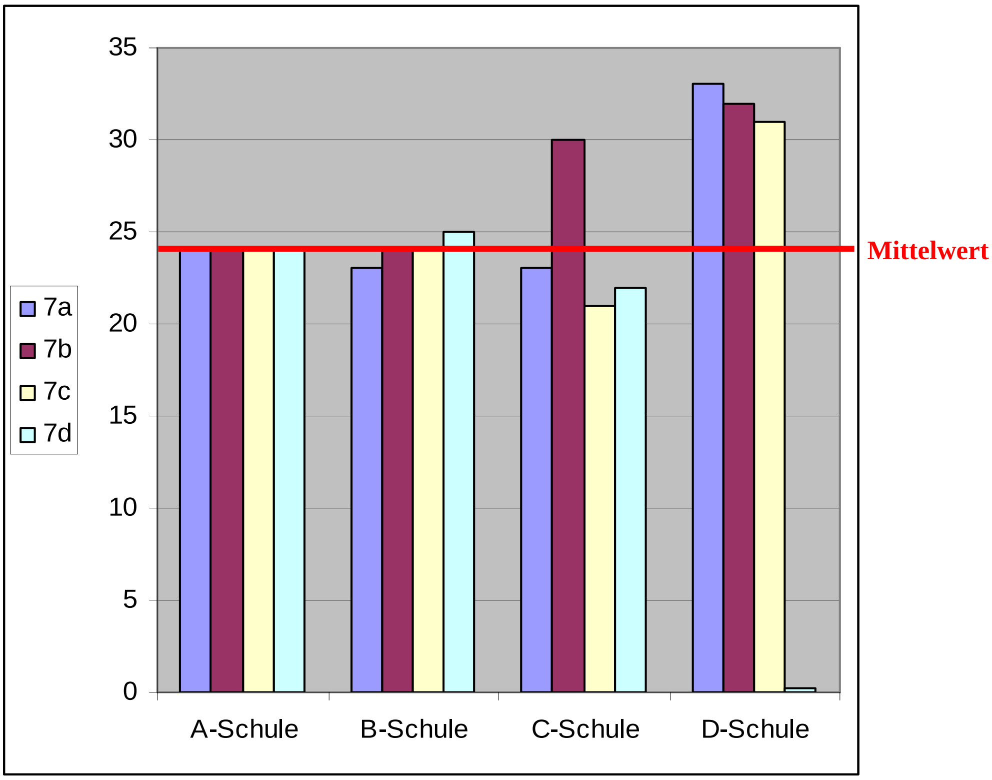
Nach der DIN-Norm wird nicht durch *n* sondern durch *n*-1 dividiert. Dies führt bei Stichproben zu besseren Aussagen.

Beispielaufgabe:

Die Tabelle enthält die Schülerzahlen in den 7. Klassen von vier Realschulen.

	A-Schule	B-Schule	C-Schule	D-Schule
Klasse	Anzahl	Anzahl	Anzahl	Anzahl
7a	24	23	23	33
7b	24	24	30	32
7c	24	24	21	31
7d	24	25	22	0
Mittelwert	24	24	24	24
Spannweite	0	2	9	33
Varianz	0	0,5	12,5	192,5
Standardabweichung	0,00	0,71	3,54	13,87

Vergleiche die Aussagen über die Mittelwerte und die Streuungsmaße in der Tabelle mit der Aussage der Graphik.



Schaue dir die einzelnen Angaben nun noch einmal kritisch an…

Beispielaufgabe:

In einer Schraubenfabrik werden an drei Maschinen Schrauben mit einer Länge von 5 mm für die Montage von Kameraobjektiven gefertigt. Die folgende Tabelle gibt die Werte von 21 Messungen an.
Welche Maschine hältst du für die beste?

	Maschine_1	Maschine_2	Maschine_3
	Länge in mm	Länge in mm	Länge in mm
1	4,57	4,84	4,80
2	5,22	4,90	5,36
3	4,99	4,61	4,79
4	5,01	4,76	5,27
5	4,94	4,66	4,69
6	5,37	5,42	4,97
7	5,25	5,18	4,66
8	4,54	4,96	5,48
9	5,31	5,32	4,67
10	4,88	5,35	4,81
11	5,03	4,84	4,96
12	4,92	5,22	4,86
13	5,05	4,61	5,46
14	4,53	4,93	5,07
15	5,33	5,18	5,27
16	5,39	5,40	5,23
17	4,81	4,56	5,22
18	5,23	5,40	4,59
19	4,85	5,22	4,51
20	4,98	4,85	5,50
21	4,81	4,91	4,94

Lösung:

	Maschine_1	Maschine_2	Maschine_3
Mittelwert in mm:	5,00	5,00	5,00
Varianz in mm^2:	0,07	0,08	0,09
Standardabweichung in mm:	0,26	0,28	0,31

Da alle drei Maschinen bei der Messung den gleichen Mittelwert von 5,00 mm erreichen, könnte man vermuten, dass sie Schrauben gleicher Qualität produzieren. Vergleicht man jedoch die Varianz bzw. Standardabweichung, so sieht man, dass die Länge der Schrauben bei Maschine_1 am wenigsten streut.

Beispielaufgabe (aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung):

Wir wollen für den Wurf mit 2 Würfeln die Wahrscheinlichkeit für die einzelnen möglichen Augensummen ermitteln.
Hier tritt der Begriff **Erwartungswert** an die Stelle des Mittelwerts. So wie sich in der Wahrscheinlichkeitsrechnung der Begriff „Wahrscheinlichkeit“ zum Begriff „relative Häufigkeit“ verhält, verhält sich in der beschreibenden Statistik der Begriff „Erwartungswert“ zum Begriff „Mittelwert“.
Der Erwartungswert wird als Summe der Produkte aus Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses mit dessen Wert berechnet.
Beispiel zur Berechung des **Erwartungswerts**:
Die Augensumme kann die Werte 2, 3, … bis 12 annehmen. Wie wir wissen, ergeben sich für diese Werte die folgenden Wahrscheinlichkeiten.

Augensumme:	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Wahrscheinlichkeit:	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Erwartungswert:

$$2\cdot\frac{1}{36}+3\cdot\frac{2}{36}+4\cdot\frac{3}{36}+5\cdot\frac{4}{36}+6\cdot\frac{5}{36}+7\cdot\frac{6}{36}+8\cdot\frac{5}{36}+9\cdot\frac{4}{36}+10\cdot\frac{3}{36}+11\cdot\frac{2}{36}+12\cdot\frac{1}{36}=7$$

Der Erwartungswert ist 7.

Für die Varianz gilt:

$$(2-7)^2\cdot\frac{1}{36}+(3-7)^2\cdot\frac{2}{36}+(4-7)^2\cdot\frac{3}{36}+(5-7)^2\cdot\frac{4}{36}+(6-7)^2\cdot\frac{5}{36}+(7-7)^2\cdot\frac{6}{36}$$

$$+(8-7)^2\cdot\frac{5}{36}+(9-7)^2\cdot\frac{4}{36}+(10-7)^2\cdot\frac{3}{36}+(11-7)^2\cdot\frac{2}{36}+(12-7)^2\cdot\frac{1}{36}=\frac{35}{6}$$

Die Standardabweichung ist $\sqrt{\frac{35}{6}}=2,42$.

Beispielaufgabe (aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung):

Jedes Los gewinnt
Die Klasse 9a eröffnet auf dem Schulfest eine Losbude, deren Erlös sie für die Neugestaltung des Pausenhofs spenden will. Die Schüler stellen 100 Lose her. Der Hauptgewinn ist ein MP3-Player im Wert von 50,00 €, der zweite Gewinn ist ein Computerspiel im Wert von 30,00 € und der dritte Gewinn ist ein Computerspiel im Wert von 20 €. Alle anderen Gewinne sind Trostpreise im Wert von je 0,50 €.
Wie teuer müsste ein Los sein, damit die Einnahmen und die Ausgaben nach dem Verkauf aller Lose gleich groß sind?

1. Lösungsmöglichkeit: $\frac{50{,}00\text{ €} + 30{,}00\text{ €} + 20{,}00\text{ €} + 97 \cdot 0{,}50\text{ €}}{100} = 1{,}485\text{ €}$

   Ein Los müsste 1,485 € kosten.

2. Lösungsmöglichkeit: Wir ermitteln zuerst die Wahrscheinlichkeiten für die unterschiedlichen Gewinne:

   Den Gewinn im Wert von 50 € gibt es einmal: Wahrscheinlichkeit: $\frac{1}{100}$

   Den Gewinn im Wert von 30 € gibt es einmal: Wahrscheinlichkeit: $\frac{1}{100}$

   Den Gewinn im Wert von 20 € gibt es einmal: Wahrscheinlichkeit: $\frac{1}{100}$

   Den Gewinn im Wert von 0,50 € gibt es 97-mal: Wahrscheinlichkeit: $\frac{97}{100}$

   Für den Loskäufer ergibt sich also folgender **Erwartungswert** (Summe der Produkte aus Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses mit dessen Wert):
   $\frac{1}{100} \cdot 50{,}00\text{ €} + \frac{1}{100} \cdot 30{,}00\text{ €} + \frac{1}{100} \cdot 20{,}00\text{ €} + \frac{97}{100} \cdot 0{,}50\text{ €} = 1{,}485\text{ €}$

Bei einem Lospreis von 1,485 € würde also weder ein Gewinn noch ein Verlust entstehen.

Die Klasse beschließt für jedes Los 2 € zu verlangen.
Wie hoch wird die Spende, wenn alle Lose verkauft werden?

$100 \cdot (2{,}00\text{ €} - 1{,}485\text{ €}) = 51{,}50\text{ €}$.

Die Spende beträgt 51,50 €.

Beispielaufgabe (aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung):

Jedes Mal, wenn Rupert eine Gruppe von fünf Personen trifft, wettet er 100 €, dass mindestens zwei von diesen fünf Personen im gleichen Monat Geburtstag haben.

Überlegung:

Die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens 2 Personen im gleichen Monat Geburtstag haben, rechnen wir über das Gegenereignis (alle fünf Personen haben in verschiedenen Monaten Geburtstag) aus.

Die 1. Person kann aus 12 Monaten auswählen: $\frac{12}{12}$

Die 2. Person kann aus 11 Monaten auswählen: $\frac{11}{12}$

Die 3. Person kann aus 10 Monaten auswählen: $\frac{10}{12}$

Die 4. Person kann aus 9 Monaten auswählen: $\frac{9}{12}$

Die 5. Person kann aus 8 Monaten auswählen: $\frac{8}{12}$

Die Wahrscheinlichkeit, dass alle 5 Personen in unterschiedlichen Monaten Geburtstag haben, beträgt $\frac{12}{12}\cdot\frac{11}{12}\cdot\frac{10}{12}\cdot\frac{9}{12}\cdot\frac{8}{12}=\frac{95040}{12^5}=\frac{55}{144}=0,3819$.

Für das Gegenereignis (mindestens zwei Personen haben im gleichen Monat Geburtstag) beträgt die Wahrscheinlichkeit $1-0,3819=0,6181$.

Berechnung des Erwartungswertes:
$(-100\,€)\cdot 0,3819+100€\cdot 0,6181=23,62\,€$

Langfristig hat Rupert eine Gewinnerwartung von 23,62 € pro Spiel.

Interessant sind Berechnungen zum Vergleich von Spielstrategien

Beispielaufgabe (aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung):

Beim Roulette wirft der Croupier eine Kugel. Diese landet mit gleich großer Wahrscheinlichkeit in einem von 37 Fächern, die mit Zahlen von 0 bis 36 gekennzeichnet sind. Von diesen Zahlen sind 18 rot und 18 schwarz. Die Null ist grün.
Karl und Heinrich spielen.

<table>
<tr><th>Karl</th><th>Heinrich</th></tr>
<tr><td>Karl setzt 5 € auf die Zahl 10. Im Gewinnfall erhält er nach den Spielregeln das 36-fache seines Einsatzes zurück.
Da es 37 Zahlen gibt, beträgt die Chance $\frac{1}{37}$ auf einen Gewinn von
$36 \cdot 5\,€ - \underbrace{5\,€}_{Einsatz} = 175\,€$ für Karl.
Die Chance auf einen Verlust von 5 € beträgt $\frac{36}{37}$.
Als Erwartungswert ergibt sich:
$175\,€ \cdot \frac{1}{37} + (-5\,€)\frac{36}{37} = -\frac{5}{37}\,€$.</td><td>Heinrich setzt auf „schwarz“. Im Gewinnfall erhält er nach den Spielregeln das Doppelte seines Einsatzes zurück.
Da es 18 schwarze Zahlen gibt, beträgt die Chance $\frac{18}{37}$ auf einen Gewinn von
$2 \cdot 5\,€ - \underbrace{5\,€}_{Einsatz} = 5\,€$ für Heinrich.
Die Chance auf einen Verlust von 5 € beträgt $\frac{19}{37}$.
Als Erwartungswert ergibt sich:
$5€ \cdot \frac{18}{37} + (-5€)\frac{19}{37} = -\frac{5}{37}\,€$.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Die Erwartungswerte für beide Strategien sind also gleich. Auf lange Sicht würde jeder der beiden Spieler pro Spiel einen Verlust von $\frac{5}{37}\,€$, also 13,51 Ct, machen.
Ist es also egal, welche der beiden Strategien man spielt?
Um das zu untersuchen, berechnen wir für beide Strategien die Standardabweichungen.</td></tr>
<tr><td>$\sqrt{\left(175\,€ - (-\frac{5}{37}\,€)\right)^2 \cdot \frac{1}{37} + \left(-5\,€ - (-\frac{5}{37}\,€)\right)^2 \cdot \frac{36}{37}}$
$= \frac{1080}{37}\,€ = 29{,}19\,€$</td><td>$\sqrt{\left(5\,€ - (-\frac{5}{37}\,€)\right)^2 \cdot \frac{18}{37} + \left(-5\,€ - (-\frac{5}{37}\,€)\right)^2 \cdot \frac{19}{37}}$
$= \frac{30 \cdot \sqrt{38}}{37}\,€ = 5{,}00\,€$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Die deutlich unterschiedlichen Werte für die Standardabweichungen der beiden Strategien lassen erkennen, dass das Verlustrisiko, aber auch der mögliche Gewinn, mit Karls Strategie deutlich größer ist als mit Heinrichs.</td></tr>
</table>

Aufgaben

1. Aus den folgenden fünf Wörtern wird eines zufällig gezogen:
   DIESER WINTER IST SEHR SCHNEEREICH.
   Berechne folgende Erwartungswerte:
   a) Anzahl der Buchstaben des gezogenen Wortes.
   b) Anzahl der Vokale des gezogenen Wortes.
   c) Anzahl der Konsonanten des gezogenen Wortes.
   d) Anzahl der Buchstaben E des gezogenen Wortes.

2. Frage deine Mitschülerinnen und Mitschüler nach ihren Schuhgrößen und trage diese in die Tabelle ein. Werte die Untersuchung zuerst über alle Jugendlichen und dann getrennt nach Mädchen und Jungen aus und vergleiche.

Schuhgröße:		36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46
Jungen	Anzahl:											
Mädchen	Anzahl:											

   a) Zeichne ein Säulendiagramm.
   b) Stelle die Ergebnisse in einem Boxplot dar.
   c) Bestimme ein Maß für die Streuung.

3. Du erhältst vier auf den ersten Blick gleich aussehende Schlüssel und sollst damit eine Türe aufsperren. Es ist sicher, dass genau einer der Schlüssel passt.
   Bestimme den Erwartungswert für die Anzahl der notwendigen Versuche.

Anzahl der Versuche:	1	2	3	4
Wahrscheinlichkeit:				

4. Es wird dreimal hintereinander ein Würfel geworfen. Jedes Mal, wenn der Würfel mindestens eine fünf zeigt, wird das Spielkapital verdoppelt, ansonsten wird es halbiert.
   a) Zeichne ein Baumdiagramm für dieses Spiel.
   b) Mit welchem Betrag rechnest du am Ende des Spiels, wenn du mit einem Startkapital von 10 € antrittst?
   c) Bestimme ein Maß für die Streuung.
   d) Nimmst du an diesem Spiel teil?

Lösungen:

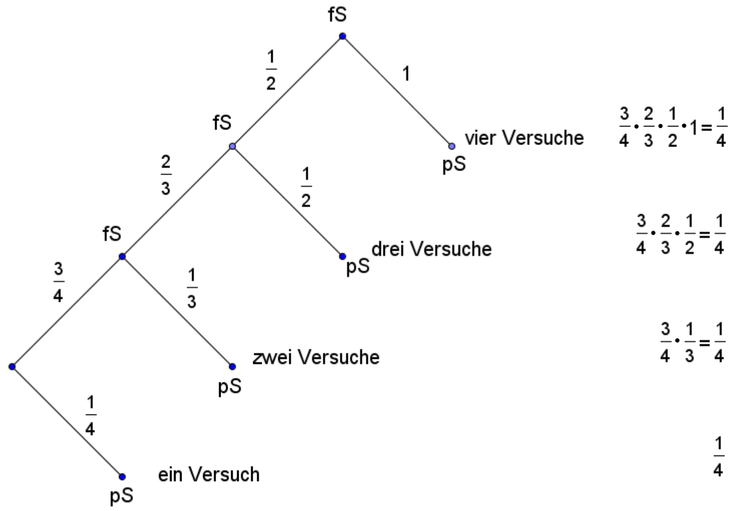
Aufgabe 1:

	DIESER	WINTER	IST	SEHR	SCHNEEREICH
Anzahl Buchstaben:	6	6	3	4	11
Erwartungswert für Anzahl der Buchstaben	$\frac{1}{5}\cdot 6+\frac{1}{5}\cdot 6+\frac{1}{5}\cdot 3+\frac{1}{5}\cdot 4+\frac{1}{5}\cdot 11=6$				
Anzahl der Vokale	3	2	1	1	4
Erwartungswert für die Anzahl der Vokale	$\frac{1}{5}\cdot 3+\frac{1}{5}\cdot 2+\frac{1}{5}\cdot 1+\frac{1}{5}\cdot 1+\frac{1}{5}\cdot 4=2,2$				
Anzahl der Konsonanten	3	4	2	3	7 oder: $11-4=7$
Erwartungswert für die Anzahl der Konsonanten	$\frac{1}{5}\cdot 3+\frac{1}{5}\cdot 4+\frac{1}{5}\cdot 2+\frac{1}{5}\cdot 3+\frac{1}{5}\cdot 7=3,8$ oder: $6-2,2=3,8$				
Anzahl der Buchstaben E	2	1	0	1	3
Erwartungswert für die Anzahl der Buchstaben E	$\frac{1}{5}\cdot 2+\frac{1}{5}\cdot 1+\frac{1}{5}\cdot 0+\frac{1}{5}\cdot 1+\frac{1}{5}\cdot 3=1,4$				

Aufgabe 3:

Anzahl der Versuche:	1	2	3	4
Wahrscheinlichkeit:	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

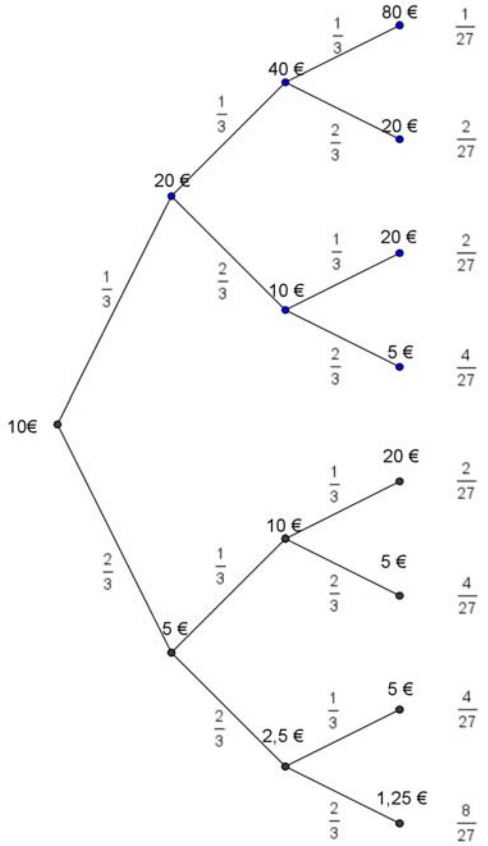
Baumdiagramm zur Bestimmung der Wahrscheinlichkeiten
(fS: falscher Schlüssel; pS: passender Schlüssel)



Erwartungswert: $\frac{1}{4}\cdot 1+\frac{1}{4}\cdot 2+\frac{1}{4}\cdot 3+\frac{1}{4}\cdot 4=2,5$

Aufgabe 4

a) Das Baumdiagramm zeigt folgende Wahrscheinlichkeiten:



80	20	5	1,25
$\frac{1}{27}$	$\frac{6}{27}$	$\frac{12}{27}$	$\frac{8}{27}$

b) Ermittlung des Erwartungswerts:

$$(80\,€-10\,€)\cdot\frac{1}{27}+(20\,€-10\,€)\cdot\frac{6}{27}+(5\,€-10\,€)\cdot\frac{12}{27}+(1,25\,€-10\,€)\cdot\frac{8}{27}=0\,€$$

Der Erwartungswert beträgt 0 €.

c) Berechnung der Standardabweichung:

$$\sqrt{(80\,€-10\,€)^2\cdot\frac{1}{27}+(20\,€-10\,€)^2\cdot\frac{6}{27}+(5\,€-10\,€)^2\cdot\frac{12}{27}+(1,25\,€-10\,€)^2\cdot\frac{8}{27}}=15,41\,€$$

Die Standardabweichung beträgt 15,41 €.

d) Der Erwartungswert 0 € zeigt, dass das Spiel fair ist – längerfristig stellt sich weder ein Gewinn noch ein Verlust ein. Die Standardabweichung zeigt jedoch, dass das Spiel nicht ohne Risiko ist.