Länderübergreifende gemeinsame Aufgabenteile in den Abiturprüfungen der Länder Bayern, Hamburg, Mecklenburg-Vorpommern, Niedersachsen, Schleswig-Holstein und Sachsen

Musteraufgaben für das Fach Mathematik

Die vorliegenden Musteraufgaben wurden von einer Arbeitsgruppe mit Schulexperten aus jedem der beteiligten Länder erarbeitet.

Inhalt

[1] Die Musteraufgaben zum Sachgebiet Lineare Algebra sind u. a. in Bayern nicht prüfungsrelevant.

1 Vorbemerkungen

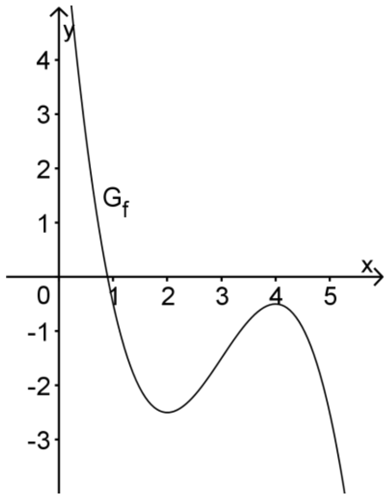
Für das Fach Mathematik werden zwei Aufgabenpools vorgelegt, die sich dadurch unterscheiden, dass Aufgaben aus dem Aufgabenpool 1 unterhalb des Anforderungsbereichs III liegen, während die Aufgaben aus dem Aufgabenpool 2 diesen zumindest in einem Aufgabenteil erreichen. Die Aufgaben der beiden Aufgabenpools sind ohne elektronische Hilfsmittel (z. B. Taschenrechner, Software) sowie ohne Tabellen- oder Formelsammlung zu bearbeiten. Pro Aufgabe können fünf Bewertungseinheiten (BE) erreicht werden. Die Länder wählen für die Prüfungsteilnehmer, welche auf erhöhtem Anforderungsniveau geprüft werden, als gemeinsame Prüfungselemente drei Aufgaben aus dem Aufgabenpool 1 sowie eine Aufgabe aus dem Aufgabenpool 2 aus. Diese vier Aufgaben umfassen Lerninhalte aus jedem der Sachgebiete Analysis, Lineare Algebra/Analytische Geometrie und Stochastik und berücksichtigen die in den EPA Mathematik ermöglichten Alternativen vektorielle analytische Geometrie und Anwendung von Matrizen bei mehrstufigen Prozessen.

Um die Schülerinnen und Schüler sowie die Lehrkräfte mit den Anforderungen der gemeinsamen Prüfungselemente in der zentralen schriftlichen Abiturprüfung ab 2014 vertraut zu machen, wird in den beteiligten Ländern einmalig im Schuljahr 2013/14 ein schriftlicher Leistungsnachweis eingesetzt. Dafür werden in analoger Weise zur zentralen schriftlichen Abiturprüfung Aufgabenpools bereitgestellt. Die Durchführung des schriftlichen Leistungsnachweises und die Auswahl der Aufgaben aus den Aufgabenpools werden in den Ländern geregelt.

Die vorliegenden Musteraufgaben sollen den Lehrkräften sowie den Schülerinnen und Schülern eine Orientierung hinsichtlich der gemeinsamen Prüfungselemente und der gemeinsamen Aufgaben für den schriftlichen Leistungsnachweis geben.

2 Musteraufgaben

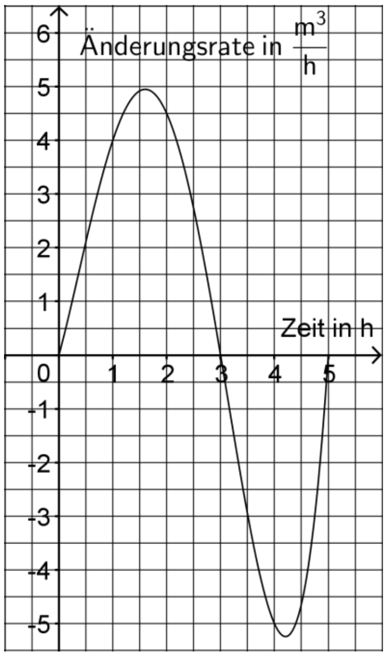
2.1 Analysis

BE	**Musteraufgaben zum Aufgabenpool 1**
	1 Die Abbildung zeigt den Graphen der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion f mit $f(x) = -0{,}5x^3 + 4{,}5x^2 - 12x + 7{,}5$.
	
2	**a)** Begründen Sie ohne Rechnung, dass die Gleichung $0 = -0{,}5 \cdot x^3 + 4{,}5 \cdot x^2 - 12 \cdot x + 7{,}5$ nur genau eine Lösung hat.
3	**b)** Berechnen Sie die Koordinaten des Wendepunkts des Graphen von f.
5	**2** Das Rechteck ABCD mit $A(1\|0)$, $B(4\|0)$, $C(4\|2)$ und $D(1\|2)$ wird durch den Graphen der in $\mathbb{R}_0^+$ definierten Funktion f mit $f(x) = \sqrt{x}$ in zwei Teilflächen zerlegt. Ermitteln Sie das Verhältnis der Inhalte der beiden Teilflächen.

BE

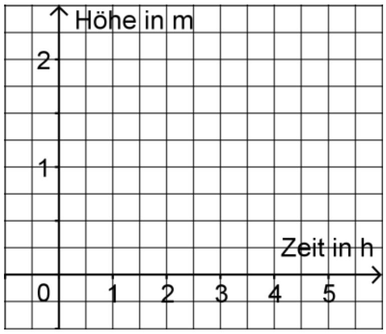
Musteraufgaben zum Aufgabenpool 2

1 Ein quaderförmiges Speicherbecken für eine Flüssigkeit hat eine Grundfläche von $5\,m^2$ und ist zunächst leer. Der nebenstehende Graph gibt die Zufluss- bzw. Abflussrate (in $\frac{m^3}{h}$) der Flüssigkeit über einen Zeitraum von fünf Stunden wieder.



2 **a)** Bestimmen Sie näherungsweise das Volumen der in den ersten drei Stunden zufließenden Flüssigkeit.

3 **b)** Skizzieren Sie in das nebenstehende Koordinatensystem einen möglichen Graphen, der die Höhe (in m) des Flüssigkeitsstands im Speicherbecken in Abhängigkeit von der Zeit (in h) beschreibt.



5 **2** Für jeden Wert für a ($a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$) ist eine Funktion f_a gegeben durch $f_a(x) = e^{a \cdot x^2}$ ($x \in \mathbb{R}$). Zeigen Sie, dass die Tangente t_a an den Graphen der Funktion f_a im Punkt $P_a(1 | f_a(1))$ durch die Gleichung $t_a(x) = 2a \cdot e^a \cdot x + e^a \cdot (1 - 2a)$ beschrieben werden kann.

2.2 Stochastik

BE

Musteraufgaben zum Aufgabenpool 1

1 Die Zufallsvariable X ist binomialverteilt mit $n=10$ und $p=0{,}6$.

3 **a)** Geben Sie an, welche der Abbildungen die Verteilung von X darstellt. Begründen Sie Ihre Auswahl.

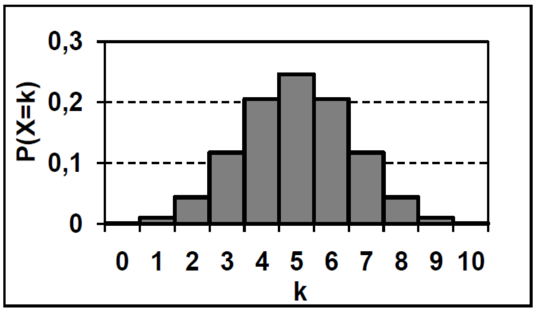


Abbildung 1

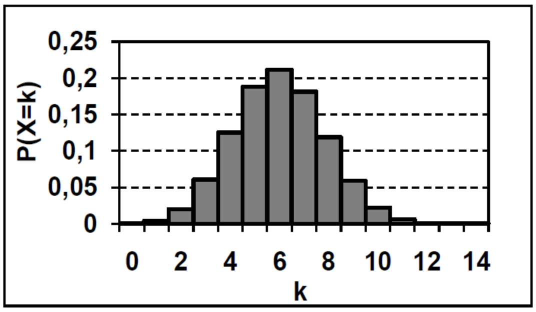


Abbildung 2

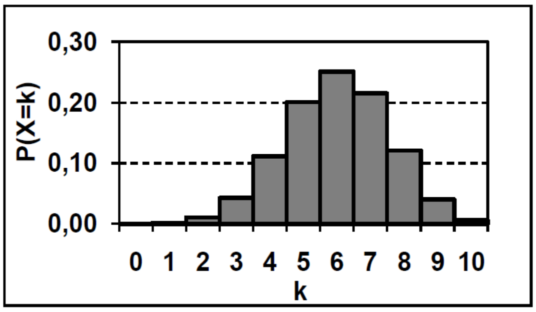


Abbildung 3

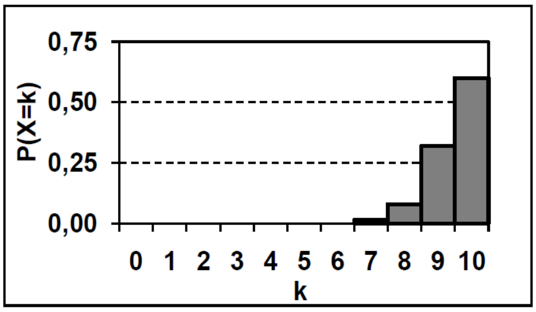


Abbildung 4

2 **b)** Geben Sie mithilfe der von Ihnen ausgewählten Abbildung näherungsweise die Wahrscheinlichkeit $P(4<X<7)$ und die Wahrscheinlichkeit $P(X\neq 5)$ an.

2 In den Urnen U_1 und U_2 befinden sich Kugeln, die sich nur in ihrer Farbe unterscheiden:

U_1: sechs rote und vier blaue Kugeln

U_2: eine rote und vier blaue Kugeln

2 **a)** Aus der Urne U_1 werden zwei Kugeln nacheinander ohne Zurücklegen zufällig gezogen. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die beiden gezogenen Kugeln die gleiche Farbe haben.

3 **b)** Es wird eine der beiden Urnen zufällig ausgewählt. Aus dieser wird eine Kugel zufällig gezogen. Die gezogene Kugel ist rot.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass diese Kugel aus der Urne U_1 stammt.

BE	**Musteraufgaben zum Aufgabenpool 2**
	1 Verteilungen von Zufallsgrößen werden durch Parameter charakterisiert.
2	**a)** In den Klassen 10a und 10b, die jeweils aus 25 Schülern bestehen, wurden die Leistungen jedes Schülers im Weitsprung ermittelt. Die Zufallsgrößen A und B ordnen jeweils einem zufällig ausgewählten Schüler der Klasse 10a bzw. 10b seine Sprungweite in Metern zu. Für die Erwartungswerte der beiden Zufallsgrößen gilt $E(A)=E(B)$, für die Standardabweichungen $\sigma(A)<\sigma(B)$. Erklären Sie anschaulich, was diese beiden Beziehungen für die Verteilungen der Sprungweiten bedeuten.
3	**b)** Eine Zufallsgröße X kann fünf unterschiedliche Werte annehmen. Geben Sie eine Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße X so an, dass der Erwartungswert zwischen dem kleinsten und dem zweitkleinsten Wert dieser Zufallsgröße liegt.
	2 Eine verbeulte Münze wird mehrfach geworfen. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei einem Wurf „Wappen" fällt, beträgt p.
3	**a)** Geben Sie jeweils einen Term zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse A und B an: A: Bei fünf Würfen fällt genau dreimal „Wappen". B: Bei fünf Würfen fällt genau dreimal „Wappen", darunter bei den ersten beiden Würfen zweimal.
2	**b)** Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei drei Würfen dreimal „Wappen" fällt, ist 0,216. Untersuchen Sie, ob das Ergebnis „Wappen" wahrscheinlicher ist als das Ergebnis „Zahl".

2.3 Analytische Geometrie/Lineare Algebra

2.3.1 Analytische Geometrie

BE	**Musteraufgaben zum Aufgabenpool 1**
	1 Gegeben sind die Ebene $E\colon\ 2\cdot x_1 + x_2 - x_3 - 4 = 0$ sowie der Punkt $P(-3\,\|\,0\,\|\,2)$.
1	**a)** Zeigen Sie, dass der Punkt P nicht in der Ebene E liegt.
4	**b)** Spiegelt man den Punkt P an der Ebene E, so erhält man den Punkt P´. Ermitteln Sie die Koordinaten von P´.
	2 Gegeben ist das Viereck ABCD mit den Eckpunkten $A(0\,\|\,0\,\|\,0)$, $B(-3\,\|\,1\,\|\,4)$, $C(2\,\|\,-4\,\|\,4)$ und $D(5\,\|\,-5\,\|\,0)$.
3	**a)** Weisen Sie nach, dass das Viereck ABCD ein Parallelogramm, aber kein Rechteck ist.
2	**b)** Geben Sie die Koordinaten des Mittelpunkts und den Radius eines Kreises mit dem Durchmesser $[AC]$ an.

BE	**Musteraufgaben zum Aufgabenpool 2**
5	**1** Im Raum sind eine Gerade g und ein Punkt A, der nicht auf der Geraden g liegt, gegeben. Beschreiben Sie einen Weg zur Ermittlung der Koordinaten zweier Punkte B und C der Geraden g, die zusammen mit A ein rechtwinkliges, gleichschenkliges Dreieck bilden.
	2 Gegeben sind die Ebenen E_1 und E_2 mit $E_1: 6x_1 - x_2 - 4x_3 = 12$ und $E_2: -3x_1 + 5x_2 + 2x_3 = -6$. Die Punkte $A(2\,\|\,0\,\|\,0)$ und $B(0\,\|\,0\,\|\,-3)$ liegen in beiden Ebenen.
1	**a)** Begründen Sie, dass die Ebenen E_1 und E_2 nicht identisch sind.
2	**b)** Ermitteln Sie die Koordinaten eines von A und B verschiedenen Punkts, der ebenfalls in beiden Ebenen liegt.
2	**c)** In der Gleichung von E_2 soll genau ein Koeffizient so geändert werden, dass eine Gleichung der Ebene E_1 entsteht. Geben Sie diese Änderung an und begründen Sie Ihre Antwort.

2.3.2 Lineare Algebra

Die Musteraufgaben zum Sachgebiet Lineare Algebra sind u. a. in Bayern nicht prüfungsrelevant.

BE	**Musteraufgaben zum Aufgabenpool 1**
	1 Gegeben sind die Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{10} & 0 & 0 \end{pmatrix}$ und der Vektor $\overrightarrow{v_0} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.
2	**a)** Es gelte $\overrightarrow{v_{i+1}} = A \cdot \overrightarrow{v_i}$ mit $i \in \mathbb{N}$. Berechnen Sie $\overrightarrow{v_2}$.
3	**b)** Bestimmen Sie den Vektor $\vec{w} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ mit den kleinstmöglichen Werten $x, y, z \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ so, dass $A \cdot \vec{w} = \vec{w}$ gilt.
	2 Betrachtet werden die Matrizen A und B mit $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$ sowie eine Matrix C.
2	**a)** Zeigen Sie, dass B die zu A inverse Matrix ist.
3	**b)** Für die Matrix C gilt: $C \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $C \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Begründen Sie, dass gilt: $C \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix}$.

BE

Musteraufgaben zum Aufgabenpool 2

1 Es gibt 2x2-Matrizen, die besondere Eigenschaften bezüglich ihrer Quadrate besitzen.

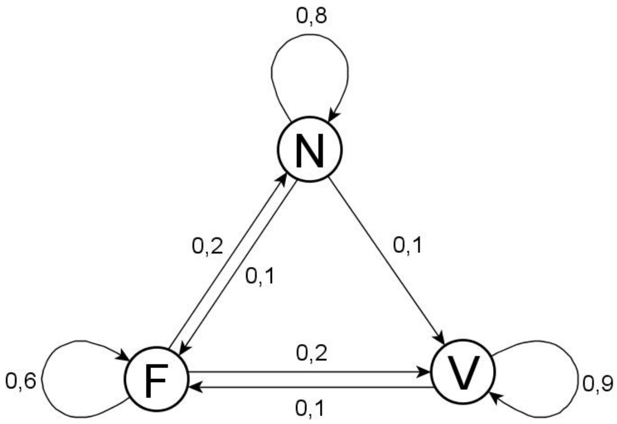
2 **a)** Für jeden Wert für t ($t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$) ist eine Matrix M_t durch $M_t = \begin{pmatrix} 0 & t \\ t^{-1} & 0 \end{pmatrix}$ gegeben.

Ermitteln Sie, welche besondere Eigenschaft die Matrizen M_t bezüglich ihrer Quadrate M_t^2 haben.

3 **b)** Für eine Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ mit $(a, b, c, d \in \mathbb{R})$ und $b \cdot c \neq 0$ gilt $A^2 = b \cdot c \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Untersuchen Sie, welche Werte für die Elemente der Matrix A in Frage kommen.

2 Die Nutzer einer Kantine werden hinsichtlich der Auswahl eines Menüs in drei Gruppen eingeteilt: Esser des Nudelgerichts (N), Esser des Fleischgerichts (F) und Esser des vegetarischen Gerichts (V). Der nebenstehende Graph gibt die Übergänge zwischen den Gruppen von Tag zu Tag an. Es soll davon ausgegangen werden, dass die Gesamtanzahl der Nutzer dieser Kantine konstant bleibt.



2 **a)** Geben Sie die in der zugehörigen Übergangsmatrix M fehlenden Werte an.

$$M = \begin{pmatrix} \square & 0{,}1 & \square \\ 0{,}2 & 0{,}9 & 0{,}1 \\ \square & 0 & \square \end{pmatrix}$$

3 **b)** Geben Sie den Wert a_{22} der Matrix $M^2 = A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ an.

Interpretieren Sie die Bedeutung des Werts a_{22} im Sachzusammenhang.

3 Lösungshinweise

3.1 Analysis

Musteraufgaben zum Aufgabenpool 1

Aufgabe	BE	Lösungshinweise
1 a	2	z. B.: Die Lösungen der gegebenen Gleichung sind die Nullstellen von f. Als ganzrationale Funktion dritten Grades hat f mindestens eine Nullstelle sowie höchstens zwei Extremstellen. Da der Hochpunkt des Graphen von f unterhalb der x-Achse liegt, kann f nicht mehr als eine Nullstelle besitzen.
b	3	$x = 3$, $y = -1{,}5$
2	5	Verhältnis der Inhalte der beiden Teilflächen: 7:2

Musteraufgaben zum Aufgabenpool 2

Aufgabe	BE	Lösungshinweise
1 a	2	Näherungswert für das Volumen: $9{,}3\,\mathrm{m}^3$ Hinweis: Näherungswerte zwischen $8\,\mathrm{m}^3$ und $10\,\mathrm{m}^3$ werden akzeptiert.
b	3	—
2	5	—

3.2 Stochastik

Musteraufgaben zum Aufgabenpool 1

Aufgabe	BE	Lösungshinweise
1 a	3	Abbildung 3 zeigt die Verteilung von X (Begründung z. B. unter Verwendung des Erwartungswerts von X).
b	2	$P(4<X<7)\approx 0{,}45$ $P(X\neq 5)\approx 0{,}8$
2 a	2	$\frac{7}{15}$
b	3	$\frac{3}{4}$

Musteraufgaben zum Aufgabenpool 2

Aufgabe	BE	Lösungshinweise
1 a	2	Der Durchschnitt der Sprungweiten der Schüler der Klasse 10a stimmt mit dem der Schüler der Klasse 10b überein. Die Sprungweiten der Schüler der Klasse 10a streuen weniger als die der Schüler der Klasse 10b.
b	3	—
2 a	3	$P(A)=\binom{5}{3}\cdot p^3\cdot(1-p)^2$ $P(B)=p^2\cdot\binom{3}{1}\cdot p\cdot(1-p)^2$
b	2	z. B.: Das Ergebnis „Wappen“ ist wahrscheinlicher als das Ergebnis „Zahl“, da $0{,}216>0{,}5^3$.

3.3 Analytische Geometrie/Lineare Algebra

3.3.1 Analytische Geometrie

Musteraufgaben zum Aufgabenpool 1

Aufgabe	BE	Lösungshinweise
1 a	1	—
b	4	$P'(5 \mid 4 \mid -2)$
2 a	3	—
b	2	Koordinaten des Mittelpunkts: $(1 \mid -2 \mid 2)$ Radius: 3

Musteraufgaben zum Aufgabenpool 2

Aufgabe	BE	Lösungshinweise
1	5	z. B.: Man wählt den Punkt B als Fußpunkt des Lots durch A auf g. Anschließend berechnet man den Abstand d der Punkte A und B. Ist $\vec{u}^{\,0}$ ein Richtungsvektor von g der Länge 1, so ergeben sich die Koordinaten eines geeigneten Punkts C aus $\vec{C} = \vec{B} + d \cdot \vec{u}^{\,0}$.
2 a	1	—
b	2	—
c	2	Der Koeffizient 5 ist in 0,5 zu ändern. Begründung durch Vergleich der geänderten Koordinatengleichung für E_2 mit der Koordinatengleichung für E_1

3.3.2 Lineare Algebra

Musteraufgaben zum Aufgabenpool 1

Aufgabe	BE	Lösungshinweise
1 a	2	$\overrightarrow{v_2} = \begin{pmatrix} 30 \\ \frac{1}{20} \\ 4 \end{pmatrix}$
b	3	$\overrightarrow{w} = \begin{pmatrix} 20 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$
2 a	2	—
b	3	—

Musteraufgaben zum Aufgabenpool 2

Aufgabe	BE	Lösungshinweise
1 a	2	$M_t^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, d. h. die Quadrate der Matrizen M_t sind unabhängig von t gleich der Einheitsmatrix.
b	3	Die Elemente a und d sind gleich 0, die Elemente b und c sind ungleich 0.
2 a	2	$M = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,1 & 0,1 \\ 0,2 & 0,9 & 0,1 \\ 0,2 & 0 & 0,8 \end{pmatrix}$
b	3	$a_{22} = 0,83$ An einem beliebigen Tag isst eine bestimmte Anzahl von Kantinennutzern das vegetarische Gericht. Der Wert a_{22} ist der Anteil derjenigen unter diesen Kantinennutzern, die auch zwei Tage später das vegetarische Gericht auswählen.