

Mathematik

Abiturprüfung 2015

Prüfungsteil B (CAS)

Arbeitszeit: 180 Minuten

Bei der Bearbeitung der Aufgaben dürfen als Hilfsmittel verwendet werden

- die vom Staatsministerium genehmigte Merkhilfe für das Fach Mathematik,
- eine der vom Staatsministerium zugelassenen stochastischen Tabellen,
- eine der vom Staatsministerium für Leistungserhebungen zugelassenen naturwissenschaftlichen Formelsammlungen,
- ein Taschenrechner, der hinsichtlich seiner Funktionalität den vom Staatsministerium getroffenen Regelungen entspricht,
- **ein Computeralgebrasystem, das den vom Staatsministerium getroffenen Regelungen entspricht.**

Zu den Themengebieten Analysis, Stochastik und Geometrie wählt der Fachausschuss jeweils eine Aufgabengruppe zur Bearbeitung aus. **Die zu einer Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil B dürfen nur in Verbindung mit den zur selben Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil A bearbeitet werden.**

<hr/> <p>Name des Prüflings</p>

Das Geheft mit den Aufgabenstellungen ist abzugeben.

Analysis
Aufgabengruppe 1

BE

Gegeben ist die Funktion $f : x \mapsto 20 \cdot \ln\left(\frac{20x}{1-x}\right)$ mit Definitionsmenge $D_f =]0; 1[$.

Der Graph von f wird mit G_f bezeichnet.

- 5 **1 a)** Bestimmen Sie die Nullstelle von f . Untersuchen Sie das Verhalten von f an den Grenzen von D_f und geben Sie die Gleichungen der Asymptoten von G_f an.
- 5 **b)** Begründen Sie, dass f in D_f umkehrbar ist. Untersuchen Sie das Krümmungsverhalten von G_f . Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente w an G_f im Wendepunkt W von G_f .
- (zur Kontrolle: x -Koordinate von W : $\frac{1}{2}$)*
- 3 **c)** Verschiebt man G_f so, dass der Wendepunkt W im Ursprung liegt, erhält man den Graphen der Funktion g . Geben Sie den Funktionsterm von g an. Welche Folgerung für G_f ergibt sich aus der Tatsache, dass der Graph von g punktsymmetrisch bezüglich des Koordinatenursprungs ist?
- 4 **d)** Zeichnen Sie G_f und die Tangente w unter Berücksichtigung der bisherigen Ergebnisse in ein geeignet skaliertes Koordinatensystem ein.
- 4 **e)** G_f schließt mit den Koordinatenachsen und der Tangente w ein Flächenstück mit dem Inhalt A ein. Berechnen Sie A .
- 2** Mithilfe der Funktion f lässt sich modellhaft das Alter einer Fichte in Abhängigkeit von ihrer Stammdicke x in Metern beschreiben, sofern die Fichte zwischen 10 und 120 Jahre alt ist. Als Stammdicke wird der in 1,30 m Höhe über dem Erdboden gemessene Durchmesser des Fichtenstamms bezeichnet. Der Funktionsterm $f(x) = 20 \cdot \ln\left(\frac{20x}{1-x}\right)$ gibt im Modell das Alter der Fichte in Jahren an.
- 2 **a)** Bestimmen Sie auf der Grundlage des Modells das Alter einer Fichte, deren Stammdicke 40 cm beträgt.
- 3 **b)** Ermitteln Sie rechnerisch die Werte der Stammdicke, für die das Modell aufgrund des angegebenen Altersbereichs gültig ist.
- (zur Kontrolle: von etwa 8 cm bis etwa 95 cm)*
- 2 **c)** Interpretieren Sie die Bedeutung der y -Koordinate des Wendepunkts W von G_f in Bezug auf die Wachstumsgeschwindigkeit der Stammdicke in Abhängigkeit vom Baumalter.

(Fortsetzung nächste Seite)

5

d) Abbildung 1 zeigt den Graphen G_h einer in \mathbb{R} definierten Funktion

$$h: x \mapsto a \cdot \frac{e^{bx}}{e^{bx} + c} \text{ mit } a, b, c \in \mathbb{R}^+.$$

Begründen Sie mithilfe des Grenzwerts $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 40$, dass $a = 40$ ist, und mithilfe des Achsenschnittpunkts $S(0|4)$ von G_h , dass $c = 9$ ist. Bestimmen Sie mithilfe des Wendepunkts $W_h(40 \cdot \ln 9 | h(40 \cdot \ln 9))$ den Wert von b .

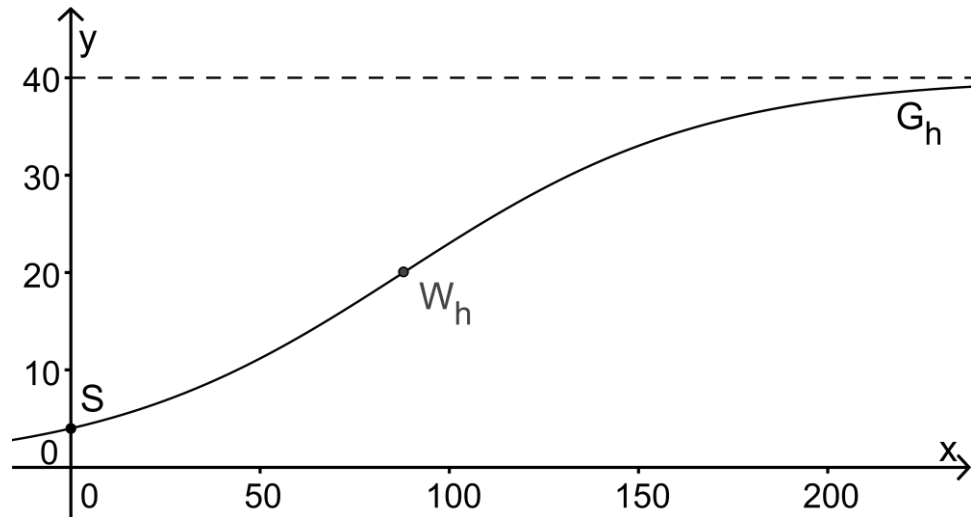


Abb. 1

3

e) Mithilfe der in \mathbb{R} definierten

$$\text{Funktion } h: x \mapsto 40 \cdot \frac{e^{0,025x}}{e^{0,025x} + 9}$$

kann im Bereich $10 \leq x \leq 120$ modellhaft die Höhe einer Fichte in Abhängigkeit von ihrem Alter beschrieben werden. Dabei ist x das Alter der Fichte in Jahren und $h(x)$ die Höhe der Fichte in Metern. Berechnen Sie auf der Grundlage der beiden betrachteten Modelle die Höhe einer Fichte mit einer Stammdicke von 25 cm und tragen Sie den zugehörigen Punkt in Abbildung 2 ein.

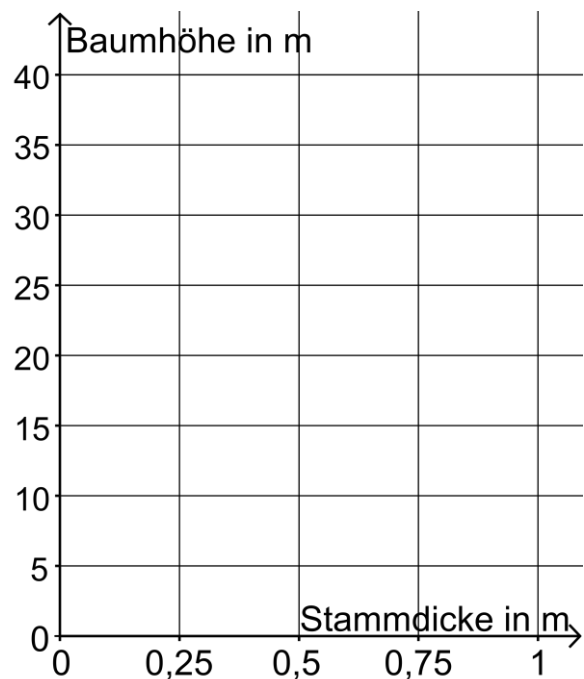


Abb. 2

4

f) Zeichnen Sie in Abbildung 2 den Verlauf des Graphen der Funktion, die auf der Grundlage der beiden betrachteten Modelle die Höhe einer Fichte in Abhängigkeit von ihrer Stammdicke beschreibt.

Analysis

Aufgabengruppe 2

BE

- 1 Gegeben ist die Funktion $f : x \mapsto \sqrt{16 - 2x} = \sqrt{2(8 - x)}$ mit maximalem Definitionsbereich D_f . Abbildung 1 zeigt den Graphen G_f von f .

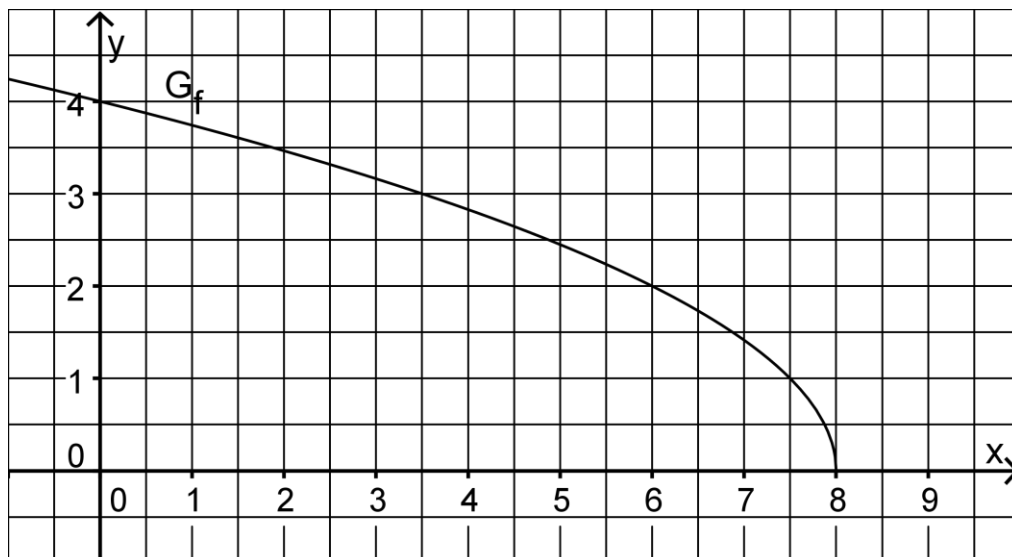


Abb. 1

- 4 a) Zeichnen Sie den Graphen der in \mathbb{R}_0^+ definierten Funktion $w : x \mapsto \sqrt{x}$ in Abbildung 1 ein. Geben Sie eine Möglichkeit dafür an, wie der Graph von f schrittweise aus dem Graphen von w hervorgehen kann.
- 4 b) Bestimmen Sie die Größe des Winkels, den G_f und die y-Achse einschließen. Begründen Sie, dass G_f keine waagrechte Tangente besitzt. Für jedes $x \in D_f$ mit $0 < x < 8$ wird ein Dreieck OP_xQ_x mit den Eckpunkten $O(0|0)$, $P_x(x|0)$ und $Q_x(x|f(x))$ festgelegt.
- 4 c) Tragen Sie für $x = 4$ das zugehörige Dreieck OP_4Q_4 in Abbildung 1 ein. Begründen Sie, dass der Flächeninhalt A des Dreiecks OP_xQ_x durch den Term $A(x) = \sqrt{4x^2 - \frac{1}{2}x^3}$ beschrieben wird.
- 5 d) Es gibt ein Dreieck OP_xQ_x mit maximalem Flächeninhalt A_{\max} . Bestimmen Sie den prozentualen Anteil von A_{\max} am Inhalt der Fläche, die G_f im I. Quadranten mit den Koordinatenachsen einschließt.

(Fortsetzung nächste Seite)

2 Abbildung 2 zeigt den Graphen G_f der Funktion f aus Aufgabe 1. Gegeben ist weiter die Gerade g mit der Gleichung $y = -\frac{1}{2}x + 7,5$.

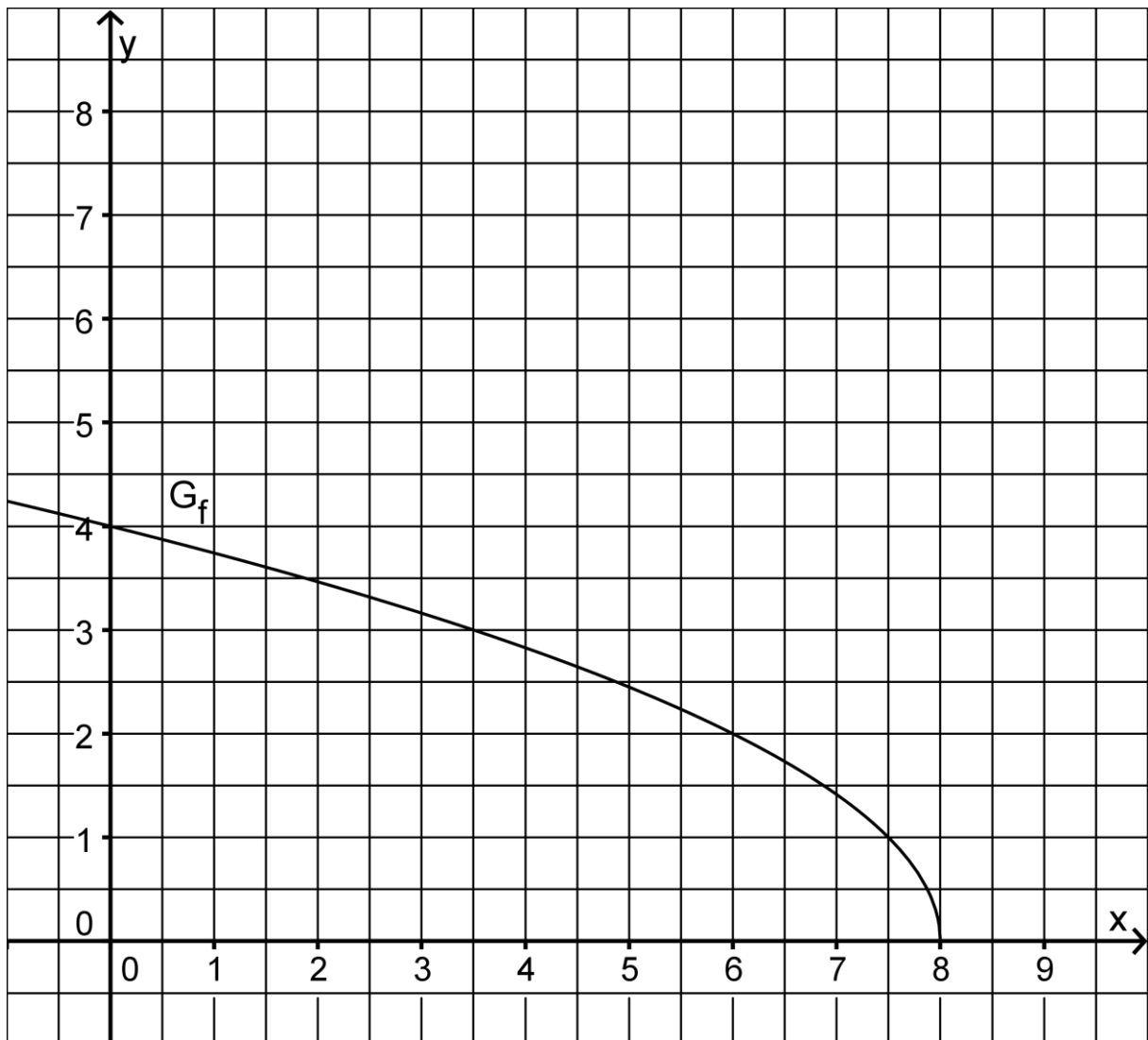


Abb. 2

- 3 a) Zeichnen Sie die Gerade g in Abbildung 2 ein. Bestimmen Sie rechnerisch die Koordinaten des Punkts $T(x_T | y_T)$ von G_f , in dem die Tangente an G_f parallel zur Geraden g ist.
(Teilergebnis: $x_T = 6$)
- 4 b) Berechnen Sie den Abstand d des Punkts T von der Geraden g .
Betrachtet wird zusätzlich die Differenzfunktion $u: x \mapsto g(x) - f(x)$ mit Definitionsbereich $D_u = D_f$.
- 3 c) Zeigen Sie, dass u an der Stelle x_T ein Minimum $u(x_T)$ besitzt.
- 3 d) Begründen Sie ohne Rechnung, dass das Minimum $u(x_T)$ der Differenzfunktion u größer ist als der Abstand des Punkts T von der Geraden g .
Zeichnen Sie dazu auch geeignete Strecken in Abbildung 2 ein.

(Fortsetzung nächste Seite)

3 Ein Fahrzeug bremst mit konstanter Verzögerung bis zum Stillstand ab. Der gesamte Bremsweg in Metern wird dabei mit x_B bezeichnet.

Die Geschwindigkeit des Fahrzeugs beträgt zu Beginn des Bremsvorgangs $20 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ und nimmt in den ersten zehn Metern um $2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ ab.

Für $0 \leq x \leq x_B$ gibt der Term $v(x) = \sqrt{20^2 - 2ax}$ die Geschwindigkeit des Fahrzeugs in $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ während des Bremsvorgangs in Abhängigkeit vom zurückgelegten Weg x in Metern an. Dabei ist a der Betrag der Verzögerung des Fahrzeugs in $\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

4 a) Bestimmen Sie die Werte von a und x_B .

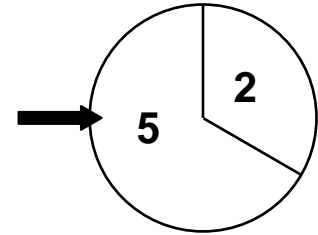
(Ergebnis: $a = 3,8$; $x_B = \frac{1000}{19}$)

6 b) Betrachtet wird für $0 \leq x \leq x_B - 10$ der Term $h(x) = v(x) - v(x+10)$.
Erläutern Sie die Bedeutung des Terms im Sachzusammenhang.
Begründen Sie, dass $2\sqrt{19}$ der maximale Wert von $h(x)$ ist.

Stochastik
Aufgabengruppe 1

BE

- 1 Der Marketingchef einer Handelskette plant eine Werbeaktion, bei der ein Kunde die Höhe des Rabatts bei seinem Einkauf durch zweimaliges Drehen an einem Glücksrad selbst bestimmen kann. Das Glücksrad hat zwei Sektoren, die mit den Zahlen 5 bzw. 2 beschriftet sind (vgl. Abbildung).



Der Rabatt in Prozent errechnet sich als Produkt der beiden Zahlen, die der Kunde bei zweimaligem Drehen am Glücksrad erzielt.

Die Zufallsgröße X beschreibt die Höhe dieses Rabatts in Prozent, kann also die Werte 4, 10 oder 25 annehmen. Die Zahl 5 wird beim Drehen des Glücksrads mit der Wahrscheinlichkeit p erzielt.

Vereinfachend soll davon ausgegangen werden, dass jeder Kunde genau einen Einkauf tätigt und auch tatsächlich am Glücksrad dreht.

- 3 a) Ermitteln Sie mithilfe eines Baumdiagramms die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Kunde bei seinem Einkauf einen Rabatt von 10% erhält.

(Ergebnis: $2p - 2p^2$)

- 2 b) Zeigen Sie, dass für den Erwartungswert $E(X)$ der Zufallsgröße X gilt:
 $E(X) = 9p^2 + 12p + 4$.

- 3 c) Die Geschäftsführung will im Mittel für einen Einkauf einen Rabatt von 16% gewähren. Berechnen Sie für diese Vorgabe den zugehörigen Mittelpunktswinkel des Sektors mit der Zahl 5.

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Kunde bei seinem Einkauf den niedrigsten Rabatt erhält, beträgt $\frac{1}{9}$.

- 3 d) Bestimmen Sie, wie viele Kunden mindestens an dem Glücksrad drehen müssen, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 99% mindestens einer der Kunden den niedrigsten Rabatt erhält.

- 2 e) Es drehen 180 Kunden am Glücksrad. Berechnen Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit mindestens 10 und höchstens 25 dieser Kunden den niedrigsten Rabatt für ihren Einkauf erhalten.

(Fortsetzung nächste Seite)

2 Eine der Filialen der Handelskette befindet sich in einem Einkaufszentrum, das zu Werbezwecken die Erstellung einer Smartphone-App in Auftrag geben will. Diese App soll die Kunden beim Betreten des Einkaufszentrums über aktuelle Angebote und Rabattaktionen der beteiligten Geschäfte informieren. Da dies mit Kosten verbunden ist, will der Finanzchef der Handelskette einer Beteiligung an der App nur zustimmen, wenn mindestens 15 % der Kunden der Filiale bereit sind, diese App zu nutzen. Der Marketingchef warnt jedoch davor, auf eine Beteiligung an der App zu verzichten, da dies zu einem Imageverlust führen könnte.

Um zu einer Entscheidung zu gelangen, will die Geschäftsführung der Handelskette eine der beiden folgenden Nullhypothesen auf der Basis einer Befragung von 200 Kunden auf einem Signifikanzniveau von 10 % testen:

I „Weniger als 15 % der Kunden sind bereit, die App zu nutzen.“

II „Mindestens 15 % der Kunden sind bereit, die App zu nutzen.“

4 **a)** Nach Abwägung der möglichen Folgen, die der Finanzchef und der Marketingchef aufgezeigt haben, wählt die Geschäftsführung für den Test die Nullhypothese II. Bestimmen Sie die zugehörige Entscheidungsregel.

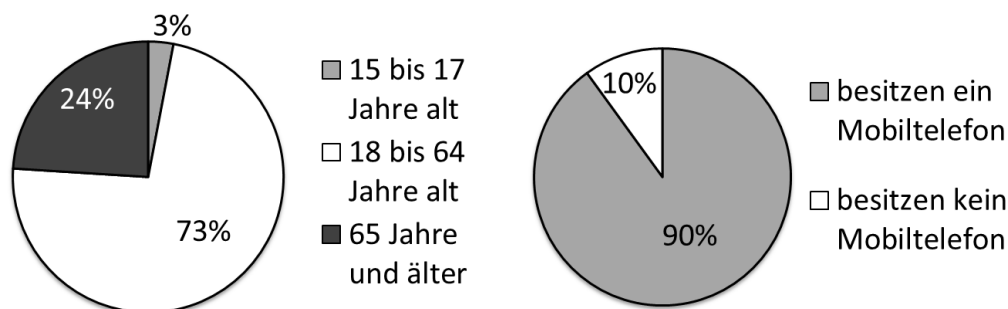
3 **b)** Entscheiden Sie, ob bei der Abwägung, die zur Wahl der Nullhypothese II führte, die Befürchtung eines Imageverlusts oder die Kostenfrage als schwerwiegender erachtet wurde. Erläutern Sie Ihre Entscheidung.

Stochastik

Aufgabengruppe 2

BE

- 1 Die beiden Diagramme zeigen für die Bevölkerungsgruppe der über 14-Jährigen in Deutschland Daten zur Altersstruktur und zum Besitz von Mobiltelefonen.



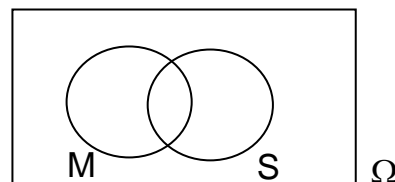
Aus den über 14-Jährigen in Deutschland wird eine Person zufällig ausgewählt. Betrachtet werden folgende Ereignisse:

M: „Die Person besitzt ein Mobiltelefon.“

S: „Die Person ist 65 Jahre oder älter.“

E: „Mindestens eines der Ereignisse M und S tritt ein.“

- 1 a) Schraffieren Sie in nebenstehender Abbildung die Fläche, die dem Ereignis $\bar{M} \cap S$ entspricht.



- 2 b) Geben Sie an, welche zwei der folgenden Mengen I bis VI jeweils das Ereignis E beschreiben.

I $M \cap S$

II $M \cup S$

III $\overline{M \cup S}$

IV $(M \cap \bar{S}) \cup (\bar{M} \cap S) \cup (\bar{M} \cap \bar{S})$

V $(M \cap S) \cup (M \cap \bar{S}) \cup (\bar{M} \cap S)$

VI $\overline{M \cap S}$

(Fortsetzung nächste Seite)

- 3 **c)** Entscheiden Sie anhand geeigneter Terme und auf der Grundlage der vorliegenden Daten, welche der beiden folgenden Wahrscheinlichkeiten größer ist. Begründen Sie Ihre Entscheidung.
- p_1 ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die ausgewählte Person ein Mobiltelefon besitzt, wenn bekannt ist, dass sie 65 Jahre oder älter ist.
- p_2 ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die ausgewählte Person 65 Jahre oder älter ist, wenn bekannt ist, dass sie ein Mobiltelefon besitzt.
- 5 **d)** Erstellen Sie zu dem beschriebenen Sachverhalt für den Fall, dass das Ereignis E mit einer Wahrscheinlichkeit von 98 % eintritt, eine vollständig ausgefüllte Vierfeldertafel. Bestimmen Sie für diesen Fall die Wahrscheinlichkeit $P_S(M)$.
- 2 **2** Zwei Drittel der Senioren in Deutschland besitzen ein Mobiltelefon. Bei einer Talkshow zum Thema „Chancen und Risiken der digitalen Welt“ sitzen 30 Senioren im Publikum.
- 2 **a)** Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass unter 30 zufällig ausgewählten Senioren in Deutschland mindestens 17 und höchstens 23 ein Mobiltelefon besitzen.
- 3 **b)** Von den 30 Senioren im Publikum besitzen 24 ein Mobiltelefon. Im Verlauf der Sendung werden drei der Senioren aus dem Publikum zufällig ausgewählt und nach ihrer Meinung befragt. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass genau zwei dieser drei Senioren ein Mobiltelefon besitzen.
- 4 **3** Eine Handelskette hat noch zahlreiche Smartphones des Modells Y3 auf Lager, als der Hersteller das Nachfolgemodell Y4 auf den Markt bringt. Der Einkaufspreis für das neue Y4 beträgt 300€, während die Handelskette für das Vorgängermodell Y3 im Einkauf nur 250€ bezahlen musste. Um die Lagerbestände noch zu verkaufen, bietet die Handelskette ab dem Verkaufstart des Y4 die Smartphones des Typs Y3 für je 199€ an. Aufgrund früherer Erfahrungen geht die Handelskette davon aus, dass von den verkauften Smartphones der Modelle Y3 und Y4 trotz des Preisnachlasses nur 26% vom Typ Y3 sein werden. Berechnen Sie unter dieser Voraussetzung, zu welchem Preis die Handelskette das Y4 anbieten muss, damit sie voraussichtlich pro verkauftem Smartphone der Modelle Y3 und Y4 im Mittel 97€ mehr erhält, als sie beim Einkauf dafür zahlen musste.

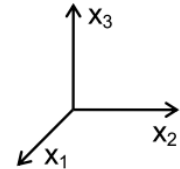
Geometrie

Aufgabengruppe 1

BE

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Ebene $E: x_1 + x_3 = 2$, der Punkt $A(0 | \sqrt{2} | 2)$ und die Gerade $g: \vec{X} = \vec{A} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, gegeben.

- 6 **a)** Beschreiben Sie, welche besondere Lage die Ebene E im Koordinatensystem hat. Weisen Sie nach, dass die Ebene E die Gerade g enthält. Geben Sie die Koordinaten der Schnittpunkte von E mit der x_1 -Achse und mit der x_3 -Achse an und veranschaulichen Sie die Lage der Ebene E sowie den Verlauf der Geraden g in einem kartesischen Koordinatensystem (vgl. Abbildung).



Die x_1x_2 -Ebene beschreibt modellhaft eine horizontale Fläche, auf der eine Achterbahn errichtet wurde. Ein gerader Abschnitt der Bahn beginnt im Modell

im Punkt A und verläuft entlang der Geraden g . Der Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ be-

schreibt die Fahrtrichtung auf diesem Abschnitt.

- 4 **b)** Berechnen Sie im Modell die Größe des Winkels, unter dem dieser Abschnitt der Achterbahn gegenüber der Horizontalen ansteigt, sowie die zugehörige Steigung dieses Abschnitts in Prozent.

An den betrachteten geraden Abschnitt der Achterbahn schließt sich – in Fahrtrichtung gesehen – eine Rechtskurve an, die im Modell durch einen Viertelkreis beschrieben wird, der in der Ebene E verläuft und den Mittelpunkt $M(0 | 3\sqrt{2} | 2)$ hat.

- 4 **c)** Das Lot von M auf g schneidet g im Punkt B . Im Modell stellt B den Punkt der Achterbahn dar, in dem der gerade Abschnitt endet und die Kurve beginnt. Bestimmen Sie die Koordinaten von B und berechnen Sie den Kurvenradius im Modell.

(Teilergebnis: $B(-1 | 2\sqrt{2} | 3)$)

- 2 **d)** Das Ende der Rechtskurve wird im Koordinatensystem durch den Punkt C beschrieben. Begründen Sie, dass für den Ortsvektor des Punkts C gilt:
 $\vec{C} = \vec{M} + \vec{v}$.

(Fortsetzung nächste Seite)

4

- e) Ein Wagen der Achterbahn durchfährt den Abschnitt, der im Modell durch die Strecke $[AB]$ und den Viertelkreis von B nach C dargestellt wird, mit einer durchschnittlichen Geschwindigkeit von $15 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Berechnen Sie die Zeit, die der Wagen dafür benötigt, auf Zehntelsekunden genau, wenn eine Längeneinheit im Koordinatensystem 10 m in der Realität entspricht.

20

Geometrie

Aufgabengruppe 2

BE

Abbildung 1 zeigt eine Sonnenuhr mit einer gegenüber der Horizontalen geneigten, rechteckigen Grundplatte, auf der sich ein kreisförmiges Zifferblatt befindet. Auf der Grundplatte ist der Polstab befestigt, dessen Schatten bei Sonneneinstrahlung die Uhrzeit auf dem Zifferblatt anzeigt.



Abb. 1

Eine Sonnenuhr dieser Bauart wird in einem kartesischen Koordinatensystem modellhaft dargestellt (vgl. Abbildung 2). Dabei beschreibt das Rechteck ABCD mit $A(5|-4|0)$ und $B(5|4|0)$ die Grundplatte der Sonnenuhr. Der Befestigungspunkt des Polstabs auf der Grundplatte wird im Modell durch den Diagonalschnittpunkt $M(2,5|0|2)$ des Rechtecks ABCD dargestellt. Eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht 10 cm in der Realität. Die Horizontale wird im Modell durch die x_1x_2 -Ebene beschrieben.

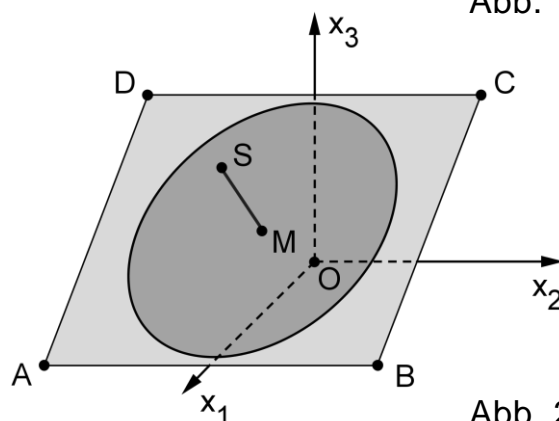


Abb. 2

- 4 **a)** Bestimmen Sie die Koordinaten des Punkts C. Ermitteln Sie eine Gleichung der Ebene E, in der das Rechteck ABCD liegt, in Normalenform.

(mögliches Teilergebnis: $E : 4x_1 + 5x_3 - 20 = 0$)

- 4 **b)** Die Grundplatte ist gegenüber der Horizontalen um den Winkel α geneigt. Damit man mit der Sonnenuhr die Uhrzeit korrekt bestimmen kann, muss für den Breitengrad φ des Aufstellungsorts der Sonnenuhr $\alpha + \varphi = 90^\circ$ gelten. Bestimmen Sie, für welchen Breitengrad φ die Sonnenuhr gebaut wurde.

- 3 **c)** Der Polstab wird im Modell durch die Strecke $[MS]$ mit $S(4,5|0|4,5)$ dargestellt. Zeigen Sie, dass der Polstab senkrecht auf der Grundplatte steht, und berechnen Sie die Länge des Polstabs auf Zentimeter genau.

(Fortsetzung nächste Seite)

Sonnenlicht, das an einem Sommertag zu einem bestimmten Zeitpunkt t_0 auf die Sonnenuhr einfällt, wird im Modell durch parallele Geraden mit dem

Richtungsvektor $\vec{u} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ -13 \end{pmatrix}$ dargestellt.

- 4 **d)** Weisen Sie nach, dass der Schatten der im Modell durch den Punkt S dargestellten Spitze des Polstabs außerhalb der rechteckigen Grundplatte liegt.

Um 6 Uhr verläuft der Schatten des Polstabs im Modell durch den Mittelpunkt der Kante [BC], um 12 Uhr durch den Mittelpunkt der Kante [AB] und um 18 Uhr durch den Mittelpunkt der Kante [AD].

- 2 **e)** Begründen Sie, dass der betrachtete Zeitpunkt t_0 vor 12 Uhr liegt.

- 3 **f)** Im Verlauf des Vormittags überstreicht der Schatten des Polstabs auf der Grundplatte in gleichen Zeiten gleich große Winkel. Bestimmen Sie die Uhrzeit auf Minuten genau, zu der der Schatten des Polstabs im Modell durch den Punkt B verläuft.

