STAATSINSTITUT FÜR SCHULQUALITÄT
UND BILDUNGSFORSCHUNG
MÜNCHEN

Abteilung Gymnasium
Referat Mathematik

Länderübergreifende gemeinsame Aufgaben in den Abiturprüfungen der Länder Bayern, Hamburg, Mecklenburg-Vorpommern, Niedersachsen, Schleswig-Holstein und Sachsen

Übungsklausur 2013/2014 im Fach Mathematik – Länderübergreifender gemeinsamer Aufgabenpool

Die vorliegenden Aufgaben wurden von einer Arbeitsgruppe mit Schulexperten aus jedem der beteiligten Länder erarbeitet.

Inhalt

[1] Die Aufgaben zum Sachgebiet Lineare Algebra sind u. a. in Bayern nicht prüfungsrelevant.

1 Vorbemerkungen

Die Länder Bayern, Hamburg, Mecklenburg-Vorpommern, Niedersachsen, Sachsen und Schleswig-Holstein haben sich darauf verständigt, ab dem Jahr 2014 für die Fächer Deutsch, Englisch und Mathematik gemeinsame Aufgaben bzw. Aufgabenteile in die Abiturprüfungen zu integrieren. Um die Schülerinnen und Schüler sowie die Lehrkräfte mit den Anforderungen der gemeinsamen Prüfungselemente vertraut zu machen, wurde in den beteiligten Ländern in jedem der drei Fächer einmalig im Schuljahr 2013/2014 ein schriftlicher Leistungsnachweis (Übungsklausur) eingesetzt, dessen Durchführung in den Ländern geregelt wurde.

Im Fach Mathematik wurden für die Übungsklausur – in analoger Weise zur schriftlichen Abiturprüfung ab dem Jahr 2014 – zwei länderübergreifende gemeinsame Aufgabenpools bereitgestellt, die hier vorgelegt werden. Jedes Land wählte für die Schülerinnen und Schüler, die auf erhöhtem Anforderungsniveau geprüft wurden, als gemeinsame Prüfungselemente drei Aufgaben aus dem Aufgabenpool 1 sowie eine Aufgabe aus dem Aufgabenpool 2 aus. Diese vier Aufgaben mussten Lerninhalte aus jedem der Sachgebiete Analysis, Lineare Algebra/Analytische Geometrie und Stochastik umfassen.

Die beiden Aufgabenpools unterscheiden sich dadurch, dass die Aufgaben aus dem Aufgabenpool 1 unterhalb des Anforderungsbereichs III liegen, während die Aufgaben aus dem Aufgabenpool 2 diesen zumindest in einem Aufgabenteil erreichen. Alle Aufgaben waren ohne elektronische Hilfsmittel (z. B. Taschenrechner, Software) sowie ohne Merkhilfe, Tabellen- oder Formelsammlung zu bearbeiten. Pro Aufgabe konnten fünf Bewertungseinheiten (BE) erreicht werden. Die Aufgaben berücksichtigen die in den EPA Mathematik ermöglichten Alternativen „vektorielle analytische Geometrie“ und „Anwendung von Matrizen bei mehrstufigen Prozessen“, die in ähnlicher Form auch in den Bildungsstandards Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife abgebildet sind.

Die vorliegenden Aufgaben sollen den Lehrkräften sowie den Schülerinnen und Schülern eine weitere Orientierung hinsichtlich der gemeinsamen Aufgaben in der schriftlichen Abiturprüfung ab dem Jahr 2014 geben.

2 Aufgaben

2.1 Analysis

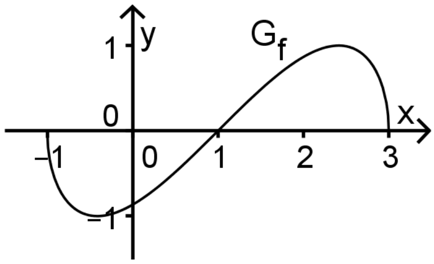
BE

Aufgaben zum Aufgabenpool 1

1 Die Abbildung zeigt den Graphen G_f einer in $[-1;3]$ definierten Funktion f, die die Nullstellen $x=-1$, $x=1$ und $x=3$ besitzt. Die Funktion F mit

$$F(x)=-\tfrac{1}{6}\cdot\left(\sqrt{-x^2+2x+3}\right)^3$$

ist eine Stammfunktion von f.

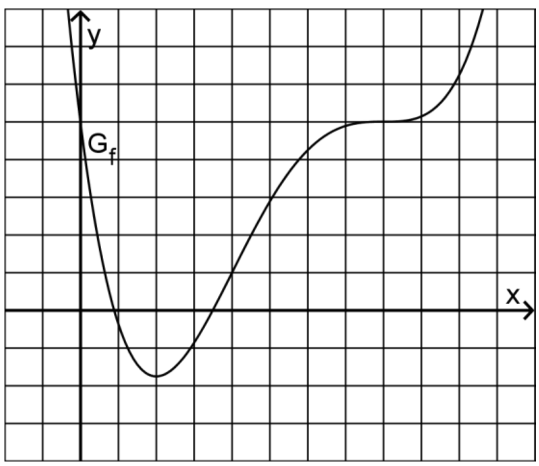


1 **a)** Begründen Sie, dass die in $[-1;3]$ definierte Funktion H mit $H(x)=-\tfrac{1}{6}\cdot\left(\sqrt{-x^2+2x+3}\right)^3+1$ ebenfalls eine Stammfunktion von f ist.

2 **b)** Begründen Sie, dass der Wert des Integrals $\int_0^3 f(x)\,dx$ nicht mit dem Inhalt der Fläche übereinstimmt, die für $0\le x\le 3$ zwischen G_f und der x-Achse liegt.

2 **c)** Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die G_f im ersten Quadranten mit der x-Achse einschließt.

2 Die Abbildung zeigt den Graphen G_f einer ganzrationalen Funktion f.



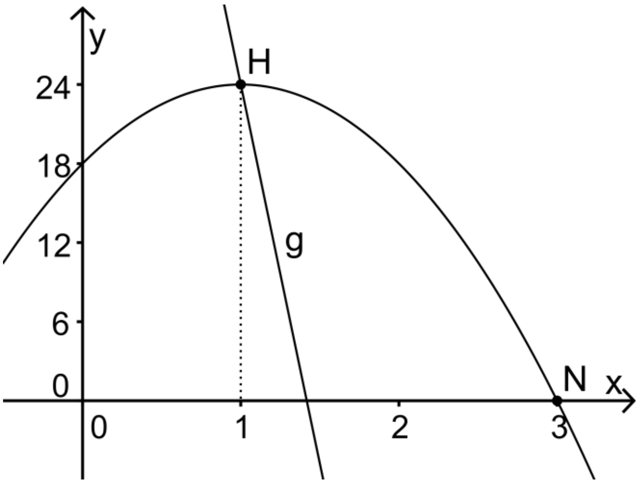
3 **a)** Skizzieren Sie in der Abbildung den Graphen der ersten Ableitungsfunktion von f.

2 **b)** Begründen Sie, dass der Grad der Funktion f mindestens vier ist.

BE

Aufgabe zum Aufgabenpool 2

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = -6x^2 + 12x + 18$ und $x \in \mathbb{R}$. Die Abbildung zeigt den Graphen von f, der durch die Punkte $H(1|24)$ und $N(3|0)$ verläuft.



2 **a)** Zeigen Sie, dass $\int_0^1 f(x)\,dx = 22$ gilt.

3 **b)** Die Fläche, die der Graph von f im ersten Quadranten mit den Koordinatenachsen einschließt, hat den Inhalt 54. Eine Gerade g, die durch den Punkt H verläuft, teilt diese Fläche in zwei Teilflächen gleichen Inhalts. Bestimmen Sie rechnerisch die Stelle, an der die Gerade g die x-Achse schneidet.

2.2 Stochastik

BE **Aufgaben zum Aufgabenpool 1**

1 Bei der Produktion von Halbleiterbauteilen eines bestimmten Typs ist im Mittel jedes fünfte Bauteil fehlerhaft. Jedes produzierte Bauteil wird abschließend einer Kontrolle unterzogen und dabei entweder als fehlerhaft oder als einwandfrei eingestuft. Im Rahmen der Kontrolle wird ein fehlerhaftes Bauteil mit einer Wahrscheinlichkeit von 90 % als fehlerhaft eingestuft. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein einwandfreies Bauteil als fehlerhaft eingestuft wird, beträgt 40 %.

2 **a)** Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein nach der Kontrolle zufällig ausgewähltes Bauteil einwandfrei ist und im Rahmen der Kontrolle korrekt eingestuft wurde.

3 **b)** Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein nach der Kontrolle zufällig ausgewähltes Bauteil fehlerhaft ist, wenn es im Rahmen der Kontrolle als einwandfrei eingestuft wurde.

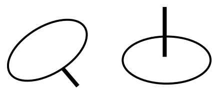
2 Ein Glücksrad ist in einen blauen, einen gelben und einen roten Sektor unterteilt. Beim Drehen des Glücksrads tritt „Blau“ mit der Wahrscheinlichkeit p und „Rot“ mit der Wahrscheinlichkeit 2p ein.

2 **a)** Geben Sie an, welche Werte von p bei diesem Glücksrad möglich sind.

3 **b)** Das Glücksrad wird zweimal gedreht. Betrachtet wird das Ereignis E: „Es tritt mindestens einmal „Rot“ ein.“ Zeigen Sie, dass das Ereignis E mit der Wahrscheinlichkeit $P(E) = 4p - 4p^2$ eintritt.

BE **Aufgabe zum Aufgabenpool 2**

5 Beim Werfen einer Reißzwecke kann diese entweder auf der Seite oder auf dem Kopf liegen bleiben (siehe Abbildung). Eine Reißzwecke wird zweimal geworfen. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sie dabei mindestens einmal auf der Seite liegen bleibt, beträgt 0,84.



Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Reißzwecke bei den zwei Würfen genau einmal auf dem Kopf liegen bleibt.

2.3 Analytische Geometrie/Lineare Algebra

2.3.1 Analytische Geometrie

BE

Aufgaben zum Aufgabenpool 1

1 Gegeben sind die Punkte $A(-1|1|4)$, $B(-3|5|6)$ und $C_t(-2+t|3|5+t)$ mit $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

3 **a)** Zeigen Sie, dass jedes der Dreiecke ABC_t gleichschenklig ist.

2 **b)** Bestimmen Sie diejenigen Werte von t, für die das jeweils zugehörige Dreieck ABC_t gleichseitig ist.

2 Gegeben sind die Gerade $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, und die Schar der Geraden

$$h_a: \vec{X} = \begin{pmatrix} -a \\ 8 \\ -6 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 2a+3 \\ 2 \\ 1+a \end{pmatrix},\ \mu \in \mathbb{R},\ a \in \mathbb{R}.$$

2 **a)** Bestimmen Sie denjenigen Wert von a, für den die Richtungsvektoren von g und h_a zueinander senkrecht sind.

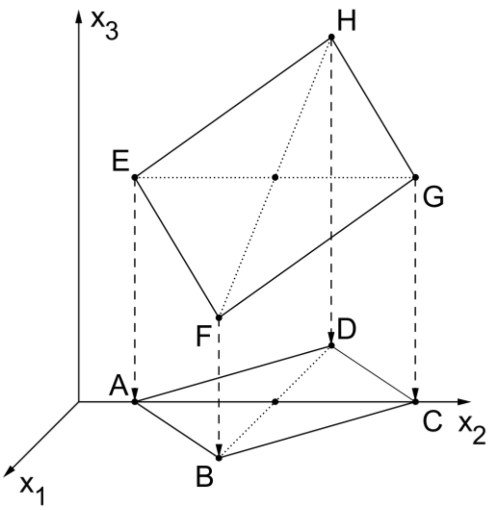
3 **b)** Weisen Sie nach, dass sich für $a = -2$ die Geraden g und h_a schneiden.

BE

Aufgabe zum Aufgabenpool 2

Gegeben ist die Raute ABCD mit $A(0|2|0)$, $B(4|7|0)$, $C(0|12|0)$ und $D(-4|7|0)$ (vgl. Abbildung).

Jeder Eckpunkt der Raute entsteht durch Verschiebung eines Eckpunkts des Quadrats EFGH senkrecht zur x_1x_2-Ebene; dabei geht der Punkt A aus dem Punkt $E(0|2|8)$ sowie der Punkt C aus dem Punkt $G(0|12|8)$ hervor (vgl. Abbildung).



1 **a)** Geben Sie die x_1-Koordinate und die x_2-Koordinate des Punkts F an

4 **b)** Bestimmen Sie die Koordinaten der Punkte F und H.

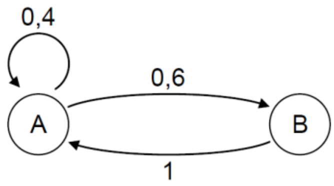
2.3.2 Lineare Algebra

Die Aufgaben zum Sachgebiet Lineare Algebra sind u. a. in Bayern nicht prüfungsrelevant.

BE

Aufgaben zum Aufgabenpool 1

1 In einem System verteilt sich ein Gesamtbestand auf die Zustände A und B. Die Verteilung wird durch Zustandsvektoren $\begin{pmatrix} x_A \\ x_B \end{pmatrix}$ beschrieben. Pro Zeiteinheit finden zwischen den Zuständen die in der Abbildung dargestellten Übergänge statt.



3 **a)** Geben Sie die zugehörige Übergangsmatrix M an. Bestimmen Sie die Matrix N, die die Übergänge in zwei aufeinanderfolgenden Zeiteinheiten zusammenfassend beschreibt.

2 **b)** Für große natürliche Zahlen n nähert sich die Potenz M^n der Matrix $G = \begin{pmatrix} \frac{5}{8} & \frac{5}{8} \\ \frac{3}{8} & \frac{3}{8} \end{pmatrix}$.

Beschreiben Sie, welche Folgen sich daraus für die Verteilung des Gesamtbestands auf die Zustände A und B ergeben.

2 Gegeben ist das folgende lineare Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rrcrcrcr} \text{I:} & 2x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & = & 13 \\ \text{II:} & -2x_1 & + & 2x_2 & & & = & -8 \\ \text{III:} & & & x_2 & + & x_3 & = & 2 \end{array}$$

3 **a)** Zeigen Sie, dass das Gleichungssystem keine Lösung hat.

2 **b)** Es gibt eine Zahl, durch die man die Zahl 2 auf der rechten Seite der dritten Gleichung ersetzen kann, sodass das geänderte Gleichungssystem unendlich viele Lösungen hat. Geben Sie diese Zahl an und begründen Sie Ihre Antwort.

BE

Aufgabe zum Aufgabenpool 2

Die Entwicklung eines Systems kann modelliert werden, indem aus dem Zustandsvektor $\overrightarrow{x_i}$ durch Multiplikation mit einer Übergangsmatrix der Zustandsvektor des folgenden Zustands $\overrightarrow{x_{i+1}}$ bestimmt wird $(i \in \mathbb{N})$.

3 **a)** Gegeben ist ein System mit einer Übergangsmatrix M der Form $\begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix}$ mit $a \cdot b \cdot c = 1$ und a, b, $c \in \mathbb{R}$.

Weisen Sie nach, dass sich für jeden beliebigen Zustandsvektor des Systems nach endlich vielen Entwicklungsschritten wieder der gleiche Zustandsvektor ergibt.

2 **b)** Für die Übergangsmatrix L eines anderen Systems gilt $L^n = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}$ mit $k \in \mathbb{R}$, $k > 1$ und $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$.

Erläutern Sie für dieses andere System den Zusammenhang zwischen einem beliebigen Zustandsvektor $\overrightarrow{x_0}$ und dem Zustandsvektor $\overrightarrow{x_n}$, der sich aus $\overrightarrow{x_0}$ nach n Übergängen ergibt.