



Mathematikunterricht am Gymnasium

Förderung mathematischer Kompetenzen

Anregungen und Materialien

Für nachhaltig gewinnbringendes Lernen ist es von großer Bedeutung, die allgemeinen mathematischen Kompetenzen der Bildungsstandards bewusst und ausgewogen zu fördern. Mit den vorliegenden Anregungen und Materialien sollen Lehrkräfte bei der Gestaltung ihres Mathematikunterrichts unterstützt werden.

Inhalt

1	Einleitung	2
2	Bildungsstandards für das Fach Mathematik	2
2.1	Struktur	2
2.2	Erläuterung der allgemeinen mathematischen Kompetenzen	4
3	Voraussetzungen für die Entwicklung mathematischer Kompetenzen im Unterricht	7
4	Klassierung von Aufgaben hinsichtlich der allgemeinen mathematischen Kompetenzen	8
4.1	Bayerischer Mathematik-Test (BMT)	9
4.2	Abiturprüfung	9
5	Ausgewählte Aufgaben zur Förderung mathematischer Kompetenzen	9
5.1	Aufgaben aus den zugelassenen Lehrbüchern	10
5.2	Aufgaben zur Förderung grundlegender Kenntnisse, Fähigkeiten und Fertigkeiten	10
6	Anregungen zur Erstellung von Aufgaben	11
6.1	Aufgaben für den Unterricht	12
6.2	Aufgaben für Leistungsnachweise	12
7	Anregungen zur Gestaltung schülerzentrierter, materialgestützter Unterrichtsphasen	13
	Literatur	15

1 Einleitung

Jeweils mit Beschluss der Kultusministerkonferenz wurden im Jahr 2003 für den Mittleren Schulabschluss und im Jahr 2012 für die Allgemeine Hochschulreife bundesweit einheitliche Vorgaben für das erwartete Wissen und Können der Schülerinnen und Schüler im Fach Mathematik in Form von Bildungsstandards verabschiedet. Diese finden sowohl im Lehrplan für das Fach Mathematik am Gymnasium als auch in den zentralen Prüfungen, insbesondere in der Abiturprüfung und im Bayerischen Mathematik-Test, Berücksichtigung.

Die Bildungsstandards sind in Form von Kompetenzen formuliert, die Wissen und Können miteinander verbinden, d. h. in Form konkreter Angaben dazu, welche überprüfbaren Kenntnisse, Fähigkeiten und Fertigkeiten die Schülerinnen und Schüler bis zum jeweiligen Schulabschluss erworben haben sollen. Folglich muss die Arbeit mit den Schülerinnen und Schülern auf die Förderung dieser Kompetenzen abzielen.

Die Schulung von Kompetenzen ist im Mathematikunterricht nichts Neues. Allerdings lag der Schwerpunkt dabei in der Vergangenheit vor allem auf der Anwendung formaler Rechenverfahren. Die nach TIMSS und PISA eingeleitete Entwicklung zu einer größeren Vielfalt in der Aufgabenkultur wird durch die Bildungsstandards präzisiert: Neben dem formalen Rechnen werden fünf weitere allgemeine mathematische Kompetenzen (z. B. Argumentieren, Modellieren und Kommunizieren) gleichberechtigt ausgewiesen.

Dies fordert dazu auf, schon bei der Unterrichtsplanung auf eine ausgewogene Förderung der unterschiedlichen allgemeinen mathematischen Kompetenzen zu achten, um den Schülerinnen und Schülern einen nachhaltigen Erwerb dieser Kompetenzen zu ermöglichen.

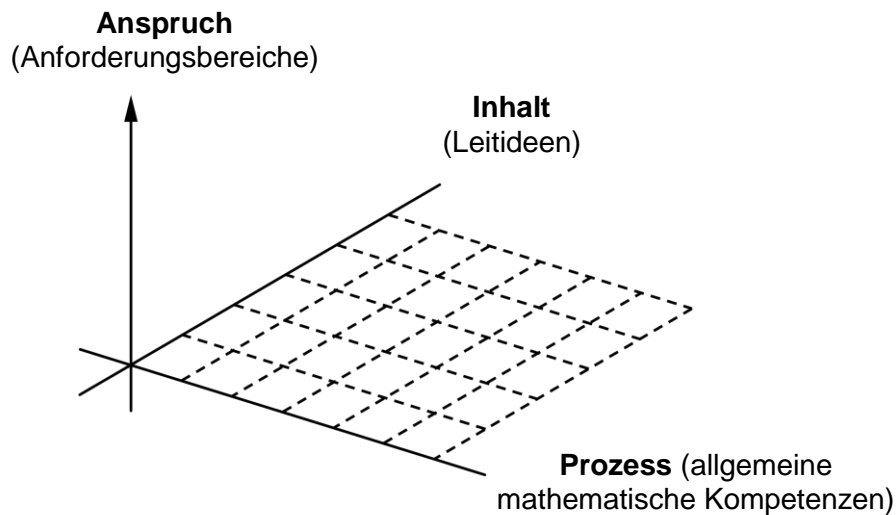
2 Bildungsstandards für das Fach Mathematik

Die Bildungsstandards für das Fach Mathematik konzentrieren sich auf den Kernbereich des Fachs und beschreiben ausschließlich überprüfbare fachliche Kompetenzen, die bis zum jeweiligen Schulabschluss zur Verfügung stehen müssen. Der Lehrplan strukturiert den Weg zur Entwicklung dieser Kompetenzen und beschreibt den Bildungsauftrag des Fachs Mathematik umfassend.

2.1 Struktur

Die Bildungsstandards für das Fach Mathematik beinhalten sowohl zentrale Aspekte mathematischen Arbeitens, die als Prozesse (allgemeine mathematische Kompetenzen) beschrieben werden, als auch konkrete mathematische Inhalte, die nach Leitideen geordnet sind.¹ Diese beiden Dimensionen werden um Angaben zum kognitiven Anspruch (Anforderungsbereiche) ergänzt, der an die Schülerinnen und Schüler zu stellen ist.

¹ In den unterschiedlichen Bildungsstandards für das Fach Mathematik (Primarbereich, Hauptschulabschluss, Mittlerer Schulabschluss, Allgemeine Hochschulreife) werden sowohl die allgemeinen mathematischen Kompetenzen als auch die Leitideen nicht einheitlich bezeichnet. In Bayern werden für alle weiterführenden Schularten die im Folgenden genannten Bezeichnungen verwendet.



Die zentralen Aspekte mathematischen Arbeitens werden in Form folgender allgemeiner mathematischer Kompetenzen erfasst:

- (K 1) Argumentieren
- (K 2) Probleme lösen
- (K 3) Modellieren
- (K 4) Darstellungen verwenden
- (K 5) Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen
- (K 6) Kommunizieren

Zum Lösen mathematischer Aufgaben werden diese Kompetenzen in unterschiedlicher Ausprägung benötigt. Dabei unterscheiden die Bildungsstandards drei Anforderungsbereiche: „Reproduzieren“, „Zusammenhänge herstellen“ sowie „Verallgemeinern und Reflektieren“. Anspruch und kognitive Komplexität nehmen von Anforderungsbereich zu Anforderungsbereich zu.

Die allgemeinen mathematischen Kompetenzen werden von Schülerinnen und Schülern in aktiver Auseinandersetzung mit mathematischen Inhalten erworben und angewandt. Entsprechend lassen sich die allgemeinen mathematischen Kompetenzen vielfältig inhaltsbezogen konkretisieren. Die von den Bildungsstandards geforderten Inhalte sind nach folgenden grundlegenden mathematischen Leitideen geordnet:

- (L 1) Zahlen und Operationen
- (L 2) Größen und Messen
- (L 3) Raum und Form
- (L 4) Funktionaler Zusammenhang
- (L 5) Daten und Zufall

Jede Leitidee durchzieht den Lehrplan für das Fach Mathematik spiralförmig. Ziel dieses Ansatzes ist kumulatives Lernen – Verständnis für grundlegende mathematische Begriffe und Konzepte sowie themengebieteübergreifendes, vernetzendes Denken sollen nachhaltig gefördert werden.

2.2 Erläuterung der allgemeinen mathematischen Kompetenzen

Im Folgenden werden die allgemeinen mathematischen Kompetenzen erläutert und anhand von Aufgabenbeispielen illustriert.² Die Aufgaben beziehen sich im Wesentlichen auf die gleiche Sachsituation, durch Variation der Aufgabenstellung wird jedoch hinsichtlich der Bearbeitung jeweils eine der allgemeinen mathematischen Kompetenzen in den Vordergrund gerückt.

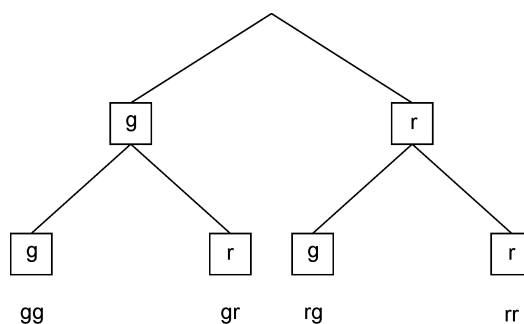
(K 1) Argumentieren

Die Kompetenz „Argumentieren“ ist sowohl für das Entwickeln von Argumentationen erforderlich als auch für das Verstehen, Erläutern und Bewerten vorgegebener Argumentationen. Die Schülerinnen und Schüler müssen dazu mit verschiedenen Begründungsmustern vertraut sein.

Die Anforderungen erstrecken sich von einfachen Plausibilitätsbetrachtungen über inhaltlichanschauliche Begründungen bis zu formalen Beweisen oder Reflexionen über vorgegebene Argumentationen. Dabei wird ein hoher Anforderungsbereich nicht unbedingt durch den Grad der Formalisierung der Argumentation bestimmt.

Beispiel

Eine Kiste enthält gut gemischt fünfzehn gelbe und zehn rote Bausteine. Zweimal nacheinander wird jeweils ein Baustein zufällig entnommen und wieder zurückgelegt. Simon soll die Wahrscheinlichkeit dafür bestimmen, dass die beiden entnommenen Bausteine unterschiedliche Farben haben. Er zeichnet das abgebildete Baumdiagramm und folgert: „Das Zufallsexperiment hat vier mögliche Ergebnisse, zwei davon erfüllen die gewünschte Bedingung. Also gilt:



$$P(\{gr; rg\}) = \frac{2}{4} = 50\%.$$

Begründe, dass Simons Überlegung falsch ist.

Kommentar: Die Begründung erfordert die Kompetenz „Argumentieren“. Um die Argumentation in geeigneter Form zu formulieren, wird die Kompetenz „Kommunizieren“ benötigt; diese steht jedoch nicht im Vordergrund.

(K 2) Probleme lösen

Die Kompetenz „Probleme lösen“ wird immer dann benötigt, wenn bei einer Aufgabe die Lösungsstruktur nicht offensichtlich ist oder mehrere aufeinander aufbauende Lösungsschritte notwendig sind, die Bearbeitung der Aufgabe also ein strategisches Vorgehen erfordert. Die Schülerinnen und Schüler müssen folglich über Strategien zum Entwickeln von Lösungsideen sowie zum Ausführen geeigneter Lösungswege verfügen (z. B. Verwenden einer Skizze, Figur, Tabelle; Einzeichnen von Hilfslinien; systematisches Probieren; Vorwärts- oder Rückwärtsarbeiten; Zerlegen oder Ergänzen; Nutzen von Symmetrien oder Analogien).

² Literaturempfehlung: W. Blum u. a. (Hrsg.), Bildungsstandards Mathematik: konkret, Sekundarstufe I: Aufgabenbeispiele, Unterrichts Anregungen, Fortbildungsideen, Berlin 2006

Zu beachten ist, dass eine Aufgabe, bei deren Bearbeitung die Kompetenz „Probleme lösen“ im Vordergrund steht, nicht unbedingt einem hohen Anforderungsbereich zuzuordnen ist.

Beispiel

Eine Kiste enthält gut gemischt fünfzehn gelbe und zehn rote Bausteine. Zweimal nacheinander wird jeweils ein Baustein zufällig entnommen. Berechne auf der Grundlage zweier unterschiedlicher Annahmen jeweils die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens einer der entnommenen Bausteine rot ist.

Kommentar: Unter der Voraussetzung, dass den Schülerinnen und Schülern die notwendige Strategie für wenigstens eine der beiden Lösungen noch nicht bekannt ist, steht im Rahmen der Bearbeitung dieser Aufgabe die Kompetenz „Probleme lösen“ im Vordergrund. Da eine Sachsituation in ein mathematisches Modell übertragen werden muss, ist auch die Kompetenz „Modellieren“ gefragt; diese spielt jedoch eine weniger bedeutende Rolle.

(K 3) Modellieren

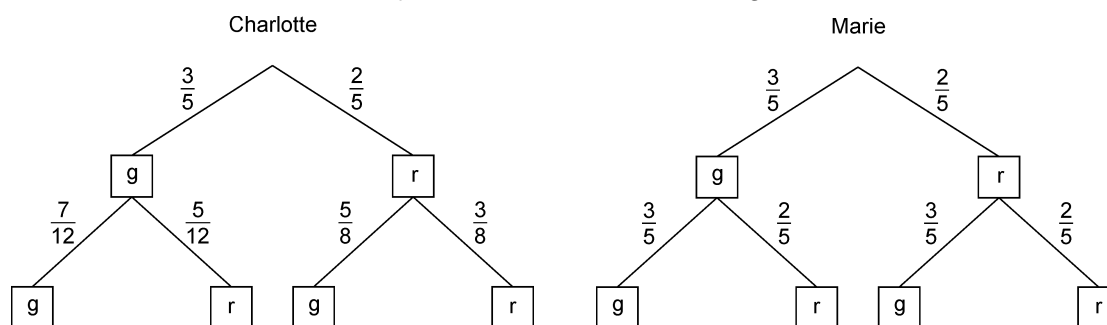
Die Kompetenz „Modellieren“ ist erforderlich, um einen realitätsbezogenen Sachverhalt zu verstehen, diesen zu strukturieren und schließlich die zugehörige Aufgabenstellung zu lösen. Insbesondere müssen dazu die Möglichkeiten der Mathematik hinsichtlich der Beschreibung der Realität erkannt und beurteilt werden. Eine Modellierung besteht aus folgenden Teilschritten: Verstehen des Sachverhalts – Strukturieren und Vereinfachen des Sachverhalts – Übertragen des Sachverhalts in ein mathematisches Modell – Lösen der Aufgabe im mathematischen Modell – Interpretation und Reflexion des Ergebnisses im Sachzusammenhang (ggf. auch Diskussion von Grenzen des Modells). Insbesondere der Teilschritt „Lösen der Aufgabe im mathematischen Modell“ setzt in der Regel weitere allgemeine mathematische Kompetenzen voraus.

Die Anforderungen erstrecken sich vom Anwenden der Standardmodelle (z. B. Dreisatz) oder dem Ausführen einzelner Teilschritte einer Modellierung bis hin zur komplexen Modellbildung oder dem Vergleichen und Bewerten von Modellen.

Hier wurde die Festlegung der Bildungsstandards für das Fach Mathematik zugrunde gelegt, von Modellieren ausschließlich im Zusammenhang mit realitätsbezogenen Anwendungen zu sprechen. Ein innermathematisches Modellieren wird also nicht der Kompetenz „Modellieren“ zugeordnet.

Beispiel

Eine Kiste enthält gut gemischt fünfzehn gelbe und zehn rote Bausteine. Zweimal nacheinander wird jeweils ein Baustein zufällig entnommen. Charlotte und Marie stellen aufgrund dieser Informationen die Situation jeweils mit einem Baumdiagramm dar.



Erläutere, von welcher Voraussetzung Charlotte und Marie jeweils ausgegangen sind.

Kommentar: Den vorgegebenen mathematischen Modellen muss jeweils eine geeignete Sachsituation zugeordnet werden. Dazu bedarf es der Kompetenz „Modellieren“. Die Interpretation der Diagramme erfordert zudem die Kompetenz „Darstellungen verwenden“; diese steht jedoch nicht im Vordergrund.

(K 4) Darstellungen verwenden

Die Kompetenz „Darstellungen verwenden“ wird benötigt, um Darstellungen zu erstellen oder zu verändern, zwischen verschiedenen Darstellungsformen zu wechseln und mit vorgegebenen Darstellungen verständlich umzugehen (insbesondere vorgegebenen Darstellungen Informationen zu entnehmen, diese zu interpretieren oder zu bewerten). Unter Darstellungen werden unter anderem Skizzen, Zeichnungen, Abbildungen, Fotos, Tabellen, Diagramme und Graphen, aber auch Formeln und sprachliche Darstellungen verstanden.

Diese Kompetenz wird zur Bearbeitung einer Aufgabe nur dann benötigt, wenn eine aktive Auseinandersetzung mit einer Darstellung erforderlich ist; eine illustrierende Abbildung allein macht diese Kompetenz nicht notwendig.

Beispiel

Eine Kiste enthält gut gemischt fünfzehn gelbe und zehn rote Bausteine. Zweimal nacheinander wird jeweils ein Baustein zufällig entnommen und nicht wieder zurückgelegt. Jakob berechnet die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die beiden entnommenen Bausteine unterschiedliche Farben haben:

$$\frac{3}{5} \cdot \frac{5}{12} + \frac{2}{5} \cdot \frac{5}{8} = 2 \cdot \frac{1}{4} = 50\% .$$

Zeichne das zugehörige Baumdiagramm und trage alle in der Rechnung vorkommenden Brüche an der jeweils passenden Stelle ein.

Kommentar: Der notwendige Wechsel der Darstellungsform setzt die Kompetenz „Darstellungen verwenden“ voraus. Die Kompetenz „Modellieren“ spielt eine weniger bedeutende Rolle, da die Modellierung im Wesentlichen vorgegeben ist.

(K 5) Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen

Die Kompetenz „Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen“ umfasst folgende mathematische Fähigkeiten und Fertigkeiten: Anwenden von Definitionen, Regeln, Algorithmen und Formeln; formales Arbeiten mit Zahlen, Größen, Variablen, Termen, Gleichungen, Funktionen und Vektoren; Ausführen von Lösungs- und Kontrollverfahren; Anwenden geometrischer Grundkonstruktionen; Verwenden von Hilfsmitteln. Außerdem werden dieser Kompetenz alle mathematischen Kenntnisse (Fakten, Regeln) zugeordnet.

Diese Kompetenz unterstützt insbesondere die Kompetenzen „Argumentieren“, „Probleme lösen“ und „Modellieren“ wesentlich.

Beispiel

Eine Kiste enthält gut gemischt 25 Bausteine, von denen k ($1 \leq k \leq 24$) gelb und die übrigen rot sind. Zweimal nacheinander wird jeweils ein Baustein zufällig entnommen und nicht wieder zurückgelegt. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die beiden entnommenen Bausteine unterschiedliche Farben haben, wird durch den Term

$$p(k) = 2 \cdot \frac{k}{25} \cdot \frac{25-k}{24}$$

angegeben. Bestimme k durch Rechnung so, dass $p(k) = \frac{1}{3}$ gilt.

Kommentar: Bei dieser Aufgabe ist ausschließlich eine Gleichung zu lösen. Dazu bedarf es der Kompetenz „Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen“.

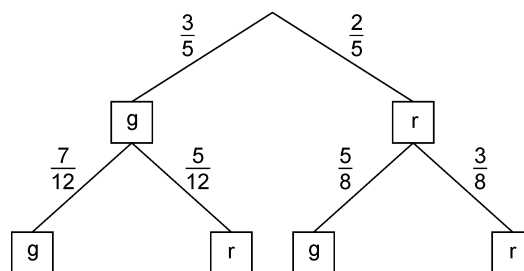
(K 6) Kommunizieren

Für die Bearbeitung nahezu jeder Aufgabe ist ein „Kommunizieren“ erforderlich. Diese Kompetenz besitzt sowohl eine passive als auch eine aktive Komponente. Einerseits müssen schriftliche Texte oder mündliche Aussagen verstanden, andererseits Überlegungen oder Ergebnisse schriftlich oder mündlich unter Verwendung der Fachsprache in angemessener Form dargestellt und präsentiert werden können.

Die Abgrenzung der allgemeinen mathematischen Kompetenzen „Argumentieren“ und „Kommunizieren“ ist nicht immer einfach. Im Allgemeinen steht jedoch im Rahmen einer Begründung die Kompetenz „Argumentieren“ im Vordergrund, während eine Beschreibung in erster Linie die Kompetenz „Kommunizieren“ voraussetzt.

Beispiel

Eine Kiste enthält gut gemischt fünfzehn gelbe und zehn rote Bausteine. Zweimal nacheinander wird jeweils ein Baustein zufällig entnommen und nicht wieder zurückgelegt. Hannah stellt die Situation durch das abgebildete Baumdiagramm dar. Beschreibe mit Worten, welche Bedeutung die angegebene Wahrscheinlichkeit $\frac{3}{8}$ hat.



Kommentar: Die Beschreibung eines Sachverhalts erfordert die Kompetenz „Kommunizieren“. Um die im Diagramm angegebene Wahrscheinlichkeit im Sachzusammenhang zu interpretieren, werden die Kompetenzen „Modellieren“ und „Darstellungen verwenden“ benötigt; diese stehen jedoch nicht im Vordergrund.

3 Voraussetzungen für die Entwicklung mathematischer Kompetenzen im Unterricht

Von entscheidender Bedeutung für die Entwicklung mathematischer Kenntnisse, Fähigkeiten und Fertigkeiten ist es, die Schülerinnen und Schüler zu vertieftem Nachdenken und intensiver Auseinandersetzung mit den Lerninhalten anzuregen. Diese kognitive Aktivierung ist damit Voraussetzung für den Erwerb mathematischer Kompetenzen. Aktuelle Erkenntnisse der empirischen Unterrichtsforschung bestätigen diese Auffassung. Wesentlich für die kognitive Aktivierung der Schülerinnen und Schüler sind die eingesetzten Fragen und Aufgaben sowie deren Einbettung in den Unterricht.

Die Bedeutung von Fragestellungen und Aufgabenstellungen für den Mathematikunterricht ist offensichtlich: Erarbeitung, Übung, Wiederholung oder Vertiefung – mithilfe geeignet gestellter Fragen und Aufgaben lassen sich unabhängig vom Ziel des Unterrichts Anlässe zu

vertieftem Nachdenken und intensiver Auseinandersetzung mit den Lerninhalten schaffen. Eine nachhaltige Ausbildung von mathematischem Verständnis ist die Folge.

Ein hohes Maß an kognitiver Aktivierung lässt sich besonders gut dann erreichen, wenn eine eingesetzte Frage oder Aufgabe

- ◆ Begründungen verlangt oder zur Reflexion anregt,
- ◆ ein Problem aufwirft, von dem sich die Schülerinnen und Schüler herausgefordert fühlen,
- ◆ zur Beschreibung mathematischer Zusammenhänge oder Lösungswege auffordert,
- ◆ Verbindungen zu grundlegenden Kenntnissen, Fähigkeiten und Fertigkeiten herstellt,
- ◆ das Interesse der Schülerinnen und Schüler weckt (innermathematisch oder aufgrund eines geeigneten Sachzusammenhangs).

Für den gewinnbringenden Einsatz einer Aufgabe spielt auch deren sinnvolle Einbettung in den Unterricht eine zentrale Rolle. Dazu müssen Überlegungen angestellt werden zur Positionierung der Aufgabe im Unterrichtsgeschehen, zur methodischen Gestaltung oder zu grundlegenden Kenntnissen, Fähigkeiten und Fertigkeiten, die zu einer erfolgreichen Bearbeitung notwendig sind.

Die Frage danach, welche Unterrichtsmethoden im Hinblick auf die kognitive Aktivierung der Schülerinnen und Schüler zu bevorzugen sind, kann – zumindest gegenwärtig – nicht beantwortet werden. So gibt es keine empirischen Belege dafür, dass bestimmte Methoden diesbezüglich anderen Methoden überlegen sind. Kognitive Aktivierung lässt sich sowohl in fragend-entwickelndem Unterricht als auch in anderen Arbeits- oder Sozialformen erreichen. Dabei ist jedoch zu beachten, dass ein methodisch vielfältiger Unterricht positive Effekte auf den Lernerfolg der Schülerinnen und Schüler hat (vgl. „7 Anregungen zur Gestaltung schülerzentrierter, materialgestützter Unterrichtsphasen“).

4 Klassierung von Aufgaben hinsichtlich der allgemeinen mathematischen Kompetenzen

Voraussetzung für die Auswahl und Erstellung von Aufgaben zur gezielten Förderung oder Prüfung bestimmter allgemeiner mathematischer Kompetenzen ist es, für jede Aufgabe feststellen zu können, welche Kompetenz bei der Bearbeitung im Vordergrund steht und welche weiteren Kompetenzen möglicherweise eine bedeutende Rolle spielen.

Um die Lehrkräfte bei dieser Analyse von Aufgaben zu unterstützen, wird zu ausgewählten zentralen Prüfungen jeweils eine Klassierung³ der jeweiligen Aufgaben hinsichtlich der allgemeinen mathematischen Kompetenzen angeboten.

Auch in weiteren hier angebotenen Materialien sind Klassierungen von Aufgaben zu finden (vgl. insbesondere „2.2 Erläuterung der allgemeinen mathematischen Kompetenzen“, „5.1 Aufgaben aus den zugelassenen Lehrbüchern“, „6 Anregungen zur Erstellung von Aufgaben“). Diese Materialien können damit ebenfalls dazu beitragen, Sicherheit hinsichtlich der beschriebenen Klassierung von Aufgaben zu gewinnen.

Für die Klassierung von Aufgaben hinsichtlich der allgemeinen mathematischen Kompetenzen sind folgende Aspekte von besonderer Bedeutung:

³ Unter Klassierung soll hier die Zuordnung einer Aufgabe zu denjenigen allgemeinen mathematischen Kompetenzen verstanden werden, die im Rahmen der Bearbeitung der Aufgabe eine bedeutende Rolle spielen.

- ◆ Da die allgemeinen mathematischen Kompetenzen immer im Verbund erworben bzw. angewandt werden, sind für die Bearbeitung einer Aufgabe stets mehrere Kompetenzen erforderlich. So wird fast immer die Kompetenz „Kommunizieren“ (K 6) benötigt: Die Aufgabenstellung muss verstanden, die eigene Lösung verständlich wiedergegeben werden. Ähnliches gilt für die Kompetenz „Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen“ (K 5). In den Klassierungen von Aufgaben hinsichtlich der allgemeinen mathematischen Kompetenzen werden diese beiden Kompetenzen hier deshalb nur dann angegeben, wenn sie im Rahmen der Bearbeitung einer Aufgabe eine bedeutende Rolle spielen.
- ◆ Eine Sonderrolle im Rahmen der Klassierung von Aufgaben hinsichtlich der allgemeinen mathematischen Kompetenzen kommt der Kompetenz „Probleme lösen“ (K 2) zu. Nur bei dieser Kompetenz hängt es auch von den Vorkenntnissen der Schülerinnen und Schüler ab, ob die Kompetenz im Rahmen der Bearbeitung einer Aufgabe im Vordergrund steht oder nicht (vgl. „2.2 Erläuterung der allgemeinen mathematischen Kompetenzen“, Beispiel zu K 2).

4.1 Bayerischer Mathematik-Test (BMT)

Zum BMT gehört seit dem Jahr 2005 auch eine Klassierung der einzelnen Aufgaben hinsichtlich der allgemeinen mathematischen Kompetenzen. Exemplarisch steht die Klassierung des BMT10 2012 unter www.isb.bayern.de → *Gymnasium* → *Fächer* → *Mathematik* → *Materialien* → *Förderung mathematischer Kompetenzen* zum Download bereit.

Eine Zusammenfassung der Klassierungen aller BMT seit dem Jahr 2005 ist unter www.isb.bayern.de → *Gymnasium* → *Fächer* → *Mathematik* → *Leistungserhebungen* → *Jahrgangsstufenarbeiten* → *Lehrerinformationen* zu finden.

4.2 Abiturprüfung

Auch bei der bayerischen Abiturprüfung im Fach Mathematik werden seit Jahren – neben der gewohnten Vielfalt inhaltlicher Anforderungen – die allgemeinen mathematischen Kompetenzen ausgewogen berücksichtigt. Exemplarisch steht eine Klassierung der ersten Abiturprüfung am achttjährigen Gymnasium unter www.isb.bayern.de → *Gymnasium* → *Fächer* → *Mathematik* → *Materialien* → *Förderung mathematischer Kompetenzen* zum Download bereit.

Im Zusammenhang mit der Abiturprüfung ist hinsichtlich einer ausgewogenen Berücksichtigung der allgemeinen mathematischen Kompetenzen zu beachten, dass von jeder Schülerin und jedem Schüler zu jedem der Themengebiete Analysis, Stochastik und Geometrie eine Aufgabengruppe zu bearbeiten ist.

5 Ausgewählte Aufgaben zur Förderung mathematischer Kompetenzen

Für nachhaltig gewinnbringendes Lernen ist es von großer Bedeutung, die allgemeinen mathematischen Kompetenzen bewusst und ausgewogen zu fördern. Dabei werden die Schwerpunkte – insbesondere bei der Auswahl von Aufgaben – anders als in der Vergan-

genheit gesetzt; die Kompetenzen „Argumentieren“, „Probleme lösen“, „Modellieren“ und „Kommunizieren“ werden stärker gefördert.

Voraussetzung für den Aufbau inhaltsbezogener und allgemeiner mathematischer Kompetenzen sind grundlegende Kenntnisse, Fähigkeiten und Fertigkeiten. Diese grundlegenden inhaltsbezogenen Kompetenzen sollten deshalb möglichst dauerhaft zur Verfügung stehen. Dazu ist es erforderlich, die genannten Grundlagen im Sinne kumulativen, vernetzenden Lernens im Rahmen des Unterrichts ständig systematisch zu wiederholen, zu üben und zu vertiefen sowie in Leistungsnachweisen zu prüfen.

5.1 Aufgaben aus den zugelassenen Lehrbüchern

Um die Lehrkräfte dabei zu unterstützen, die allgemeinen mathematischen Kompetenzen ausgewogen zu fördern, wurden beispielhaft zu allen Abschnitten des Lehrplans für die Jahrgangsstufe 9 aus den zugelassenen Lehrbüchern Aufgaben ausgewählt, deren Bearbeitung jeweils eine allgemeine mathematische Kompetenz erfordert, die im Zusammenhang mit dem betrachteten mathematischen Inhalt in der Vergangenheit zu wenig berücksichtigt wurde.

Zu beachten ist, dass die ausgewählten Aufgaben in erster Linie als Lernaufgaben für den Unterricht konzipiert sind; dabei eignen sich zahlreiche Aufgaben auch für selbständig entdeckendes Lernen und experimentelles, forschendes Arbeiten. Eine Umformulierung zu Prüfungsaufgaben würde möglicherweise eine Präzisierung oder Vereinfachung erfordern.

Die ausgewählten Aufgaben, die unterschiedlichen Anforderungsbereichen zuzuordnen sind, stehen unter www.isb.bayern.de → *Gymnasium* → *Fächer* → *Mathematik* → *Materialien* → *Förderung mathematischer Kompetenzen* zum Download bereit.

Ausdrücklich wird darauf hingewiesen, dass das Angebot der ausgewählten Aufgaben nicht dahingehend missverstanden werden darf, dass Aufgaben zur Schulung der Kompetenz „Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen“ (K 5) vernachlässigt werden sollen. Trotz der geänderten Schwerpunktsetzung sollte selbstverständlich weiterhin darauf geachtet werden, den Schülerinnen und Schülern Sicherheit im Umgang mit Zahlen, Termen und Gleichungen nachhaltig zu vermitteln; neben Rechenfertigkeiten sollte dabei selbstverständlich stets auch das mathematische Verständnis für die zugrunde liegenden Rechenregeln geschult werden. Dazu sollten nach einer angemessenen Einführung und Übung der jeweiligen Lehrplaninhalte immer wieder kurze wiederholende Übungsphasen in den Unterricht eingebaut werden; auf eine Verwendung von Hilfsmitteln (ab der Jahrgangsstufe 8: Taschenrechner; ab der Jahrgangsstufe 10: Merkhilfe, CAS-Rechner) sollte – auch bei Leistungsnachweisen – immer wieder gezielt verzichtet werden.

5.2 Aufgaben zur Förderung grundlegender Kenntnisse, Fähigkeiten und Fertigkeiten

Ständiges Anliegen des Unterrichts muss es sein, grundlegende Kenntnisse, Fähigkeiten und Fertigkeiten auch jeweils vorhergehender Jahrgangsstufen systematisch zu wiederholen, zu üben und zu vertiefen. Zur Unterstützung dieses Anliegens werden den Lehrkräften speziell für diesen Zweck erstellte Aufgaben angeboten. Aufgaben für die Jahrgangsstufe 9 stehen bereits unter www.isb.bayern.de → *Gymnasium* → *Fächer* → *Mathematik* → *Materialien* → *Förderung mathematischer Kompetenzen* zum Download bereit.

Bei der Erstellung des Angebots werden folgende Gesichtspunkte berücksichtigt:

- ◆ Zu jedem Lehrplanabschnitt wird eine Gruppe von Aufgaben angeboten.
- ◆ Die zu einem Lehrplanabschnitt angebotenen Aufgaben beziehen sich in erster Linie auf Lehrplaninhalte auch vorhergehender Jahrgangsstufen, die für eine erfolgreiche Bearbeitung von Aufgaben zu diesem Lehrplanabschnitt erforderlich sind (z. B. Lehrplanabschnitt „M 9.2.1 Graphen quadratischer Funktionen und deren Nullstellen“: Aufgabe zu linearen Funktionen und ihren Graphen).

Ergänzend werden Aufgaben zu grundlegenden Inhalten vorhergehender Jahrgangsstufen angeboten, die keinen unmittelbaren Bezug zum jeweiligen Lehrplanabschnitt haben (z. B. Lehrplanabschnitt „M 9.6 Fortführung der Raumgeometrie“: Aufgabe zum Zählprinzip).

So sollen die zu einer Jahrgangsstufe insgesamt angebotenen Aufgaben möglichst viele der wesentlichen grundlegenden Kenntnisse, Fähigkeiten und Fertigkeiten der vorhergehenden Jahrgangsstufen erfassen.

- ◆ Für die Bearbeitung der Aufgaben zu einem Lehrplanabschnitt ist ein breites Spektrum der allgemeinen mathematischen Kompetenzen erforderlich.
- ◆ Die Anzahl der zu einem Lehrplanabschnitt angebotenen Aufgaben ist verhältnismäßig klein gewählt. Dies soll den Lehrkräften eine zeitaufwändige Sichtung ersparen und einen unmittelbaren Einsatz der Aufgaben ermöglichen.
- ◆ Für den Einsatz einer Aufgabe im Unterricht sind etwa fünf bis zehn Minuten vorgesehen.

Ausdrücklich wird darauf hingewiesen, dass das Angebot der Aufgaben zu einem Lehrplanabschnitt nicht dahingehend missverstanden werden darf, dass alle Aufgaben in einer Unterrichtsstunde zu Beginn der Behandlung dieses Lehrplanabschnitts bearbeitet werden sollen. Im Sinne einer nachhaltigen Förderung grundlegender Kenntnisse, Fähigkeiten und Fertigkeiten ist es wesentlich effektiver, die angebotenen Aufgaben – jeweils einzeln – gleichmäßig verteilt auf die Zeit vor und während der Behandlung des jeweiligen Lehrplanabschnitts einzusetzen. Für den Einsatz einer Aufgabe können beispielsweise die ersten Minuten einer Unterrichtsstunde genutzt werden.

Die angebotenen Aufgaben können im Unterricht beispielsweise mithilfe der Methode „Ich-Du-Wir“ eingesetzt werden. Diese Methode ermöglicht jeder Schülerin und jedem Schüler in der „Ich-Phase“ eine aktive Auseinandersetzung mit der jeweiligen Aufgabenstellung, in der „Du-Phase“ einen Austausch mit einem Partner zur Lösung der Aufgabe und in der „Wir-Phase“ eine gemeinsame Besprechung der Ergebnisse im Klassenverband. Eine detaillierte Beschreibung der Methode steht unter www.isb.bayern.de → *Gymnasium* → *Fächer* → *Mathematik* → *Materialien* → *Förderung mathematischer Kompetenzen* zum Download bereit.

Weitere vielfältige Beispiele zur Förderung grundlegender Kenntnisse, Fähigkeiten und Fertigkeiten liefern die Aufgaben der Bayerischen Mathematik-Tests der letzten Jahre.

6 Anregungen zur Erstellung von Aufgaben

Im Rahmen des Unterrichts, besonders jedoch für Leistungsnachweise ist es häufig notwendig, zusätzlich zum vielfältigen Angebot der zugelassenen Lehrbücher selbst Aufgaben zu erstellen, bei deren Bearbeitung jeweils eine bestimmte allgemeine mathematische Kompetenz im Vordergrund steht. Im Folgenden werden Anregungen zur Erstellung derartiger Aufgaben gegeben.

6.1 Aufgaben für den Unterricht

Als selbstverständlicher Bestandteil des Mathematikunterrichts erfüllen Aufgaben die Funktion von Erarbeitungs- oder Lernaufgaben. Im Vergleich zu Prüfungsaufgaben können diese weit offener gestellt werden und damit Interpretationsspielraum eröffnen sowie zu Kommunikation Anlass geben.

Anhand von jeweils sechs Aufgaben zu den Lehrplaninhalten

- ◆ Zusammengesetzte Zufallsexperimente
- ◆ Die Satzgruppe des Pythagoras
- ◆ Steigungswinkel einer Geraden
- ◆ Gerader Zylinder

wird gezeigt, dass sich zu jedem – auch eng gewählten – Lehrplaninhalt Aufgaben erstellen lassen, bei deren Bearbeitung jeweils eine beliebig vorgegebene allgemeine mathematische Kompetenz im Vordergrund steht. Ausdrücklich wird darauf hingewiesen, dass die sechs Aufgaben zu einem Lehrplaninhalt nicht als Zusammenstellung von Aufgaben für einen Leistungsnachweis aufzufassen sind.

Die Aufgaben zu den genannten Lehrplaninhalten stehen unter www.isb.bayern.de → *Gymnasium* → *Fächer* → *Mathematik* → *Materialien* → *Förderung mathematischer Kompetenzen* zum Download bereit.

6.2 Aufgaben für Leistungsnachweise

Nicht nur Erarbeitungs- und Lernaufgaben, sondern auch Prüfungsaufgaben haben Einfluss auf die Entwicklung mathematischer Kompetenzen. Denn die Art, wie Leistungsnachweise konzipiert sind, wirkt sich wesentlich auf das Lernverhalten der Schülerinnen und Schüler aus. Folglich sollten auch im Zusammenhang mit Leistungsnachweisen die allgemeinen mathematischen Kompetenzen ausgewogen berücksichtigt und grundlegende inhaltsbezogene Kompetenzen, d. h. grundlegende Kenntnisse, Fähigkeiten und Fertigkeiten, auch vorhergehender Jahrgangsstufen regelmäßig mit bedeutendem Anteil einbezogen werden.

Selbstverständlich kann nur geprüft werden, worauf die Schülerinnen und Schüler ausreichend vorbereitet wurden – sowohl hinsichtlich mathematischer Inhalte als auch hinsichtlich der allgemeinen mathematischen Kompetenzen. Insbesondere die regelmäßige Prüfung grundlegender Kenntnisse, Fähigkeiten und Fertigkeiten setzt voraus, dass diese im Sinne kumulativen, vernetzenden Lernens im Rahmen des Unterrichts ständig systematisch wiederholt, geübt und vertieft werden; eine Einschränkung der Grundlagen, die für Leistungsnachweise zur Verfügung stehen müssen, ist dann weder erforderlich noch sinnvoll. Absprachen innerhalb der Fachschaft hinsichtlich der Förderung, Sicherung und Prüfung grundlegender Kenntnisse, Fähigkeiten und Fertigkeiten sind hilfreich.

Für Leistungsnachweise sind außerdem folgende Aspekte von besonderer Bedeutung:

- ◆ Die allgemeinen mathematischen Kompetenzen im Zusammenhang mit Leistungsnachweisen ausgewogen zu berücksichtigen, bedeutet nicht, dass im Rahmen der Bearbeitung der Aufgaben eines Leistungsnachweises alle Kompetenzen in gleichem Maße erforderlich sein müssen; auch bei der Erstellung der hier beispielhaft vorgestellten Leistungsnachweise wurde dies nicht angestrebt. Vielmehr sind abhängig von Zielsetzung und Lehrplaninhalten unterschiedliche Schwerpunkte selbstverständlich. So bedarf beispielsweise das

Umformen von Wurzeltermen oder das Lösen quadratischer Gleichungen in verhältnismäßig hohem Maße der Kompetenz „Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen“ (K 5), während im Zusammenhang mit quadratischen Funktionen die Kompetenz „Darstellungen verwenden“ (K 4) häufiger im Vordergrund steht. Außerdem spielen die Kompetenzen „Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen“ (K 5) sowie „Kommunizieren“ (K 6) eine besondere Rolle, stellen sie doch bei nahezu jeder Aufgabe die Grundlage der Bearbeitung dar. Zu vermeiden ist es jedoch, eine oder mehrere Kompetenzen – sei es im Unterricht oder in Leistungsnachweisen – dauerhaft zu vernachlässigen.

- ◆ Trotz der geänderten Schwerpunktsetzung sollte selbstverständlich weiterhin darauf geachtet werden, den Schülerinnen und Schülern Sicherheit im Umgang mit Zahlen, Termen und Gleichungen nachhaltig zu vermitteln; auf eine Verwendung von Hilfsmitteln (ab der Jahrgangsstufe 8: Taschenrechner; ab der Jahrgangsstufe 10: Merkhilfe, CAS-Rechner) sollte auch bei Leistungsnachweisen immer wieder gezielt verzichtet werden.

Zur Veranschaulichung dieser Überlegungen dienen drei Beispiel-Schulaufgaben, die jeweils in der Jahrgangsstufe 9 als erste Schulaufgabe durchgeführt werden könnten. Jede der drei Beispiel-Schulaufgaben zeichnet sich durch eine ausgewogene Berücksichtigung der allgemeinen mathematischen Kompetenzen aus. Aufgaben, deren Bearbeitung in auffallendem Maße grundlegende Kenntnisse, Fähigkeiten und Fertigkeiten erfordert, sind jeweils mit bedeutendem Anteil einbezogen. Unterschiede zeigen sich hinsichtlich der Größe dieses Anteils, der mit den Nummern der Beispiel-Schulaufgaben zunimmt. Die Beispiel-Schulaufgaben stehen unter www.isb.bayern.de → *Gymnasium* → *Fächer* → *Mathematik* → *Materialien* → *Förderung mathematischer Kompetenzen* zum Download bereit.

7 Anregungen zur Gestaltung schülerzentrierter, materialgestützter Unterrichtsphasen

Vertieftes Nachdenken und intensive Auseinandersetzung mit den Lerninhalten ist von entscheidender Bedeutung für die Entwicklung mathematischer Kompetenzen. Schülerinnen und Schüler sollten deshalb im Unterricht ausreichend Gelegenheit zu aktivem Erproben, Entdecken und Anwenden sowie zu kritischem Reflektieren erhalten. Dafür bietet ein flexibler Einsatz verschiedener Unterrichtsmethoden einen günstigen Rahmen, der zudem positive Effekte auf die Motivation der Lernenden hat (vgl. „3 Voraussetzungen für die Entwicklung mathematischer Kompetenzen im Unterricht“).

Ein methodisch vielfältiger Unterricht sieht auch schülerzentrierte, materialgestützte Unterrichtsphasen vor. Diese zeichnen sich durch Lernumgebungen aus, in denen die Schülerinnen und Schüler mathematische Kenntnisse, Fähigkeiten und Fertigkeiten selbständig und eigenverantwortlich entwickeln oder anwenden können. Individuellem Lerntempo folgend lassen sich anhand geeigneter Arbeitsaufträge mathematische Inhalte und Zusammenhänge erarbeiten, wiederholen, üben oder vertiefen. Arbeiten die Schülerinnen und Schüler dabei paarweise oder in Gruppen gemeinsam, so müssen im Gespräch – entsprechende Arbeitsaufträge vorausgesetzt – Lösungswege beschrieben oder Gedankengänge begründet bzw. jeweils verstanden werden; kommunikative und argumentative Fähigkeiten, aber auch soziale Kompetenzen werden gefördert (z. B. Kooperationsfähigkeit, Hilfsbereitschaft, Verantwortungsbewusstsein). Die Lehrkraft unterstützt die Selbsttätigkeit der Schülerinnen und Schüler, indem sie die vorbereitende und begleitende Organisation übernimmt sowie für die An-

liegen der Schülerinnen und Schüler zur Verfügung steht; dabei besteht auch die Möglichkeit zu individueller Förderung.

Materialien, die für derartige Lernumgebungen geeignet sind, müssen besonderen Anforderungen genügen:

- ◆ Unter Berücksichtigung der Lerngruppe, insbesondere deren Vertrautheit mit materialgestütztem Arbeiten, müssen die Aufgaben so gestaltet sein, dass sie möglichst unabhängig von der Unterstützung der Lehrkraft bearbeitet werden können. Nur dann kann die Lernzeit effektiv genutzt werden. Die Aufgabenstellungen müssen deshalb exakt und gut verständlich formuliert sein und falls nötig in geeigneter Form auf anspruchsvolle Aufgabenteile vorbereiten. Zur Bearbeitung komplexer Problemstellungen kann es sinnvoll sein, unterstützende Hinweise bereitzustellen, die die Schülerinnen und Schüler bei Bedarf verwenden dürfen.
- ◆ Die Aufgaben müssen zu vertieftem Nachdenken und intensiver Auseinandersetzung mit den jeweils zugrunde liegenden Lerninhalten anregen, die Schülerinnen und Schüler also kognitiv aktivieren.
- ◆ Für die Bearbeitung der Aufgaben sollte ein möglichst breites Spektrum der allgemeinen mathematischen Kompetenzen erforderlich sein.
- ◆ Falls möglich sollten mit den Materialien Lösungen bereitgestellt werden, anhand derer unmittelbar nach der Bearbeitung der Aufgaben eine selbständige Kontrolle der Ergebnisse erfolgen kann.

Die Erstellung derartiger Materialien ist häufig mit verhältnismäßig hohem Aufwand verbunden. Deshalb sollen die Lehrkräfte bei der Gestaltung des Unterrichts durch am ISB erarbeitete Materialien unterstützt werden. Materialien für die Jahrgangsstufe 9 stehen bereits unter www.isb.bayern.de → *Gymnasium* → *Fächer* → *Mathematik* → *Materialien* → *Förderung mathematischer Kompetenzen* zum Download bereit.

Bei der Erstellung des Angebots werden neben den oben genannten Anforderungen folgende Gesichtspunkte berücksichtigt:

- ◆ Der Umfang der für eine Jahrgangsstufe angebotenen Materialien ist überschaubar gewählt. Dies soll den Lehrkräften eine zeitaufwändige Sichtung ersparen und einen unmittelbaren Einsatz der Materialien ermöglichen. Bei der Erstellung der Materialien liegt der Fokus deshalb nicht auf einem hinsichtlich der Lehrplaninhalte möglichst breiten Angebot, sondern auf dessen Überschaubarkeit, zeitlicher Umsetzbarkeit und sinnvoller Verteilung auf die Lehrplanabschnitte der jeweiligen Jahrgangsstufe.
- ◆ Die Anzahl der den Materialien zugrundeliegenden Unterrichtsmethoden ist verhältnismäßig klein gewählt, um die für die Materialien bzw. Methoden erforderliche Einarbeitungszeit möglichst gering zu halten.
- ◆ Die Materialien sind so gestaltet, dass der mit ihrem jeweiligen Einsatz verbundene Vorbereitungsaufwand (z. B. für das Bereitstellen erforderlicher Gegenstände) möglichst gering ist.

Für das Angebot wurden einerseits Methoden ausgewählt, deren Anwendung einen zeitlichen Rahmen von mindestens einer Unterrichtsstunde erfordert (Expertenpuzzle, Gruppenarbeit mit Präsentationen, Partnerarbeit mit mehrfachem Partnerwechsel, Stationenlernen, Übung^{plus}). Zu jeder dieser Methoden wird pro Jahrgangsstufe ein Materialsatz für einen geeigneten Lehrplaninhalt angeboten.

Andererseits greift das Angebot Methoden auf, deren Anwendung sich auf einen Teil einer Unterrichtsstunde beschränken kann (Ich-Du-Wir, Lernspiel, Einzel- oder Partnerarbeit mit Computereinsatz). Materialsätze zu jeder dieser Methoden können pro Jahrgangsstufe mehrfach angeboten werden, da sie verhältnismäßig einfach in den Unterricht eingebettet werden können.

Detaillierte Beschreibungen der ausgewählten Methoden und ihrer Anwendung stehen unter www.isb.bayern.de → *Gymnasium* → *Fächer* → *Mathematik* → *Materialien* → *Förderung mathematischer Kompetenzen* zum Download bereit. Auf diese Beschreibungen wird in den angebotenen Materialien jeweils verwiesen.

Im Anschluss an eine schülerzentrierte, materialgestützte Unterrichtsphase sollte im Sinne einer möglichst sicheren gemeinsamen Basis für den weiteren Unterricht festgestellt werden, ob die Schülerinnen und Schüler über diejenigen Kenntnisse, Fähigkeiten und Fertigkeiten verfügen, die in dieser Phase erworben werden sollten. Dabei sollten die betrachteten mathematischen Inhalte und Zusammenhänge in einer geeigneten Zusammenfassung klar strukturiert dargestellt werden – eine klare inhaltliche Struktur unterstützt die kognitive Aktivierung der Schülerinnen und Schüler und ist ein besonders wirksamer Faktor im Hinblick auf nachhaltig gewinnbringendes Lernen.

Abschließend sei ausdrücklich betont, dass es keine empirischen Belege dafür gibt, dass im Zusammenhang mit bestimmten mathematischen Inhalten eine bestimmte Methode gegenüber anderen zu bevorzugen ist. Die angebotenen Materialien können jedoch exemplarisch Anregungen für schülerzentrierte, materialgestützte Unterrichtsphasen liefern und die Lehrkräfte damit bei der Gestaltung eines methodisch vielfältigen Unterrichts unterstützen.

Literatur

Bei der Erstellung der Materialien wurde die im Folgenden angegebene Literatur verwendet.

Lehrbücher (zugelassen für die Verwendung an bayerischen Gymnasien)

- ◆ Distel B., Feuerlein R., Mathematik 9. Unterrichtswerk für das G8, München 2007. [bsv 9]
- ◆ Freytag C., Gräupner C., Herz A. u. a., Fokus Mathematik 9. Gymnasium Bayern, Berlin 2007. [Fokus 9]
- ◆ Schätz U., Eisentraut F. (Hrsg.), delta 9. Mathematik für Gymnasien, Bamberg 2007. [delta 9]
- ◆ Schmid, A., Weidig I. (Hrsg.), Lambacher Schweizer 9. Mathematik für Gymnasien, Stuttgart 2008. [Lambacher Schweizer 9]

Weitere Publikationen

- ◆ Blum W., Drüke-Noe C., Hartung R., Köller O. (Hrsg.), Bildungsstandards Mathematik: konkret. Sekundarstufe I: Aufgabenbeispiele, Unterrichtsanregungen, Fortbildungsideen, Berlin 2006. [Bildungsstandards Mathematik: konkret]
- ◆ Akademie für Lehrerfortbildung und Personalführung Dillingen (Hrsg.), Freies Arbeiten am Gymnasium. Band 2. Materialien mit Anregungen für die Durchführung im Fach Mathematik, Dillingen 1999. [Freies Arbeiten am Gymnasium, Band 2]