Mathematik

Abiturprüfung 2017

Prüfungsteil B (CAS)

Arbeitszeit: 180 Minuten

Bei der Bearbeitung der Aufgaben dürfen als Hilfsmittel verwendet werden

- die vom Staatsministerium genehmigte Merkhilfe für das Fach Mathematik,
- eine der vom Staatsministerium zugelassenen stochastischen Tabellen,
- eine der vom Staatsministerium für Leistungserhebungen zugelassenen naturwissenschaftlichen Formelsammlungen,
- ein Taschenrechner, der hinsichtlich seiner Funktionalität den vom Staatsministerium getroffenen Regelungen entspricht,
- **ein Computeralgebrasystem, das den vom Staatsministerium getroffenen Regelungen entspricht.**

Zu den Themengebieten Analysis, Stochastik und Geometrie wählt der Fachausschuss jeweils eine Aufgabengruppe zur Bearbeitung aus. **Die zu einer Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil B dürfen nur in Verbindung mit den zur selben Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil A bearbeitet werden.**

Name des Prüflings

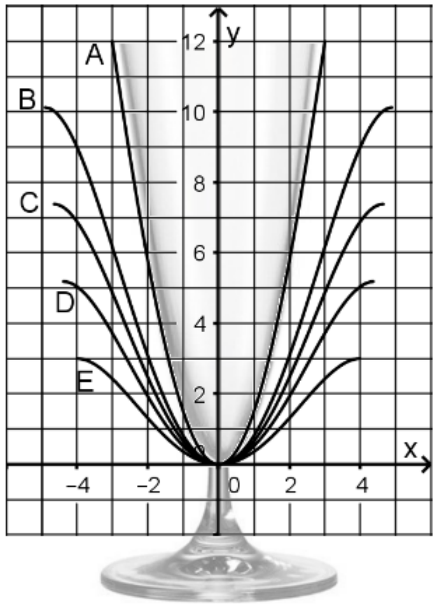
Das Geheft mit den Aufgabenstellungen ist abzugeben.

Analysis

Aufgabengruppe 1

BE

Gegeben ist die Schar der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen f_k mit $f_k(x) = -\frac{3}{512}k \cdot x^4 + \frac{3}{32}k^2 \cdot x^2$ und $k \in \mathbb{R}^+$.



Die abgebildeten symmetrisch zur y-Achse liegenden Kurven sind Ausschnitte von Graphen von fünf Funktionen dieser Schar. Rotiert jeweils eines dieser Graphenstücke um die y-Achse, so entsteht eine gekrümmte Fläche, die modellhaft den Kelch eines Glases darstellt. Dabei entspricht eine Längeneinheit einem Zentimeter in der Realität. Beispielsweise kann so mithilfe des Graphenstücks A der Kelch eines Sektglases mit einer Höhe von $12\,\text{cm}$ modelliert werden, dessen kreisförmiger Rand einen Durchmesser von $6\,\text{cm}$ hat (vgl. Abbildung). Auch die Kelche eines Likörglases und eines Cocktailglases können jeweils mithilfe eines der übrigen vier Graphenstücke modelliert werden. Dabei gehört das den Kelch des Likörglases modellierende Graphenstück zur Funktion f_2, das den Kelch des Cocktailglases modellierende Graphenstück zur Funktion f_3.

2 **1 a)** Ordnen Sie dem Likörglas und dem Cocktailglas jeweils den zugehörigen Graphen aus der Abbildung zu.

2 **b)** Bestimmen Sie den Wert von k, so dass die Funktion f_k den Kelch des Sektglases beschreibt. Geben Sie k auf eine Dezimale genau an.

2 **c)** Begründen Sie, dass für jedes $k \in \mathbb{R}^+$ der Graph von f_k symmetrisch zur y-Achse ist.

5 **d)** Bestimmen Sie Lage und Art der Extrempunkte des Graphen von f_k in Abhängigkeit von k.

(Teilergebnis: eine Extremstelle: $x = 2\sqrt{2k}$)

2 **e)** Weisen Sie für den Graphen jeder Funktion f_k der Schar nach, dass dessen Extrempunkt mit positiver x-Koordinate auf dem Graphen einer Funktion mit der Gleichung $y = \frac{3}{4096}x^6$ liegt.

(Fortsetzung nächste Seite)

3 **f)** Ermitteln Sie das größte Intervall der Form $]a;b[$ auf der x-Achse, in dem der Graph von f_k linksgekrümmt ist, in Abhängigkeit von k.

2 Betrachtet wird nun das Cocktailglas, dessen Kelch mithilfe der Funktion f_3 für $-2\sqrt{6} \leq x \leq 2\sqrt{6}$ beschrieben werden kann.

5 **a)** Um das Glas verläuft eine eingeschliffene kreisförmige Linie, die sich in vertikaler Richtung $2\,\text{cm}$ unterhalb des Glasrands befindet. Berechnen Sie die Länge dieser Linie auf Millimeter genau.

Im Cocktailglas befindet sich ein $20\,\text{cm}$ langer Strohhalm, der am unteren Ende Kontakt zum Glas hat. Der Strohhalm kann als Strecke im Koordinatensystem der Abbildung dargestellt werden, deren unterer Endpunkt auf dem Graphen der Funktion f_3 liegt.

4 **b)** Außerdem berührt der Strohhalm das Glas in dem Punkt, der in der Abbildung durch den Punkt $R\left(4 \mid f_3(4)\right)$ dargestellt wird. Ermitteln Sie die Länge des Abschnitts des Strohhalms zwischen diesem Berührpunkt und seinem oberen Ende auf Millimeter genau.

4 **c)** Die Lage des Strohhalms wird verändert. Sein unteres Ende wird in der Abbildung nun durch $P\left(-1 \mid f_3(-1)\right)$ dargestellt und der Punkt, in dem er das Glas berührt, durch $Q\left(u \mid f_3(u)\right)$ mit $u > 0$. Berechnen Sie u.

4 **3** Der Kelch des Sektglases kann in guter Näherung auch mithilfe der Funktion s mit $s(x) = \frac{4}{3}x^2$ und $0 \leq x \leq 3$ dargestellt werden. Das Volumen der Flüssigkeit im Sektglas in cm^3 kann näherungsweise mithilfe der Formel $V = \pi \cdot \int_0^h \left(s^{-1}(x)\right)^2 dx$ berechnet werden. Dabei ist h die Füllhöhe in cm und s^{-1} die Umkehrfunktion von s. Berechnen Sie das Flüssigkeitsvolumen im Sektglas bei einer Füllhöhe von $8\,\text{cm}$ auf Kubikzentimeter genau.

7 **4** Betrachtet wird nun das Likörglas, dessen Kelch mithilfe der Funktion f_2 für $-4 \leq x \leq 4$ beschrieben werden kann. Das modellierende Graphenstück soll für $0 \leq x \leq 4$ durch zwei aneinandergesetzte Parabelstücke angenähert werden, die folgende Eigenschaften besitzen:

- Die Scheitelpunkte der Parabeln sollen im Tiefpunkt bzw. im Hochpunkt des Graphen von f_2 liegen.
- Die Parabeln sollen in einem Punkt, der die gleiche x-Koordinate wie der Wendepunkt des Graphen von f_2 hat, ohne Knick ineinander übergehen.

Die zu den beiden Parabelstücken gehörenden in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen werden mit p_1 und p_2 bezeichnet. Bestimmen Sie die Funktionsterme von p_1 und p_2.

40

Analysis

Aufgabengruppe 2

BE

Gegeben ist die Schar der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen $f_a : x \mapsto x^2 \cdot e^{-a \cdot x}$ mit $a \in \mathbb{R}^+$. Der Graph von f_a wird mit G_a bezeichnet.

3 **1 a)** Begründen Sie, dass für jedes $a \in \mathbb{R}^+$ die x-Achse Asymptote von G_a ist. Zeigen Sie, dass die Graphen aller Funktionen der Schar nur einen Punkt gemeinsam haben.

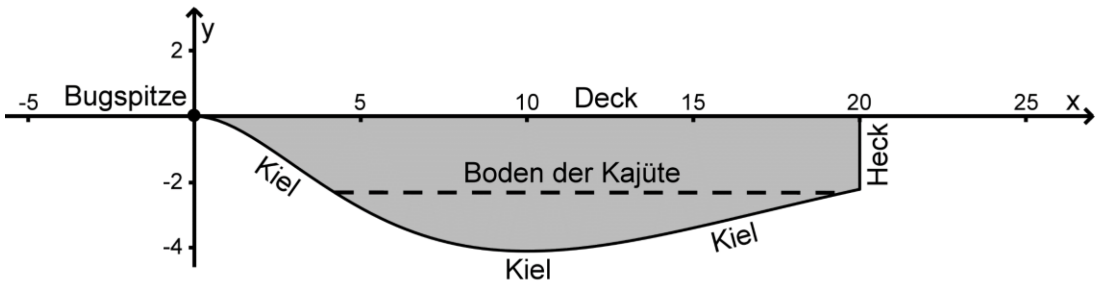
6 **b)** Bestimmen Sie Lage und Art der Extrempunkte von G_a in Abhängigkeit von a. Begründen Sie, dass der Hochpunkt für jeden Wert von a im ersten Quadranten liegt.

(Teilergebnisse: Extremstellen: $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{2}{a}$)

3 **c)** Zeigen Sie, dass für alle $a \in \mathbb{R}^+$ die Extrempunkte von G_a auf der Parabel mit der Gleichung $y = e^{-2} \cdot x^2$ liegen.

4 **d)** Der Graph G_a, die x-Achse und die Gerade mit der Gleichung $x = p$ mit $p \in \mathbb{R}^+$ schließen ein Flächenstück ein. Berechnen Sie den Inhalt dieses Flächenstücks für $a = 0{,}2$ in Abhängigkeit von p. Zeigen Sie, dass dieser Inhalt für alle $p \in \mathbb{R}^+$ kleiner als 250 ist.

2 Die Abbildung zeigt modellhaft den Längsschnitt eines Schiffs durch seinen Kiel. Das Koordinatensystem ist so gewählt, dass die x-Achse die Horizontale beschreibt und der Koordinatenursprung die Bugspitze darstellt. Eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht einem Meter in der Realität. Das Deck des Schiffs befindet sich in der Horizontalen und ist $20\,\text{m}$ lang.



Die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $k : x \mapsto -0{,}3x^2 \cdot e^{-0{,}2x}$ beschreibt im Bereich $0 \leq x \leq 20$ den Kiel von der Bugspitze bis zum Heck.

(Fortsetzung nächste Seite)

2 **a)** Für $x \in \mathbb{R}$ gilt $k(x) = -0{,}3 \cdot f_{0,2}(x)$. Beschreiben Sie, wie der Graph von k aus dem Graphen von $f_{0,2}$ hervorgeht.

4 **b)** Berechnen Sie die Höhendifferenz zwischen dem tiefsten Punkt des Kiels und dem Endpunkt des Kiels am Heck auf Zentimeter genau.

(zur Kontrolle: x-Koordinate des Tiefpunkts des Graphen von k: 10)

4 **c)** Der Kiel hat in einem Punkt seinen betragsmäßig größten Neigungswinkel gegen die Horizontale. Bestimmen Sie den Betrag dieses Neigungswinkels.

4 **d)** Der horizontal liegende Boden der Kajüte befindet sich $2{,}25\,\text{m}$ unterhalb des Decks. Berechnen Sie die Länge des Bodens in Längsrichtung des Schiffs auf Zentimeter genau.

Der Endpunkt des Kiels am Heck wird im Modell durch den Punkt E dargestellt, die Bugspitze durch den Punkt B. Der Punkt T ist der Tiefpunkt, der Punkt $P\left(10-5\sqrt{2} \mid k\left(10-5\sqrt{2}\right)\right)$ ein Wendepunkt des Graphen von k.

4 **e)** Verbindet man die Punkte B, P, T und E in dieser Reihenfolge durch Strecken, so entsteht ein Streckenzug, dessen Länge einen guten Näherungswert für die Länge des Kiels im Modell liefert. Ermitteln Sie diesen Näherungswert auf eine Dezimale genau.

(Ergebnis: Näherungswert: 21,0)

2 **f)** Begründen Sie geometrisch, dass die tatsächliche Länge des Kiels im Modell größer sein muss als der in Aufgabe 2e ermittelte Näherungswert.

4 **g)** Die als Kurvenlänge L bezeichnete Länge des Graphen der Funktion k zwischen den Punkten $(a \mid k(a))$ und $(b \mid k(b))$ mit $a < b$ kann mithilfe der Formel $L = \int_a^b \sqrt{1+\left(k'(x)\right)^2}\,dx$ berechnet werden. Berechnen Sie damit die Länge des Kiels im Modell auf eine Dezimale genau. Bestimmen Sie, um wie viel Prozent der Näherungswert aus Aufgabe 2e davon abweicht.

40

Stochastik

Aufgabengruppe 1

BE

Das elektronische Stabilitätsprogramm (ESP) eines Autos kann Schleuderbewegungen und damit Unfälle verhindern.

1 Gehen Sie bei den folgenden Aufgaben davon aus, dass 40 % aller Autos mit ESP ausgerüstet sind.

200 Autos werden nacheinander zufällig ausgewählt; die Zufallsgröße X beschreibt die Anzahl der ausgewählten Autos mit ESP.

3 **a)** Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass von den ausgewählten Autos mindestens 70 und höchstens 80 mit ESP ausgerüstet sind.

3 **b)** Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das fünfte ausgewählte Auto das erste mit ESP ist.

4 **c)** Bestimmen Sie einen möglichst kleinen Wert für $a \in \mathbb{N}$ so, dass die Wahrscheinlichkeit $P(|X-\mu| \leq a)$ mindestens 65 % beträgt.

2 In einem Parkhaus befinden sich insgesamt 100 Parkplätze.

3 **a)** Im Parkhaus sind 20 Parkplätze frei; vier Autofahrer suchen jeweils einen Parkplatz. Formulieren Sie in diesem Sachzusammenhang zu den folgenden Termen jeweils eine Aufgabenstellung, deren Lösung sich durch den Term berechnen lässt.

α) $20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17$ **β)** $\binom{20}{4}$

Das Parkhaus ist nun mit 100 Autos besetzt, von denen 40 mit ESP ausgerüstet sind.

3 **b)** Sieben von diesen 100 Autos sind Kleinwagen und nicht mit ESP ausgerüstet, 90 sind keine Kleinwagen. Betrachtet werden folgende Ereignisse.

E: „Ein im Parkhaus zufällig ausgewähltes Auto ist mit ESP ausgerüstet.“

K: „Bei einem im Parkhaus zufällig ausgewählten Auto handelt es sich um einen Kleinwagen.“

Geben Sie die Bedeutung von $P_K(E)$ im Sachzusammenhang an und ermitteln Sie diese Wahrscheinlichkeit.

(Fortsetzung nächste Seite)

4 **c)** 30 der im Parkhaus stehenden Autos werden zufällig ausgewählt. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass darunter genau 40 % mit ESP ausgerüstet sind.

20

Stochastik

Aufgabengruppe 2

BE

Ein Großhändler bietet Samenkörner für Salatgurken in zwei Qualitätsstufen an. Ein Samenkorn der höheren Qualität A keimt mit einer Wahrscheinlichkeit von 95%, eines der Qualität B mit einer Wahrscheinlichkeit von 70%. Ein Anbaubetrieb kauft Samenkörner beider Qualitätsstufen, 65% aller gekauften Samenkörner sind von der Qualität A.

5 **a)** In einem Gedankenexperiment werden die eingekauften Samenkörner zusammengeschüttet und gemischt. Bestimmen Sie mithilfe eines beschrifteten Baumdiagramms

α) die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufällig ausgewähltes Samenkorn keimt;

β) die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufällig ausgewähltes Samenkorn, das nach der Aussaat keimt, von der Qualität B ist.

4 **b)** Der Anbaubetrieb sät 200 Samenkörner der Qualität B. Die Anzahl keimender Samenkörner wird durch eine binomial verteilte Zufallsgröße beschrieben. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Anzahl keimender Samenkörner um höchstens eine Standardabweichung vom Erwartungswert der Zufallsgröße abweicht.

2 **c)** Beschreiben Sie im Sachzusammenhang die Bedeutung des Terms $1-P(X \geq 275)$, wobei X eine binomial verteilte Zufallsgröße mit den Parametern $n = 300$ und $p = 0{,}95$ bezeichnet.

5 **d)** Keimt ein Samenkorn, so wächst daraus eine Pflanze heran, die aufgrund schädlicher Einflüsse jedoch in manchen Fällen keine Gurken trägt. Bei einem gekeimten Samenkorn der Qualität A entsteht mit einer Wahrscheinlichkeit von 85% eine fruchttragende Pflanze, bei einem gekeimten Samenkorn der Qualität B mit einer Wahrscheinlichkeit von 75%. Vereinfachend wird davon ausgegangen, dass - unabhängig von der Qualität der Samenkörner - von jeder fruchttragenden Pflanze gleich viele Gurken geerntet werden können.
Ein Samenkorn der Qualität A kostet 17 Cent, eines der Qualität B 12 Cent. Entscheiden Sie durch Rechnung, ob es für einen Anbaubetrieb finanziell günstiger ist, sich auf Samenkörner der Qualität A zu beschränken, oder ob es finanziell günstiger ist, sich auf Samenkörner der Qualität B zu beschränken, wenn er alle Gurken zum selben Preis verkauft.

(Fortsetzung nächste Seite)

4 **e)** Der Großhändler behauptet, dass sich die Wahrscheinlichkeit für das Keimen eines Samenkorns der Qualität B durch eine veränderte Aufbereitung des Saatguts auf mehr als 70% erhöht hat. Deshalb soll die Nullhypothese „Die Wahrscheinlichkeit für das Keimen eines Samenkorns der Qualität B ist höchstens 70%.“ auf einem Signifikanzniveau von 5% getestet werden. Dazu werden 100 der verändert aufbereiteten Samenkörner der Qualität B zufällig ausgewählt und gesät. Bestimmen Sie die zugehörige Entscheidungsregel.

20

Geometrie

Aufgabengruppe 1

BE

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte $A(0|0|1)$, $B(2|6|1)$, $C(-4|8|5)$ und $D(-6|2|5)$ gegeben. Sie liegen in einer Ebene E und bilden ein Viereck $ABCD$, dessen Diagonalen sich im Punkt M schneiden.

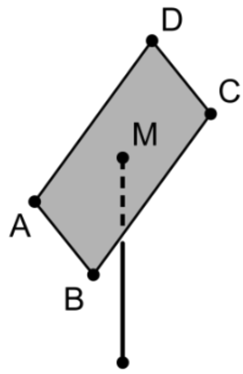
1 **a)** Begründen Sie, dass die Gerade AB parallel zur x_1x_2-Ebene verläuft.

4 **b)** Weisen Sie nach, dass das Viereck $ABCD$ ein Rechteck ist. Bestimmen Sie die Koordinaten von M.

(Teilergebnis: $M(-2|4|3)$)

2 **c)** Ermitteln Sie eine Gleichung der Ebene E in Normalenform.

(mögliches Ergebnis: $E: 3x_1 - x_2 + 5x_3 - 5 = 0$)



Ein Solarmodul wird an einem Metallrohr befestigt, das senkrecht zum horizontalen Erdboden steht. Das Solarmodul wird modellhaft durch das Rechteck $ABCD$ dargestellt. Das Metallrohr lässt sich durch eine Strecke, der Befestigungspunkt am Solarmodul durch den Punkt M beschreiben (vgl. Abbildung). Der horizontale Erdboden liegt im Modell in der x_1x_2-Ebene des Koordinatensystems; eine Längeneinheit entspricht $0{,}8\,\mathrm{m}$ in der Realität.

2 **d)** Ein Sechstel des Metallrohrs steckt im Erdreich. Bestimmen Sie die Länge des Metallrohrs.

2 **e)** Um einen möglichst großen Energieertrag zu erzielen, sollte die Größe des Neigungswinkels φ des Solarmoduls gegenüber der Horizontalen zwischen 30° und 36° liegen. Prüfen Sie, ob diese Bedingung erfüllt ist.

5 **f)** Auf das Solarmodul fällt Sonnenlicht, das im Modell durch parallele Geraden dargestellt wird, die senkrecht zur Ebene E verlaufen. Das Solarmodul erzeugt auf der horizontalen Fläche einen rechteckigen Schatten. Zeigen Sie unter Verwendung einer geeignet beschrifteten Skizze, dass der Flächeninhalt des Schattens mithilfe des Terms $\left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \frac{\left|\overrightarrow{AD}\right|}{\cos\varphi} \cdot (0{,}8\,\mathrm{m})^2$ berechnet werden kann.

(Fortsetzung nächste Seite)

4 **g)** Um die Sonneneinstrahlung im Laufe des Tages möglichst effektiv zur Energiegewinnung nutzen zu können, lässt sich das Metallrohr mit dem Solarmodul um die Längsachse des Rohrs drehen. Die Größe des Neigungswinkels φ gegenüber der Horizontalen bleibt dabei unverändert. Betrachtet wird der Eckpunkt des Solarmoduls, der im Modell durch den Punkt A dargestellt wird. Berechnen Sie den Radius des Kreises, auf dem sich dieser Eckpunkt des Solarmoduls bei der Drehung des Metallrohrs bewegt, auf Zentimeter genau.

20

Geometrie

Aufgabengruppe 2

BE

Ein geschlossenes Zelt, das auf horizontalem Untergrund steht, hat die Form einer Pyramide mit quadratischer Grundfläche. Die von der Zeltspitze ausgehenden Seitenkanten werden durch vier gleich lange Stangen gebildet. Das Zelt ist $6\,\text{m}$ hoch, die Seitenlänge des Zeltbodens beträgt $5\,\text{m}$. Das Zelt wird in einem kartesischen Koordinatensystem (vgl. Abbildung 1) modellhaft durch eine Pyramide $ABCDS$ mit der Spitze $S(2{,}5\,|\,2{,}5\,|\,6)$ dargestellt. Der Punkt A liegt im Koordinatenursprung, C hat die Koordinaten $(5\,|\,5\,|\,0)$. Der Punkt B liegt auf der x_1-Achse, D auf der x_2-Achse. Das Dreieck CDS liegt in der Ebene $E: 12x_2 + 5x_3 = 60$. Eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht einem Meter in der Realität.

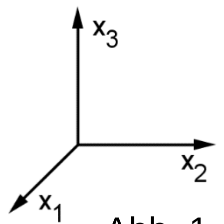


Abb. 1

3 **a)** Geben Sie die Koordinaten der Punkte B und D an und zeichnen Sie die Pyramide in ein Koordinatensystem ein.

2 **b)** Ermitteln Sie eine Gleichung der Ebene F, in der das Dreieck DAS liegt, in Normalenform.

(mögliches Ergebnis: $F: 12x_1 - 5x_3 = 0$)

2 **c)** Berechnen Sie den Inhalt einer Seitenfläche der Pyramide.

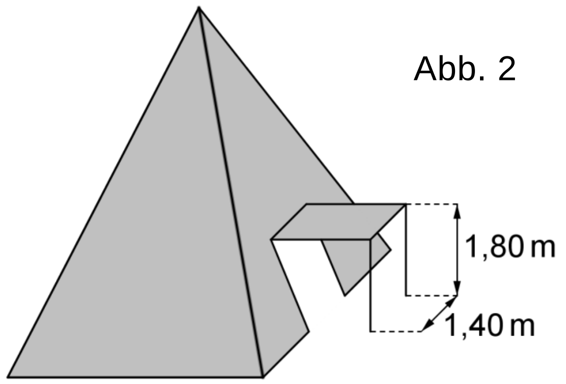
2 **d)** Jeweils zwei benachbarte Zeltwände schließen im Inneren des Zelts einen stumpfen Winkel ein. Ermitteln Sie die Größe dieses Winkels.

4 **e)** Im Zelt ist eine Lichtquelle so aufgehängt, dass sie von jeder der vier Wände einen Abstand von $50\,\text{cm}$ hat. Ermitteln Sie die Koordinaten des Punkts, der im Modell die Lichtquelle darstellt.

2 **f)** Bestimmen Sie eine Gleichung der Symmetrieachse g des Dreiecks CDS.

5 **g)** Ein Teil der Zeltwand, die im Modell durch das Dreieck CDS dargestellt wird, kann mithilfe zweier vertikal stehender Stangen der Länge $1{,}80\,\text{m}$ zu einem horizontalen Vordach aufgespannt werden (vgl. Abbildung 2). Die dadurch entstehende $1{,}40\,\text{m}$ breite Öffnung in der Zeltwand wird im Modell durch ein Rechteck dargestellt, das symmetrisch zu g liegt. Dabei liegt eine Seite dieses Rechtecks auf der Strecke $[CD]$. Berechnen Sie den Flächeninhalt des Vordachs.

Abb. 2



20