Informationen über die Auswirkungen des geänderten Lehrplans auf die Prüfung des Mittleren Schulabschlusses in Mathematik ab dem Schuljahr 2007/2008

Begründung

Änderungen im überarbeiteten Lehrplan 2004 für den M-Zweig der Hauptschule im Fach Mathematik erfordern eine Anpassung auch bei den abschließenden Prüfungen. Dabei handelt es sich nur in geringem Maße um inhaltliche Änderungen, da die Themengebiete im Wesentlichen unverändert geblieben sind. Aus den Erkenntnissen der Fachdidaktik und der Lerntheorie hat sich jedoch die Forderung nach neuen Aufgabenformen im Mathematikunterricht ergeben. Außerdem haben die Ergebnisse bei internationalen Vergleichstests gezeigt, dass das Beherrschen grundlegender mathematischer Kompetenzen verstärkt beachtet werden muss und neben Routineabläufen das Mathematisieren nicht unbeachtet bleiben darf. Das Fachprofil Mathematik im überarbeiteten Lehrplan weist deutlich darauf hin. Diese Veränderungen finden nun Niederschlag in den Prüfungsaufgaben für den Mittleren Schulabschluss in Mathematik der Hauptschule.

Grundlegende Konzeption

Grundstruktur, Arbeitszeit und Bewertungsmodus der Prüfung ändern sich nicht. Auch der Großteil der Aufgaben entspricht nach wie vor der herkömmlichen Form und bleibt in den hier vorliegenden Beispielen unberücksichtigt. Als einziger neuer Inhalt im Lehrplan ist unter 10.1 'Potenzen und Wurzeln' die Berechnung von Exponenten mit dem Logarithmus aufgeführt und kann somit in der Prüfung abgefragt werden. Parabeln der Form $y = ax^2$ sind nicht mehr im Lehrplan enthalten.

Neue Aufgabentypen können als Unterpunkte einer (herkömmlichen) Aufgabe oder als eigenständige Aufgabe(n) in der Prüfung formuliert werden. Es handelt sich im Wesentlichen um folgende Aufgabentypen:

- Aufgaben, die mathematisches Argumentieren fordern (K1 der allgemeinen Kompetenzen der KMK-Standards 2004)
- Multiple-choice-Aufgaben („passives“ Begründen)
- Fehleraufgaben
- Überbestimmte Aufgaben
- Aufgaben, die offen sind für unterschiedliche Lösungswege („Probleme mathematisch lösen“)
- Schaubilder zuordnen und Informationen aus Schaubildern entnehmen

Fundstellen von Übungsaufgaben

- Aufgaben aus dem SINUS-Programm (www.sinus-transfer.de)
- SMART
- Beispielaufgaben aus PISA
- Entsprechende Literatur – Beispiele:
  - Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Hauptschulabschluss, Beschluss der KMK vom 15.10.2004
  - Bildungsstandards Mathematik: konkret. Sekundarstufe I: Aufgabenbeispiele, Unterrichtsanregungen, Fortbildungsideen
  - Büchter Andreas, Leuders Timo: Mathematikaufgaben selbst entwickeln
  - Herget Wilfried, u. a.: Produktive Aufgaben für den Mathematikunterricht in der Sekundarstufe I
  - Herget Wilfried, Scholz Dietmar: Die etwas andere Aufgabe
  - Hessisches Landesinstitut für Pädagogik (Hrsg.): PISA weitergedacht, Grundbildungsorientierte Aufgaben für den Mathematikunterricht
  - Ulm Volker: Mathematikunterricht in der Sekundarstufe für individuelle Lernwege öffnen
  - Zeitschrift "mathematik lehren", Teilbereich "Mathe-Welt"

Aufgabenbeispiele mit Zusatzhinweisen

Aufgabe 1

Plutonium 241 hat eine Halbwertzeit von 13 Jahren. Wie viele Jahre dauert es, bis von ursprünglich 320 g dieses radioaktiven Stoffes nur noch 10 g vorhanden sind?

Lösungshinweise und Lösung:

Anzahl der Jahre:

$10 = 320 \cdot 0{,}5^n$

$0{,}03125 = 0{,}5^n$

$n = \log_{0{,}5} 0{,}03125$

$n = 5$

$\Rightarrow\ 13 \cdot 5 = 65$

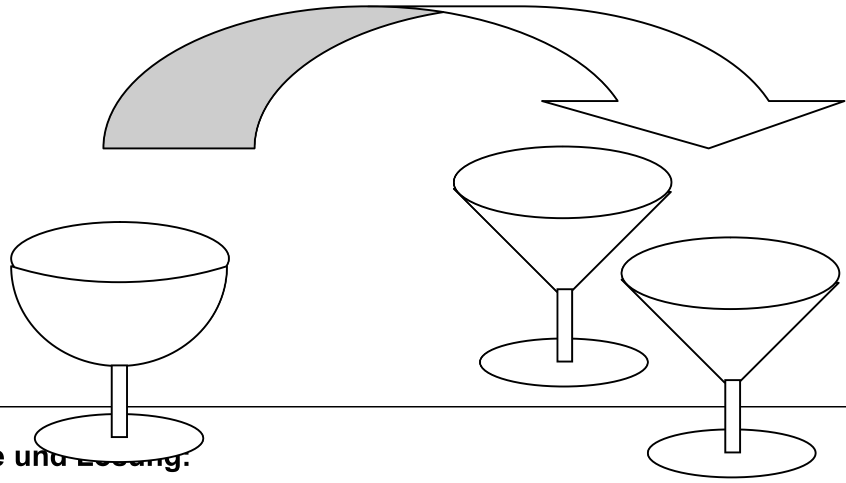
Einordnung der Aufgabe:

10.1 Potenzen und Wurzeln

Mit dem Logarithmus Exponenten berechnen

Aufgabe 2

Der Inhalt eines randvollen halbkugelförmigen Glases mit dem Radius r = 4 cm passt genau in zwei kegelförmige Gläser mit dem gleichen Öffnungsdurchmesser.
Welche Höhe (ohne Stiel) haben diese beiden Gläser? Begründe deine Entscheidung.



Lösungshinweise und Lösung:

Da das Halbkugelvolumen doppelt so groß wie das Kegelvolumen ist, gilt:

⇒ Die Kegelhöhe h_K muss dem Radius r entsprechen.

Radius $r = h_K = 4$ cm

oder:

Höhe h_K in cm:

$V_{Halbkugel} = \frac{2}{3} \cdot r \cdot r \cdot r \cdot 3{,}14$

$V_{Kegel} = \frac{1}{3} \cdot r \cdot r \cdot 3{,}14 \cdot h_K$

Da $V_{Halbkugel} = 2 \cdot V_{Kegel}$ gilt: $h_K = r = 4$ cm

Einordnung der Aufgabe:

10.2 Geometrie

Mathematisch argumentieren

Aufgabe 3

Bei einer zentrischen Streckung mit dem Streckungsfaktor k = 3 gilt:

- ☐ die Länge einer Strecke verdreifacht sich
- ☐ ein Flächeninhalt versechsfacht sich
- ☐ ein Kugelvolumen von 10 cm³ vergrößert sich auf 270 cm³
- ☐ ein Winkel von 15° verdreifacht sich auf 45°

Lösungshinweise und Lösung:

Bei einer zentrischen Streckung mit dem Streckungsfaktor k = 3 gilt:

- ☒ die Länge einer Strecke verdreifacht sich
- ☐ ein Flächeninhalt versechsfacht sich
- ☒ ein Kugelvolumen von 10 cm³ vergrößert sich auf 270 cm³
- ☐ ein Winkel von 15° verdreifacht sich auf 45°

Einordnung der Aufgabe:

10.2 Geometrie
Multiple choice

Bei Multiple-choice-Aufgaben werden nur bei komplett richtiger Lösung Punkte vergeben.

Aufgabe 4

Der Graph der linearen Funktion y = 4x + t (t > 0)

- ☐ geht immer durch den ersten, zweiten und dritten Quadranten
- ☐ geht immer durch den zweiten, dritten und vierten Quadranten
- ☐ kann die x-Achse im Punkt P(3/0) schneiden
- ☐ steht senkrecht zum Graphen der Funktion y = – 0,25 x – 7

Lösungshinweise und Lösung:

Der Graph der linearen Funktion y = 4x + t (t > 0)

- ☒ geht immer durch den ersten, zweiten und dritten Quadranten
- ☐ geht immer durch den zweiten, dritten und vierten Quadranten
- ☐ kann die x-Achse im Punkt P(3/0) schneiden
- ☒ steht senkrecht zum Graphen der Funktion y = – 0,25 x – 7

Einordnung der Aufgabe:

10.4 Funktionen und Gleichungen
Multiple choice

Bei Multiple-choice-Aufgaben werden nur bei komplett richtiger Lösung Punkte vergeben.

Aufgabe 5

Wahrscheinlichkeiten im Leben	
Sechs Richtige im Lotto	1 : 13 983 816
Tod durch einen Blitzschlag	1 : 20 000 000
Gewinn des Lottojackpots	1 : 139 838 160

Welche der folgenden Aussagen stimmen mit dem Schaubild überein?

- ☐ Jede Woche gewinnen 13 983 816 Personen im Lotto
- ☐ Die Wahrscheinlichkeit, von einem Blitz erschlagen zu werden, beträgt $0{,}5 \cdot 10^{-7}$
- ☐ Die Wahrscheinlichkeit vom Blitz erschlagen zu werden ist ca. 7 Mal höher als den Jackpot im Lotto zu gewinnen
- ☐ Von 13 983 816 Lottospielern hat immer ein Spieler sechs Richtige

Lösungshinweise und Lösung:

- ☐ Jede Woche gewinnen 13 983 816 Personen im Lotto
- ☒ Die Wahrscheinlichkeit, von einem Blitz erschlagen zu werden, beträgt $0{,}5 \cdot 10^{-7}$
- ☒ Die Wahrscheinlichkeit vom Blitz erschlagen zu werden ist ca. 7 Mal höher als den Jackpot im Lotto zu gewinnen
- ☐ Von 13 983 816 Lottospielern hat immer ein Spieler sechs Richtige

Einordnung der Aufgabe:

10.5 Beschreibende Statistik und Wahrscheinlichkeit
Multiple choice

Bei Multiple-choice-Aufgaben werden nur bei komplett richtiger Lösung Punkte vergeben.

Aufgabe 6

Finde die Fehler, kreise sie ein und schreibe diese Zeile richtig.

Löse die Gleichung: $\frac{24}{4-2x} - \frac{6}{2x-4} = 3$

Zeile 1 Definitionsbereich: $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

Zeile 2 $24\,(2x-4) - 6\,(4-2x) = 3\,(4-2x)\,(2x-4)$

Zeile 3 $24\,(2x-4) - 6\,(4-2x) = 3\,(8x + 16 - 4x^2 + 8x)$

Zeile 4 $48x - 96 - 24 + 12x = 24x + 48 - 12x^2 + 24x$

Zeile 5 $12x^2 + 12x = 168$

Zeile 6 $x^2 + x = 14$

Zeile 7 $x^2 + x + 1 = 14 + 1$

Zeile 8 $(x + 1)^2 = 15$

Zeile 9 $x_1 = -1 + \sqrt{15} \approx 2{,}9$

Zeile 10 $x_2 = -1 - \sqrt{15} \approx -4{,}9$

Zeile11 $L = \{-4{,}9;\ 2{,}9\}$

Lösungshinweise und Lösung:

Zeile 3: $24\,(2x-4) - 6\,(4-2x) = 3\,(8x + 16 - 4x^2 + 8x)$

$24\,(2x-4) - 6\,(4-2x) = 3\,(8x - 16 - 4x^2 + 8x)$

Zeile 8: $x^2 + x + 1 = 14 + 1$

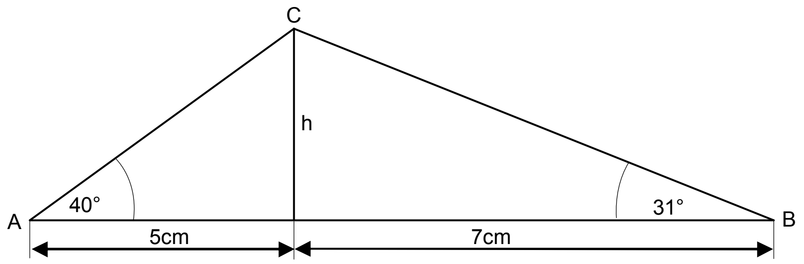
$x^2 + x + 0{,}5^2 = 14 + 0{,}5^2$ (falsche quadratische Ergänzung - keine Lösung möglich)

Einordnung der Aufgabe:

10.4 Funktionen und Gleichungen
Fehleraufgabe

Aufgabe 7

In einer Probearbeit hat Heinz die folgende Aufgabe so gelöst:
Berechne die Höhe h im Dreieck ABC.



Höhe h in cm:

$h^2 = p \cdot q$
$h^2 = 5 \cdot 7$
$h^2 = 35$
$h \approx 5{,}9$

Heinz bekam auf diese Lösung keine Punkte.

Erkläre und finde eine geeignete Lösung.

Lösungshinweise und Lösung:

Dreieck ABC ist nicht rechtwinklig, deshalb kann der Höhensatz nicht angewandt werden.

Mögliche richtige Lösung:

Höhe h in cm:

$\tan 40° = \frac{h}{5}$

$h = \tan 40° \cdot 5 \approx 4{,}2$

Einordnung der Aufgabe:

10.2 Geometrie; 10.3 Trigonometrie
Fehleraufgabe

Aufgabe 8

a) Wie viele Erwerbstätige wird es im Jahr 2015 im Dienstleistungsbereich voraussichtlich geben, wenn die Veränderungsrate gleich bleibt?

b) Um wie viel Prozent veränderte sich die Zahl der Erwerbstätigen vom Jahr 1997 bis zum Jahr 2003?

Lösungshinweise und Lösung:

a) Voraussichtliche Zahl der Erwerbstätigen im Jahr 2015:

$26{,}9\ \text{Mio} \cdot 1{,}09^2 \approx 32\ \text{Mio}$

b) Veränderung in Prozent:

$37{,}2\ \text{Mio} = 100\ \%$

$38{,}2\ \text{Mio} \approx 102{,}7\ \%$

$\Rightarrow$ Steigerung um 2,7 %

Einordnung der Aufgabe:

10.1 Potenzen und Wurzeln

Überbestimmte Aufgabe

Aufgabe 9

Faltet man ein Blatt Papier viermal jeweils auf die Hälfte zusammen, so ist das zusammengefaltete Papier etwa 1,5 mm dick. Wie dick wäre dieses Blatt Papier, wenn man es auf diese Art 15-mal falten könnte. Gib das Ergebnis in einer geeigneten Einheit an.

Lösungshinweise und Lösung:

Mit jeder Faltung verdoppelt sich die Dicke des Papiers. Nach 4 Faltungen ist es 1,5 mm, nach 5 Faltungen 3 mm, nach x Faltungen 2^{x-4} mm dick.

Dicke nach 15 Faltungen:
$1{,}5 \cdot 2^{15-4}$ mm $= 1{,}5 \cdot 2^{11}$ mm $= 3072$ mm $= 3{,}072$ m

Auch alle anderen richtigen Lösungswege führen zur vollen Punktzahl.

Einordnung der Aufgabe:

10.1 Potenzen und Wurzeln
Offenheit der Lösungswege

Aufgabe 10

Ein Würfel wird zweimal geworfen. Die erste Augenzahl ergibt die Zehnerstelle, die zweite Augenzahl ergibt die Einerstelle einer zweistelligen Zahl.

a) Wie viele verschiedene Zahlen können so gebildet werden?
b) Was ist das arithmetische Mittel aller möglichen Zahlen?
c) Was ist das arithmetische Mittel, wenn der Würfel nun dreimal geworfen wird und dadurch dreistellige Zahlen entstehen?
d) Wie groß ist der Wert der Summe aller dadurch entstandenen dreistelligen Zahlen?

Lösungshinweise und Lösung:

a) 36 Zahlen, weil $6 \cdot 6 = 36$

b) 38,5; geeignete Strategie wäre eine Pärchenbildung aus 11 und 66; 12 und 65; usw.
Die Summe der Pärchen beträgt immer 77, also ist die Hälfte davon das arithmetische Mittel.

c) Strategie von b wird weitergeführt: $111 + 666 = 777$; $112 + 665 = 777$; usw.
Wieder die Hälfte, also 388,5 ist das arithmetische Mittel

d) Multiplikation des Wertes eines der 108 jeweiligen Zahlenpärchen ($111 + 666$; $112 + 665$; …) mit der Anzahl der Pärchen (108) also $777 \cdot 108 = 83916$

Wichtig: Vorteilhaftes Rechnen, Strategie finden, Übertragen einer gefundenen Strategie auf einen mathematisch ähnlichen Sachverhalt.

Einordnung der Aufgabe:

10.5 Beschreibende Statistik und Wahrscheinlichkeit
Offenheit der Lösungswege

Aufgabe 11

Vermindert man den Zähler und Nenner eines Bruches jeweils um 5, so erhält man $\frac{1}{5}$.

Vermehrt man Zähler und Nenner des gleichen Bruches jeweils um 7, so erhält man $\frac{1}{2}$.

Wie heißt der ursprüngliche Bruch?

Lösungshinweise und Lösung:

1. Möglichkeit: Gleichungssystem

   I. $\frac{x-5}{y-5} = \frac{1}{5}$ II. $\frac{x+7}{y+7} = \frac{1}{2}$

   x = 9 y = 25

2. Möglichkeit: Planvolles Probieren

   Der Bruch $\frac{1}{5}$ wird mehrmals erweitert auf die Werte $\frac{2}{10}$, $\frac{3}{15}$, …

   $\frac{1}{5} \rightarrow \frac{6}{10} \rightarrow \frac{13}{17} \neq \frac{1}{2}$

   $\frac{2}{10} \rightarrow \frac{7}{15} \rightarrow \frac{14}{22} \neq \frac{1}{2}$

   $\frac{3}{15} \rightarrow \frac{8}{20} \rightarrow \frac{15}{27} \neq \frac{1}{2}$

   $\frac{4}{20} \rightarrow \frac{9}{25} \rightarrow \frac{16}{32} = \frac{1}{2}$ → Lösung ist der Bruch $\frac{9}{25}$

Einordnung der Aufgabe:

10.4 Funktionen und Gleichungen
Offenheit der Lösungswege

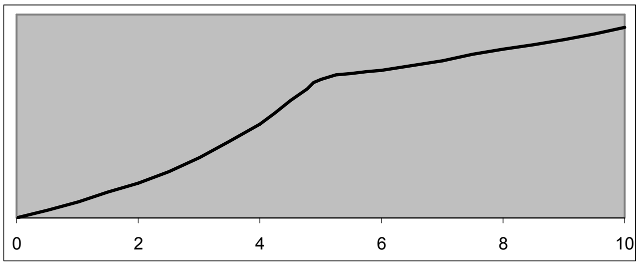
Die Lösung muss nicht zwingend über ein Gleichungssystem erfolgen, jedes nachvollziehbare Ausprobieren ist ebenfalls zu akzeptieren.

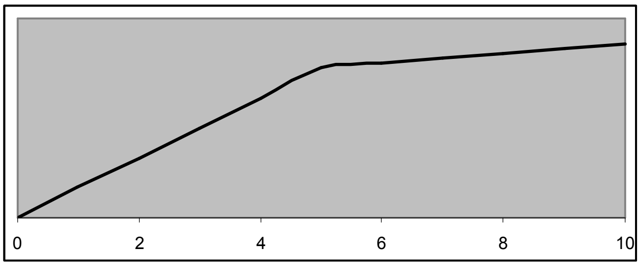
Aufgabe 12

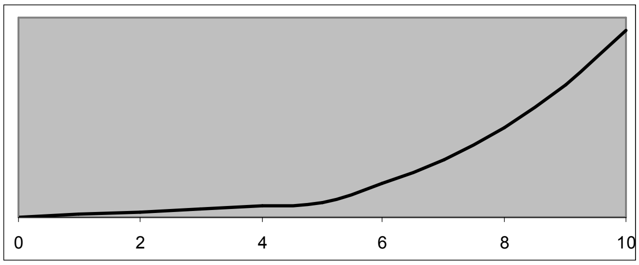
Eine Bakterienkultur (Ausgangswert 10 Mengeneinheiten) vermehrt sich in den ersten fünf Tagen täglich um 30%. Nach Zugabe eines Wirkstoffs vermehren sich die Bakterien in den nächsten fünf Tagen nur noch um 5%.

a) Wie viele Mengeneinheiten sind nach 10 Tagen erreicht?

b) Welcher der abgebildeten Graphen stellt die oben beschriebene Entwicklung dar?







c) Um wie viel Prozent hat sich die Menge der Bakterien erhöht?

Lösungshinweise und Lösung:

a) Anzahl der Mengeneinheiten nach 10 Tagen:

$10 \cdot 1{,}3^5 \cdot 1{,}05^5 \approx 47$

b) Die erste Grafik stellt den Sachverhalt richtig dar.

c) Erhöhung der Menge in Prozent:

10 ME ≙ 100 %

47 ME ≙ 470 % $\Rightarrow$ Erhöhung um 370 %

Einordnung der Aufgabe:

10.1 Potenzen und Wurzeln

Schaubilder zuordnen